Цикл работ “Точные функции Беллмана”.

Метод функции Беллмана — это аналитическая техника, позволяющая решать экстремальные задачи, обладающие определенным самоподобием. Использование идей оптимального управления для решения экстремальных задач теории вероятностей было впервые осуществлено Буркхольдером (начало 80-х), задач гармонического анализа — Вольбергом, Назаровым и Трейлем (середина 90-х). В последующие 20 лет метод активно развивался, с помощью него решено много конкретных задач анализа. Цикл работ П. Б. Затицкого и Д. М. Столярова как объединяет многие похожие задачи в единую теорию, так и расширяет горизонты его применения.

Совместная с В. И. Васюниным, П. Иванисвили и Н. Н. Осиповым работа [1] дает решение задачи о нахождении максимума интегрального функционала $\int f(\varphi)$ на шаре пространства BMO. Решение такой задачи позволяет находить точные константы в различных неравенствах о функциях на пространстве BMO. Некоторые из них были решены ранее Васюниным и Славиным. Тем не менее, работа не есть простое обобщение, в ней описано поведение новых типов сингулярностей градиента функции Беллмана (так называемых троллейбусов) и указан алгоритм общего решения задачи. Эти наработки уже были несколько раз использованы другими исследователями. См. также краткое сообщение [2].

В совместной с В. И. Васюниным, Л. Славиным и А. А. Логуновым статье [3] наработанная техника применена к задаче о слабых определениях пространства BMO. Эта задача, по сути, была решена еще Джоном в начале 60-х. Тем не менее, техника функции Беллмана позволяет уточнить его результат.

На самом деле, методы статьи [1] позволяют почти без изменений работать с более широким классом пространств (а не только с пространством BMO). В совместной с В. И. Васюниным, П. Иванисвили и Н. Н. Осиповым работе [4] было дано определение класса медленно осциллирующих функций. Такой общий класс включает в себя как пространство BMO, так и классы весов Макенхаупта, классы весов Геринга, и др. классы гармонического анализа. Задачу о максимуме интегрального функционала можно (и нужно) решать на таком классе. Надо лишь заменить “кустарные” формулы работы [1] на более общие. Оказывается, что в такой общности, в поведении функции Беллмана играют основную роль величины элементарной дифференциальной геометрии (кривизна и кручение кривой граничных данных).

Эта “дифференциально геометрическая” техника продемонстрирована в совместной с П. Иванисвили работе [5]. Функция Беллмана позволяет передоказать классическое неравенство Ханнера. На самом деле, решена более общая экстремальная задача, позволяющая оценивать линейные комбинации функций пространства L_p. Кроме того, метод функции Беллмана позволяет не угадать решение (что было сделано Бёрлингом еще в 45 году), а легко решить, привлекая простые соображения дифференциальной геометрии, более общую экстремальную задачу.

Работа [6] представляет собой кульминацию цикла. В ней объяснено, почему метод функции Беллмана работает. Основное свойство функции Беллмана состоит в том, что она позволяет свести исходную бесконечномерную (и зачастую некомпактную) экстремальную задачу к конечномерной (обычно, двух, трех, редко четырехмерной) задаче. Для этого используется определенная теорема двойственности. Все предыдущие работы использовали ее как “черный ящик” (то есть, для каждой конкретной задачи двойственность использовалась, чтобы *угадать* решение, пользуясь какими-то симметриями задачи, после чего уже проверялось по каким-то косвенным признакам, что угаданное решение есть действительно функция Беллмана). В работе [6] дано общее доказательство теоремы двойственности (функция Беллмана для интегрального функционала есть минимальная локально вогнутая функция на некоторой области в плоскости). Оказывается, существует третья экстремальная задача “соединяющая” две исходные. Эта задача ставится на классе мартингалов, блуждающих в области, и выходящих на выпуклую часть границы. Интересно, но такой класс мартингалов (а также локально вогнутые функции), по-видимому, никем не изучен. В работе также дается абстрактная теория таких мартингалов. Кроме того, мартингальный подход позволяет также получать точные оценки для монотонных перестановок функций из классов медленной осцилляции, что объединяет и обобщает многие старые результаты в этом направлении.

Наконец, в совместной с В. И. Васюниным работе [7] разработано приложение мартингальной техники работы [6] к задачам оценок монотонных перестановок функций из диадических классов медленной осцилляции.

Список литературы

[1] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on* BMO, http://arxiv.org/abs/1205.7018, to appear in Transactions AMS.

[2] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *On Bellman function for extremal problems in* BMO, Comptes Rendus Mathematique **350**:11, Pages 561–564, 2012.

[3] A. A. Logunov, L. Slavin, D. M. Stolyarov, V. Vasyunin and P. B. Zatitskiy, *Weak integral conditions for BMO*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 2913–2926.

[4] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Sharp estimates of integral functionals on classes of functions with small mean oscillation*, http://arxiv.org/abs/1412.4749, submitted.

[5] П. Б. Затицкий, П. Иванисвили, Д. М. Столяров, *Беллман против Бёрлинга: точные оценки констант равномерной выпуклости пространств* L_p, Алгебра и Анализ **27**:2 (2015).

[6] D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*, http://arxiv.org/abs/1412.5350, submitted.

[7] D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Monotonic rearrangements of functions with small mean oscillation*, http://arxiv.org/abs/1506.00502, submitted.