Реферат цикла работ
“Гомологии групп и алгебр”

Сергей О. Иванов

Данное название цикла работ очень широко, но тем не менее оно не достаточно широко, чтобы покрыть темы работ, которые я выставляю для этой премии. Причиной этого является тот факт, что эти работы нельзя в полном смысле этого слова назвать циклом работ, так как они не объединены единой целью. Единственное, что их объединяет, — это единая техника, а именно гомологическая техника. Более широким названием, которое покрывало бы все темы работ, было бы название “Гомологическая алгебра в теории групп и теории алгебр”, но оно мне показалось слишком длинным.

Ниже я привожу аннотации к каждой из четырех работ, которые я выдвигаю на премию СПбМО “Молодому математику”.

1. Стабильная Калаби-Яу размерность самоинъективных алгебр конечного типа представления.

Статья опубликована в журнале ’Journal of algebra’ в соавторстве с Юрием Волковым:

[1] S.O. Ivanov and Y.V. Volkov, Stable Calabi—Yau dimension of self-injective algebras of finite type, *Journal of Algebra.* **413** (2014), 72–99.

И выложена на архиве: http://arxiv.org/abs/1212.2619.

М. Концевич определил понятие Калаби-Яу размерности триангулированной категории над полем. Он это сделал для того, чтобы переформулировать свойства Калаби-Яу многообразий на языке триангулированных категорий. Оказалось, что этот язык полезен и для многих других областей, где возникают триангулированные категории. Эрдман и Сковронски определили и исследовали это понятие для случая стабильной категории модулей конечномерной самоинъективной алгебры. Калаби-Яу размерность стабильной категории модулей над алгеброй они назвали стабильной Калаби-Яу размерностью этой алгебры.

В данной работе было введено и исследовано понятие стабильно внутреннего автоморфизма. Была изучена его связь со спектроидом неприводимых модулей алгебры. Введение этого понятия позволило переформулировать понятие стабильной Калаби-Яу размерности на языке бимодульных сизигий. При помощи этого понятия вычисление стабильной Калаби-Яу размерности было сведено к вычислению бимодульных резольвент. До этого стабильная Калаби-Яу размерность была вычислена в тех случаях, когда она маленькая, или для случаев алгебр с некоторыми жесткими гомологическими условиями. Разработанный метод позволяет вычислять стабильную Калаби-Яу размерность без каких-либо ограничений на алгебру. При помощи этого метода было завершено вычисление стабильных Калаби-Яу размерностей для самоинъективных алгебр конечного типа. Это вычисление было начато K. Erdmann, A. Skowrónski, J. Białkowski and A. Dugas ранее, и они вычислили стабильную Калаби-Яу размерность для многих алгебр, но для наиболее сложных алгебр их методы не работали. Мы, используя разработанный метод, завершили вычисление во всех оставшихся случаях.

2. Высшие пределы и теории гомологий.

Статья написана в соавторстве с Романом Михайловым, принята в журнал 'Journal of Pure and Applied algebra', и выложена на архиве: http://arxiv.org/abs/1309.4920.

В 1989 году Квиллен доказал, что $2n$-ые циклические гомологии алгебры над полем характеристики 0 могут быть представлены, как пределы некоторых простых функторов из категории копредставлений алгебры в категорию абелевых групп. Позднее Р.Михайловым вместе с соавторами было доказано, что аналогичные представления имеются для $2n$-ых гомологий группы и для самых старших ненулевых производных функторов тензорной, внешней и разделенной степени. Наиболее интригующим моментом в этой теории является то, что различные теории гомологи представляются совершенно без гомологической алгебры.

В данной работе была развита данная теория в нескольких направлениях:

- Были получены формулы, выражающие четные гомологии Хохшильда алгебры над произвольным полем через пределы по категории копредставлений, аналогичные формулам Квиллена.

- Подход был расширен на случай высших (производных) пределов. Это позволило сильно расширить применение этой теории, так как при помощи высших пределов уже можно выразить все гомологии группы, циклические и Хохшильдовы гомологии алгебры, а не только четные, и все производные функторы тензорной, внешней и разделенной степени, а не только самые старшие ненулевые.

- Были получены рекуррентные соотношения для теории гомологий группы, которые выражают гомологии с более высоким индексом через пределы от гомологий с более низким индексом. Эта часть работы выглядит очень интересно, так формулировка её допускает обобщения на очень общий случай (категории с комонадой и расслоенными произведениями). Если эти обобщения верны, то это позволило бы выразить на языке пределов K-теорию и увидеть связи с другими теориями такие, как характер Черна.

- Были вычислены пределы от высших модулей соотношений.

3. Проблема Боусфилда для класса метабелевых групп.

Статья написана в соавторстве с Романом Михайловым, выложена на архиве http://arxiv.org/abs/1407.2959 и подана в журнал 'Advances In Mathematics'.

Пусть R либо подкольцо в $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}/n$. Боусфилд и Кан ввели понятие R-локализации пространства. Это эндофунктор на гомотопической категории топологических пространств $E_R : \mathsf{hTop} \to \mathsf{hTop}$, вместе с естественным преобразованием $X \to E_R(X)$, котрое является универсальной притягивающей $H_*(-, R)$-эквивалентностью. Если говорить на языке модельных категорий, то это фибрантная замена в локализации Боуфилда категории топологических пространств по отношению к классу $H_*(-, R)$-эквивалентностей. В категории групп понятию R-локализации соответствует понятие HR-локализации группы. Боусфиелд поставил следующую проблему: правда ли, что R-пополнение группы

G совпадает с HR-локализацией G, если группа G конечно представима и $R = \mathbb{Q}$ или $R = \mathbb{Z}/n$.

В этой статье мы даём положительный ответ на этот вопрос для случая метабелевых групп. Этот вопрос легко сводится к следующему. Правда ли, что естественный гомоморфизм в R-пополнение $G \to \hat{G}_R$ индуцирует эпиморфизм на вторых гомологиях $H_2(G, R) \to H_2(\hat{G}_R, R)$. В процессе доказательства этого утверждения была развита техника, при помощи которой были доказаны еще некоторые результаты. А именно было доказано, что для метабелевой конечно представимой группы G имеет место изоморфизм

$$H_2(\hat{G}, \mathbb{Z}/n) \cong \varprojlim\ H_2(G/\gamma_i(G), \mathbb{Z}/n),$$

где $\hat{G}$ — пронильпотентное пополнение G, и изоморфизм

$$H_2(\hat{G}_p, \mathbb{Z}/p) \cong H_2^{\text{cont}}(\hat{G}_p, \mathbb{Z}/p), \tag{1}$$

где $\hat{G}_p$ — p-проконечное пополнение G и H_*^{cont} — группы непрерывных гомологий. Изоморфизм (1) интересен тем, то он был выдвинут в качестве гипотезы в статье G. A. Fernandez-Alcober, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, P. Symonds '*Comparison of the Discrete and Continuous Cohomology Groups of a Pro-p-Group*' (http://arxiv.org/abs/math/0701737) для случая произвольной конечно представимой про-p-группы. Таким образом, наша работа вносит вклад в изучение двух открытых проблем.

4. О когомологиях Хохшильда группы кватернионов порядка восемь в характеристике два.

Статья написана в соавторстве с Гоудонг Чжу, Александром Ивановым и Юрием Волковым, выложена на архиве http://arxiv.org/abs/1407.4341 и подана в журнал 'Homology Homotopy And Applications'.

В отличие от когомологий группы, когомологии Хохшильда алгебры имеют большое количество дополнительной структуры, которая имеет ключевое значение для физики и струнной топологии. В частности, на когомологиях Хохшильда есть структура алгебры Баталина-Вилковойского (структура BV-алгебры), которая включает в себя три структуры: структуру градуированной алгебры, структуру градуированной алгебры Ли, и дифференциал степени -1, которые согласованны посредством некоторых соотношений. Эта структура очень интересна с теоретической точки зрения, но она плохо поддаётся вычислению даже для достаточно простых примеров. Известно всего несколько примеров, где она полностью вычислена.

Гоудонг Чжу предложил метод, при помощи которого можно вычислять эту структуру для достаточно сложных алгебр. При помощи этого метода совместно с Гоудонг Чжу, Александром Ивановым и Юрием Волковым была вычислена структура BV-алгебры на когомологиях Хохшильда групповой алгебры группы кватернионнов $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ над полем K характеристики 2. Для полей других характеристик алгебра когомологий Хохшильда тривиальна. Сама алгебра когомологий Хохшильда без BV-структуры для KQ_8 была вычислена А.И. Генераловым в 2007 году.