М. В. Платонова, С. В. Цыкин, Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2017, том 466, 257–272

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

М. В. Платонова, С. В. Цыкин

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где $\alpha \in (1,2)$, $\mathcal{D}^\alpha$ – симметричный оператор дробного дифференцирования порядка α, а константа c_α имеет вид

$$c_\alpha = -\frac{1}{\alpha\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} > 0.$$

Оператор $\mathcal{D}^\alpha$ является псевдодифференциальным оператором с символом $\cos(\frac{\pi\alpha}{2})|p|^\alpha$. При $\alpha = 2$ оператор $\mathcal{D}^\alpha$ – это оператор дифференцирования второго порядка, а соответствующая задача Коши (1) отвечает классическому уравнению Шрёдингера. Уравнение (1) с нецелым α изучалось в работах [1, 7, 8].

В работе [4] был предложен метод построения представления решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с комплексным параметром σ. Комплексный параметр σ позволил связать уравнение теплопроводности ($\operatorname{Im}\sigma = 0$) и уравнение Шрёдингера ($\operatorname{Re}\sigma = 0$). Относительно начальной функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ предполагалось, что носитель ее преобразования Фурье содержится в интервале $[-M, M]$ для некоторого $M > 0$, что означает, что функция φ может быть продолжена на всю комплексную плоскость до целой функции

Ключевые слова: дробные производные, уравнение Шрёдингера, предельные теоремы, пуассоновские точечные поля.

Работа первого автора (результаты параграфа 4) выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01136. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00443а.

экспоненциального типа M. В этом случае для решения задачи Коши (1) справедливо представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\big(x - \sigma w(t)\big), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, а подстановка комплексной величины $x - \sigma w(t)$ в функцию вещественной переменной φ понимается как подстановка в аналитическое продолжение φ. Для произвольной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ можно получать аппроксимацию в $L_2(\mathbb{R})$ решения задачи Коши, аппроксимируя начальную функцию φ функциями указанного вида.

Более того, в [4] было показано, что сходимость к решению задачи Коши сохраняется и в том случае, когда не только начальная функция аппроксимируется целыми функциями экспоненциального типа, но и одновременно винеровский процесс аппроксимируется ступенчатым процессом, построенным по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих экспоненциальный момент. Отметим, что условие существования экспоненциального момента в данном случае не может быть ослаблено, так как целые аналитические функции, ограниченные на вещественной оси, по направлениям, непараллельным вещественной оси, могут расти экспоненциально. В частности, в формуле (2) вычисляется математическое ожидание экспоненциально растущей функции от $w(t)$. Это обстоятельство делает невозможным использование данного подхода для нецелых значений α, так как оператор дробного дифференцирования не является локальным и для вероятностного представления решения задачи Коши приходится использовать случайные величины со степенной асимптотикой хвостового распределения, у которых отсутствует экспоненциальный момент. В частности, это означает, что в формуле (2) невозможно заменить винеровский процесс на устойчивый процесс Леви ни для какого комплексного $\sigma \neq 0$.

В работе [5] был предложен другой способ аппроксимации решения задачи Коши функционалами от стохастических процессов, использующий только ограниченные функционалы от процессов. Начальная функция φ при этом представляется в виде суммы двух функций, одна из которых аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а другая – в нижнюю. Кроме того, вместо винеровского процесса используется некоторая его аппроксимация ограниченными снизу процессами.

Мы также в данной работе используем метод, предложенный в работах [4, 5].

§2. Основные обозначения и определения

Константы мы всегда обозначаем буквой C, причем одна и та же буква C может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ipx}\, dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx}\, dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство Соболева функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [9], стр. 146). В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной (см. [9], стр. 190))

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})\, |\widehat{\psi}(p)|^2\, dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(Au)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipx} A(p)\, \widehat{\varphi}(p)\, dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $A(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать соответственно целую и дробную часть числа α.

Симметричный оператор дробной производной определяется на гладких функциях f формулой (подробнее см. [6])

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y) - f(x) + f'(x)y}{|y|^{1+\alpha}}\, dy,$$

где $1 < \alpha < 2$. Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье дробной производной справедливо

$$\widehat{(\mathcal{D}^\alpha \varphi)}(p) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha \widehat{\varphi}(p),$$

то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$ действует как оператор умножения на $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha$.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ обозначим, соответственно, верхнюю и нижнюю полуплоскости.

§3. Аппроксимация решения средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\mu(dx),$$

где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = -\frac{dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}}, \quad x > 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ построим случайную величину $\xi_\varepsilon(t)$

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_\varepsilon^+} x\nu(dt,dx) - \mathbf{E} \int\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_\varepsilon^+} x\nu(dt,dx)$$

$$= \int\limits_{[0,t]\times\mathbf{R}_\varepsilon^+} x\nu(dt,dx) - t\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} x d\mu(x),$$

где $\mathbf{R}_\varepsilon^+ = \mathbf{R}^+ \setminus (0,\varepsilon)$.

Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2 \cap L_1$ как

$$P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p)\, dp, \quad P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p)\, dp. \qquad (3)$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость

Для $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P^t_ε, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P^t_\varepsilon \varphi(x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_- * g_\varepsilon)\big(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)\big) + (\varphi_+ * g_\varepsilon)\big(x + \sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\right], \qquad (4)$$

где функции $\varphi_\pm$ определены формулой (3), а $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$. Так выбранное комплексное число σ принадлежит верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$. Функция $g_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\left(t \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2 d\mu(x)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{(i|p|\sigma)^2\varepsilon^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}t\right) = e^{-\rho p^2 t \varepsilon^{2-\alpha}},$$

где $\rho = \frac{-\sigma^2}{2(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$, $\operatorname{Re}\rho > 0$.

Заметим, что $\operatorname{Im}\sigma = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)$.

Лемма 1. *При фиксированных ε, t функция $\varphi_+ * g_\varepsilon$ ограничена в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geqslant -M(\varepsilon)t\}$, где*

$$M(\varepsilon) = \cos\Big(\frac{\pi}{2\alpha}\Big) \int\limits_\varepsilon^\infty x d\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}} \cos\Big(\frac{\pi}{2\alpha}\Big) > 0.$$

Аналогично, при фиксированных ε, t функция $\varphi_- * g_\varepsilon$ ограничена в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \leqslant M(\varepsilon)t\}$.

Доказательство. Имеем

$$\Big|\int_{-\infty}^{0} e^{-ipz}\widehat{g_\varepsilon}(p)\widehat{\varphi_+}(p)\,dp\Big| \leqslant \int_{-\infty}^{0}\Big|e^{|p|M(\varepsilon)t}e^{-tkp^2\varepsilon^{2-\alpha}}\widehat{\varphi_+}(p)\Big|\,dp \leqslant C\|\varphi_+\|_{L_2(\mathbf{R})}. \quad \square$$

Из леммы 1 следует, что при каждом фиксированном ε величина, стоящая под знаком математического ожидания в (4), ограничена. Тогда, пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\widehat{\varphi_+}(p)\,\widehat{g_\varepsilon}(p)\,e^{-ipx}\,\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\widehat{\varphi_-}(p)\,\widehat{g_\varepsilon}(p)\,e^{-ipx}\,\mathbf{E}\,e^{ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{g_\varepsilon}(p)\,e^{-ipx}\,\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)}\,dp. \quad (5)$$

В силу теоремы Кэмпбелла (см. [3], стр. 44), имеем

$$\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)} = \exp\Big(t\int_{\varepsilon}^{\infty}\big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x\big)\,d\mu(x)\Big).$$

Лемма 2. *Пусть* $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$. *Тогда*

$$\int_{0}^{\infty}\big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x\big)\,d\mu(x) = \frac{-i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $p > 0$. Тогда

$$\int_{0}^{\infty}\big(e^{ip\sigma x} - 1 - ip\sigma x\big)d\mu = -\int_{0}^{\infty}\big(e^{ip\sigma x} - 1 - ip\sigma x\big)\frac{dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}} = -\frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{R\to\infty,\ r\to 0}\int_{i\sigma r}^{i\sigma R}\big(e^y - 1 - y\big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Отметим, что интеграл

$$J = \int\limits_{\Gamma} \left(e^y - 1 - y\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

по замкнутому контуру Γ (рис. 1)

$$\begin{aligned} \Gamma \quad = \quad & \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| \in [r, R],\ \arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(\alpha - 1)}{2\alpha} \right\} \\ \cup \quad & \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = R,\ \arg z \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(\alpha - 1)}{2\alpha}, \pi \right] \right\} \\ \cup \quad & \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| \in \left[r, R\right],\ \arg z = \pi \right\} \\ \cup \quad & \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = r,\ \arg z \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(\alpha - 1)}{2\alpha}, \pi \right] \right\} \end{aligned}$$

равен нулю.

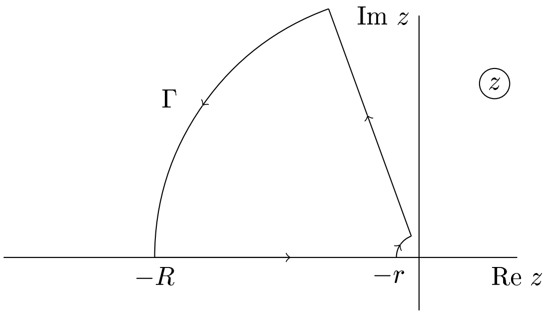

Рис. 1. Контур интегрирования Γ.

Интегралы по дугам $|z| = R$ и $|z| = r$ стремятся к нулю при $R \to \infty$ и $r \to 0$ соответственно. Тем самым:

$$\int\limits_0^{\infty} \left(e^{ip\sigma x} - 1 - ip\sigma x\right) d\mu(x) = -\frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^y - 1 - y\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{(ip\sigma)^\alpha}{\alpha\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^y - 1\right) \frac{dy}{y^\alpha} = \frac{(-ip\sigma)^\alpha}{\alpha(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{y^{\alpha-1}} = \frac{(-ip\sigma)^\alpha}{\alpha}.$$

□

Используя выражение (5) для функции $P^t_\varepsilon\varphi(x)$ и лемму 2, получаем

$$P^t_\varepsilon\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)e^{-\rho p^2 t\varepsilon^{2-\alpha}}e^{-ipx}\exp\Big(-\frac{i|p|^\alpha}{\alpha}t\Big)\delta^t_\varepsilon(p)\,dp, \qquad (6)$$

где

$$\delta^t_\varepsilon(p)=\exp\Big[-t\int\limits_0^\varepsilon\big(e^{i|p|\sigma x}-1-i|p|\sigma x\big)d\mu(x)\Big].$$

Далее, обозначим через P^t полугруппу операторов

$$P^t=\exp\Big(-\frac{it}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha\Big).$$

Теорема 1. *Существует число $C>0$, такое что для любой функции $\varphi\in W^2_2(\mathbf{R})$ и всех $t>0$ справедливо неравенство*

$$||P^t\varphi-P^t_\varepsilon\varphi||_{L_2(\mathbf{R})}\leqslant Ct\varepsilon^{2-\alpha}||\varphi||_{W^2_2(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t\geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t)=e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t)=e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2], гл. IX, §2, п.1, стр. 614)

$$e^{t(A+B)}-e^{tA}=\int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau. \qquad (7)$$

Применим формулу (7) для случая, когда $A=-\frac{i}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha$, а $A+B=G_\varepsilon$, где G_ε – генератор полугруппы P^t_ε. Из (6) следует, что G_ε есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{g}_\varepsilon(p) = -\int\limits_0^\varepsilon \left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x\right) d\mu(x) - \rho p^2 \varepsilon^{2-\alpha} - \frac{i|p|^\alpha}{\alpha}$$

$$= -\int\limits_0^\varepsilon \left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2\right) d\mu(x) - \frac{i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

В нашем случае

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^2 \to W_2^2} = 1. \tag{8}$$

Оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^2 \to L_2}$. Заметим сначала, что оператор B является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\widehat{b}_\varepsilon(p) = -\int\limits_0^\varepsilon \left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2\right) d\mu(x).$$

Далее, имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\mathbf{R}} dp\, |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \leqslant C \int\limits_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^4)\, |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left(\int\limits_0^\varepsilon x^2 d\mu(x)\right)^2$$

$$\leqslant C\varepsilon^{4-2\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^4)\, |\widehat{\varphi}(p)|^2 \leqslant C\varepsilon^{4-2\alpha} \|\varphi\|_{W_2^2}^2. \tag{9}$$

Для доказательства утверждения осталось оценить норму оператора $\|U_{A+B}(\tau)\|_{L_2 \to L_2}$. Для этого нам понадобится дополнительное вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Для любого* $x \geqslant 0$

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\sigma x} - 1 - i\sigma x - \frac{1}{2}(i\sigma x)^2\right) \geqslant 0,$$

где $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$.

Доказательство. Представим $i\sigma$ в виде

$$i\sigma = -a + ib, \quad \text{где } a > 0,\ b > a.$$

Масштабным преобразованием переменной x утверждение леммы можно свести к случаю, когда $a = 1$, $b \geqslant 1$. При фиксированном $b \geqslant 1$

рассмотрим функцию $f(x,b)$ вида

$$f(x,b) = \mathrm{Re}\Big(e^{i\sigma x} - 1 - i\sigma x - \frac{1}{2}(i\sigma x)^2\Big)$$
$$= e^{-x}\cos(bx) - 1 + x - \frac{x^2}{2}(1-b^2), \quad f(0,b) = 0.$$

В этих обозначениях утверждение леммы эквивалентно неравенству

$$f(x,b) \geqslant 0. \tag{10}$$

Сначала докажем (10) для случая $b = 1$. Если $x \geqslant 2$, то неравенство

$$f(x,1) = e^{-x}\cos x - 1 + x \geqslant 0$$

очевидно. Вычислим производные функции $f(x,1)$ по переменной x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = -\big(\sin x + \cos x\big)e^{-x} + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,1) = 2\sin x e^{-x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0,$$

Заметим, что $\sin x \geqslant 0$ при $x \in [0,2]$, а значит при таких x и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,1) \geqslant 0$.

Таким образом, мы доказали неравенство (10) для случая $b = 1$. Покажем теперь, что для каждого фиксированного x производная $\frac{\partial f}{\partial b}(x,b)$ неотрицательна. Для любого $x \geqslant 0$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial b}(x,b) = -xe^{-x}\sin(bx) + bx^2 = x\big(bx - e^{-x}\sin(bx)\big) \geqslant 0.$$

□

Пользуясь леммой 3, получаем оценку

$$\left|\exp\Big[-t\int_0^{\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2\Big)\,d\mu(x)\Big]\right| \leqslant 1,$$

из которой следует неравенство для операторной нормы

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1. \tag{11}$$

Заметим, что утверждение теоремы следует теперь из (8), (9) и (11). □

§4. Предельная теорема для сумм независимых случайных величин

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что распределение $\mathcal{P}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, соответствующую плотность распределения мы обозначим через $p(x)$. Через $h(x)$ обозначим функцию

$$h(x) = \alpha\Gamma(-\alpha)x^{\alpha+1}p(x)$$

и предположим, что для некоторой константы $C > 0$ функция $h(x)$ удовлетворяет неравенству $|h(x)| \leqslant 1 + \frac{C}{x^{\beta}}$, где

$$\beta > 1 - \{\alpha\}.$$

Из этого условия следует, что плотность распределения при $x \to \infty$ удовлетворяет

$$p(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(-\alpha)x^{\alpha+1}}\Big(1 + O\big(\frac{1}{x^{\beta}}\big)\Big).$$

Через $m_1 = \mathbf{E}\xi_1$ обозначим математическое ожидание случайной величины ξ_1.

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ – независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j.$$

Через $\zeta_n^{(1)}(t)$, $t \in [0,T]$ определим центрированный процесс

$$\zeta_n^{(1)}(t) = \zeta_n(t) - \mathbf{E}\,\zeta_n(t).$$

Мы будем рассматривать $\sigma\zeta_n^{(1)}(t)$, где, как и выше, комплексная константа $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$ принадлежит верхней полуплоскости. Как и ранее, через φ_+ и φ_- мы обозначим действие проекторов Рисса P_+ и

P_- на функцию φ. Выберем и зафиксируем константу K, удовлетворяющую условию

$$K > \frac{2}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^2\,|h(y)-1|\,dy}{y^{1+\alpha}},$$

и последовательность

$$\gamma_n = \frac{Kn}{n^{2/\alpha}}.$$

Заметим, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, для натуральных n определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\big[(\varphi_+ * \varkappa_n^t)\big(x+\sigma\zeta_n^{(1)}(t)\big) + (\varphi_- * \varkappa_n^t)\big(x-\sigma\zeta_n^{(1)}(t)\big)\big], \quad (12)$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\big(-\gamma_n t p^2\big).$$

Лемма 4. *Функция $\varphi_+ * \varkappa_n^t(z)$ ограничена в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geqslant -tM(n)\}$ при каждых фиксированных n и t, где*

$$M(n) = m_1 n^{1-1/\alpha}\cos\Big(\frac{\pi}{2\alpha}\Big).$$

Функция $\varphi_- * \varkappa_n^t(z)$ ограничена в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \leqslant tM(n)\}$ при каждых фиксированных n и t.

Доказательство. Заметим, что

$$\Big|\int_{-\infty}^0 dp\, e^{-ipz}\widehat{\varphi}(p)\widehat{\varkappa_n^t}(p)\Big| \leqslant \Big|\int_{-\infty}^0 dp\, e^{pM(n)t}\widehat{\varphi}(p)\widehat{\varkappa_n^t}(p)\Big|$$
$$\leqslant \|\varphi_+\|_{L_2}\Big(\int_{-\infty}^0 dp\, e^{2pM(n)t}e^{-2\gamma_n t p^2}\Big)^{1/2} = C\|\varphi_+\|_{L_2}. \quad \square$$

Заметим, что при каждом фиксированном n мы подставляем в функцию $\varphi_+ * \varkappa_n$ комплексное число, мнимая часть которого больше $-tM(n)$. Аналогично, в функцию $\varphi_- * \varkappa_n$ мы подставляем комплексное число, мнимая часть которого меньше $tM(n)$. Таким образом, в формуле (12) стоит математическое ожидание от ограниченной функции, и при каждом фиксированном n можно воспользоваться теоремой Фубини и внести математическое ожидание под знак интеграла

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{\varkappa}_n^t(p)\,\mathbf{E}\left[\exp\left(i|p|\sigma\zeta_n^{(1)}(t)\right)\right].$$

Из теоремы Кэмпбелла (см. [3], стр. 44) следует, что

$$\ln\mathbf{E}\left[\exp\left(i|p|\sigma\zeta_n^{(1)}(t)\right)\right] = nt\int\limits_0^{\infty}\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)d\mathcal{P}(y).$$

Теорема 2. *Существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^2(\mathbf{R})$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{(2-\alpha)/\alpha}}\|\varphi\|_{W_2^2(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Применим формулу (7) для случая, когда

$$A = -\frac{i}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha,$$

а $A + B = G_n$, где G_n – генератор полугруппы P_n^t. Заметим, что G_n есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_n(p)$, где

$$\begin{aligned}\widehat{g}_n(p) &= n\int\limits_0^{\infty}\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)d\mathcal{P}(y) - \gamma_n p^2\\
&= \frac{-i|p|^\alpha}{\alpha} - \frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\
&\quad + n\int\limits_0^{\infty}\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)d\mathcal{P}(y) - \gamma_n p^2.\end{aligned}$$

В нашем случае

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^2\to W_2^2} = 1. \tag{13}$$

Оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^2\to L_2}$. Оператор B является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\widehat{b}_n(p) = -\frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^\infty\Big(\exp\Big(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+ n\int\limits_0^\infty\Big(\exp\Big(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y) - \gamma_n p^2$$

$$= \frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^\infty\Big(\exp\Big(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big)\frac{(h(y)-1)\,dy}{y^{1+\alpha}} - \gamma_n p^2.$$

Разобьем промежуток интегрирования на два: от 0 до $\frac{n^{1/\alpha}}{|p|}$ и от $\frac{n^{1/\alpha}}{|p|}$ до ∞. Первый интеграл мы оценим

$$\left|\frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^{\frac{n^{1/\alpha}}{|p|}}\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)\frac{(h(y)-1)dy}{y^{1+\alpha}}\right| \leqslant \frac{C|p|^2}{n^{2/\alpha-1}}, \quad (14)$$

так как, в силу условия на функцию $h(x)$, следующий интеграл конечен

$$\int\limits_0^\infty \frac{y^2|h(y)-1|\,dy}{y^{1+\alpha}} < \infty.$$

Для второго интеграла справедливо неравенство

$$\left|\frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int\limits_{\frac{n^{1/\alpha}}{|p|}}^\infty\left(\exp\left(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\right)\frac{(h(y)-1)\,dy}{y^{1+\alpha}}\right|$$

$$\leqslant Cn\int\limits_{\frac{n^{1/\alpha}}{|p|}}^\infty \frac{|p|^2y^2}{n^{2/\alpha}}\frac{|h(y)-1|dy}{y^{1+\alpha}} \leqslant \frac{C|p|^2}{n^{2/\alpha-1}}. \quad (15)$$

Имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\mathbf{R}} dp\, |\widehat{B\varphi}(p)|^2$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{\frac{2(2-\alpha)}{\alpha}}} \int\limits_{\mathbf{R}} dp(1+|p|^4)\, |\widehat{\varphi}(p)|^2 \leqslant \frac{C}{n^{\frac{2(2-\alpha)}{\alpha}}} \|\varphi\|_{W_2^2}^2. \quad (16)$$

Для доказательства утверждения осталось оценить норму оператора $\|U_{A+B}(\tau)\|_{L_2\to L_2}$. Рассмотрим функцию

$$f_n(p) = \mathrm{Re}\Big[n \int\limits_0^\infty \Big(\exp\Big(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y)\Big] - \gamma_n p^2.$$

В выражении, стоящем под знаком вещественной части, вычтем чисто мнимое слагаемое $\frac{-i|p|^\alpha}{\alpha}$. Получим

$$f_n(p) = \frac{n}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \mathrm{Re} \int\limits_0^\infty \Big(\exp\Big(\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}\Big) \frac{(h(y)-1)\,dy}{y^{1+\alpha}} - \gamma_n p^2.$$

Из (14) и (15) следует, что модуль интеграла в последней формуле не больше, чем $\frac{2n^{1-2/\alpha}p^2}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{y^2|h(y)-1|dy}{y^{1+\alpha}}$. Так как мы выбирали $K > \frac{2}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{y^2|h(y)-1|dy}{y^{1+\alpha}}$, то максимальное значение функции $f_n(p)$ равно нулю для любого натурального n. Заметим, что функция $f_n(p)$ по переменной p является непрерывной и при $|p| \to \pm\infty$ стремится к $-\infty$, а значит существует конечный максимум функции, который, как мы показали, не зависит от n. Отсюда следует, что

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1. \quad (17)$$

Утверждение теоремы следует из (13), (16) и (17). □

Литература

1. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, *Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики.* — Успехи физических наук **174**, No. 8 (2004), 809–852.
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, Москва, 1972.
3. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* МЦНМО, Москва, 2007.

4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина , М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ *с комплексным параметром* σ. — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина , М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шредингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
6. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* — “Наука и техника”, Минск, 1987.
7. В. Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.* Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
8. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных.* “Артишок”, Ульяновск, 2008.
9. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Изд-во Ленинградского университета, 1981.

Platonova M. V., Tsykin S. V. A probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for the Schrödinger equation with a fractional derivative operator.

We construct two types of probabilistic approximations of the Cauchy problem solution for the nonstationary Schrödinger equation with a symmetric fractional derivative of order $\alpha \in (1, 2)$ on the right hand side. In the first case we approximate the solution by a mathematical expectation of point Poisson field functionals and in the second case we approximate the solution by a mathematical expectation of functionals of sums of independent random variables with a power asymptotics of a tail distribution.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023, Россия

Поступило 11 октября 2017 г.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В.О., дом 29Б, С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: sergei.tcykin@gmail.com