Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. В. Платонова, Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2015, том 442, 101–117

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 89.223.47.198
9 июня 2019 г., 10:40:02

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

М. В. Платонова

СИММЕТРИЧНЫЕ α-УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С НЕЦЕЛЫМ $\alpha > 2$ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Введение

Хорошо известно, что характеристическая функция $f(p)$ симметричного устойчивого распределения с показателем $\alpha \in (0,2]$ имеет вид

$$f(p) = e^{-C|p|^\alpha}, \tag{1}$$

где C – положительная константа. При $\alpha > 2$ функция $f(p)$ уже не является характеристической функцией никакого вероятностного распределения, так как в этом случае $f''(0) = 0$ и, значит, обратное преобразование Фурье функции $f(p)$ является функцией переменного знака.

В литературе рассматривались вопросы обобщения понятия α-устойчивого распределения на случай $\alpha > 2$. В частности, в теории псевдопроцессов (см. [5, 6]) рассматриваются так называемые "обобщенные" α-устойчивые случайные величины, но под этим понимаются просто обратные преобразования Фурье функций вида (1), и не делается никакой попытки придать этим объектам вероятностный смысл.

Далее, в [1, 8, 9] был предложен уже вероятностный подход к определению обобщения случайной симметричной устойчивой величины при $\alpha > 2$, основанный на использовании теории обобщенных функций. Именно, симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция, действующая на основную функцию как

$$(l,\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}\, \varphi * \omega_\varepsilon\, (\xi_\varepsilon)\,, \tag{2}$$

Ключевые слова: эволюционное уравнение, предельная теорема, устойчивое распределение.

Работа автора выполнена при поддержке Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026, а также при поддержке ОАО "Газпром нефть".

где ω_ε – специальным образом выбранное семейство быстро осциллирующих функций,

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} x\,\nu(dx),$$

а ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\mathbf{E}\,\nu(dx) = \frac{C_\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}$. Если $\alpha \in (4,6)$, преобразование Фурье устойчивого распределения, определенного в (2), имеет вид (1), то есть такой же вид, как и для классических случайных симметричных устойчивых величин. При $\alpha \in (2,4)$ метод, предложенный в [9], давал уже другой, существенно менее естественный, вид преобразования Фурье, именно,

$$\exp\left(c_0\,|p|^\alpha - c_1 p^4\right), \tag{3}$$

где c_0, c_1 – положительные константы. Дальнейшее увеличение числа α не давало ничего качественно нового, именно, при

$$\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+2)$$

преобразование Фурье определенного таким образом симметричного устойчивого распределения имеет вид (1), а при $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m-2, 4m)$ имеет вид $\exp\left(c_0\,|p|^\alpha - c_1 p^{4m}\right)$.

В данной работе мы будем рассматривать не одномерные симметричные устойчивые случайные величины, а аналоги симметричных устойчивых процессов при нецелых $\alpha \in (2,4)\cup(4,6)$. Интерес к процессам связан в нашем случае с тем, что через математические ожидания функционалов от таких процессов выражаются решения задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений математической физики. Как будет видно из доказательства, случай $\alpha \in (2,4)$ легко обобщается на случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m-2, 4m)$, а случай $\alpha \in (4,6)$ также легко обобщается на случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+2)$ (при этом мы рассматриваем только нецелые α).

В случае $\alpha \in (4,6)$ в настоящей работе будет в основном использоваться метод работы [9]. Для случая $\alpha \in (2,4)$ нами будет предложен другой метод, основанный на использовании теории функций комплексной переменной. Следует отметить, что данный метод обеспечивает нам "правильный" вид (1) преобразования Фурье уже при всех α.

Итак, рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha u, \tag{4}$$

где $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}^\alpha_+ + \mathcal{D}^\alpha_-$ – оператор дробного дифференцирования (см. [7], с. 85), а константа $c_\alpha = \Gamma(-\alpha)$, если $\alpha \in (4,6)$, и $c_\alpha = -\Gamma(-\alpha)$, если $\alpha \in (2,4)$. Для уравнения (4) рассмотрим задачу Коши

$$u\,(0,x) = \varphi\,(x)\,. \tag{5}$$

Если $0 < \alpha < 1$ или $1 < \alpha < 2$, то решение $(4)\,,(5)$ представляется в виде

$$u\,(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\,(x - \xi_\alpha\,(t))\,, \tag{6}$$

где $\xi_\alpha\,(t)$ – процесс Леви со спектральной мерой Леви $\Lambda\,(dx) = \frac{C_\alpha\,dx}{|x|^{1+\alpha}}$.

При $\alpha > 2$ такое представление невозможно, так как фундаментальное решение уравнения (4) не является вероятностной мерой.

Построим сначала вероятностное представление для решения задачи Коши (4), (5), если $\alpha \in (4,6)$.

Пусть $\nu\,(dt,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[\,0,T\,] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt \cdot \Lambda\,(dx) = \frac{dt \cdot dx}{|x|^{1+\alpha}}. \tag{7}$$

Обозначим $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon\,(t)$ обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по пуассоновской мере ν

$$\xi_\varepsilon\,(t) = \int\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_\varepsilon}\!\!\int x\nu(ds,dx). \tag{8}$$

Далее, определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon\,(t,x) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega^t_\varepsilon\right)(x - \xi_\varepsilon\,(t))\right],$$

где

$$\widehat{\omega}^t_\varepsilon\,(p) = \exp\Big(t\int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon}\Big(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\Big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big). \tag{9}$$

В настоящей работе показано, что если начальная функция φ принадлежит классу $W^{l+6}_2\,(\mathbf{R})$ при некотором $l > 0$, то функция $u_\varepsilon\,(t,x)$ по норме пространства $W^l_2\,(\mathbf{R})$ приближает решение задачи Коши (4), (5).

Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (4), (5)

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)\left(x - \xi_\varepsilon(t)\right)\right].$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (2,4)$. Обозначим $\mathbf{R}_\varepsilon^+ = \mathbf{R}^+ \setminus (0,\varepsilon)$, $\mathbf{R}_\varepsilon^- = \mathbf{R}^- \setminus (-\varepsilon, 0)$. Для $\varepsilon > 0$ через $\xi^\pm{}_\varepsilon(t)$ обозначим случайные процессы (интегралы по пуассоновской мере ν)

$$\xi_\varepsilon^\pm(t) = \iint\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_\varepsilon^\pm} x\,\nu(ds,dx). \tag{10}$$

Через $P_\pm$ обозначим проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H_+^2(\{\operatorname{Im} z > 0\})$ и $H_-^2(\{\operatorname{Im} z < 0\})$ соответственно. Хорошо известно, что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H_+^2(\{\operatorname{Im} z > 0\})$ лежит на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H_-^2(\{\operatorname{Im} z < 0\})$ – на положительной оси. Для $M > 0$ определим проектор P_M в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, носитель преобразования Фурье которых содержится в отрезке $[-M, M]$. Обозначим действие оператора P_M на функцию φ через φ_M.

Положим $\sigma_+ = \exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)$ и $\sigma_- = \exp\left(-\frac{i\pi}{\alpha}\right)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней. Мы будем рассматривать четыре комплекснозначных процесса $\sigma_+\xi^\pm{}_\varepsilon(t)$ и $\sigma_-\xi^\pm{}_\varepsilon(t)$. Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, именно $M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[&\left(\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t\right)\left(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)\right) \\ &+ \left(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t\right)\left(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t)\right)\Big], \end{aligned}$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\left(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+px)^k}{k!}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right)\exp\left(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\left(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_-px)^k}{k!}\right)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\right), \\ \text{если } p \geqslant 0, \\ \exp\left(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_-px)^k}{k!}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right)\exp\left(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\left(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+px)^k}{k!}\right)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\right), \\ \text{если } p < 0, \end{cases} \tag{11}$$

В настоящей работе показано, что если начальная функция принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l>0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение задачи Коши (4), (5). Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (4), (5)

$$u(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\left[\left(\varphi_M^+*\omega_\varepsilon^t\right)\left(x-\sigma_-\xi_\varepsilon^+(t)-\sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)\right)\right.$$
$$\left.+\left(\varphi_M^-*\omega_\varepsilon^t\right)\left(x-\sigma_+\xi_\varepsilon^+(t)-\sigma_-\xi_\varepsilon^-(t)\right)\right].$$

Обозначения

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{ipx}dx, \tag{12}$$

соответственно, обратное преобразование Фурье определяется как

$$\varphi(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(x)\,e^{-ipx}\,dx.$$

Для любого $M>0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M,M]$. Именно, для $\psi\in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M\psi(x)=\psi*D_M(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\widehat{\psi}(p)\,e^{-ipx}dp, \tag{13}$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})}=\int_{\mathbf{R}}\left(1+|p|^{2k}\right)\left|\widehat{\psi}(p)\right|^2dp.$$

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать соответственно целую и дробную часть числа α.

Операторы дробного дифференцирования $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_-$ определяются формулой

$$(\mathcal{D}_\pm^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x \mp t) - \sum\limits_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (\mp t)^k}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{14}$$

где $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ дробной производной справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_\pm^\alpha \varphi) = (\mp ip)^\alpha \widehat{\varphi}(p), \tag{15}$$

где $(\mp ip)^\alpha = |p|^\alpha \exp(\mp \frac{\alpha\pi i}{2} \mathrm{sign}\,(p))$, то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}_\pm^\alpha}$ есть оператор умножения на $(\mp ip)^\alpha$.

Определим оператор

$$\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha,$$

именно, при $\alpha \in (2, 4)$

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x-t) - f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{2}\, t^2}{|t|^{1+\alpha}}\, dt,$$

а при $\alpha \in (4, 6)$

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x-t) - f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{2}\, t^2 - \frac{f^{(4)}(x)}{24}\, t^4}{|t|^{1+\alpha}}\, dt.$$

Заметим, что оператор $\mathcal{D}^\alpha$ также является псевдодифференциальным оператором, а $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$ есть оператор умножения на функцию $2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})|p|^\alpha$.

Через $C_b^\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Далее, напомним определение классов Харди $H_+^p(\{\mathrm{Im} z > 0\})$ и $H_-^p(\{\mathrm{Im} z < 0\})$. Функция F, аналитическая в $\{\mathrm{Im} z > 0\}$(аналогично в $\{\mathrm{Im} z < 0\}$), принадлежит классу $H_+^p(\{\mathrm{Im} z > 0\})$ ($H_-^p(\{\mathrm{Im} z < 0\})$), если существует константа C, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p dx \leqslant C,$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно, что если $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $F(t) \in L^p(\mathbf{R})$ – функция, являющаяся граничным значением функции из $H^p_+(\{\mathrm{Im} z > 0\})$ (или $H^p_-(\{\mathrm{Im} z < 0\})$), то $\widehat{F}(\lambda) = 0$ при п.в. $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$). Для $p = 2$ верно и обратное утверждение. Именно, если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(\lambda) = 0$ п.в. при $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$), то существует функция F из $H^2_+(\{\mathrm{Im} z > 0\})$(или $H^2_-(\{\mathrm{Im} z < 0\})$), для которой $\widehat{F}(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

Случай $\alpha \in (4, 6)$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (7). Обозначим $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и определим процесс $\xi_\varepsilon(t)$ формулой (8).

По теореме Кэмпбелла (см. [3]) характеристическая функция случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$ для любого положительного t равна

$$f_{\xi_\varepsilon(t)}(p) = \exp\Big(t \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} (e^{ipx} - 1)\, d\Lambda(x)\Big).$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma(-\alpha)\, \mathcal{D}^\alpha u. \tag{16}$$

Для уравнения (16) рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{17}$$

Решение этой задачи в случае $\alpha \in (4, 6)$ есть

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} dp\, \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx}\, e^{-c_2 |p|^\alpha t}, \tag{18}$$

где

$$c_2 = -2 \int\limits_0^\infty \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!} \big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} = \frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}} > 0,$$

что проверяется непосредственно.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))],$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(t \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} \Big(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\Big) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big). \tag{19}$$

Отметим, что при таких α функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t$ является быстро убывающей.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+6}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ – решение задачи Коши* (16), (17). *Тогда существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\,T\,\|\varphi\|_{W_2^{l+6}(\mathbf{R})}\,\varepsilon^{6-\alpha}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – ограниченный оператор в некотором гильбертовом пространстве. Тогда для неотрицательного t существует ограниченная полугруппа операторов

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2, глава IX, § 2, п. 1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)} B\, e^{(t-\tau)A}\, d\tau. \tag{20}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha - \mathrm{A}_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ как

$$\mathrm{A}_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}_\varepsilon} \Big(\psi(x-y) - \psi(x) - \frac{\psi^{(2)}(x)}{2}y^2 - \frac{\psi^{(4)}(x)}{4!}y^4\Big)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях $A + B = \Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}^\alpha$. Для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства

$$\big\|e^{t(A+B)}\big\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{21}$$

$$\|e^{tA_\varepsilon}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{22}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+6} \to W_2^l}$. Имеем

$$\widehat{B\varphi}\,(p) = 2\,\widehat{\varphi}\,(p) \int\limits_0^{\varepsilon} \Big(\cos{(py)} - 1 + \frac{p^2y^2}{2} - \frac{p^4y^4}{4!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$= 2\,\widehat{\varphi}\,(p)\,|p|^{\alpha} \int\limits_0^{\varepsilon|p|} \Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Если $|p| < \frac{1}{\varepsilon}$, то

$$|p|^{\alpha}\Big|\int\limits_0^{\varepsilon|p|} \big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!}\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C\,|p|^6\,\varepsilon^{6-\alpha}.$$

Если $|p| > \frac{1}{\varepsilon}$, то

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{\alpha}.$$

Тогда

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{B\varphi}(p)|^2$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2(6-\alpha)} \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{12}$$

$$+\,C \int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha}.$$

Для $\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} \leqslant C\varepsilon^{2(6-\alpha)} \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2(l+6)})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2$$

$$+\,C\varepsilon^{2(6-\alpha)} \int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\,(1+|p|^{2l})\,|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{12}$$

$$\leqslant C\varepsilon^{2(6-\alpha)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+6}}. \tag{23}$$

Заметим, что утверждение теоремы следует из (21), (22) и (23). □

Случай $\alpha \in (2,4)$

Пусть $\nu\,(dt,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbf{R}$ с интенсивностью (7).

Обозначим $\mathbf{R}_\varepsilon^+ = \mathbf{R}^+ \setminus (0,\varepsilon)$, $\mathbf{R}_\varepsilon^- = \mathbf{R}^- \setminus (-\varepsilon,0)$ и определим процессы $\xi_\varepsilon^\pm(t)$ формулой (10).

Мы будем рассматривать процессы $\sigma\xi_\varepsilon^\pm(t)$, где σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [3])

$$\mathbf{E}\,\exp(i\,p\,\sigma\,\xi_\varepsilon^+) = \exp\left(t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}(e^{i\sigma px}-1)\,d\Lambda(x)\right), \tag{24}$$

$$\mathbf{E}\,\exp(i\,p\,\sigma\,\xi_\varepsilon^-) = \exp\left(t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}(e^{i\sigma px}-1)\,d\Lambda(x)\right). \tag{25}$$

Заметим, что интеграл в (24) сходится, если $p\geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\geqslant 0$ или $p\leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\leqslant 0$, а интеграл в (25) сходится, если $p\geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\leqslant 0$ или $p\leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\geqslant 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}^\alpha u. \tag{26}$$

Для уравнения (26) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{27}$$

Решение этой задачи в случае $\alpha\in(2,4)$ есть

$$u(t,x) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\;\widehat{\varphi}(p)\,e^{-ipx}e^{-t|p|^\alpha c_0}, \tag{28}$$

где

$$c_0 = 2\,\Gamma(-\alpha)\,\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) = -\frac{\pi}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})\,\Gamma(1+\alpha)} > 0,$$

что проверяется непосредственно.

Рассмотрим проектор Рисса P_+, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди $H_+^2(\{\operatorname{Im} z>0\})$. Аналогично определим проектор P_-, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на $H_-^2(\{\operatorname{Im} z<0\})$.

Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ можно представить как

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси. Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая ограниченная функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая ограниченная функция в нижней.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (13). Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, то есть $M = M(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)) \\ + (\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) - \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t))], \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+px)^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big)\exp\Big(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_-px)^k}{k!}\Big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big) \\ \text{если} \;\; p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_-px)^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big)\exp\Big(-t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+px)^k}{k!}\Big)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\Big), \\ \text{если} \; p < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Так как $P_+\varphi$ – аналитическая ограниченная функция в верхней полуплоскости, а функция $P_-\varphi$ – аналитична ограничена в нижней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in (2,4)$, $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ *для некоторого* $l \geqslant 0$, $M = M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (26), (27). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(T + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])})\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm \psi^\pm(x) = \int_\varepsilon^{+\infty} \Delta_y^{([\alpha])}\psi^\pm(x-\sigma_\mp y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \Delta_y^{([\alpha])}\psi^\pm(x-\sigma_\pm y)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Положим $A^\pm = \mathrm{A}_\varepsilon^\pm$, $B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha P_\pm - \mathrm{A}_\varepsilon^\pm$. Тогда $A^\pm + B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathcal{D}^\alpha P_\pm$. Для доказательства утверждения воспользуемся формулой (20).

Для любого положительного k и $t>0$ справедливо неравенство

$$\left\|e^{t(A^\pm+B^\pm)}P_\pm\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{31}$$

Далее, представим

$$e^{tA_\varepsilon^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = (e^{tA_\varepsilon^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)})\,P_M\varphi^\pm(x)$$
$$-e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I-P_M)\,\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA_\varepsilon^\pm}P_M}\,\varphi^\pm(p) = \widehat{\varphi_M^\pm}(p)\,I_1^\pm(p)\,I_2^\pm(p),$$

где функции $I_{1,2}^+(p)$ определены на отрицательной полуоси формулами

$$I_1^+(p) = \exp\left(-t|p|^\alpha \int_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty}\left(e^{-iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(-iy)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right),$$

$$I_2^+(p) = \exp\left(-t\,|p|^\alpha \int_{|p|\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty}\left(e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(iy)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right),$$

а функции $I^-_{1,2}(p)$ заданы на положительной полуоси формулами

$$I^-_1(p) = \exp\left(-t|p|^\alpha \int\limits_{p\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty} \left(e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{i^k y^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right),$$

$$I^-_2(p) = \exp\left(-t\,|p|^\alpha \int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty} \left(e^{-iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(-iy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right).$$

Обозначим

$$S(y) = e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{i^k y^k}{k!}.$$

Рассмотрим замкнутые контуры

$$\begin{aligned} \Gamma_\pm = \{ & z \in \mathbf{C} : |z| \in [\,|p|\,\varepsilon, R],\ \arg z = \pm\,\pi/\alpha\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| = R,\ \arg z \in [\pm\,\pi/\alpha, 0]\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| \in [R, |p|\,\varepsilon],\ \arg z = 0\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| = |p|\,\varepsilon,\ \arg z \in (0, \pm\,\pi/\alpha)\} \end{aligned}$$

и рассмотрим интегралы по замкнутым контурам

$$J^\pm = \int\limits_{\Gamma_\pm} S(\pm y)\, \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R \to \infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру $\Gamma_\pm$ равен нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{e^{tA^-_\varepsilon} P_M \varphi^-}(p) = \widehat{\varphi^-_M}(p)\, & \exp\left(-t|p|^\alpha \int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty} S(y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \\ \cdot \exp\left(t\,|p|^\alpha \int\limits_{\gamma_+} S(y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) & \exp\left(-t|p|^\alpha \int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty} S(-y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \\ & \cdot \exp\left(t|p|^\alpha \int\limits_{\gamma_-} S(-y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right), \end{aligned}$$

где контуры

$$\gamma_+ = \{z \in \mathbf{C} : |z| = p\,\varepsilon, \quad \arg z \in (0, \pi/\alpha)\}$$

и

$$\gamma_- = \{z \in \mathbf{C} : |z| = p\,\varepsilon, \quad \arg z \in (0, -\pi/\alpha)\}.$$

С учетом $p < M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta - 1}$ в интеграле по дуге γ_+ сделаем замену переменных $y = p\,\varepsilon\, e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, \pi/\alpha)$, тогда при $p > 0$

$$\left| \exp\left(t|p|^\alpha \int\limits_{\gamma_+} S(y)\, \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \right| \leqslant \sup_{t \in [0,T]} \exp(C\,t\,p^{[\alpha]+1} \varepsilon^{1-\{\alpha\}}). \tag{32}$$

В интеграле по дуге γ_- сделаем замену переменных $y = p\,\varepsilon\, e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, -\pi/\alpha)$, тогда при $p > 0$

$$\left| \exp\left(t|p|^\alpha \int\limits_{\gamma_-} S(-y)\, \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \right| \leqslant \sup_{t \in [0,T]} \exp(C\,t\,p^{[\alpha]+1} \varepsilon^{1-\{\alpha\}}). \tag{33}$$

Выбирая ε достаточно малым, для любого положительного k и $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{e^{tA_\varepsilon^-} P_M} \varphi^-(p) \right\|_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2 |p|^{2k} \exp\left(2\,C\,t\,p^\alpha \varepsilon^{\delta(1-\{\alpha\})}\right) \\
\cdot \exp\left(-\,2\,t\,p^\alpha \int\limits_1^{+\infty} S(y)\, \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \exp\left(-\,2\,t\,p^\alpha \int\limits_1^{+\infty} S(-y)\, \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) dp \\
\leqslant C \int\limits_0^M |\varphi\,(p)|^2\, |p|^{2k}\, dp \leqslant C \left\| P_M \varphi^-\,(x) \right\|_{W_2^k}.
\end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA_\varepsilon^+} P_M P_+$. Таким образом, имеем

$$\left\| e^{tA_\varepsilon^\pm} P_M P_\pm \right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant C. \tag{34}$$

Для нормы слагаемых $V_2^{\pm}$ имеем

$$\begin{aligned}\left\|V_2^{\pm}\right\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left(Ce^{-2c_0M^\alpha t}\int\limits_{|p|>M}\left(1+|p|^{2l}\right)\left|\widehat{\varphi^{\pm}}(p)\right|^2dp\right)\\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int\limits_{|p|>M}\left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right)\left|\widehat{\varphi^{\pm}}(p)\right|^2dp \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}\leqslant C\varepsilon^{2([\alpha]+1)(1-\delta)}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}.\end{aligned}\tag{35}$$

Осталось оценить $\|B^{\pm}P_MP_{\pm}\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B^{\pm}\varphi_M^{\pm}}\,(p) = \int\limits_{\mathbf{R}}dx\,\exp\left(i\,p\,x\right)\Bigg[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Delta_y^{([\alpha])}\varphi_M^{\pm}(x-\sigma_{\mp}y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ +\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\Delta_y^{([\alpha])}\varphi_M^{\pm}(x-\sigma_{\pm}y)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}\\ +\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_M^{\pm}(x-y)-\varphi_M^{\pm}(x)-\frac{(\varphi_M^{\pm})^{(2)}(x)}{2}\,y^2}{|y|^{1+\alpha}}\,dy\Bigg].\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\widehat{B^{-}\varphi_M^{-}}(p)=\widehat{\varphi_M^{-}}(p)\Bigg[-|p|^\alpha\int\limits_{\varepsilon p\sigma_+}^{+\sigma_+\infty}S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ -|p|^\alpha\int\limits_{\varepsilon p\sigma_-}^{+\sigma_-\infty}S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}+|p|^\alpha c_0\Bigg].\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения о повороте контура, получим

$$\begin{aligned}\widehat{B^{-}\varphi_M^{-}}(p)=\widehat{\varphi_M^{-}}(p)|p|^\alpha\Bigg[\int\limits_{\gamma_+}S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ +\int\limits_{\gamma_-}S(-y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}+2\int\limits_0^{|p|\varepsilon}\left(\cos y-1-\frac{y^2}{2!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Bigg].\end{aligned}$$

Аналогично (32), с учетом неравенства

$$\left| 2\int\limits_0^{\varepsilon|p|} \Big(\cos y - 1 - \frac{y^2}{2!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right| \leqslant C\left(|p|\,\varepsilon\right)^{4-\alpha},$$

получаем

$$\left|\widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}\,(p)\right| \leqslant C\,|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|\,|p|^{[\alpha]+1}\,\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left\|B^{\pm}\widehat{P_M\varphi_{\pm}}\right\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{|p|<M} dp\left(1+|p|^{2l}\right)\left|\widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}(p)\right|^2\\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|<M} dp\left(1+|p|^{2l}\right)|\widehat{\varphi}(p)|^2\,|p|^{2([\alpha]+1)}\\ &\leqslant C\,\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \qquad (36)\end{aligned}$$

Заметим, что из (31), (34), (35) и (36) следует утверждение теоремы. □

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Доклады Академии наук **459**, No. 4 (2014), 400–402.
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
3. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, МЦНМО, М., 2007.
4. П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H_p. Мир, М., 1984.
5. A. Lachal, *From pseudo-random walk to pseudo-Brownian motion: first exit time from a one-sided or a two-sided interval.* — `arXiv:1301.6579`.
6. E. Orsingher, B. Toaldo, *Pseudoprocesses related to space-fractional higher-order heat-type equations.* — Stochast. Anal. Appl. **32**, No. 4 (2014), 619–641.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Наука и техника, Минск, 1987.
8. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **368** (2009), 201–228.
9. N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, *The Lévy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1289–1308.

Platonova M. V. Symmetric α-stable distributions for noninteger $\alpha > 2$ and associated stochastic processes.

We construct analogues of symmetric α-stable distributions for noninteger indices $\alpha > 2$ and investigate their links to solutions of the Cauchy problem for some evolution equations.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева, СПбГУ,
14 линия В.О., д. 29Б
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru

Поступило 2 ноября 2015 г.