САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Сеник Никита Николаевич

Усреднение периодических и локально периодических эллиптических операторов

Специальность 01.01.03
«Математическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. Т. А. Суслина

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение

Вопросы, которые сейчас относят к теории усреднения, в науке возникли достаточно давно: они ставились еще в работах С. Д. Пуассона, Дж. К. Максвелла, Р. Клаузиуса, Дж. В. Рэлея. Однако прошло немало времени, прежде чем появились очертания математически строгой теории. Самые первые шаги в этом направлении были сделаны в середине 60-х годов прошлого века, когда В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов рассмотрели модельную задачу с мелкозернистой границей [MKh64], а С. Спаньоло и Э. де Джорджи ввели понятие G-сходимости [Sp68], [DGS73]. В дальнейшем данная тематика интенсивно разрабатывалась и расширялась, значительный вклад в ее развитие внесли многие математики, среди которых Н. С. Бахвалов, Ж.-Л. Лионс, Ф. Мюра, Л. Тартар, В. В. Жиков, О. А. Олейник и другие. Из обширной литературы по усреднению выделим монографии [BLP78], [BP84], [OShY90], [ZhKO93], [MKh05].

Типичная задача теории усреднения формулируется для матричного оператора вида $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A^\varepsilon \nabla$, действующего из векторного класса Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ (n и d натуральные) в двойственный к нему класс $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$. Тензор $A^\varepsilon(x)$ зависит от величины $\varepsilon > 0$, которая играет роль малого параметра. Предполагается, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ ограничен и коэрцитивен равномерно относительно ε из некоторой окрестности $\mathscr{E}$ нуля, то есть при любых $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ выполняются неравенства

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C_\flat \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n} \tag{1}$$

и

$$(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \geqslant c_* \|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \tag{2}$$

с положительными постоянными c_* и $C_\flat$. Тогда с $\mathcal{A}^\varepsilon$ связан неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$.

В приложениях подобные операторы часто отвечают каким-либо физическим процессам в средах с быстро меняющимися от точки к точке свойствами. Параметр ε тогда служит мерой неоднородности среды и представляет собой характерное расстояние в пространстве, на котором ее свойства отличаются на величину «порядка единицы», — скажем, если функция A^ε периодична, ε суть длина периода. Процессы могут быть самыми разнообразными, например: диффузией в веществе, переносом тепла, распространением волны, деформацией твердого тела, эволюцией квантовой системы. В зависимости от контекста под A^ε и u понимаются коэффициент диффузии и плотность вещества, коэффициент теплопроводности и температура и т. д.

В последнее время интерес к сильно неоднородным средам стал особенно велик, что связано, в первую очередь, с появлением крайне перспективных композиционных материалов, которые могут сочетать характеристики различных естественных материалов [Gib10], а могут иметь и такие качества, которые в природе не встречаются [EZ06]. Необычные свойства композиционных материалов в значительной степени объясняются быстрым чередованием составляющих их компонент, иначе говоря собственной внутренней структурой. У многих она периодическая (или близкая к периодической) с малым периодом. Цель теории усреднения состоит в том, чтобы связать внутреннюю структуру среды с наблюдаемыми «эффективными» свойствами.

Будем считать, что функция A^ε ограничена и ε-периодична по каждой переменной, то есть представима в виде $A^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$, где A удовлетворяет условиям ограниченности и периодичности с равным 1 периодом. При $\varepsilon \in \mathscr{E}$ рассмотрим сильно эллиптическую систему уравнений

$$\mathcal{A}^\varepsilon u_\varepsilon - \mu u_\varepsilon = f \tag{3}$$

(она понимается в слабом смысле). Если $\mu \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{R}}_+$, то система однозначно разрешима для любого фиксированного $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а соответствующая последовательность решений u_ε, $\varepsilon \in \mathscr{E}$, равномерно ограничена в пространстве $H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Тем самым некоторая подпоследовательность u_{ε_k} имеет в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ слабый предел u_0.

Интуитивно понятно, что при достаточно малом периоде ε параметры среды будут чередоваться настолько быстро, что на макроскопическом уровне осцилляции станут едва различимы — наблюдателю такая среда будет казаться однородной. Это наводит на мысль, что предельная функция должна удовлетворять системе уравнений с постоянным тензором.

Убедиться, что так и есть на самом деле, можно разными способами. Одними из первых были метод асимптотических разложений (см. [BLP78] или [BP84]), опирающийся на мощный аппарат асимптотического анализа, и энергетический метод (см. [MT97]), в основе которого лежало утверждение о компенсированной компактности. Мы коротко опишем процедуру усреднения оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$, используя так называемый метод двухмасштабной сходимости, который был предложен Г. Нгуетсенгом [Ng89] и развит далее Г. Аллером [A92].

Напомним, что ограниченная последовательность функций v_ε из $L_2(\mathbb{R}^d)$ сходится к $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d)$ ($\mathbb{T}$ — плоский тор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) в смысле слабой двухмасштабной сходимости, если при всех $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon(x)\varphi(x, x/\varepsilon)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d} v_0(x, y)\varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Известно, что ограниченные множества в L_2 обладают свойством компактности относительно этой сходимости, и потому из u_{ε_k} можно выделить еще одну подпоследовательность — для нее мы оставим прежнее обозначение, — у которой градиенты $\nabla u_{\varepsilon_k}(x)$ сходятся в смысле (4). Довольно быстро выясняется, что предельная функция имеет вид $\nabla u_0(x) + \nabla_y U(x, y)$, где u_0 — слабый предел u_{ε_k} в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, а U — некоторый элемент пространства $L_2(\mathbb{R}^d; H^1(\mathbb{T}^d))^n$. Далее, пусть $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. По свойству

среднего значения, $\psi(x)\,A(x/\varepsilon_k)$ сходится слабо двухмасштабно к $\psi(x)\,A(y)$, причем
$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x)\,A(x/\varepsilon_k)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d}|\psi(x)\,A(y)|^2\,dx\,dy.$$
Как обычно, слабая сходимость вместе со сходимостью норм влечет сильную сходимость, а произведение сильно и слабо сходящихся последовательностей снова сходится слабо. Тогда уже в силу произвольности ψ функция $A(x/\varepsilon_k)\nabla u_{\varepsilon_k}(x)$ оказывается слабо двухмасштабно сходящейся к $A(y)\,(\nabla u_0(x)+\nabla_y U(x,y))$.

Чтобы найти U, скалярно домножим равенство (3) на $\varepsilon_k v(x,x/\varepsilon_k)$ с $v\in C_c^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^d)^n$. Устремив затем k к бесконечности, получим:
$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\langle A(y)\,(\nabla u_0(x)+\nabla_y U(x,y)),\nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy=0.$$
Отсюда видно (ввиду произвольности v), что функцию U можно записать как $U(x,y)=N(y)\nabla u_0(x)$, где $N\in H^1(\mathbb{T}^d)$ — слабое решение так называемой задачи на ячейке $\mathbb{T}^d$:
$$-\operatorname{div}A(\nabla N+I)=0. \tag{5}$$
Благодаря условию коэрцитивности (2), данная задача является сильно эллиптической, а ее решение существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Теперь уже несложно понять, какому уравнению удовлетворяет u_0. Из слабой двухмасштабной сходимости вытекает сходимость в смысле распределений к среднему значению от предельной функции по переменной $y\in\mathbb{T}^d$, а значит, $A^{\varepsilon_k}\nabla u_{\varepsilon_k}$ как распределение стремится к $A^0\nabla u_0$, где
$$A^0=\int_{\mathbb{T}^d}A(y)\,(I+\nabla N(y))\,dy. \tag{6}$$
Поскольку также u_{ε_k} слабо сходится к u_0, то, переходя в (3) к пределу при $k\to\infty$, находим, что u_0 является решением задачи
$$\mathcal{A}^0u_0-\mu u_0=f \tag{7}$$
для оператора $\mathcal{A}^0=-\operatorname{div}A^0\nabla$ с постоянным коэффициентом.

Задачи (3) и (7) отвечают одинаковым физическим процессам, первая — в сильно неоднородной среде, вторая — в однородной, а введенный формулой (6) тензор A^0 как раз и определяет эффективные свойства последней. Переход от (3) к (7) тем самым описывает «усреднение» среды, или, иначе, «гомогенизацию».

Отдельно отметим, что физической постановке соответствует некоторое одно, фиксированное ε. В ряде случаев помимо собственно сходимости удается найти также ее скорость. Тогда мы можем указать и ошибку, которую совершаем, заменяя исходную среду эффективной. Понятие «малости», разумеется, относительно, и величину периода следует сравнивать с характерным размером рассматриваемого образца. То, что в представленной модели среда бесконечна, позволяет оставить в стороне вопрос о влиянии границы на усреднение, однако все эффекты внутри самого образца описываются точно.

Результат о сходимости решений u_{ε_k} легко переводится на язык операторного формализма. Действительно, мы получили, что резольвента исходного оператора $\mathcal{A}^{\varepsilon_k}$ сходится к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$ в слабой операторной топологии на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве слабая резольвентная сходимость, как известно, эквивалентна сильной. Выясняется, что на самом деле у резольвенты есть предел по операторной норме.

По-видимому, впервые подобный результат (именно для неограниченной области) был описан в статье [BSu01] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной (подробное изложение можно найти в [BSu03]). Предложенный там теоретико-операторный подход распространялся на самосопряженные периодические операторы в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ вида $\mathcal{A}^\varepsilon = b(\nabla)^* \boldsymbol{C}(x/\varepsilon)\, b(\nabla)$, где $b(\nabla)$ — однородный матричный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами и невырожденным (в некотором смысле) символом, а $\boldsymbol{C}$ — ограниченная равномерно эллиптическая матрица-функция. Такие операторы, как и ранее, можно записать в дивергентной форме, а специальная структура тензора $A(x)$ оказывается ограничением лишь в матричном случае (впрочем, не для оператора теории упругости). Кроме самой сходимости резольвенты, в [BSu01] была установлена и ее скорость:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{8}$$

Здесь постоянная C не зависит ни от ε, ни от f, а оператор $\mathcal{A}^0$ — тот же, что и выше.

Для доказательства сначала применялись масштабное преобразование и теория Флоке–Блоха. С их помощью дело сводилось к изучению аналитического семейства операторов $\mathcal{A}(k) = b(\nabla + ik)^* \boldsymbol{C}(x)\, b(\nabla + ik)$ на ячейке $\mathbb{T}^d$ (параметр k — квазиимпульс — принадлежит ячейке Вигнера–Зейтца двойственной решетки). Резольвента каждого оператора в семействе компактна, а значит, соответствующий спектр — дискретен. Как оказалось, для усреднения имеет значение лишь то, что происходит около нижнего края спектра. У оператора $\mathcal{A}(0)$ краем является точка 0. При увеличении $|k|$ находившиеся в ней собственные значения начинают сдвигаться вправо, но между ними и оставшейся частью спектра сохраняется зазор, пока $|k|$ достаточно мало. Основное внимание уделялось именно анализу этих собственных значений и отвечающих им собственных векторов при малых $|k|$. В построениях существенно использовалась аналитическая теория возмущений, ее функция отчасти напоминала роль формальных асимптотических разложений в классической теории усреднения, однако не сводилась к последней и была намного глубже.

Заметим, что теория Флоке–Блоха и аналитическая теория возмущений применялись в задачах усреднения и раньше и уже успели стать стандартными инструментами так называемого спектрального подхода, см., например, [BLP78], [Sev81], [Zh89], [CV97].

Большой интерес представляет также поведение u_ε в энергетической норме. Мы видели, что подпоследовательность u_{ε_k} имеет в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ слабый предел, но сильного может не быть. В таком случае остается искать приближение к u_ε.

В статье [ZhP05] В. В. Жиков и С. Е. Пастухова доказали операторную оценку

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{9}$$

Она содержит новое слагаемое — корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, который задается формулой

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon=N(x/\varepsilon)\mathcal{S}^\varepsilon\nabla(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}, \tag{10}$$

где $\mathcal{S}^\varepsilon$ — сглаживание по Стеклову. Обратим внимание на то, что, из-за быстрых осцилляций у функции $N(x/\varepsilon)$, производная от $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ имеет порядок ε^{-1}, а значит, все слагаемые в левой части (9) вносят сопоставимые вклады.

Приближение (9) получалось более привычным для теории усреднения способом (и одновременно — более простым). Сначала строилось сглаженное первое приближение $\mathcal{S}^\varepsilon u_0(x)+N(x/\varepsilon)\nabla\mathcal{S}^\varepsilon u_0(x)$ к решению исходного уравнения $u_\varepsilon(x)$. Разность w_ε между ними подставлялась в квадратичную форму оператора $\mathcal{A}^\varepsilon-\mu$, которая затем оценивалась сверху:

$$|(\mathcal{A}^\varepsilon w_\varepsilon-\mu w_\varepsilon,w_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}|\leqslant C\varepsilon^2\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}.$$

Так как $\mathcal{A}^\varepsilon$ предполагался неотрицательным, а μ было отделено от спектра, то отсюда сразу же вытекало неравенство $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}$. Чтобы прийти к (9), оставалось только учесть, что H^1-норма функции $u_0-\mathcal{S}^\varepsilon u_0$ имеет порядок погрешности.

Поскольку операторная норма корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ равномерно ограничена по ε, то (9) влекло за собой (8). Интересно отметить, что (некоторое) сглаженное первое приближение неявно присутствовало и в работе [BSu01], несмотря на то что оценка (8) доказывалась напрямую.

Поясним роль сглаживания в формуле (10). Когда $N\in W^1_\infty(\mathbb{T}^d)$, функция $N(x/\varepsilon)\nabla u_0(x)$ и ее производная квадратично суммируемы, поэтому левая часть (9) сохранит смысл, если из $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ убрать $\mathcal{S}^\varepsilon$ — именно такой корректор был в классическом первом приближении к u_ε. Однако решение задачи (5), вообще говоря, даже не ограничено, и чтобы произведение $N(x/\varepsilon)\nabla u_0(x)$ принадлежало $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, на коэффициенты исходного оператора необходимо накладывать дополнительные условия. Включение сглаживателя избавляет от такой необходимости.

Сама идея использовать некоторый сглаживающий оператор в корректоре появилась чуть ранее, в статье [CDG02], а операторную оценку типа (9) для задачи в ограниченной области можно было встретить в [Gri02] и [Gri04]. Сглаживатель там отличался от $\mathcal{S}^\varepsilon$, но в целом был к нему очень близок.

За [ZhP05] последовала работа [BSu06], где неравенство (9) доказывалось теоретико-операторным методом. Для регуляризации корректора, однако, применялся другой сглаживатель, который мы обозначим через $\mathcal{P}^\varepsilon$. В определенном смысле $\mathcal{P}^\varepsilon$ был двойственен к $\mathcal{S}^\varepsilon$ и действовал в пространстве квазиимпульсов. Здесь следует отметить, что как в [Gri04], так и в [ZhP05] сглаживающий оператор привносился в задачу искусственно на основании каких-либо эвристических соображений. Напротив, $\mathcal{P}^\varepsilon$ в [BSu06] возникал естественным образом из самого метода.

Тем же теоретико-операторным методом удалось получить еще один, более тонкий результат. Речь идет о приближении к резольвенте оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ с погрешностью порядка ε^2, которое было найдено в статье [BSu05]. Усиление оценки (8) достигалось за счет корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{11}$$

Этот корректор существенно отличался от прежнего, и если $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ в целом был традиционен для теории усреднения (не считая сглаживания), то у $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ аналога в классической теории не было. Структура $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ была следующей:

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) + (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu)^*. \tag{12}$$

В качестве $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ использовался корректор из формулы (10), но со сглаживателем $\mathcal{P}^\varepsilon$ вместо $\mathcal{S}^\varepsilon$, а $\mathcal{L}_\mu$ задавался равенством

$$\mathcal{L}_\mu = (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} \mathcal{L} (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}, \tag{13}$$

где $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами (тем самым $\mathcal{L}_\mu$ не зависел от ε).

Необходимо подчеркнуть, что для более точного, по сравнению с (11), приближения требуется некоторая гладкость функции f. Так, в работе [VSu12] для резольвенты было выписано приближение по операторной норме из $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ с погрешностью порядка ε^3. К корректору $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ при этом добавлялся еще один — следующего порядка.

В дальнейшем данные результаты обобщались в различных направлениях. Например, в [Su10] и [Su14] оценки (8), (9) и (11) были перенесены на операторы с младшими членами из подходящих L_p-классов. Приближения (8) и (9) для задач в ограниченной области обсуждались в уже упомянутых работах [Gri04] и [ZhP05], а кроме них также в [Gri06], [KLS12], [PSu12], [Su13$_1$], [Su13$_2$], [KLS13], [ShZh17] и др. Укажем еще недавний обзор [ZhPas16] по операторным оценкам в теории усреднения, полученным В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой.

До сих пор считалось, что тензор A периодичен по каждой переменной. Это соответствовало тому, что в пространстве $\mathbb{R}^d$ можно найти базис, порождающий для A решетку периодов (в рассмотренном ранее случае базис был стандартным, а решетка совпадала с $\mathbb{Z}^d$). В приложениях встречаются задачи, в которых ранг решетки строго меньше размерности пространства, как бывает, скажем, для слоистых сред, волноводов и т. п. Тензор A тогда оказывается периодическим лишь по некоторым, выделенным переменным. Чтобы отличать эти два случая, условимся называть оператор «полностью периодическим», если соответствующая решетка имеет полный ранг. У «периодического» оператора ранг решетки может быть произвольным (но, разумеется, положительным).

Периодические операторы, в свою очередь, являются частным случаем еще более широкого класса локально периодических операторов. Коэффициенты подобных операторов мало изменяются при сдвиге аргумента на небольшое число «периодов», то есть локально ведут себя почти как периодические функции. Но с ростом числа «периодов» изменение становится всё более сильным, а значит, о глобальной периодичности даже в каком-либо приближенном смысле говорить не приходится.

Именно такие периодические и локально периодические операторы изучаются в данной работе.

Содержание работы

Работа состоит из двух частей. Первая посвящена усреднению периодических операторов, и к ней относится глава 1. Во второй части, включающей главы 2 и 3, задача усреднения ставится для локально периодических операторов. Каждая часть начинается с краткого содержания, где описываются основные результаты, а также методы, с помощью которых эти результаты достигаются. Здесь мы лишь обсудим общий характер работы.

Итак, в главе 1 рассматривается задача усреднения для оператора с периодическими коэффициентами. Пусть $d = d_1 + d_2$, где $d_1 > 0$ — ранг решетки периодичности. Соответственно, переменная $x \in \mathbb{R}^d$ представляется прямой суммой $x_1 \oplus x_2$ с $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Мы не исключаем полностью периодический случай, когда $d_1 = d$ и $x_1 = x$, но им не ограничиваемся.

Оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$, который действует между комплексными пространствами $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, зададим формулой

$$\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x_1/\varepsilon, x_2)\nabla + a_1^*(x_1/\varepsilon, x_2)\nabla + \operatorname{div} a_2(x_1/\varepsilon, x_2) + q(x_1/\varepsilon, x_2). \tag{14}$$

Его коэффициенты могут принадлежать довольно общим классам мультипликаторов в парах пространств Соболева, причем в качестве q допускаются комплексные распределения. Если $d_2 > 0$, то тем же классам должны принадлежать и слабые производные от коэффициентов по второй переменной. По первой переменной предполагается только периодичность относительно решетки $\mathbb{Z}^{d_1}$.

Для функции A условия регулярности имеют наиболее простой вид и сводятся к равномерной ограниченности A и $\nabla_{x_2} A$. Отметим, что никакие требования на структуру тензора $A(x)$ не накладываются.

Не нужна и формальная самосопряженность оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$, лишь бы он был равномерно коэрцитивным, то есть при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \geqslant c_* \|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} - c_\natural \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \tag{15}$$

с положительной постоянной c_* и неотрицательной постоянной $c_\natural$. Классы коэффициентов выбираются так, чтобы вместе с коэрцитивностью обеспечить равномерную ограниченность оператора,

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C_\flat \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{16}$$

Условие (15) сейчас играет ту же роль, что и полуограниченность (2) в самосопряженном случае. Из оценок (15) и (16), в частности, следует, что при $\varepsilon \in \mathscr{E}$ спектр каждого оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ содержится внутри одного и того же сектора $\mathscr{S}$, ось которого лежит на вещественной прямой, а угол раствора не превосходит π.

Причины, по которым оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ может стать несамосопряженным, различны. Например, с помощью несимметричной матрицы-функции A в задачу диффузии удается включить определенного типа «сингулярный» снос $\varepsilon^{-1} v(x_1/\varepsilon, x_2)$, растущий при $\varepsilon \to 0$. Уравнению конвекции-диффузии с общим несингулярным сносом также отвечает несамосопряженный оператор — уже из-за члена первого порядка. В квантовой механике несамосопряженные гамильтонианы появляются в связи с $\mathcal{PT}$-симметричными системами (см. [Be05] и цитированную там литературу). Как известно, некоторые оптические модели сводятся к уравнению типа Шрёдингера. В частности, распространение линейно поляризованной гармонической по времени волны в одномерном фотонном кристалле описывается стационарным уравнением Шрёдингера, а соответствующий потенциал выражается через диэлектрическую проницаемость среды. Тем самым если кристалл содержит усиливающие или поглощающие компоненты, то потенциал оказывается комплексным. На такой аналогии понятие $\mathcal{PT}$-симметрии переносится из квантовой механики в оптику (см. статью [ZVPDL14] и ссылки в ней).

Перейдем к формулировке основных результатов главы.

Во-первых, мы показываем, что резольвента $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ сходится, притом для любых $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \tag{17}$$

(всюду, где не оговорено противное, предполагается, что $\mu \notin \mathscr{S}$). Эффективный оператор имеет тот же вид, что и исходный, а его коэффициенты зависят лишь от «непериодической» переменной x_2:

$$\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} A^0(x_2)\nabla + (a_1^0)^*(x_2)\nabla + \operatorname{div} a_2^0(x_2) + q^0(x_2). \tag{18}$$

Чтобы ввести эти коэффициенты, нужны уже две вспомогательные задачи. Одна является непосредственным обобщением (5) и входит в определения функций A^0 и a_1^0; с помощью другой задаются a_2^0 и q^0. Каждая задача ставится на d_1-мерной ячейке $\mathbb{T}^{d_1}$, а переменная x_2 играет роль параметра. Так, равенство (5) принимает вид

$$-\operatorname{div} A(\cdot, x_2)(\nabla N(\cdot, x_2) + I) = 0. \tag{19}$$

Соответственно, вместо (6) сейчас используется формула

$$A^0(x_2) = \int_{\mathbb{T}^{d_1}} A(y_1, x_2)(I + \nabla N(y_1, x_2))\, dy_1. \tag{20}$$

Аналогичным образом x_2 появляется и в эффективных коэффициентах при младших членах.

Во-вторых, мы получаем приближение для композиции $\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ и доказываем, что при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{21}$$

Корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ включает решения обеих вспомогательных задач, но если, скажем, $a_2 = 0$, то выражение для $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ упрощается:

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon = N(x_1/\varepsilon, x_2)\mathcal{P}^\varepsilon\nabla(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} \tag{22}$$

(ср. с (10)). Здесь $\mathcal{P}^\varepsilon$ — такой же сглаживатель, как в [BSu06], но действующий лишь по первой, осциллирующей переменной.

В-третьих, мы находим следующий член в приближении для резольвенты по операторной норме на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Как и ранее (см. формулу (12)), он состоит из двух групп слагаемых, однако сейчас одна группа строится не по исходному оператору, а по сопряженному к нему — именно так возникают $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+$ и $\mathcal{L}_\mu^+$:

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) + ((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ - \mathcal{L}_\mu^+)^*. \tag{23}$$

По-прежнему $\mathcal{L}_\mu$ выражается через резольвенту эффективного оператора и некоторый дифференциальный оператор третьего порядка, но коэффициенты последнего уже зависят от «непериодической» переменной x_2 (ср. с (13)); то же верно для $\mathcal{L}_\mu^+$. Оценка погрешности сохраняет свой вид:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}, \tag{24}$$

где $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ произвольны.

Отметим, что перечисленные результаты естественным образом распространяются на все μ, не принадлежащие спектру $\mathcal{A}^0$ как оператора в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Однако если такое μ попадет в сектор $\mathcal{S}$, то интервал $\mathcal{E}$ придется сузить, а значит, ширина нового интервала будет зависеть от μ. Тем не менее ее можно полностью контролировать.

Во второй части мы изучаем задачу усреднения для локально периодических операторов. Такие операторы появляются, когда к периодической зависимости от «быстрой» переменной x/ε добавляется еще и гладкая зависимость от «медленной» переменной x, например:

$$\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla. \tag{25}$$

В частности, если $A(x, x/\varepsilon) = A(x_2, x_1/\varepsilon)$, где $x = x_1 \oplus x_2$, то приходим к периодической задаче как в части I (лишь аргументы сейчас расположены в обратном порядке). По сравнению с периодической, локально периодическая задача оказывается технически более сложной, и, чтобы избежать излишней громоздкости, мы не станем включать в оператор младшие члены. Тем самым равенство (25) далее принимается за определение $\mathcal{A}^\varepsilon$.

В главе 2 мы получаем приближения вида (17), (21) и (24) для $\mathcal{A}^\varepsilon$ при том условии, что функция A является липшицевой по первому аргументу. Укажем основные отличия от периодического случая.

Вспомогательная задача для локально периодического оператора ставится на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$, а параметром служит переменная x:

$$-\operatorname{div} A(x,\cdot)\,(\nabla N(x,\cdot)+I)=0. \tag{26}$$

Тогда и эффективный коэффициент

$$A^0(x)=\int_{\mathbb{T}^d} A(x,y)\,(I+\nabla N(x,y))\,dy \tag{27}$$

зависит от «медленной» переменной x.

Далее, в непериодических задачах оператор $\mathcal{P}^\varepsilon$ перестает играть выделенную роль, а более удобным оказывается сглаживатель по Стеклову $\mathcal{S}^\varepsilon$. Его, следуя [PT07], мы и используем для регуляризации корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, причем сглаживание применяется не только к резольвенте эффективного оператора, как было ранее (см. формулу (22)), но также к функции N.

Корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ изменяется сильнее. В свое время появление в нём, помимо $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, других слагаемых вызвало немалое удивление. Сейчас к этим слагаемым добавляется еще одно — $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$:

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon=(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon-\mathcal{L}_\mu)-\mathcal{M}_\mu^\varepsilon+((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+-\mathcal{L}_\mu^+)^*. \tag{28}$$

Если по «медленной» переменной функция A достаточно гладкая, то $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ можно отнести к погрешности. Однако этого заведомо нельзя сделать без дополнительных условий.

Описанные периодические и локально периодические операторы объединяет то, что производная по «медленной» переменной от каждого коэффициента принадлежит тому же мультипликаторному классу, что и сам коэффициент: $\nabla_{x_2}A(x_1,x_2)$ в периодической задаче и $\nabla_x A(x,y)$ в локально периодической задаче остаются равномерно ограниченными, как и $A(x_1,x_2)$ и $A(x,y)$. Такие коэффициенты мы будем — несколько вольно — называть «липшицевыми», подразумевая именно сохранение класса при дифференцировании по «медленной» переменной.

«Липшицевость» коэффициентов существенно используется в доказательствах, однако, как легко понять, не является необходимой для постановки задачи.

В главе 3 мы ослабляем «липшицевость» до «гёльдеровости» с показателем $s\in[0,1)$ (имея в виду опять же гёльдеровость функции A по «медленной» переменной). Эффективный оператор и корректоры задаются прежними формулами, меняются только свойства этих операторов, что в итоге отражается на результатах. Так, если $s=0$, то $(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}$ по-прежнему сходится к $(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}$, однако скорость сходимости остается неизвестной. С другой стороны, при $s>0$ удается оценить и скорость, хотя ее порядок оказывается хуже, чем в «липшицевом» случае:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}\leqslant C\varepsilon^s\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{29}$$

В остальных приближениях от s зависит не только величина погрешности, но и сам вид приближения.

Например, для оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ с «гёльдеровыми» коэффициентами приближение (21) заведомо невозможно, поскольку функция $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ не является дифференцируемой. В «липшицевом» случае включение $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ обеспечивалось, по существу, равномерной ограниченностью производной $\nabla_x A(x, y)$. Сейчас естественно предположить, что равномерно ограничена некоторая дробная производная $D_x^{s,2} A(x, y)$ порядка s: тогда окажется, что $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f \in H^s(\mathbb{R}^d)^n$, и при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ будет верна оценка

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{30}$$

Впрочем, без корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и связанных с ним дополнительных предположений удается обойтись, пусть и за счет возможного ухудшения погрешности.

В приближении типа (24) величиной показателя s определяется уже и корректор. Дело в том, что формулы, которыми задаются слагаемые $\mathcal{L}_\mu$ и $\mathcal{L}_\mu^+$ из $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, вообще говоря, не имеют смысла при $s \leqslant 1/2$, поэтому $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ может использоваться только для достаточно больших s. Соответствующая оценка принимает следующий вид:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}, \tag{31}$$

где $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ произвольны. Выясняется, что при $s \leqslant 2/3$ с ролью корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ в (31) успешно справляется один лишь оператор $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$; другими словами, если $s \leqslant 2/3$, а ε и f — те же, что и выше, то

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{32}$$

Метод доказательства

Идеи, используемые в первых двух главах, во многом похожи. Наиболее отчетливо они проявляются в главе 1: рассуждения там довольно прозрачны, хотя и требуют определенной подготовки — разложения в «прямой интеграл». Сам процесс усреднения строится вокруг специального операторного тождества, включающего резольвенты исходного и эффективного операторов, а также корректор. Обосновать сходимость резольвенты удается благодаря тому, что старшие вклады в тождестве сокращаются, а скорость сходимости получается, если аккуратно оценить оставшиеся слагаемые. Отметим, что подобная «операторная» точка зрения вообще была характерна для абстрактного теоретико-операторного подхода Бирмана–Суслиной; в то же время использование конкретного первого приближения сближает проводимые здесь рассуждения с подходами Гризо и Жикова–Пастуховой.

Аналогичное операторное тождество устанавливается и в главе 2, и мы стараемся, насколько возможно, следовать прежней схеме. Однако отличия в технических приемах значительны, в том числе и из-за смены сглаживателя, который в известной мере определяет технику. Громоздкость построений при этом несколько возрастает.

В главе 3 мы показываем, что вопрос о приближении для оператора с «гёльдеровыми» коэффициентами можно свести к такому же вопросу для некоторого оператора с «липшицевыми» коэффициентами. Это позволяет далее применить оценки из предыдущей главы и получить искомые результаты. Заметим, что постоянные в оценках ранее зависели от липшицевой полунормы функции A, поэтому недостаток гладкости сейчас приходится компенсировать величиной погрешности.

Обзор известных результатов

Первая попытка распространить подход Бирмана–Суслиной с полностью периодических на общие периодические задачи была предпринята вскоре после выхода статьи [BSu03]. Выяснилось, что сам теоретико-операторный метод для подобных задач не годится, но тем не менее в определенных случаях доказать приближения удается. Простейшим примером служит задача для скалярного самосопряженного оператора $-\operatorname{div} A(x_1/\varepsilon, x_2)\nabla$ в цилиндре $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, когда матрица-функция A диагональна. Такой оператор изучался в работе [Su04$_1$], где для него была получена оценка вида (17).

Поскольку и цилиндр $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, и пространство $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ представляют собой плоские многообразия без края, то процедуры усреднения соответствующих $\varepsilon\mathbb{Z}$-периодических задач ничем не отличаются. На случай пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ результат из [Su04$_1$] был перенесен в [BCSu11].

В работе [Se13] автора скалярный самосопряженный оператор включал неограниченные младшие члены, а помимо сходимости резольвенты (17) было получено еще и приближение (21). Кроме того, аналогичные результаты устанавливались для оператора в полосе $\mathbb{R}\times(0,1)$ с условиями Дирихле или Неймана на границе. Однако диагональность матрицы-функции A всё еще была нужна.

Операторные оценки погрешности для локально периодических операторов изучались в статьях [Bor08] и [PT07].

В первой из них рассматривался матричный самосопряженный оператор с достаточно гладкими коэффициентами. Его старшая часть имела вид $b(\nabla)^*\boldsymbol{C}(x,x/\varepsilon)\,b(\nabla)$; у оператора могли быть и младшие члены. Основными результатами были оценки вида (17) и (21).

В работе [PT07] такие же оценки доказывались для операторов акустики и теории упругости — с «липшицевыми» коэффициентами. Симметричность тензора $A(x,y)$ предполагалась, хотя и не была принципиально необходима.

Подчеркнем, что приближение (24) ранее было получено лишь для полностью периодических самосопряженных операторов (соответствующие результаты, напомним, находятся в [BSu05] и [Su14]), а операторные оценки погрешности для случая «гёльдеровых» коэффициентов прежде известны не были.

Апробация результатов

Результаты по теме диссертации докладывались на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ, на семинаре по математической физике ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, а также на международных конференциях:

1 *8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations*, Москва, Россия, 2017 г.;

2 *9th St. Petersburg Conference in Spectral Theory*, Санкт-Петербург, Россия, 2017 г.;

3 *Days on Diffraction*, Санкт-Петербург, Россия, 2017 г.;

4 *Trilateral German–Russian–Ukrainian Summer School: Spectral Theory, Differential Equations and Probability*, Майнц, Германия, 2016 г.;

5 *7th St. Petersburg Conference in Spectral Theory*, Санкт-Петербург, Россия, 2015 г.;

6 *Days on Diffraction*, Санкт-Петербург, Россия, 2015 г.;

7 *7th International Conference on Differential and Functional Differential Equations*, Москва, Россия, 2014 г.;

8 *Days on Diffraction*, Санкт-Петербург, Россия, 2013 г.;

9 *Mathematical Methods for Spectral Problems: Applications to Waveguides, Periodic Media and Metamaterials*, Хельсинки, Финляндия, 2013 г.;

10 *Trilateral French–German–Russian Workshop: Asymptotic Analysis and Spectral Theory on Non-Compact Structures*, Майнц, Германия, 2012 г.;

11 *4th St. Petersburg Conference in Spectral Theory*, Санкт-Петербург, Россия, 2012 г.;

12 *Days on Diffraction*, Санкт-Петербург, Россия, 2012 г.

Публикации

Результаты по теме диссертации были опубликованы в одной работе в электронном журнале, четырех статьях в рецензируемых научных журналах, а также в одной статье в трудах конференции:

1 *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators. — 2017. — arXiv: 1703.02023 [math.AP];

2 *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов // *Функц. анализ и его прил.* — 2017. — Т. 51, № 2. — С. 92–96;

3 *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // *SIAM J. Math. Anal.* — 2017. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 874–898;

4 *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре // *Функц. анализ и его прил.* — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 85–89;

5 *Сеник Н. Н.* Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях // *Алгебра и анализ.* — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 182–259;

6 *Senik N. N.* On homogenization for periodic elliptic second order differential operators in a strip // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction. — 2012. — Pp. 215–220.

Все публикации, кроме первой, входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, предварительных сведений, трех глав, разделенных на две части, и заключения. Ее полный объем составляет 144 страницы. Библиография содержит 55 наименований.

Благодарности

Я искренне благодарю своего научного руководителя, Т. А. Суслину, за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа над диссертацией была выполнена при финансовой поддержке конкурса стипендии им. В. А. Рохлина и конкурса стипендий «Молодая математика России», и я крайне признателен жюри этих конкурсов.

Обозначения и предварительные сведения

Символом $B_r(x)$ будет обозначаться открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x и радиусом r. Если в $\mathbb{R}^d$ выбрана какая-либо прямоугольная система координат, то $Q_r(x)$ — замкнутый куб в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x, ребром длины r и сторонами, параллельными осям координат.

Норма в бесконечномерном банаховом пространстве U обозначается через $\|\cdot\|_U$. Если V — еще одно банахово пространство, то $\mathbf{B}(U,V)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из U в V. При $U=V$ мы получаем банахову алгебру $\mathbf{B}(U)=\mathbf{B}(U,U)$ с единицей $\mathcal{I}$. Норма и скалярное произведение в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $|\cdot|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Мы часто будем отождествлять пространство линейных операторов $\mathbf{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ с пространством векторов $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Пусть Σ — область в $\mathbb{R}^d$ (не обязательно ограниченная). Тогда $L_p(\Sigma;U)$, $p\in[1,\infty]$, представляет собой банахово пространство сильно измеримых функций $u\colon\Sigma\to U$, для которых при $p<\infty$

$$\|u\|^p_{L_p(\Sigma;U)}=\int_\Sigma\|u(x)\|^p_U\,dx<\infty,$$

а при $p=\infty$ —

$$\|u\|_{L_\infty(\Sigma;U)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Sigma}\|u(x)\|_U<\infty.$$

В случае, когда $U=V\otimes\mathbb{C}^n$, будем писать $L_p(\Sigma;V)^n$ (или просто $L_p(\Sigma;V)$, если размерность n ясна из контекста). Норму в $L_p(\Sigma)^n$ и скалярное произведение в $L_2(\Sigma)^n$ обозначаем через $\|\cdot\|_{p,\Sigma}$ и $(\cdot,\cdot)_\Sigma$.

Класс Соболева $W^m_p(\Sigma;U)$ с $m\in\mathbb{N}$ и $p\in[1,\infty]$ представляет собой банахово пространство функций $u\in L_p(\Sigma;U)$, у которых есть все слабые производные до порядка m включительно, причем

$$\|u\|^p_{W^m_p(\Sigma;U)}=\sum_{|\alpha|=0}^m\|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Sigma;U)}<\infty,$$

если $p<\infty$, и

$$\|u\|_{W^m_\infty(\Sigma;U)}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Sigma;U)}<\infty,$$

если $p=\infty$. Как и в случае пространств Лебега, при $U=V\otimes\mathbb{C}^n$ вместо $W^m_p(\Sigma;U)$ пишем $W^m_p(\Sigma;V)^n$, а для нормы в $W^m_p(\Sigma)^n$ используем символ $\|\cdot\|_{m,p,\Sigma}$. Под $W^m_p(\Sigma)^*$ понимается двойственное к $W^m_p(\Sigma)$ пространство относительно спаривания $(\cdot,\cdot)_\Sigma$. Если в $W^m_p(\Sigma)$ плотны функции из $C^\infty_c(\Sigma)$ (то есть гладкие функции с компактным носителем в Σ), то, как обычно,

$W_{p^+}^{-m}(\Sigma) = W_p^m(\Sigma)^*$, где p^+ — сопряженный к p показатель. Норма распределения f в $W_{p^+}^{-m}(\Sigma)$ дается выражением

$$\|f\|_{W_{p^+}^{-m}(\Sigma)} = \sup_{u\in W_p^m(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{|(f,u)_\Sigma|}{\|u\|_{m,p,\Sigma}}.$$

Коротко ее обозначаем через $\|\cdot\|_{-m,p,\Sigma}$. Условимся определять классы Соболева на замкнутом множестве как соответствующие классы на его внутренности.

Перейдем к пространствам дробной гладкости. Если $u\colon \Sigma \to U$, то соотношение $\Delta_h u(x) = u(x+h)-u(x)$ задает на множестве $\Sigma_{-x} = \{h \in \mathbb{R}^d : x+h \in \Sigma\}$ отображение $h \mapsto \Delta_h u(x)$. (Отметим, что для $\Sigma = \mathbb{R}^d$ и $\Sigma = \mathbb{T}^d$ при любых x из Σ выполнено $\Sigma_x = \Sigma$.) Его свойства отражают гладкость самой функции u. Дробной производной $D_{\Sigma,U}^{s,p}u$ порядка s мы будем называть отображение на Σ, определенное формулой

$$D_{\Sigma,U}^{s,p}u(x) = \left(\int_{\Sigma_{-x}} |h|^{-d-sp}\|\Delta_h u(x)\|_U^p\,dh\right)^{1/p}$$

для $s \in (0,1)$ и $p<\infty$ и формулой

$$D_{\Sigma,U}^{s,\infty}u(x) = \sup_{h\in\Sigma_{-x}\setminus\{0\}} |h|^{-s}\|\Delta_h u(x)\|_U$$

для $s \in (0,1]$ и $p=\infty$, при условии что правая часть соответствующего равенства почти всюду имеет смысл. Если $U = \mathbb{C}^n$, то нижний индекс U у $D_{\Sigma,U}^{s,p}$ будем опускать. Возникающие операторы дробного дифференцирования оказываются субаддитивными.

Дифференцирование $D_{\Sigma,U}^{s,\infty}$ было задано и при $s = 1$, но вместо него в основном будет использоваться дифференциал D (скажем, для липшицевых отображений такой переход оправдывает теорема Радемахера). При $p \neq \infty$ будет удобно положить $D_{\Sigma,U}^{1,p}$ равным оператору D.

Введем $C^m(\bar\Sigma;U)$, где $m \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$), как подпространство функций u из $W_\infty^m(\Sigma;U)$, которые равномерно непрерывны вместе с производными до порядка m включительно. (Тогда $D^\alpha u$ с $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ единственным образом продолжаются до равномерно непрерывных отображений на замыкании Σ, что и отражено в обозначении.) Если $s \in (0,1]$, то класс гёльдеровых (липшицевых при $s=1$) функций $C^{m,s}(\bar\Sigma;U)$ состоит из тех $u \in C^m(\bar\Sigma;U)$, для которых $D_{\Sigma,U}^{s,\infty}D^\alpha u$ при $|\alpha| = m$ содержатся в $L_\infty(\Sigma)$. Норма u в $C^{m,s}(\bar\Sigma;U)$ задается как

$$\|u\|_{C^{m,s}(\bar\Sigma;U)} = \max_{|\alpha|=m}\|D_{\Sigma,U}^{s,\infty}D^\alpha u\|_{L_\infty(\Sigma)} + \|u\|_{W_\infty^m(\Sigma;U)}.$$

По определению $C^{m,0}(\bar\Sigma;U) = C^m(\bar\Sigma;U)$.

Одним из обобщений классов Соболева на случай нецелых m являются пространства Соболева–Слободецкого. Пусть $s = \lfloor s\rfloor + \{s\}$, где $\lfloor s\rfloor \in \mathbb{N}_0$ и $\{s\} \in (0,1)$. Функция $u \in W_p^{\lfloor s\rfloor}(\Sigma;U)$, $p \neq \infty$, является элементом $W_p^s(\Sigma;U)$ при условии, что

$$\|u\|_{W_p^s(\Sigma;U)}^p = \sum_{|\alpha|=\lfloor s\rfloor}\|D_{\Sigma,U}^{\{s\},p}D^\alpha u\|_{L_p(\Sigma)}^p + \|u\|_{W_p^{\lfloor s\rfloor}(\Sigma;U)}^p < \infty.$$

Когда $U = V \otimes \mathbb{C}^n$ и, в частности, когда $U = \mathbb{C}^n$, мы пользуемся такими же сокращениями для пространств Соболева–Слободецкого и соответствующих норм, что и для исходных классов Соболева. Как и выше, двойственное к $W_p^s(\Sigma)$ пространство обозначаем через $W_{p^+}^{-s}(\Sigma)$, если множество $C_c^\infty(\Sigma)$ плотно в $W_p^s(\Sigma)$.

Отдельно отметим, что, когда U гильбертово, а $s \in (0,1)$, класс $W_2^s(\mathbb{R}^d;U)$ можно охарактеризовать с помощью дробного лапласиана $(-\Delta)^{s/2}$ (как псевдодифференциального оператора с символом $\xi \mapsto |\xi|^s$), поскольку для всех $u \in W_2^s(\mathbb{R}^d;U)$

$$\|D^{s,2}_{\mathbb{R}^d,U} u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \sim \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;U)}$$

(знак $\sim$ означает равенство с точностью до постоянного множителя). Тем самым функция v принадлежит $W_2^s(\mathbb{R}^d;U)$, если и только если

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \|\mathcal{F}v(\xi)\|_U^2 \, d\xi < \infty$$

($\mathcal{F}$ — преобразование Фурье). Более того, последнее условие определяет включение в $W_2^s(\mathbb{R}^d;U)$ уже при любых $s \in \mathbb{R}$.

Остановимся на периодических пространствах. Здесь мы ограничимся лишь случаем целых неотрицательных m. Пусть $\tilde{C}^m(Q)$ — множество функций на $Q = Q_1(0)$, периодическое продолжение которых принадлежит $C^m(\mathbb{R}^d)$ (то есть имеет m непрерывных производных). Тогда $\tilde{W}_p^m(Q)$ представляет собой замыкание $\tilde{C}^m(Q)$ в $W_p^m(Q)$. Заметим, что $\tilde{L}_p(Q)$ может быть отождествлено с пространством всех периодических функций из $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Классы $\tilde{C}^m(\mathbb{R}^d \times Q)$ и $\tilde{W}_p^m(\mathbb{R}^d \times Q)$ задаются аналогичным образом. Если интерпретировать периодические функции на кубе Q как функции на торе $\mathbb{T}^d$, то введенные периодические пространства оказываются пространствами на многообразии без края. Тем самым в них будут плотны гладкие функции с компактным носителем, а потому для двойственных пространств $\tilde{W}_p^m(\mathbb{Q})^*$ и $\tilde{W}_p^m(\mathbb{R}^d \times Q)^*$ оправданы обозначения $\tilde{W}_{p^+}^{-m}(\mathbb{Q})$ и $\tilde{W}_{p^+}^{-m}(\mathbb{R}^d \times Q)$.

В дальнейшем часто будет использоваться неравенство типа Пуанкаре для $\tilde{W}_{2,0}^1(Q)$ — пространства функций из $\tilde{W}_2^1(Q)$ с нулевым средним значением. Именно: если $u \in \tilde{W}_{2,0}^1(Q)$ и $k \in Q^*$, где $Q^* = 2\pi Q$ (Q^* — ячейка Вигнера–Зейтца для решетки, двойственной к исходной решетке $\mathbb{Z}^d$ с ячейкой Q, отсюда и соответствующее обозначение), то с помощью разложения функции u в ряд Фурье легко выводится, что

$$\|u\|_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \pi^{-1} \|(D+k)u\|_{2,\mathbb{Q}}.$$

Если $k = 0$, то эта оценка представляет собой в точности неравенство Пуанкаре. Мы продолжим называть его неравенством Пуанкаре и для $k \neq 0$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что имеется в виду случай $k = 0$, будем говорить о «стандартном неравенстве Пуанкаре».

При $p = 2$ вместо W_p^m будем писать H^m, вместо $W_{p^+}^{-m}$ — H^{-m} и т. д.

Различные свойства лебеговых и соболевских пространств можно найти, например, в книгах [AF03] и [M11].

Теперь коротко обсудим классы мультипликаторов. Мультипликатор в паре пространств Лебега, Соболева или Соболева–Слободецкого представляет собой (обобщенную) функцию, оператор умножения на которую непрерывен. Иначе говоря, если U и V — некоторые функциональные классы указанных типов, возможно на разных областях, то γ является мультипликатором между U и V при условии, что $\|\gamma u\|_V \leqslant C_\gamma \|u\|_U$ для любых $u \in U$. Множество всех таких γ образует пространство $\mathbf{M}(U, V)$ (или $\mathbf{M}(U)$, когда $V = U$).

В простейших случаях $\mathbf{M}(U, V)$ может оказаться одним из введенных выше пространств. Так, $\mathbf{M}(L_2(\Sigma))$ очевидным образом совпадает с $L_\infty(\Sigma)$. Однако классы мультипликаторов, вообще говоря, не сводятся к какой-либо другой известной шкале. Полное и явное описание всех нужных нам мультипликаторных пространств может быть найдено в монографии [MSh09]. Впрочем, в п. 1.1.3 мы также приводим некоторые достаточные условия того, что функция или распределение является мультипликатором в подходящей паре U и V.

Для нормы мультипликатора γ (как оператора умножения) будет применяться сокращенное обозначение $\|\gamma\|_{\mathbf{M}}$.

Если α, β — вещественные числа, то $\alpha \wedge \beta$ — меньшее из них, а $\alpha \vee \beta$ — большее. Через $\lfloor \alpha \rfloor$ и $\lceil \alpha \rceil$ обозначаются ближайшие к α целые числа, первое из которых не больше α, а второе — не меньше α.

Когда конкретные постоянные в оценках вида $\alpha \leqslant C\beta$, $C > 0$, не важны, мы будем писать $\alpha \lesssim \beta$, или, что то же самое, $\beta \gtrsim \alpha$. При этом мы предполагаем, что соответствующие константы могут зависеть лишь от фиксированных параметров задачи. Полный список таких параметров приводится в формулировках основных результатов.

Часть I

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Краткое содержание первой части

Пусть $d_1 > 0$ — число «периодических», а $d_2 \geqslant 0$ — число «непериодических» направлений в $\mathbb{R}^d$ (соответственно, $d = d_1 + d_2$). За периодическую структуру в пространстве будет отвечать решетка $\mathbb{Z}^{d_1}$ с элементарной ячейкой $\mathbb{Q} = [-1/2, 1/2]^{d_1}$. Удобно считать, что эта решетка действует на всём $\mathbb{R}^d$, и тогда фундаментальным множеством для нее будет $\mathcal{F} = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Подчеркнем, что не исключается полностью периодический случай, когда $d_2 = 0$.

Чтобы не слишком загромождать введение, мы ограничимся оператором без младших членов. Пусть $A_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^{d_2}; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))^{n\times n}$ и $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^d$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$, действующий между $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ согласно формуле

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D = \sum_{i,j=1}^d D_i A_{ij}^\varepsilon D_j,$$

где $D = -i\nabla$, а $A^\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x_1, x_2)$. Оператор, как видно, ограничен, причем равномерно по параметру $\varepsilon > 0$. Мы предположим, что он еще и равномерно коэрцитивен по ε из некоторого интервала $\mathcal{E} = (0, \varepsilon_0]$, то есть найдутся такие постоянные $c_A > 0$ и $C_A \geqslant 0$, что для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ будет выполнено

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{\mathbb{R}^d} + C_A \|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \geqslant c_A \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2.$$

Тогда $\mathcal{A}^\varepsilon$ окажется m-секториальным, а отвечающий ему сектор $\mathcal{S}$ не будет зависеть от ε. Тем самым при $\mu \notin \mathcal{S}$ оператор $\mathcal{A}^\varepsilon - \mu$ обратим, а обратный равномерно ограничен. Наша цель — выяснить, как ведет себя резольвента $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$, когда $\varepsilon \to 0$.

Основные результаты

Пусть $D_1 = -i\binom{\nabla_{x_1}}{0}$ и $D_2 = -i\binom{0}{\nabla_{x_2}}$ — операторы дифференцирования по «периодической» переменной x_1 и по «непериодической» переменной x_2 соответственно. При $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ и $\xi \in \mathbb{C}^{d\times n}$ определим вспомогательную функцию $N_\xi(\cdot, x_2)$ как периодическое векторное решение задачи

$$D_1^* A(\cdot, x_2)\,(D_1 N_\xi(\cdot, x_2) + \xi) = 0, \qquad \int_{\mathbb{Q}} N_\xi(\cdot, x_2)\,dx_1 = 0,$$

на ячейке $\mathbb{Q}$; иначе говоря, $N_\xi(\cdot, x_2)$ принадлежит $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$ и удовлетворяет выписанным тождествам в смысле распределений. (Отметим, что переменная x_2 в равенствах играет роль параметра.) Решение такой задачи существует и единственно благодаря коэрцитивности оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$. Отображение $\xi \mapsto N_\xi$, очевидно, линейно, поэтому соотношением $N(x)\xi = N_\xi(x)$ по семейству $\{N_\xi\}_{\xi\in\mathbb{C}^{d\times n}}$ задается функция N. Для нас важно, что она, как и A, является липшицевой по «непериодической» переменной.

Эффективный оператор $\mathcal{A}^0$ действует в той же паре пространств, что и исходный, и имеет вид

$$\mathcal{A}^0 = D^* A^0 D,$$

где

$$A^0(x_2) = \int_{\mathbb{Q}} A(y_1, x_2)\,(I + D_1 N(y_1, x_2))\,dy_1.$$

Поскольку функции A и N липшицевы по x_2, то липшицев и коэффициент A^0, так что эффективный оператор непрерывно переводит $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Отсюда же следует, что он m-секториален, и несложно понять, что в качестве сектора можно взять сектор $\mathcal{S}$.

Первый результат касается сходимости $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ и $D_2(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$.

Теорема. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d},$$
$$\|D_2(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - D_2(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Оценки точны по порядку, а постоянная C явно контролируется через n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Перейдем к описанию корректоров. Традиционный для теории усреднения корректор не всегда годится для наших целей. Его место займет оператор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, отображающий $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ по формуле

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon = N^\varepsilon D(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} \mathcal{P}^\varepsilon$$

(здесь $N^\varepsilon(x) = N(\varepsilon^{-1}x_1, x_2)$). Он отличается от традиционного корректора дополнительным сглаживанием $\mathcal{P}^\varepsilon$, которое представляет собой псевдодифференциальный оператор с символом $\mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*}$, где $\mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*}$ — характеристическая функция множества $\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*$:

$$\mathcal{P}^\varepsilon = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{I})^* \, \mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*} \, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{I})$$

($\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^{d_1}$). Сглаживание может быть и другим: подойдет, например, сглаживание по Стеклову, см. п. 1.6.4. Впрочем, иногда удается обойтись вовсе без сглаживания и использовать традиционный корректор — некоторые достаточные условия приведены в п. 1.6.5.

Теорема. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_1(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - D_1(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon D_1 \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Оценка точна по порядку, а постоянная C явно контролируется через n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Заметим, что из-за быстро осциллирующей функции N^ε в корректоре норма слагаемого $\varepsilon D_1 \mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ является величиной порядка 1. Таким образом, избавиться от $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ в оценке, вообще говоря, нельзя. Необходимое и достаточное для этого условие обсуждается в п. 1.6.6. В то же время норма композиции дробной производной $D_1^{r,2} = D_{\mathbb{R}^{d_1}}^{r,2} \otimes \mathcal{I}$ по «периодической» переменной с $\varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ убывает как ε^{1-r}, а потому $D_1^{r,2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ всегда сходится.

Следствие. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$ и $r \in (0,1)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_1^{r,2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^{1-r} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через r, n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Вернемся к приближению для резольвенты оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$. В самой первой теореме был выписан старший член, а сейчас мы займемся следующим. Он также называется корректором, но существенно отличается от $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и имеет более сложную структуру.

Через $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^+$ обозначим оператор, сопряженный к $\mathcal{A}^\varepsilon - \mu$. Оба оператора устроены одинаково, а кроме того удовлетворяют одним условиям, поэтому $(\mathcal{A}^\varepsilon)^+$ можно было бы рассматривать параллельно с $\mathcal{A}^\varepsilon$: определить функцию N^+, эффективный коэффициент $(A^0)^+$ и т. д.

Введем дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ из $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ с символом

$$k \mapsto \mathcal{L}(k) = (k + D_2)^* \left(\int_{\mathbb{Q}} N^+(y_1, \cdot)^* (k + D_2)^* A(y_1, \cdot)\,(I + D_1 N(y_1, \cdot))\, dy_1 \right) (k + D_2),$$

где $k \in \mathbb{R}^{d_1}$ (вектор k отождествляется с соответствующим элементом $k \oplus 0$ пространства $\mathbb{R}^d$), и положим

$$\mathcal{L}_\mu = (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} \mathcal{L} (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}.$$

Тогда искомый корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ будет даваться равенством

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) + ((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ - \mathcal{L}_\mu^+)^*$$

на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$.

Теорема. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Оценка точна по порядку, а постоянная C явно контролируется через n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,1}}$.

В предыдущей теореме вместо корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ также можно было использовать $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, поэтому с помощью интерполяции получаем более точное приближение для композиции дробной производной $D^{r,2} = D^{r,2}_{\mathbb{R}^d}$ и резольвенты $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$.

Следствие. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$ и $r \in (0,1]$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^{2-r} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Здесь никак не затрагивались периодические операторы с «гёльдеровыми» коэффициентами, хотя все результаты в той или иной степени переносятся и на них. Некоторые специфичные детали могут быть найдены в п. 3.5.4 из второй части.

Первый шаг типичен для проблем подобного рода: мы применяем масштабное преобразование и преобразование Гельфанда по «периодической» переменной и сводим исходную задачу к задаче на фундаментальном множестве решетки.

Пусть $\tau = (k, \varepsilon) \in \mathscr{T}$, где $\mathscr{T} = \mathbb{Q}^* \times \mathscr{E}$. Положим $D_1(\tau) = D_1 + k$, $D_2(\tau) = \varepsilon D_2$ и $D(\tau) = D_1(\tau) + D_2(\tau)$ и определим оператор

$$\mathcal{A}(\tau) = D(\tau)^* A D(\tau),$$

переводящий $\tilde{H}^1(\mathscr{F})^n$ в $\tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n$. Связь между $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}(\tau)$ достаточно проста: оператор $\varepsilon^2 \mathcal{A}^\varepsilon$ подобен разложимому оператору, действующему из $\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \tilde{H}^1(\mathscr{F})^n \, dk$ в $\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n \, dk$, слои которого как раз совпадают с $\mathcal{A}(\tau)$:

$$\varepsilon^2 \mathcal{A}^\varepsilon \simeq \int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{A}(\tau) \, dk$$

(оговоримся, что для сужений $\varepsilon^2 \mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}(\tau)$ на соответствующие гильбертовы пространства L_2 «подобие» оказывается унитарной эквивалентностью; то же будет верно и для других отношений подобия ниже).

Аналогичным образом задаются слои — мы обозначим их через $\mathcal{A}^0(\tau)$ — разложимого оператора, который подобен $\varepsilon^2 \mathcal{A}^0$.

Далее, если

$$\mathcal{K}_\mu(\tau) = N D(\tau) (\mathcal{A}^0(\tau) - \varepsilon^2 \mu)^{-1} \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ есть усреднение по ячейке $\mathbb{Q}$, то

$$\varepsilon^{-1} \mathcal{K}_\mu^\varepsilon \simeq \int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{K}_\mu(\tau) \, dk.$$

Переходя к корректору $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, заметим, что слагаемые $\mathcal{L}_\mu(\mathcal{I} - \mathcal{P}^\varepsilon)$, $\mathcal{L}_\mu^+(\mathcal{I} - \mathcal{P}^\varepsilon)$ можно отбросить, поскольку соответствующие члены в оценке имеют порядок погрешности. Тем самым вместо полного корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ достаточно взять

$$\hat{\mathcal{C}}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) \mathcal{P}^\varepsilon + \mathcal{P}^\varepsilon ((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ - \mathcal{L}_\mu^+)^*.$$

Выясняется, что $\hat{\mathcal{C}}_\mu^\varepsilon$ также подобен разложимому оператору и

$$\varepsilon^{-1} \hat{\mathcal{C}}_\mu^\varepsilon \simeq \int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \hat{\mathcal{C}}_\mu(\tau) \, dk,$$

причем

$$\hat{\mathcal{C}}_\mu(\tau) = (\mathcal{K}_\mu(\tau) - \mathcal{L}_\mu(\tau)) \mathcal{P} + \mathcal{P} (\mathcal{K}_\mu(\tau)^+ - \mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^*.$$

Здесь $\mathcal{L}_\mu(\tau)$ вводится равенством

$$\mathcal{L}_\mu(\tau) = \mathcal{P} (\mathcal{A}^0(\tau) - \varepsilon^2 \mu)^{-1} \mathcal{L}(\tau) (\mathcal{A}^0(\tau) - \varepsilon^2 \mu)^{-1},$$

в котором

$$\mathcal{L}(\tau) = D(\tau)^* (N^+)^* (D(\tau) - D_1)^* A (I + D_1 N) D(\tau).$$

Теперь вместо приближений к исходному оператору достаточно получить приближения для его слоев.

Теорема. *При всех* $\tau \in \mathcal{T}$ *и* $f \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$

$$\|(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant C|\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}},$$
$$\|D_2(\tau)(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f-D_2(\tau)(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant C\|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Постоянная C *явно контролируется через* n, d, μ, c_A, C_A *и* $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Теорема. *При всех* $\tau \in \mathcal{T}$ *и* $f \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$

$$\|D_1(\tau)(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f-D_1(\tau)(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f-D_1(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau)f\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant C\|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Постоянная C *явно контролируется через* n, d, μ, c_A, C_A *и* $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Теорема. *При всех* $\tau \in \mathcal{T}$ *и* $f \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$

$$\|(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}-(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}f-\hat{\mathcal{C}}_\mu f\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant C\|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Постоянная C *явно контролируется через* n, d, μ, c_A, C_A *и* $\|A\|_{C^{0,1}}$.

Основная часть работы посвящена именно доказательству этих результатов. Отправной точкой для дальнейших рассуждений является тождество вида

$$(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}\mathcal{P}-(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}\mathcal{P}-\mathcal{K}_\mu(\tau)=(\mathcal{A}(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}(\ldots)(\mathcal{A}^0(\tau)-\varepsilon^2\mu)^{-1}.$$

Оператор, находящийся внутри скобок справа, состоит из нескольких слагаемых. Мы приводим его к блочному представлению, разбивая пространство $\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$ на сумму $\mathcal{P}\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$ и $(\mathcal{I}-\mathcal{P})\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$ и аналогично $\tilde{H}^{-1}(\mathcal{F})^n$ — на сумму $\mathcal{P}\tilde{H}^{-1}(\mathcal{F})^n$ и $(\mathcal{I}-\mathcal{P})\tilde{H}^{-1}(\mathcal{F})^n$. Процесс усреднения проходит главным образом лишь в одном из диагональных блоков (том, который получается композицией с $\mathcal{P}$), так как именно в нём старший вклад от исходного оператора сокращается вкладами от эффективного оператора и корректора. Если нас интересуют только главные члены в приближениях, то другие блоки могут быть сразу отнесены к погрешности. Однако, чтобы установить более точное приближение (последняя теорема), приходится уже принимать во внимание и недиагональные блоки.

Глава 1

Периодический оператор с «липшицевыми» коэффициентами

1.1 Исходный оператор

Пусть заданы положительное целое число d_1 и неотрицательное целое число d_2; в дальнейшем d_1 будет отвечать количеству «периодических» направлений в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = d_1 + d_2$, а d_2 — количеству «непериодических» направлений. Для определенности мы будем предполагать, что d_2 положительно; случай, когда $d_2 = 0$, во многих отношениях проще, но может быть рассмотрен вполне аналогичным образом. Произвольный элемент пространства $\mathbb{R}^d$ представим в виде $x = x_1 \oplus x_2$, где $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$; i-я координата вектора x_1 и j-я координата вектора x_2 обозначаются через $x_{1,i}$ и $x_{2,j}$.

Введем операцию дифференцирования D, сопоставляющую вектор-функции u со значениями в $\mathbb{C}^m$ матрицу-функцию $-i\nabla u$ со значениями в $\mathbb{C}^{d\times m}$. Точно так же определим операции дифференцирования D_1 и D_2 по переменным x_1 и x_2, при этом нам удобно считать, что $D_1 u$ и $D_2 u$ представляют собой $m \times d$-матричнозначные функции; другими словами, $D_1 = -i\binom{\nabla_{x_1}}{0}$ и $D_2 = -i\binom{0}{\nabla_{x_2}}$. Через $D_{1,i}$ и $D_{2,j}$ обозначаются компоненты D_1 и D_2. Под $D^{r,2}$ мы будем понимать оператор $D^{r,2}_{\mathbb{R}^d}$. Дробное дифференцирование по переменной x_1 задается выражением $D_1^{r,2} = D^{r,2}_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mathcal{I}$.

Пусть $\mathbb{Q}$ — замкнутая ячейка решетки $\mathbb{Z}^{d_1}$ с центром в 0. Можно считать, что $\mathbb{Z}^{d_1}$ как группа действует на всём $\mathbb{R}^d$, и тогда $\mathcal{F} = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{d_2}$ станет для нее фундаментальным множеством, а $\{\mathcal{F}_z\}_{z\in\mathbb{Z}^{d_1}}$, где $\mathcal{F}_z = z + \mathcal{F}$, будет замощением $\mathbb{R}^d$. Замощением окажется также и набор множеств $\{\mathcal{F}_z^\varepsilon\}_{z\in\mathbb{Z}^{d_1}}$, где $\mathcal{F}_z^\varepsilon = \varepsilon z + \mathcal{F}^\varepsilon$, а $\mathcal{F}^\varepsilon = \varepsilon\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

При $\delta > 0$ введем преобразование гомотетии $\mathcal{H}^\delta$ (или масштабное преобразование), сопоставляющее каждой измеримой функции u на $\mathbb{R}^{d_1}$ функцию v на $\mathbb{R}^{d_1}$, определенную соотношением $v(x_1) = \delta^{d/2} u(\delta x_1)$. Легко понять, что $\mathcal{H}^\delta$ взаимно-однозначно отображает $H^m(\mathbb{R}^{d_1})$ на себя для любого $m \in \mathbb{N}_0$, притом

$$\|\mathcal{H}^\delta u\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_1}} \leqslant (1 \vee \delta^m)\|u\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_1}}, \tag{1.1.1}$$

и, кроме того, $\mathcal{H}^\delta$ изометричен на $L_2(\mathbb{R}^{d_1})$. По двойственности это преобразование распространяется на $H^{-m}(\mathbb{R}^{d_1})$, так что $\mathcal{H}^\delta$ также биективно отображает $H^{-m}(\mathbb{R}^{d_1})$ на себя и

$$\|\mathcal{H}^\delta u\|_{-m,2,\mathbb{R}^{d_1}} \leqslant (1 \vee \delta^{-m})\|u\|_{-m,2,\mathbb{R}^{d_1}}. \tag{1.1.2}$$

Мы будем изучать оператор $\mathcal{A}^\varepsilon\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n\to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, имеющий вид

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D + (a_1^\varepsilon)^* D + D^* a_2^\varepsilon + q^\varepsilon, \tag{1.1.3}$$

а ε будет играть роль малого (положительного) параметра. Коэффициенты оператора — периодические (относительно решетки $\mathbb{Z}^{d_1}$) мультипликаторы в подходящих парах пространств Соболева. Верхний индекс «ε» над ними имеет следующий смысл: если γ — мультипликатор, то $\gamma^\varepsilon = (\mathcal{H}^{1/\varepsilon}\otimes\mathcal{I})\gamma(\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})$. Так, когда $\gamma\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, функция γ^ε связана с γ соотношением $\gamma^\varepsilon(x)=\gamma(\varepsilon^{-1}x_1,x_2)$, и тем самым при малых ε она быстро осциллирует вдоль «периодических» направлений.

Приведем условия на коэффициенты. Функция $A\colon\mathbb{R}^d\to\mathbf{B}(\mathbb{C}^{d\times n})$ равномерно ограничена и имеет равномерно ограниченную производную D_2A, то есть $A\in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^{d_2};L_\infty(\mathbb{R}^{d_1}))$. Кроме того, мы предполагаем, что оператор $D^*A^\varepsilon D$ коэрцитивен на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ равномерно по параметру ε из некоторого интервала $\mathcal{E}=(0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0\leqslant 1$. Иначе говоря, найдутся такие постоянные $c_A>0$ и $C_A\geqslant 0$, что при всех $\varepsilon\in\mathcal{E}$

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du,Du)_{\mathbb{R}^d}+C_A\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}\geqslant c_A\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d},\qquad u\in H^1(\mathbb{R}^d)^n. \tag{1.1.4}$$

(Иногда это условие называют слабой коэрцитивностью в противоположность сильной коэрцитивности, когда постоянную C_A можно положить равной нулю.) Отсюда, конечно, следует, что оператор сильно эллиптичен при любых $\varepsilon>0$. О связи эллиптичности и коэрцитивности, а также некоторых достаточных условиях для выполнения последней см. в п. 1.1.1.

Опишем младшие члены оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$. Функции $a_1,a_2\colon\mathbb{R}^d\to\mathbf{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^{d\times n})$ принадлежат $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}),L_2(\mathcal{F}))$ вместе с D_2a_1, D_2a_2, в частности при всех $u\in H^1(\mathcal{F})^n$ справедливы оценки

$$\|a_1u\|^2_{2,\mathcal{F}}\leqslant c_{a_1}\|Du\|^2_{2,\mathcal{F}}+C_{a_1}\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}, \tag{1.1.5}$$

$$\|a_2u\|^2_{2,\mathcal{F}}\leqslant c_{a_2}\|Du\|^2_{2,\mathcal{F}}+C_{a_2}\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.1.6}$$

Распределение же $q\in(C^\infty(\mathcal{F})^*)^{n\times n}$ таково, что q и D_2q содержатся в пространстве $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}),H^1(\mathcal{F})^*)$, так что, в частности,

$$|(qu,u)_{\mathcal{F}}|\leqslant c_q\|Du\|^2_{2,\mathcal{F}}+C_q\|u\|^2_{2,\mathcal{F}} \tag{1.1.7}$$

при произвольных $u\in H^1(\mathcal{F})^n$. Поскольку все коэффициенты еще и периодичны, то записывая неравенства (1.1.5)–(1.1.7) для сдвинутых множеств $\mathcal{F}_z$, а потом суммируя их по $z\in\mathbb{Z}^{d_1}$, мы получаем, что $a_1,a_2\in\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d),L_2(\mathbb{R}^d))$ и $q\in\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d),H^1(\mathbb{R}^d)^*)$, притом на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ будут справедливы аналогичные выписанным выше оценки с теми же самыми постоянными. Легко понять также, используя свойства масштабного преобразования (см. (1.1.1) и (1.1.2)), что эти же оценки переносятся в неизменном виде на мультипликаторы a_1^ε, a_2^ε и q^ε при любых $\varepsilon\leqslant 1$, то есть для всех $u\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ выполняется

$$\|a_1^\varepsilon u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}\leqslant c_{a_1}\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}+C_{a_1}\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{1.1.8}$$

$$\|a_2^\varepsilon u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}\leqslant c_{a_2}\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}+C_{a_2}\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{1.1.9}$$

$$|(q^\varepsilon u,u)_{\mathbb{R}^d}|\leqslant c_q\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}+C_q\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.1.10}$$

(эти оценки можно было бы постулировать вместо (1.1.5)–(1.1.7) — см. подробности в п. 1.6.2). Отсюда ясно, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ равномерно ограничен по $\varepsilon \leqslant 1$:

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon u\|_{-1,2,\mathbb{R}^d} \leqslant C_\flat \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{1.1.11}$$

где

$$C_\flat = \|A\|_{\mathbf{M}} + \|a_1\|_{\mathbf{M}} + \|a_2\|_{\mathbf{M}} + \|q\|_{\mathbf{M}}$$

(здесь и далее под мультипликаторными нормами функций A и $D_2 A$ понимаются их равномерные нормы). Для того чтобы он стал еще и коэрцитивным, достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$c_{a_1}^{1/2} + c_{a_2}^{1/2} + c_q < c_A \tag{1.1.12}$$

(оно заведомо имеет место, если мультипликаторы a_1, a_2 и q как операторы умножения компактны). Тогда из оценок (1.1.4) и (1.1.8)–(1.1.10) получим, что при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ (напомним, что если $\varepsilon \in \mathscr{E}$, то $\varepsilon \leqslant 1$)

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{\mathbb{R}^d} + c_\natural \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_* \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{1.1.13}$$

с постоянными

$$c_* = c_A - c_{a_1}^{1/2} - c_{a_2}^{1/2} - c_q, \tag{1.1.14}$$

$$c_\natural = C_A + 2^{-1}\big(c_{a_1}^{-1/2} C_{a_1} + c_{a_2}^{-1/2} C_{a_2}\big) + C_q. \tag{1.1.15}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ оказывается m-секториальным, а соответствующий сектор

$$\mathcal{S} = \big\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| \leqslant c_*^{-1} C_\flat (\operatorname{Re} z + c_* + c_\natural)\big\}$$

не зависит от параметра ε.

Если μ находится вне $\mathcal{S}$, то $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu = \mathcal{A}^\varepsilon - \mu$ — изоморфизм, и потому определено обратное отображение $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ и для любых $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ справедлива оценка

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.1.16}$$

Мы хотим изучить поведение операторов $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ и $D(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ при малых значениях параметра ε.

1.1.1 *О коэрцитивности*

Как уже отмечалось, условие коэрцитивности (1.1.4) означает, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ сильно эллиптичен при любых $\varepsilon > 0$. Следующий результат хорошо известен, но для удобства читателя мы приведем его вместе с доказательством.

Лемма 1.1.1. *Функция A удовлетворяет условию Лежандра–Адамара, то есть*

$$\operatorname{Re}\langle A(\cdot)\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle \geqslant c_A |\xi|^2 |\eta|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \eta \in \mathbb{C}^n. \tag{1.1.17}$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для функции A^ε при некотором фиксированном $\varepsilon \in \mathscr{E}$, скажем ε_0. Согласно теореме Лебега о дифференцировании (см., например, [EG92, § 1.7]), при почти всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\lim_{r\to 0} |B_r(x_0)|^{-1} \int_{B_r(x_0)} |A^{\varepsilon_0}(x) - A^{\varepsilon_0}(x_0)|\, dx = 0.$$

Фиксируем $\delta > 0$ и найдем $r > 0$, при котором

$$|B_r(x_0)|^{-1} \int_{B_r(x_0)} |A^{\varepsilon_0}(x) - A^{\varepsilon_0}(x_0)|\, dx \leqslant \delta. \tag{1.1.18}$$

Далее, выберем функцию $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$, такую что $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^2\, dx = 1$. Тогда носитель функции $x \mapsto \varphi_r(x) = r^{-d/2}\varphi(r^{-1}(x - x_0))$ будет находиться в $B_r(x_0)$, а сама она будет удовлетворять равенству $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_r(x)|^2\, dx = 1$. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^d$ и $\eta \in \mathbb{C}^n$ — произвольные ненулевые векторы. Положим $u_j(x) = j^{-1}\varphi_r(x)\, e^{ij\langle x,\xi\rangle}\eta$. Тогда $u_j \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$, причем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_j(x)|^2\, dx = j^{-2}|\eta|^2 \int_{B_r(x_0)} |\varphi_r(x)|^2\, dx \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} |Du_j(x) - \varphi_r(x)\, e^{ij\langle x,\xi\rangle} \xi \otimes \eta|^2\, dx = j^{-2}|\eta|^2 \int_{B_r(x_0)} |D\varphi_r(x)|^2\, dx \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

а потому, подставляя u_j в качестве u в формулу (1.1.4) и переходя к пределу, получаем:

$$\operatorname{Re} \int_{B_r(x_0)} \langle A^{\varepsilon_0}(x)\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle |\varphi_r(x)|^2\, dx \geqslant c_A |\xi|^2 |\eta|^2.$$

Но в силу неравенства (1.1.18) и определения функции φ_r

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B_r(x_0)} \langle A^{\varepsilon_0}(x)\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle |\varphi_r(x)|^2\, dx - \langle A^{\varepsilon_0}(x_0)\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle \right| = \\ &\qquad = \left| \int_{B_r(x_0)} \langle (A^{\varepsilon_0}(x) - A^{\varepsilon_0}(x_0))\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle |\varphi_r(x)|^2\, dx \right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \delta \nu_d \|\varphi\|^2_{\infty,\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\eta|^2, \end{aligned}$$

где ν_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, при произвольном $\delta > 0$

$$\operatorname{Re} \langle A^{\varepsilon_0}(x_0)\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta\rangle \geqslant \left(c_A - \delta \nu_d \|\varphi\|^2_{\infty,\mathbb{R}^d}\right) |\xi|^2 |\eta|^2,$$

что завершает доказательство. □

Из условия Лежандра–Адамара коэрцитивность, вообще говоря, не следует.

Для скалярных операторов условия (1.1.4) и (1.1.17) оказываются равносильными только в вещественном случае. Чтобы и в комплексном случае из условия Лежандра–Адамара вытекала коэрцитивность, приходится дополнительно требовать, например, симметричность матрицы A (неравенство (1.1.17) тогда будет верно не только при $\xi \in \mathbb{R}^d$, но и при $\xi \in \mathbb{C}^d$, откуда, конечно, будет следовать (1.1.4); см. [McL00, теорема 4.7]).

Для матричных операторов дело обстоит еще сложнее, и необходимое и достаточное алгебраическое условие на функцию A для того, чтобы оценка (1.1.4) была выполнена хотя бы при одном ε, не известно. С другой стороны, если оценка (1.1.4) известна при каком-нибудь фиксированном ε, например при $\varepsilon = 1$, то масштабным преобразованием из нее выводится, что

$$\operatorname{Re}(A^{\varepsilon}(\varepsilon D_1 u + D_2 u), \varepsilon D_1 u + D_2 u)_{\mathbb{R}^d} + C_A \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_A \|\varepsilon D_1 u + D_2 u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Когда одновременно $d_2 = 0$ и $C_A = 0$, мы получаем в точности условие равномерной коэрцитивности (1.1.4). В противном случае можно говорить лишь о вырожденной коэрцитивности. Отметим, что проблема такого типа возникает и при использовании неравенства Гординга для равномерно непрерывной функции A.

Приведенные соображения показывают, что оценку (1.1.4) необходимо проверять именно при всех ε из целого интервала, что может представлять определенные трудности. Более простое достаточное условие, которое не содержит ε, заключается в том, чтобы оператор $D^* A(\cdot, x_2) D$ был сильно коэрцитивен на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ равномерно по переменной x_2. Другими словами, существует положительная постоянная c, такая что

$$\operatorname{Re}(A(\cdot, x_2) Du, Du)_{\mathbb{R}^d} \geqslant c\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{1.1.19}$$

при всех $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. В этом условии также присутствует параметр, однако он входит в «медленную» переменную, по которой функция в определенной степени регулярна, и тем самым эта зависимость действительно проще. Мы отложим доказательство достаточности до следующей части (см. лемму 2.1.4), поскольку в нём на первый план выступает именно локально периодическая структура функции A. Всё, что будет сказано в п. 2.1.1 части II, в равной мере относится и к рассматриваемой сейчас функции A.

Обратим внимание на то, что более сильное условие Лежандра, которое сводится к равномерной положительной определенности $\operatorname{Re} A$, хотя и обеспечивает коэрцитивность, сужает класс рассматриваемых операторов, исключая из него важные для приложений сильно эллиптические операторы, как, например, некоторые операторы теории упругости (см. п. 1.1.4).

1.1.2 *О «сингулярных» коэффициентах*

Условия, которые мы накладываем на коэффициенты, позволяют включать в оператор сингулярные слагаемые, например дельта-функцию, сосредоточенную на периодической поверхности (см. пример в п. 1.1.3 ниже). Но оператор может также содержать коэффициенты, которые «сингулярны» в другом смысле. Речь идет о мультипликаторах вида $\varepsilon^{-1}\gamma$ с растущим множителем ε^{-1}. Выясняется, что при некоторых дополнительных предположениях от младших членов с коэффициентами подобного рода можно перейти к «несингулярным» членам большего порядка. Мы не станем специально останавливаться на таких задачах, а лишь покажем, какие случаи могут быть сразу вложены в нашу схему.

Пусть функция $B\colon \mathbb{R}^d \to \mathbf{B}(\mathbb{C}^{d\times n})$ принадлежит $C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^{d_2}; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$, и пусть, кроме того, выполнено $B_{ij} = -B_{ji}$. Тогда

$$D^* B^\varepsilon D = D^* B^\varepsilon \cdot D = \varepsilon^{-1}(D_1^* B)^\varepsilon D + (D_2^* B)^\varepsilon D.$$

Первое слагаемое справа как раз представляет собой «сингулярный» член первого порядка. Другое же слагаемое будет «несингулярным» членом первого порядка, если дополнительно предположить, что все производные $D_{2,i}D_{2,j}B$ являются мультипликаторами между $H^1(\mathcal{F})$ и $L_2(\mathcal{F})$. Таким образом, если B удовлетворяет перечисленным условиям, то в оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ можно включить один лишь «сингулярный» член $\varepsilon^{-1}(D_1^* B)^\varepsilon D$, компенсируя второй подбором функции a_1. Отметим, что коэффициент $(D_1^* B)^*$ в «сингулярном» слагаемом соленоидален по «периодической» переменной, поскольку $D_1^*(D_1^* B)^* = \sum_{i,j=1}^{d_1} D_{1,i} D_{1,j} \bar{B}_{ij} = 0$.

Другой «сингулярный» член первого порядка получается из соображений двойственности.

Отметим, что в полностью периодическом скалярном случае (то есть при $d_2 = 0$ и $n = 1$) условие ограниченности антисимметричной функции B можно заменить на включение в пространство BMO функций с ограниченной средней осцилляцией — равномерная ограниченность оператора по параметру ε при этом сохранится (см. [MV06]). Усреднение такого оператора изучалось в [ZhPas16, § 4].

Что касается «сингулярного» члена нулевого порядка, то он появляется следующим образом. Пусть функция $\gamma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d_1}$ удовлетворяет тем же условиям, что и a_2 в операторе $\mathcal{A}^\varepsilon$. Тогда если $q = D_1^*\gamma$, то $\varepsilon^{-1}q^\varepsilon = D_1^*\gamma^\varepsilon$ и есть искомое «сингулярное» слагаемое.

Мы заметим, что особенность при q^ε может быть и более сильной. В [BSu03, § 6.1] (см. также [Su10, § 13]), например, рассматривался оператор с членом нулевого порядка вида $\varepsilon^{-2}q^\varepsilon$. Однако преобразование, которое позволяет справиться с подобной «сингулярностью», уже выводит нас из исходного класса операторов (по краям оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ появляются осциллирующие множители).

Закончим этот параграф примерами конкретных операторов из математической физики, к которым будут применимы наши результаты. В первом мы рассмотрим скалярный оператор Шрёдингера с младшими членами. Второй будет посвящен матричному оператору теории упругости.

1.1.3 *Пример: оператор Шрёдингера*

Мы начнем с того, что построим примеры мультипликаторов из пространств $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ и $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F})^*)$, для которых условие сильной подчиненности (1.1.12) выполнялось бы автоматически.

Будем считать, что $d > 1$ и $p > d$. Пусть сначала $d_2 = 0$. Тогда множество $\mathcal{F}$ ограничено и, как хорошо известно, всякая функция $\gamma \in L_p(\mathcal{F})$

принадлежит $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$. Более того, для любого $\delta > 0$ найдется постоянная $C_{\mathcal{F}}(\delta) > 0$, зависящая от d и p, такая что

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|\gamma\|^2_{p,\mathcal{F}}\big(\delta\|Du\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}}(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big), \qquad u \in H^1(\mathcal{F}). \tag{1.1.20}$$

Доказательство данного результата опирается на неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, притом существенную роль играет компактность соответствующего вложения.

Если $d_2 \neq 0$, то вложения классов Соболева в пространства Лебега заведомо не будут компактными. Мы всё еще можем доказать оценку, похожую на (1.1.20), но лишь с фиксированным δ. Чтобы она стала верна и для малых δ, необходима дополнительная информация о функции γ. Такую информацию дает условие регулярности по переменной x_2.

Пусть одновременно $\gamma \in L_p(\mathcal{F})$ и $D_2\gamma \in L_p(\mathcal{F})$. Тогда $\gamma(x_1,\cdot) \in W^1_p(\mathbb{R}^{d_2})$ при почти всех x_1, откуда $|\gamma(x)| \lesssim \|\gamma(x_1,\cdot)\|_{1,p,\mathbb{R}^{d_2}}$. Это соотношение и позволяет распространить оценку вида (1.1.20) с ограниченного множества $\mathbb{Q}$ на неограниченное множество $\mathcal{F}$. Действительно, если $u \in H^1(\mathcal{F})$, то согласно (1.1.20)

$$\|\gamma(\cdot,x_2)\,u(\cdot,x_2)\|^2_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \|\gamma(\cdot,x_2)\|^2_{p,\mathbb{Q}}\big(\delta\|D_1u(\cdot,x_2)\|^2_{2,\mathbb{Q}} + C_{\mathbb{Q}}(\delta)\,\|u(\cdot,x_2)\|^2_{2,\mathbb{Q}}\big)$$

при почти всех $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Поскольку $|\gamma(x)| \lesssim \|\gamma(x_1,\cdot)\|_{1,p,\mathbb{R}^{d_2}}$, то

$$\sup_{x_2\in\mathbb{R}^{d_2}} \|\gamma(\cdot,x_2)\|^p_{p,\mathbb{Q}} \lesssim \|D_2\gamma\|^p_{p,\mathcal{F}} + \|\gamma\|^p_{p,\mathcal{F}},$$

а значит,

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \big(\|D_2\gamma\|^2_{p,\mathcal{F}} + \|\gamma\|^2_{p,\mathcal{F}}\big)\big(\delta\|D_1u\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_{\mathbb{Q}}(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big). \tag{1.1.21}$$

Отсюда же легко получается пример мультипликатора между $H^1(\mathcal{F})$ и $H^1(\mathcal{F})^*$. Если $\gamma^{1/2} \in L_p(\mathcal{F})$ и $D_2\gamma^{1/2} \in L_p(\mathcal{F})$ (как и ранее, $p > d$), то применяя (1.1.21) к $\gamma^{1/2}$, приходим к оценке

$$|(\gamma u, u)_{\mathcal{F}}| \lesssim \big(\|D_2\gamma^{1/2}\|^2_{p,\mathcal{F}} + \|\gamma\|_{p/2,\mathcal{F}}\big)\big(\delta\|D_1u\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_{\mathbb{Q}}(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big). \tag{1.1.22}$$

Функция γ тем самым представляет собой регулярное распределение из пространства $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F})^*)$. Укажем еще пример сингулярного.

Пусть Σ — $(d-1)$-мерная компактная липшицевая поверхность в $\mathcal{F}$. Обозначим через δ_Σ дельта-функцию, сосредоточенную на этой поверхности. Каждая функция u из $H^1(\mathcal{F})$ имеет след на Σ, и можно говорить о суммируемости $\delta_\Sigma u$. Из неравенства Гёльдера и стандартной теоремы вложения (теоремы о следах) следует, что если $\sigma \in L_{p-1}(\Sigma)$, то при любом $\delta > 0$ существует постоянная $C_\Sigma(\delta) > 0$, зависящая от d, p и Σ, такая что

$$|(\sigma u, u)_\Sigma| \leqslant \|\sigma\|_{p-1,\Sigma}\big(\delta\|Du\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_\Sigma(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big), \qquad u \in H^1(\mathcal{F}). \tag{1.1.23}$$

Таким образом, $\sigma\delta_\Sigma$ — сингулярное распределение из $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F})^*)$.

Рассмотрим теперь периодический оператор $\hat{\mathcal{H}}^\varepsilon$ вида

$$\hat{\mathcal{H}}^\varepsilon = (D - \boldsymbol{A}^\varepsilon)^* g^\varepsilon (D - \boldsymbol{A}^\varepsilon) + V^\varepsilon.$$

Он интерпретируется как (возможно несамосопряженный) оператор Шрёдингера с переменной метрикой, магнитным и электрическим потенциалами. Будем предполагать, что метрика g является функцией из пространства $C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^{d_2}; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))^{d\times d}$, а ее вещественная часть равномерно положительно определена. Пусть магнитный потенциал $\boldsymbol{A}$ принадлежит $W^1_p(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{L}_p(\mathbb{Q}))^d$. Далее, через Σ обозначим $(d-1)$-мерную периодическую (относительно $\mathbb{Z}^{d_1}$) липшицевую поверхность в $\mathbb{R}^d$, пересечение которой с $\mathcal{F}$ компактно. Будем считать, что электрический потенциал V представляет собой сумму функции V_{reg}, такой что $V^{1/2}_{\mathrm{reg}} \in W^1_p(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{L}_p(\mathbb{Q}))$, и распределения $V_{\mathrm{sing}} = \sigma\delta_\Sigma$, где $\sigma \in \tilde{W}^1_{p-1}(\Sigma\cap\mathcal{F})$. (Заметим, что функция $D_2 V_{\mathrm{reg}}$ также является мультипликатором, так как она содержится в $\tilde{L}_{p/2}(\mathcal{F})$.) Легко понять, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ может быть записан в форме

$$D^* A^\varepsilon D + (a^\varepsilon_1)^* D + D^* a^\varepsilon_2 + q^\varepsilon,$$

причем коэффициенты в такой записи удовлетворяют всем необходимым условиям.

Несложно построить аналогичный пример и для случая, когда $d = 1$. В качестве Σ возьмем дискретное периодическое множество в $\mathbb{R}$ и предположим, что, во-первых, $g \in \tilde{L}_\infty(\mathcal{F})^{d\times d}$, причем вещественная часть функции g равномерно положительно определена, во-вторых, $\boldsymbol{A} \in \tilde{L}_2(\mathcal{F})^d$ и, в-третьих, $V = V_{\mathrm{reg}} + V_{\mathrm{sing}}$, где $V_{\mathrm{reg}} \in \tilde{L}_1(\mathcal{F})$, а $V_{\mathrm{sing}} = \sigma\delta_\Sigma$ с произвольной периодической функцией σ на Σ.

Заметим, что, в соответствии с п. 1.1.2, магнитный и электрический потенциалы могут включать и «сингулярные», быстро растущие слагаемые.

1.1.4 *Пример: оператор теории упругости*

Как и в предыдущем пункте, сначала мы приведем пример коэффициентов, для которых условия из § 1.1 принимают более простой вид. Из них единственное условие, которое пока оставалось в стороне, — это условие коэрцитивности (1.1.4) для матричного оператора.

Пусть $b(D)$ — однородный $m\times n$-матричный дифференциальный оператор первого порядка с символом

$$\xi \mapsto b(\xi) = \sum_{i=1}^{d} b_i \xi_i,$$

где $b_i \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Будем считать, что при некотором $c > 0$ выполнено

$$b(\xi)^* b(\xi) \geqslant c|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{1.1.24}$$

(это, конечно же, возможно только при $m \geqslant n$). Предположим также, что $\boldsymbol{C} \in \tilde{L}_\infty(\mathcal{F})^{m\times m}$, а $\operatorname{Re}\boldsymbol{C} > 0$, притом $(\operatorname{Re}\boldsymbol{C})^{-1} \in \tilde{L}_\infty(\mathcal{F})$. Тогда отображение A, компоненты которого имеют вид $A_{ij} = b^*_i \boldsymbol{C} b_j$, удовлетворяет условию (1.1.4) (и даже (1.1.19)). Чтобы в этом убедиться, следует сначала оценить снизу квадратичную форму оператора умножения на $\operatorname{Re}\boldsymbol{C}^\varepsilon$, далее с помощью преобразования Фурье перейти к символу оператора $b(D)$, а затем применить (1.1.24):

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(A^{\varepsilon} Du, Du)_{\mathbb{R}^d} &= \operatorname{Re}(\boldsymbol{C}^{\varepsilon} b(D)u, b(D)u)_{\mathbb{R}^d} \geqslant \\ &\geqslant \|(\operatorname{Re}\boldsymbol{C})^{-1}\|_{\mathbf{M}}^{-1} \|b(D)u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant \\ &\geqslant c\|(\operatorname{Re}\boldsymbol{C})^{-1}\|_{\mathbf{M}}^{-1} \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Отметим, что задачи усреднения для (самосопряженных) операторов, старшая часть которых имеет подобную структуру, изучались в работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной в полностью периодическом случае (см., например, [BSu01], [BSu03], [BSu05] и [BSu06]), а также в работе Д. И. Борисова — в локально периодическом случае (см. [Bor08]).

Покажем теперь, как свести оператор теории упругости к оператору вида $b(D)^*\boldsymbol{C}^{\varepsilon} b(D)$. Будем рассматривать многомерный случай $d>1$. Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^d$ — вектор смещений, а $e(u)$ — тензор деформаций:

$$e(u) = 2^{-1}(\nabla u + (\nabla u)^t).$$

Так как этот тензор симметричен, то его можно представить в виде вектора $e_*(u)$ в пространстве $\mathbb{C}^m$, где $2m = d(d+1)$. Фиксируем каким-нибудь способом изоморфизм $e(u) \mapsto e_*(u)$ между данными пространствами. Введем оператор $b(D)$ так, чтобы выполнялось

$$b(D)u = -ie_*(u).$$

При фиксированном изоморфизме символ $\xi \mapsto b(\xi) \in \mathbb{R}^{m\times d}$ определяется однозначно, притом условие (1.1.24) для него заведомо выполнено. Примеры вычисленных символов для $d=2$ и $d=3$ приведены в [BSu01, § 5.2].

Пусть $\sigma(u)$ — тензор напряжений, а $\sigma_*(u)$ — соответствующий ему элемент в $\mathbb{C}^m$. Хорошо известный закон Гука о пропорциональности напряжений смещениям тогда может быть записан следующим образом:

$$\sigma_*(u) = \boldsymbol{C}^{\varepsilon} e_*(u).$$

Тензор $\boldsymbol{C}^{\varepsilon}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{m\times m}$, который появляется в этом соотношении, характеризует упругие свойства неоднородной среды. Энергия упругой деформации представляет собой квадратичную форму

$$u \mapsto 2^{-1}(\boldsymbol{C}^{\varepsilon} e_*(u), e_*(u))_{\mathbb{R}^d}.$$

Порождаемый формой оператор $\mathcal{E}^{\varepsilon}$ и есть оператор теории упругости:

$$\mathcal{E}^{\varepsilon} = 2^{-1} b(D)^* \boldsymbol{C}^{\varepsilon} b(D).$$

Таким образом, $\mathcal{E}^{\varepsilon}$ сильно коэрцитивен, если вещественная часть функции $\boldsymbol{C} \in \tilde{L}_{\infty}(\mathcal{F})^{m\times m}$ равномерно положительно определена. Отметим, что для изотропной среды последнее условие в точности означает, что и модуль сдвига, и модуль всестороннего сжатия равномерно положительно определены (см. [BSu01, § 5.2]). Это довольно естественное с физической точки зрения предположение обеспечивает устойчивость термодинамического равновесия среды, когда на нее не действуют внешние силы (см. [LL03, § 4]). Условие же Лежандра, о котором говорилось в п. 1.1.1, накладывает на параметры среды дополнительные ограничения.

1.2 Эффективный оператор

Эффективный оператор, как обычно, задается с помощью решений вспомогательных задач на ячейке, поэтому с этих задач мы и начнем.

1.2.1 *Задачи на ячейке*

При $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ и $\xi \in \mathbb{C}^{d\times n}$ определим $N_\xi(\cdot, x_2)$ как слабое решение задачи

$$D_1^* A(\cdot, x_2)\,(D_1 N_\xi(\cdot, x_2) + \xi) = 0 \tag{1.2.1}$$

в пространстве $\tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n$. Определим также $M_\eta(\cdot, x_2)$ при $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ и $\eta \in \mathbb{C}^n$ как слабое решение задачи

$$D_1^*(A(\cdot, x_2)\,D_1 M_\eta(\cdot, x_2) + a_2(\cdot, x_2)\,\eta) = 0 \tag{1.2.2}$$

в пространстве $\tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n$. Поскольку $A(\cdot, x_2) \in L_\infty(\mathbb{Q})$ и $a_2(\cdot, x_2) \in L_2(\mathbb{Q})$, то $D_1^* A(\cdot, x_2)\xi$ и $D_1^* a_2(\cdot, x_2)\eta$ при почти всех x_2 представляют собой антилинейные непрерывные функционалы на $H^1(\mathbb{Q})^n$. Для того чтобы показать, что задачи (1.2.1) и (1.2.2) однозначно разрешимы, достаточно убедиться, что оператор $D_1^* A(\cdot, x_2)\,D_1$ сильно коэрцитивен на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$.

Лемма 1.2.1. *При всех $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}(A(\cdot, x_2)\,D_1 u, D_1 u)_{\mathbb{Q}} \geqslant c_A \|D_1 u\|_{2,\mathbb{Q}}^2, \qquad u \in \tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n.$$

Доказательство. Пусть $v^{(\varepsilon)} = \varepsilon u^\varepsilon \varphi$, где $u \in \tilde{C}^1(\mathbb{Q})^n$ и $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Подставим функцию $v^{(\varepsilon)}$ в неравенство (1.1.4) и устремим ε к нулю. Тогда так как $\|v^{(\varepsilon)}\|_{2,\mathbb{R}^d} \to 0$ и $\|D_2 v^{(\varepsilon)}\|_{2,\mathbb{R}^d} \to 0$, а $\|D_1 v^{(\varepsilon)} - (D_1 u)^\varepsilon \varphi\|_{2,\mathbb{R}^d} \to 0$, то

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \langle A^\varepsilon(x)\,(D_1 u)^\varepsilon(x_1), (D_1 u)^\varepsilon(x_1)\rangle |\varphi(x)|^2\,dx \geqslant \\ \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} c_A \int_{\mathbb{R}^d} |(D_1 u)^\varepsilon(x_1)|^2 |\varphi(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Хорошо известно, что если $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{Q})$, то при $\varepsilon \to 0$ функция f^ε слабо сходится в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d_1})$ к $\int_{\mathbb{Q}} f(y_1)\,dy_1$; иначе говоря, для любой функции $g \in L_\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ с компактным носителем имеет место сходимость

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(\varepsilon^{-1} x_1)\,g(x_1)\,dx_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{Q}} f(y_1)\,g(x_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{1.2.3}$$

(см., например, [ZhKO93, глава 1, § 1]). Тогда, используя еще теорему Лебега, получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} \langle A(y_1, x_2)\,D_1 u(y_1), D_1 u(y_1)\rangle |\varphi(x)|^2\,dx\,dy_1 \geqslant \\ \geqslant c_A \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} |D_1 u(y_1)|^2 |\varphi(x)|^2\,dx\,dy_1.\end{aligned}$$

Так как функция A непрерывна по второму аргументу, а функция φ — произвольна, то при всех $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ справедлива поточечная оценка

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{Q}} \langle A(y_1, x_2)\,D_1 u(y_1), D_1 u(y_1)\rangle\,dy_1 \geqslant c_A \int_{\mathbb{Q}} |D_1 u(y_1)|^2\,dy_1. \qquad \square$$

Из доказанной леммы и стандартного неравенства Пуанкаре вытекает, что
$$\operatorname{Re}(A(\cdot,x_2)\,D_1u,D_1u)_{\mathbb{Q}} \gtrsim \|u\|^2_{1,2,\mathbb{Q}}, \qquad u\in \tilde H^1_0(\mathbb{Q})^n.$$

Таким образом, N_ξ и M_η действительно корректно определены.

Обозначим через N и M отображения, сопоставляющие элементам ξ и η функции N_ξ и M_η. Легко понять, что N_ξ и M_η зависят от ξ и η линейно, поэтому N и M суть линейные операторы умножения на функции $N(\cdot)$ и $M(\cdot)$, заданные соотношениями $N(x)\xi=N_\xi(x)$ и $M(x)\eta=M_\eta(x)$. Следующий результат позволит нам установить важные свойства этих функций.

Лемма 1.2.2. *Пусть $u(\cdot,x_2)\in \tilde H^1_0(\mathbb{Q})^n$ при почти всех $x_2\in\mathbb{R}^{d_2}$ есть слабое решение задачи*
$$D_1^*A(\cdot,x_2)\,D_1u(\cdot,x_2)=D_1^*f(\cdot,x_2), \tag{1.2.4}$$
в которой $f\in\mathbf{M}(H^m(\mathcal{F}),L_2(\mathcal{F}))$ с некоторым фиксированным $m\in\mathbb{N}_0$. Тогда $D_1u\in\mathbf{M}(H^m(\mathbb{R}^{d_2}),L_2(\mathcal{F}))$ и
$$\|D_1u\|_{\mathbf{M}}\lesssim\|f\|_{\mathbf{M}}.$$
Если к тому же $D_2f\in\mathbf{M}(H^m(\mathcal{F}),L_2(\mathcal{F}))$, то $D_1D_2u\in\mathbf{M}(H^m(\mathbb{R}^{d_2}),L_2(\mathcal{F}))$ и
$$\|D_1D_2u\|_{\mathbf{M}}\lesssim\|f\|_{\mathbf{M}}+\|D_2f\|_{\mathbf{M}}.$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1.2.1 имеем:
$$c_A\|D_1u(\cdot,x_2)\|^2_{2,\mathbb{Q}}\leqslant\operatorname{Re}(A(\cdot,x_2)\,D_1u(\cdot,x_2),D_1u(\cdot,x_2))_{\mathbb{Q}},$$
или, учитывая, что $u(\cdot,x_2)$ решает задачу (1.2.4),
$$c_A\|D_1u(\cdot,x_2)\|^2_{2,\mathbb{Q}}\leqslant\operatorname{Re}(f(\cdot,x_2),D_1u(\cdot,x_2))_{\mathbb{Q}}.$$
Домножим данное неравенство на $|w(x_2)|^2$, где $w\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$, и проинтегрируем его по переменной x_2, тогда получим:
$$c_A\|D_1u\cdot w\|_{2,\mathcal{F}}\leqslant\|fw\|_{2,\mathcal{F}}\leqslant\|f\|_{\mathbf{M}}\|w\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_2}}. \tag{1.2.5}$$
Это доказывает первое утверждение леммы.

Предположим теперь, что $D_2f\in\mathbf{M}(H^m(\mathcal{F}),L_2(\mathcal{F}))$. Мы будем опираться на технику разностных отношений. Пусть $e_{2,i}$ — единичный вектор в направлении оси $x_{2,i}$, и пусть $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда разностное отношение $D^{(h)}_{2,i}$ по переменной $x_{2,i}$ задается формулой $D^{(h)}_{2,i}\varphi=-ih^{-1}\Delta_{he_{2,i}}\varphi$. Отметим, что
$$(D^{(h)}_{2,i})^*=D^{(-h)}_{2,i},$$
$$D^{(h)}_{2,i}\varphi\psi=D^{(h)}_{2,i}\varphi\cdot\mathcal{T}_{he_{2,i}}\psi+\varphi D^{(h)}_{2,i}\psi,$$
где $\mathcal{T}_{he_{2,i}}\psi(x)=\psi(x+he_{2,i})$.

Подействуем на обе части равенства (1.2.4) оператором $D^{(h)}_{2,i}$:
$$D_1^*A(\cdot,x_2)\,D_1D^{(h)}_{2,i}u(\cdot,x_2)=-D_1^*(D^{(h)}_{2,i}A)(\cdot,x_2)\,D_1\mathcal{T}_{he_{2,i}}u(\cdot,x_2)+D_1^*D^{(h)}_{2,i}f(\cdot,x_2).$$

В силу леммы 1.2.1,

$$c_A\|D_1D_{2,i}^{(h)}u(\cdot,x_2)\|_{2,\mathbb{Q}}^2 \leqslant \left|\left((D_{2,i}^{(h)}A)(\cdot,x_2)\,D_1\mathcal{T}_{he_{2,i}}u(\cdot,x_2),D_1D_{2,i}^{(h)}u(\cdot,x_2)\right)_{\mathbb{Q}}\right| + \\ + \left|\left(D_{2,i}^{(h)}f(\cdot,x_2),D_1D_{2,i}^{(h)}u(\cdot,x_2)\right)_{\mathbb{Q}}\right|. \tag{1.2.6}$$

Домножая полученную оценку на $|w(x_2)|^2$, где, как и ранее, $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$, и интегрируя по переменной x_2, приходим к следующему результату:

$$c_A\|D_1D_{2,i}^{(h)}u\cdot w\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|D_{2,i}^{(h)}A\cdot D_1\mathcal{T}_{he_{2,i}}u\cdot w\|_{2,\mathcal{F}} + \|D_{2,i}^{(h)}f\cdot w\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Заметим, что если локально суммируемая функция γ имеет слабую производную $D_{2,i}\gamma$, то

$$(D_{2,i}^{(h)}\gamma,\varphi)_{\mathcal{F}} = (\gamma,D_{2,i}^{(-h)}\varphi)_{\mathcal{F}} = \int_0^1(\gamma,\mathcal{T}_{-the_{2,i}}D_{2,i}\varphi)_{\mathcal{F}}\,dt = \int_0^1(\mathcal{T}_{the_{2,i}}D_{2,i}\gamma,\varphi)_{\mathcal{F}}\,dt$$

при любых $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{F})$, или

$$D_{2,i}^{(h)}\gamma(x) = \int_0^1\mathcal{T}_{the_{2,i}}D_{2,i}\gamma(x)\,dt. \tag{1.2.7}$$

Из выписанного соотношения прямо следует, что $\|D_{2,i}^{(h)}A\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_{2,i}^{(h)}f\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}f\|_{\mathbf{M}}$. Используя еще (1.2.5), находим:

$$c_A\|D_1D_{2,i}^{(h)}u\cdot w\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \left(c_A^{-1}\|D_{2,i}A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{\mathbf{M}} + \|D_{2,i}f\|_{\mathbf{M}}\right)\|w\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_2}}.$$

Тем самым существует подпоследовательность $\{D_1D_{2,i}^{(h_j)}u\cdot w\}_{j\in\mathbb{N}}$, $h_j \to 0$, которая слабо сходится в $L_2(\mathcal{F})$ к некоторой функции $v_{2,i}(w) \in L_2(\mathcal{F})$. Осталось установить, какой вид имеет эта функция.

Пусть χ_r — «гладкая характеристическая функция» шара $B_r(0) \subset \mathbb{R}^{d_2}$ с носителем в $B_{2r}(0)$, то есть $\chi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$ равна единице на $B_r(0)$, обращается в нуль вне $B_{2r}(0)$ и принимает значения между нулем и единицей внутри $B_{2r}(0)\setminus B_r(0)$. Если $2r \leqslant R$, то $\chi_r = \chi_r\chi_R$, и потому $v_{2,i}(\chi_r) = v_{2,i}(\chi_R)\,\chi_r$. Тем самым мы можем определить функцию $v_{2,i}$ на $\mathcal{F}$ формулой $v_{2,i}(x) = v_{2,i}(\chi_{2^k})(x)$, где $x \in \mathbb{Q}\times B_{2^k}(0)$ с каким-нибудь $k \in \mathbb{N}$. Далее, для любого $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $w = \chi_{2^k}w$, а значит, $v_{2,i}(w) = v_{2,i}w$. Несложно понять, что $v_{2,i}$ совпадает с $D_1D_{2,i}u$. В самом деле, пусть функция $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{F})$ равна нулю при $|x_2| \geqslant 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(D_1D_{2,i}^{(h_j)}u\cdot\chi_{2^k},\varphi)_{\mathcal{F}} = (D_1u,D_{2,i}^{(-h_j)}\varphi)_{\mathcal{F}},$$

и левая часть стремится к $(v_{2,i},\varphi)_{\mathcal{F}}$, а правая — к $(D_1u,D_{2,i}\varphi)_{\mathcal{F}}$.

Таким образом, мы показали, что последовательность $D_1D_{2,i}^{(h_j)}u\cdot w$ при $h_j \to 0$ слабо сходится к $D_1D_{2,i}u\cdot w$. Искомая оценка теперь вытекает из слабой полунепрерывности снизу нормы пространства $L_2(\mathcal{F})$:

$$c_A\|D_1D_{2,i}u\cdot w\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \left(c_A^{-1}\|D_{2,i}A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{\mathbf{M}} + \|D_{2,i}f\|_{\mathbf{M}}\right)\|w\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_2}}.$$

Доказательство леммы завершено. □

Задачи на N и M могут быть представлены в виде (1.2.4), причем соответствующие функции f удовлетворяет обоим условиям леммы при $m=0$ для первой задачи и при $m=1$ — для второй. Отсюда следует, что $D_1 N$ и $D_1 D_2 N$ принадлежат пространству $\mathbf{M}(L_2(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$, а $D_1 M$ и $D_1 D_2 M$ — пространству $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$. Кроме того, так как средние значения N и M по ячейке $\mathbb{Q}$ равны нулю, то, применяя стандартное неравенство Пуанкаре, мы находим, что N и $D_2 N$ являются элементами пространства $\mathbf{M}(L_2(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$, а M и $D_2 M$ — пространства $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$.

1.2.2 *Эффективный оператор*

Эффективный оператор $\mathcal{A}^0\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ имеет тот же вид, что и исходный:

$$\mathcal{A}^0 = D^* A^0 D + (a_1^0)^* D + D^* a_2^0 + q^0. \tag{1.2.8}$$

Приведем формулы для его коэффициентов.

Функция $A^0\colon \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbf{B}(\mathbb{C}^{d\times n})$ определяется равенством

$$A^0(x_2) = \int_{\mathbb{Q}} A(y_1, x_2)\,(I + D_1 N(y_1, x_2))\,dy_1. \tag{1.2.9}$$

Убедимся, что она равномерно ограничена. Для этого представим произвольную функцию $w \in L_1(\mathbb{R}^{d_2})$ в виде $w = \bar{u}v$, где $u, v \in L_2(\mathbb{R}^{d_2})$ таковы, что $\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} = \|v\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} = \|w\|_{1,\mathbb{R}^{d_2}}$. Тогда если $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^{d\times n}$, то

$$\begin{aligned} |(A^0\xi, \zeta w)_{\mathbb{R}^{d_2}}| &= |(A(\xi + D_1 N_\xi)u, \zeta v)_{\mathcal{F}}| \leqslant \\ &\leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}(1 + \|D_1 N\|_{\mathbf{M}})|\xi||\zeta|\,\|u\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}}\,\|v\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} = \\ &= \|A\|_{\mathbf{M}}(1 + \|D_1 N\|_{\mathbf{M}})|\xi||\zeta|\,\|w\|_{1,\mathbb{R}^{d_2}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|A^0\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}(1 + \|D_1 N\|_{\mathbf{M}}).$$

Аналогично проверяется, что ограничена и производная $D_2 A^0$, и тем самым $A^0 \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^{d_2})$. Как известно, при выполнении (1.1.13) оператор $D^* A^0 D$ сильно эллиптичен, а потому коэрцитивен на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Ниже мы установим, что постоянные в соответствующей оценке могут быть выбраны такими же, как и в оценке (1.1.4) для оператора $D^* A^\varepsilon D$ (см. неравенство (1.2.17) в доказательстве леммы 1.2.3 и обсуждения сразу после нее).

Далее, функции $a_1^0, a_2^0\colon \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbf{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{d\times n})$ задаются формулами

$$a_1^0(x_2) = \int_{\mathbb{Q}} (I + D_1 N(y_1, x_2))^* a_1(y_1, x_2)\,dy_1, \tag{1.2.10}$$

$$a_2^0(x_2) = \int_{\mathbb{Q}} (a_2(y_1, x_2) + A(y_1, x_2) D_1 M(y_1, x_2))\,dy_1. \tag{1.2.11}$$

Покажем, что a_1^0, $D_2 a_1^0$ и a_2^0, $D_2 a_2^0$ являются мультипликаторами между $H^1(\mathbb{R}^{d_2})$ и $L_2(\mathbb{R}^{d_2})$. Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$. Согласно неравенству Коши

$$\begin{aligned} \|a_1^0 u\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left| \int_{\mathbb{Q}} (I + D_1 N(y_1, x_2))^* a_1(y_1, x_2)\, u(x_2)\,dy_1 \right|^2 dx_2 \leqslant \\ &\leqslant 2\int_{\mathcal{F}} |a_1(x)\,u(x_2)|^2\,dx + 2\int_{\mathcal{F}} |D_1 N(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{Q}} |a_1(y_1, x_2)\,u(x_2)|^2\,dy_1 \right) dx. \end{aligned}$$

Так как $D_1 N$ — мультипликатор между $L_2(\mathbb{R}^{d_2})$ и $L_2(\mathcal{F})$, то

$$\int_{\mathcal{F}} |D_1 N(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{Q}} |a_1(y_1, x_2)\, u(x_2)|^2\, dy_1 \right) dx \leqslant \|D_1 N\|^2_{\mathbf{M}} \|a_1 u\|^2_{2,\mathcal{F}},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|a_1^0 u\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} &\leqslant 2(1 + \|D_1 N\|_{\mathbf{M}}) \|a_1 u\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \\ &\leqslant 2\|a_1\|_{\mathbf{M}} (1 + \|D_1 N\|_{\mathbf{M}}) \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|a_2^0 u\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left| \int_{\mathbb{Q}} (a_2(y_1, x_2) + A(y_1, x_2)\, D_1 M(y_1, x_2))\, u(x_2)\, dy_1 \right|^2 dx_2 \leqslant \\ &\leqslant 2\int_{\mathcal{F}} |a_2(x)\, u(x_2)|^2\, dx + 2\int_{\mathcal{F}} |A(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{Q}} |D_1 M(y_1, x_2)\, u(x_2)|^2\, dy_1 \right) dx, \end{aligned}$$

и поскольку

$$\int_{\mathcal{F}} |a_2(x)\, u(x_2)|^2\, dx \leqslant \|a_2\|^2_{\mathbf{M}} \|u\|^2_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}},$$

и

$$\int_{\mathcal{F}} |A(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{Q}} |D_1 M(y_1, x_2)\, u(x_2)|^2\, dy_1 \right) dx \leqslant \|A\|^2_{\mathbf{M}} \|D_1 M\|^2_{\mathbf{M}} \|u\|^2_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}},$$

то

$$\|a_2^0 u\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} \leqslant 2\big(\|a_2\|_{\mathbf{M}} + \|A\|_{\mathbf{M}} \|D_1 M\|_{\mathbf{M}}\big) \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}}.$$

Точно так же получаются оценки для $D_2 a_1^0$ и $D_2 a_2^0$.

Наконец, распределение q^0 порождается формой

$$(q^0 u, u)_{\mathbb{R}^{d_2}} = (qu, u)_{\mathcal{F}} + (a_1^* D_1 M u, u)_{\mathcal{F}} \tag{1.2.12}$$

на пространстве $H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$. В случае, когда q можно отождествить с функцией, выполнено обычное соотношение

$$q^0(x_2) = \int_{\mathbb{Q}} q(y_1, x_2)\, dy_1 + \int_{\mathbb{Q}} a_1^*(y_1, x_2)\, D_1 M(y_1, x_2)\, dy_1.$$

Из оценки

$$\begin{aligned} |(q^0 u, u)_{\mathbb{R}^{d_2}}| &\leqslant |(qu, u)_{\mathcal{F}}| + |(D_1 M u, a_1 u)_{\mathcal{F}}| \leqslant \\ &\leqslant \big(\|q\|_{\mathbf{M}} + \|a_1\|_{\mathbf{M}} \|D_1 M\|_{\mathbf{M}}\big) \|u\|^2_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}} \end{aligned}$$

вытекает, что $q^0 \in \mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^{d_2}), H^{-1}(\mathbb{R}^{d_2}))$. Легко понять, что и $D_2 q^0$ принадлежит тому же пространству мультипликаторов.

Заметим, что при $k, l \in \mathbb{N}_0$ пространство $\mathbf{M}(H^k(\mathbb{R}^{d_2}), H^{-l}(\mathbb{R}^{d_2}))$ вложено в $\mathbf{M}(H^k(\mathcal{F}), H^l(\mathcal{F})^*)$, причем норма соответствующего оператора вложения не превосходит единицы. Действительно, если $\gamma \in \mathbf{M}(H^k(\mathbb{R}^{d_2}), H^{-l}(\mathbb{R}^{d_2}))$, а $u \in H^k(\mathcal{F})$ и $v \in H^l(\mathcal{F})$, то

$$\begin{aligned} |(\gamma u, v)_{\mathcal{F}}| &= \left| \int_{\mathbb{Q}} (\gamma u(x_1, \cdot), v(x_1, \cdot))_{\mathbb{R}^{d_2}}\, dx_1 \right| \leqslant \\ &\leqslant \|\gamma\|_{\mathbf{M}} \int_{\mathbb{Q}} \|u(x_1, \cdot)\|_{k,2,\mathbb{R}^{d_2}} \|v(x_1, \cdot)\|_{l,2,\mathbb{R}^{d_2}}\, dx_1 \leqslant \\ &\leqslant \|\gamma\|_{\mathbf{M}} \|u\|_{k,2,\mathcal{F}} \|v\|_{l,2,\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует ограниченность оператора $\mathcal{A}^0$:

$$\|\mathcal{A}^0 u\|_{-1,2,\mathbb{R}^d} \leqslant C_\flat^0 \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{1.2.13}$$

причем

$$C_\flat^0 = \|A^0\|_{\mathbf{M}} + \|a_1^0\|_{\mathbf{M}} + \|a_2^0\|_{\mathbf{M}} + \|q^0\|_{\mathbf{M}}.$$

Как мы уже отмечали выше, старшая часть эффективного оператора удовлетворяет оценке вида (1.1.4) с теми же самыми постоянными, что и для $\mathcal{A}^\varepsilon$. Однако этого не достаточно для коэрцитивности всего оператора. Причина в том, что константы в оценках вида (1.1.8)–(1.1.10) для младших членов $\mathcal{A}^0$, вообще говоря, могут превосходить соответствующие константы для младших членов $\mathcal{A}^\varepsilon$, а тогда условие (1.1.12), которое обеспечивало коэрцитивность исходного оператора, для эффективного оператора оказывается бесполезным.

Установить коэрцитивность, и даже m-секториальность оператора $\mathcal{A}^0$ нам поможет следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2.3. *Введем форму* $\mathfrak{a}^0$ *на* $H^1(\mathbb{R}^d)^n \oplus L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$ *равенством*

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \big(&\langle A(y_1,x_2)\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1), \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1)\rangle + \\ &+ \langle \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1), a_1(y_1,x_2)\mathfrak{u}_1(x)\rangle + \\ &+ \langle a_2(y_1,x_2)\mathfrak{u}_1(x), \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1)\rangle\big)\,dx\,dy_1 + \\ + \int_{\mathbb{R}^{d_1}} &(q\mathfrak{u}_1(x_1,\cdot), \mathfrak{u}_1(x_1,\cdot))_{\mathfrak{F}}\,dx_1,\end{aligned}$$

где $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$, *а* $\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1) = D_x\mathfrak{u}_1(x) \oplus D_{y_1}\mathfrak{u}_2(x,y_1)$. *Тогда*

$$|\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u})| \leqslant C_\flat\big(\|\mathfrak{D}\mathfrak{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|\mathfrak{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}\big) \tag{1.2.14}$$

и

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) \geqslant c_*\|\mathfrak{D}\mathfrak{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} - c_\natural\|\mathfrak{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.2.15}$$

Доказательство. Обе оценки достаточно проверять для функций $\mathfrak{u}$ из множества $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n \oplus C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \tilde{C}^\infty(\mathbb{Q}))^n$. Мы начнем с (1.2.15). Положим $u^{(\varepsilon)}(x) = \mathfrak{u}_1(x) + \varepsilon\mathfrak{u}_2(x,\varepsilon^{-1}x_1)$. Тогда $Du^{(\varepsilon)}(x) = \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,\varepsilon^{-1}x_1) + \varepsilon(D_x\mathfrak{u}_2)(x,\varepsilon^{-1}x_1)$. В теории двухмасштабной сходимости хорошо известен следующий факт: если $f \in C_c(\mathbb{R}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,\varepsilon^{-1}x_1)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} f(x,y_1)\,dx\,dy_1 \tag{1.2.16}$$

(см. [A92, леммы 5.5 и 5.6]; ср. с (1.2.3)). Из него вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle A^\varepsilon(x)\,Du^{(\varepsilon)}(x), Du^{(\varepsilon)}(x)\rangle\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle A(y_1,x_2)\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1), \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1)\rangle\,dx\,dy_1$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Du^{(\varepsilon)}(x)|^2\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} |\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y_1)|^2\,dx\,dy_1.$$

Очевидно также, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u^{(\varepsilon)}(x)|^2\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{u}_1(x)|^2\,dx.$$

Тем самым если подставить функцию $u^{(\varepsilon)}$ в (1.1.4) и перейти к пределу, то получим:

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle A(y_1,x_2)\mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1),\mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1)\rangle\,dx\,dy_1 + C_A\|\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_A\|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{1.2.17}$$

Оценим теперь младшие члены формы. По неравенству Коши

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle \mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1), a_1(y_1,x_2)\mathrm{u}_1(x)\rangle\,dx\,dy_1\right| \leqslant \\ \leqslant \|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} |a_1(y_1,x_2)\mathrm{u}_1(x)|^2\,dx\,dy_1\right)^{1/2}.$$

Поменяем порядок интегрирования и воспользуемся оценкой (1.1.5):

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle \mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1), a_1(y_1,x_2)\mathrm{u}_1(x)\rangle\,dx\,dy_1\right| \leqslant \\ \leqslant \|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\big(c_{a_1}\|D_x\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + C_{a_1}\|\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}\big)^{1/2}.$$

Учитывая еще, что

$$\|D_x\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|D_x\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_{y_1}\mathrm{u}_2\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} = \|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{1.2.18}$$

(здесь равенство вытекает из теоремы Стокса), находим:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle \mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1), a_1(y_1,x_2)\mathrm{u}_1(x)\rangle\,dx\,dy_1\right| \leqslant \\ \leqslant c_{a_1}^{1/2}\|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + 2^{-1}c_{a_1}^{-1/2}C_{a_1}\|\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.2.19}$$

Аналогично

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle a_2(y_1,x_2)\mathrm{u}_1(x), \mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1)\rangle\,dx\,dy_1\right| \leqslant \\ \leqslant c_{a_2}^{1/2}\|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + 2^{-1}c_{a_2}^{-1/2}C_{a_2}\|\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.2.20}$$

и

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (q\mathrm{u}_1(x_1,\cdot),\mathrm{u}_1(x_1,\cdot))_{2,\mathcal{F}}\,dx_1\right| \leqslant \\ \leqslant c_q\|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + C_q\|\mathrm{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.2.21}$$

Оценки (1.2.17)–(1.2.21) вместе дают (1.2.15).

Отметим, что неравенство (1.2.19) останется верным, если заменить в нём постоянные c_{a_1} и C_{a_1} на мультипликаторную норму коэффициента a_1. То же самое можно сказать и о (1.2.20) и (1.2.21). Чтобы доказать (1.2.14), достаточно добавить к таким оценкам очевидное соотношение

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle A(y_1,x_2)\mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1),\mathfrak{D}\mathrm{u}(x,y_1)\rangle\,dx\,dy_1\right| \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}\|\mathfrak{D}\mathrm{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \qquad \square$$

Замечание 1.2.4. Форма $\mathfrak{a}^0$ отвечает так называемой усредненной двухмасштабной системе, предложенной впервые Аллером в контексте теории двухмасштабной сходимости [A92]. Подробное изложение базовых результатов этой теории может быть найдено, например, в [LNW02].

Свяжем форму $\mathfrak{a}^0$ с оператором $\mathcal{A}^0$. Фиксируем $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и положим $\mathfrak{u}_1(x) = u(x)$ и $\mathfrak{u}_2(x, y_1) = N(y_1, x_2)\, Du(x) + M(y_1, x_2)\, u(x)$. Тогда $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$ принадлежит пространству $H^1(\mathbb{R}^d)^n \oplus L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$. В самом деле, $\mathfrak{u}_2(x, y_1)$ имеет слабую производную по переменной y_1, и, так как $D_1 N$ и $D_1 M$ являются мультипликаторами в подходящих парах пространств, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} |D_{y_1} N(y_1, x_2)\, Du(x)|^2 \, dx\, dy_1 \leqslant \|D_1 N\|_{\mathbf{M}}^2 \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} |D_{y_1} M(y_1, x_2)\, u(x)|^2 \, dx\, dy_1 \leqslant \|D_1 M\|_{\mathbf{M}}^2 \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^d}^2$$

(мы изменяли порядок интегрирования, чтобы применить оценки для $D_1 N$ и $D_1 M$). Таким образом, $\mathfrak{u}$ принадлежит области определения формы $\mathfrak{a}^0$. Заметим теперь, что при любых $\mathfrak{v} \in 0 \oplus L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} \big(&\langle A(y_1, x_2)\,(I + D_1 N(y_1, x_2)) D_x \mathfrak{u}_1(x), D_{y_1} \mathfrak{v}_2(x, y_1) \rangle + \\ &+ \langle (a_2(y_1, x_2) + A(y_1, x_2)\, D_1 M(y_1, x_2)) \mathfrak{u}_1(x), D_{y_1} \mathfrak{v}_2(x, y_1) \rangle \big)\, dx\, dy_1, \end{aligned}$$

поэтому $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$, как видно из тождеств (1.2.1) и (1.2.2) для функций N и M. В частности, $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = \mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, u \oplus 0)$. Группируя в $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, u \oplus 0)$ слагаемые и используя определения эффективных коэффициентов, получаем:

$$\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = (\mathcal{A}^0 u, u)_{\mathbb{R}^d}. \tag{1.2.22}$$

Это и есть искомая связь формы $\mathfrak{a}^0$ и оператора $\mathcal{A}^0$.

Отсюда и из леммы 1.2.3 следует, что $\mathcal{A}^0$ коэрцитивен, причем

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0 u, u)_{\mathbb{R}^d} + c_\natural \|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \geqslant c_* \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n \tag{1.2.23}$$

(см. еще (1.2.18)). Поскольку мы уже показали, что $\mathcal{A}^0$ ограничен, то он m-секториален. Далее, в силу оценок (1.2.14) и (1.2.15), при $\|\mathfrak{u}_1\|_{2,\mathbb{R}^d} = 1$ выполнено $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) \in \mathcal{S}$ (ср. с (1.1.11) и (1.1.13)). Из соотношения (1.2.22) тогда вытекает, что числовой образ оператора $\mathcal{A}^0$ содержится в $\mathcal{S}$, так что сектор для $\mathcal{A}^0$ может быть выбран равным сектору $\mathcal{S}$. Тем самым если $\mu \notin \mathcal{S}$, то $\mathcal{A}^0_\mu = \mathcal{A}^0 - \mu$ — изоморфизм. Кроме того, простое обобщение (на случай мультипликаторных коэффициентов) стандартного факта о повышении гладкости решений эллиптических уравнений позволяет установить, что $\mathcal{A}^0_\mu$ отображает $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f\|_{2,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.2.24}$$

(см. соотношение (1.5.25) и оценку (1.5.29)).

В заключение заметим, что из (1.2.15) следует, что оператор $\mathcal{A}^0$ коэрцитивен и для него выполняется неравенство вида (1.1.13) с теми же самыми постоянными. Из (1.2.14), в свою очередь, вытекает ограниченность $\mathcal{A}^0$, но оценка для его нормы, вообще говоря, хуже, чем (1.1.11).

1.3 Корректоры

Пусть $\mathcal{P}^\varepsilon$ — псевдодифференциальный оператор по переменной x_1 с символом $\mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*}$ (напомним, что $\mathbb{Q}^* = 2\pi\mathbb{Q}$); другими словами,

$$\mathcal{P}^\varepsilon = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})^*\mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{I}), \tag{1.3.1}$$

где $\mathcal{F}$ есть преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{d_1})$. Тогда корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to H^1(\mathbb{R}^d)^n$ для оператора $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$ будет иметь вид

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon = (N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Заметим, что он отличается от традиционного для теории усреднения корректора наличием сглаживающего оператора $\mathcal{P}^\varepsilon$. Дело в том, что при $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ ни сама функция $(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f$, ни ее производная, вообще говоря, не являются квадратично-суммируемыми, однако $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ всегда принадлежит $H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Действительно, если F — периодическая функция из $\mathbf{M}(L_2(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathscr{F}))$ (как N и DN) или $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathscr{F}))$ (как M и DM), то композиция F^ε с $\mathcal{P}^\varepsilon$ непрерывно отображает соответственно $L_2(\mathbb{R}^d)$ или $H^1(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (мы это докажем позже, в лемме 1.6.3). Учитывая еще, что сглаживатель $\mathcal{P}^\varepsilon$ коммутирует как с дифференцированием D, так и с резольвентой $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ (поскольку эффективные коэффициенты не зависят от первой переменной), а сама резольвента удовлетворяет оценке (1.2.24), приходим к включению $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Более того, из данных рассуждений также следует, что $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ ограничен и при любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ выполнено

$$\varepsilon\|D_1\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_2\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.3.3}$$

В качестве сглаживателя могут использоваться и другие операторы, например сглаживатель по Стеклову — см. п. 1.6.4; в некоторых случаях оказывается достаточно и классического корректора, вообще без сглаживающего оператора, — см. п. 1.6.5.

Второй корректор, $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, более сложен по сравнению с первым, и для его определения нам понадобятся дополнительные обозначения. Пусть k — вектор в $\mathbb{R}^{d_1}$. Часто мы будем отождествлять его с соответствующим элементом в пространстве $\mathbb{R}^{d_1}\oplus 0$. Введем дифференциальные выражения

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(k; y_1) = ((k+D_2)^*A(y_1,\cdot) + a_1^*(y_1,\cdot))(k+D_2) + \\ + (k+D_2)^*a_2(y_1,\cdot) + q(y_1,\cdot),\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

$$\mathcal{T}(k; y_1) = ((k+D_2)^*A(y_1,\cdot) + a_1^*(y_1,\cdot))D_{y_1} \tag{1.3.5}$$

и семейства операторов

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^0(k) &= (k+D_2)^*A^0(k+D_2) + (a_1^0)^*(k+D_2) + (k+D_2)^*a_2^0 + q^0,\\ \mathcal{K}_\mu(k; y_1) &= (N(y_1,\cdot)(k+D_2) + M(y_1,\cdot))(\mathcal{A}_\mu^0(k))^{-1},\end{aligned}$$

где $\mu \notin \mathcal{S}$ и, как обычно, $\mathcal{A}_\mu^0(k) = \mathcal{A}^0(k) - \mu$. Отметим, что отображение $k \mapsto \mathcal{A}^0(k)\colon H^1(\mathbb{R}^{d_2}) \to H^{-1}(\mathbb{R}^{d_2})$ является символом эффективного оператора в том смысле, что

$$\mathcal{A}^0 = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})^*\mathcal{A}^0(\cdot)(\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})$$

(мы учли, что эффективные коэффициенты не зависят от «периодической» переменной), поэтому $\mathcal{A}^0_\mu(k)$ обратим, а значит, $\mathcal{K}_\mu(k; y_1)$ корректно определен.

Лемма 1.3.1. *При всех $k \in \mathbb{R}^{d_1}$ оператор $\mathcal{A}^0(k)$ m-секториален с сектором $\mathcal{S}$. Кроме того, если $u \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$, то*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0(k)u, u)_{\mathbb{R}^{d_2}} + c_\natural \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} \geqslant c_* \|(k + D_2)u\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}}. \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Предположим, что существуют такие $k_0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$ с $\|u_0\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} = 1$, что $(\mathcal{A}^0(k_0)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}} \notin \mathcal{S}$. Так как множество $\mathcal{S}$ замкнуто, а отображение $k \mapsto (\mathcal{A}^0(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}}$ — непрерывно, то образ некоторого открытого шара $\mathcal{K}$ при этом отображении также будет отделен от сектора $\mathcal{S}$. Не уменьшая общности, можно считать, что мнимая часть $(\mathcal{A}^0(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}}$ имеет один знак при всех $k \in \mathcal{K}$ — для определенности $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^0(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}} \geqslant 0$. Тогда если $c_\mathcal{S}$ — вершина сектора $\mathcal{S}$, а $\alpha_\mathcal{S}$ — угол его раствора, то найдется постоянная $c_\mathcal{K} > 0$, такая что неравенство

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_\mathcal{S}/2}(\mathcal{A}^0_{c_\mathcal{S}}(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}} \geqslant c_\mathcal{K}$$

будет выполнено равномерно по $k \in \mathcal{K}$.

Положим $\hat{v}_0(k, x_2) = |\mathcal{K}|^{-1/2}\mathbb{1}_\mathcal{K}(k)\,u_0(x_2)$ и $v_0 = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{I})^{-1}\hat{v}_0$. Ясно, что $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $\|v_0\|_{2,\mathbb{R}^d} = 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^0 v_0, v_0)_{\mathbb{R}^d} &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\mathcal{A}^0(k)\hat{v}_0(k,\cdot), \hat{v}_0(k,\cdot))_{\mathbb{R}^{d_2}}\,dk = \\ &= |\mathcal{K}|^{-1}\int_\mathcal{K} (\mathcal{A}^0(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}}\,dk,\end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_\mathcal{S}/2}(\mathcal{A}^0_{c_\mathcal{S}} v_0, v_0)_{\mathbb{R}^d} \geqslant c_\mathcal{K}.$$

Однако это противоречит тому, что $(\mathcal{A}^0 v_0, v_0)_{\mathbb{R}^d} \in \mathcal{S}$.

Доказательство оценки (1.3.6) вполне аналогично. Если найдутся такие $k_0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0(k_0)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}} + c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} - c_*\|(k + D_2)u_0\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} < 0,$$

то такое неравенство будет верно и при k из некоторой открытой окрестности $\mathcal{K}$ точки k_0. Пусть $\hat{v}_0(k, x_2) = \mathbb{1}_\mathcal{K}(k)\,u_0(x_2)$ и $v_0 = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{I})^{-1}\hat{v}_0$. Тогда $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0 v_0, v_0)_{\mathbb{R}^d} + c_\natural\|v_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} - c_*\|Dv_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} = \\ &\quad= \int_\mathcal{K}\Big(\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0(k)u_0, u_0)_{\mathbb{R}^{d_2}} + c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} - c_*\|(k + D_2)u_0\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}}\Big)\,dk < 0,\end{aligned}$$

что невозможно ввиду (1.2.23).

Наконец, непрерывность (которая очевидна из мультипликаторных свойств эффективных коэффициентов, см. п. 1.2.2) и коэрцитивность оператора $\mathcal{A}^0(k)$ вместе дают m-секториальность. □

Обозначим через $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^+$ сопряженный к $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$ оператор. Для него мы построим эффективный оператор $(\mathcal{A}_\mu^0)^+$, корректор $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+$, а также семейства $\mathcal{A}_\mu^0(k)^+$, $\mathcal{K}_\mu(k;y_1)^+$. (Заметим, что $(\mathcal{A}_\mu^0)^+$ и $\mathcal{A}_\mu^0$ оказываются взаимно сопряженными друг к другу — см. п. 1.6.3.) Определим еще псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}_\mu$ по «периодической» переменной x_1 с операторнозначным символом $k \mapsto \mathcal{L}_\mu(k)\colon L_2(\mathbb{R}^{d_2})^n \to L_2(\mathbb{R}^{d_2})^n$, имеющим вид

$$\mathcal{L}_\mu(k) = \int_{\mathbb{Q}} (\mathcal{K}_\mu(k;y_1)^+)^* \big(\mathcal{S}(k;y_1)\,(\mathcal{A}_\mu^0(k))^{-1} + \mathcal{T}(k;y_1)\mathcal{K}_\mu(k;y_1)\big)\, dy_1, \qquad (1.3.7)$$

то есть

$$\mathcal{L}_\mu = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})^*\mathcal{L}_\mu(\cdot)\,(\mathcal{F}\otimes\mathcal{I}).$$

Оператор $\mathcal{L}_\mu^+$ строится по $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^+$ аналогичным образом. Тогда корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$ дается формулой

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) + ((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ - \mathcal{L}_\mu^+)^*. \qquad (1.3.8)$$

Ниже мы увидим, что он ограничен и при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (1.3.9)$$

Замечание 1.3.2. Как мы уже отмечали, отображение $k \mapsto \mathcal{A}_\mu^0(k)$ является символом для $\mathcal{A}_\mu^0$, поэтому оператор $\mathcal{L}_\mu$ можно также записать в виде

$$\mathcal{L}_\mu = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1},$$

где $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор третьего порядка, который непрерывно отображает $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-2}(\mathbb{R}^d)^n$. В частном случае, когда у $\mathcal{A}^\varepsilon$ нет младших членов, имеем:

$$\mathcal{L} = D^*\left(\int_{\mathbb{Q}} N^+(y_1,\cdot)^* D^* A(y_1,\cdot)\,(I + (D_1N)(y_1,\cdot))\,dy_1\right) D.$$

Подобная форма записи использовалась в работе [BSu05].

1.4 Основные результаты

Теорема 1.4.1. *Если $\mu \notin \mathcal{S}$, то при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad (1.4.1)$$

$$\|D_2(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - D_2(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (1.4.2)$$

Оценки точны по порядку, а постоянные зависят лишь от n, d, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Теорема 1.4.2. *Если $\mu \notin \mathcal{S}$, то при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_1(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - D_1(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon D_1\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (1.4.3)$$

Оценка точна по порядку, а постоянная зависит лишь от n, d, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Следствие 1.4.3. *Если $\mu \notin \mathcal{S}$ и $r \in (0,1)$, то при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_1^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{1-r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.4.4}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от r, n, d, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Теорема 1.4.4. *Если $\mu \notin \mathcal{S}$, то при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.4.5}$$

Оценка точна по порядку, а постоянная зависит лишь от n, d, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Следствие 1.4.5. *Если $\mu \notin \mathcal{S}$ и $r \in (0,1]$, то при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{2-r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.4.6}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от n, d, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

1.5 Доказательство основных результатов

Здесь будут доказаны результаты, выписанные в предыдущем параграфе. Сначала мы перейдем от $\mathcal{A}^\varepsilon$ к оператору на фундаментальном множестве $\mathcal{F}$ и сформулируем для него утверждения, которые равносильны доказываемым теоремам. Их мы дальше и станем непосредственно проверять.

1.5.1 *Задача на фундаментальном множестве*

Чтобы свести задачу на фундаментальное множество решетки $\mathbb{Z}^{d_1}$, как обычно, используется преобразование Гельфанда. Напомним, что преобразование Гельфанда $\mathcal{G}\colon L_2(\mathbb{R}^{d_1}) \to L_2(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q})$ задается равенством

$$\mathcal{G}u(k, x_1) = (2\pi)^{-d_1/2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^{d_1}} u(x_1 + z)\, e^{-i\langle x_1 + z, k\rangle}$$

(ряд сходится по норме в $L_2(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q})$). Хорошо известно, что оно является изометрическим изоморфизмом пространств $L_2(\mathbb{R}^{d_1})$ и $L_2(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q})$ и, кроме того, гомеоморфно отображает $H^1(\mathbb{R}^{d_1})$ на $L_2(\mathbb{Q}^*; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))$. По двойственности преобразование Гельфанда распространяется на $H^{-1}(\mathbb{R}^{d_1})$, так что $\mathcal{G}\colon H^{-1}(\mathbb{R}^{d_1}) \to L_2(\mathbb{Q}^*; \tilde{H}^{-1}(\mathbb{Q}))$.

Пусть $\tau = (k, \varepsilon) \in \mathcal{T} = \mathbb{Q}^* \times \mathcal{E}$. Положим $D_1(\tau) = D_1 + k$, $D_2(\tau) = \varepsilon D_2$ и $D(\tau) = D_1(\tau) + D_2(\tau)$. На периодических пространствах Соболева нам удобно ввести зависящую от параметров τ и θ норму

$$\|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau,\theta} = \left(\|D(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}^2 + |\theta|^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2\right)^{1/2},$$

а также зависящие от τ и θ анизотропные нормы

$$\|u\|_{1_1,2,\mathcal{F};\tau,\theta} = \big(\|D_1(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + |\theta|^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big)^{1/2},$$
$$\|u\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau,\theta} = \big(\|D_2(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + |\theta|^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}\big)^{1/2}.$$

Соответствующие двойственные нормы обозначаются через $\|\cdot\|_{-1,2,\mathcal{F};\tau,\theta}$ и т. д., например:

$$\|f\|_{-1,2,\mathcal{F};\tau,\theta} = \sup_{u\in\tilde{H}^1(\mathcal{F})} \frac{|(f,u)_{\mathcal{F}}|}{\|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau,\theta}}.$$

В качестве θ, как правило, будет выступать или ε, или τ; во втором случае под $|\tau|^2$ следует понимать величину $|k|^2+\varepsilon^2$. При $\theta=\tau$ последний индекс опускаем.

Определим оператор $\mathcal{A}(\tau)\colon \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n \to \tilde{H}^{-1}(\mathcal{F})^n$ формулой

$$\mathcal{A}(\tau) = D(\tau)^* A D(\tau) + \varepsilon a_1^* D(\tau) + \varepsilon D(\tau)^* a_2 + \varepsilon^2 q \tag{1.5.1}$$

и положим $\mathcal{A}_\mu(\tau) = \mathcal{A}(\tau) - \varepsilon^2\mu$. Так как преобразование $\mathcal{GH}^\varepsilon \otimes \mathcal{I}$ унитарно, то на плотном множестве функций u из $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1} L_2(\mathbb{R}^d)^n$ выполнено

$$(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu u, u)_{\mathbb{R}^d} = ((\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\mathcal{A}^\varepsilon_\mu u, (\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})u)_{\mathbb{Q}^*\times\mathcal{F}},$$

а значит, это равенство справедливо и для любых $u\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Принимая во внимание, что

$$(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\, D\, (\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \varepsilon^{-1}\int^{\oplus}_{\mathbb{Q}^*} D(\tau)\, dk, \tag{1.5.2}$$

а все $\mathbb{Z}^{d_1}$-периодические мультипликаторы коммутируют с $\mathcal{G}\otimes\mathcal{I}$, далее находим:

$$(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu u, u)_{\mathbb{R}^d} = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{Q}^*} (\mathcal{A}_\mu(\tau)\tilde{u}(k,\cdot), \tilde{u}(k,\cdot))_{\mathcal{F}}\, dk,$$

где $\tilde{u} = (\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})u$. Поскольку $\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I}$ изоморфно отображает $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ на всё $L_2(\mathbb{Q}^*;\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n)$, то отсюда сразу же вытекает, что $\varepsilon^{-2}\mathcal{A}_\mu(\tau)$ есть слой в разложении $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu$:

$$(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\,\mathcal{A}^\varepsilon_\mu\,(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \varepsilon^{-2}\int^{\oplus}_{\mathbb{Q}^*} \mathcal{A}_\mu(\tau)\, dk. \tag{1.5.3}$$

«Прямой интеграл» $\int^{\oplus}_{\mathbb{Q}^*}\mathcal{A}_\mu(\tau)\,dk$ есть оператор «послойного» умножения на $\mathcal{A}_\mu(\tau)$; иначе говоря, он переводит функцию $\tilde{u}$ из «прямого интеграла банаховых пространств» $L_2(\mathbb{Q}^*;\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n)$ в функцию $k\mapsto\mathcal{A}_\mu(\tau)\tilde{u}(k)$ из «прямого интеграла банаховых пространств» $L_2(\mathbb{Q}^*;\tilde{H}^{-1}(\mathcal{F})^n)$.

Покажем, что $\mathcal{A}_\mu(\tau)$ m-секториален. Прежде всего отметим, что из оценок (1.1.5)–(1.1.7) следует, что при любом $u\in\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$

$$\varepsilon^2\|a_1 u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \varepsilon^2\|D_1(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + \|u\|^2_{1_2,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \tag{1.5.4}$$
$$\varepsilon^2\|a_2 u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \varepsilon^2\|D_1(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + \|u\|^2_{1_2,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \tag{1.5.5}$$
$$\varepsilon^2|(qu,u)_{\mathcal{F}}| \lesssim \varepsilon^2\|D_1(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + \|u\|^2_{1_2,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}. \tag{1.5.6}$$

В частности,
$$\varepsilon^2\|a_1u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|u\|^2_{1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \tag{1.5.7}$$
$$\varepsilon^2\|a_2u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|u\|^2_{1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \tag{1.5.8}$$
$$\varepsilon^2|(qu,u)_{\mathcal{F}}| \lesssim \|u\|^2_{1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \tag{1.5.9}$$
откуда
$$\|\mathcal{A}(\tau)u\|_{-1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \qquad u\in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n. \tag{1.5.10}$$

В основном нам будет достаточно и более грубого результата:
$$\|\mathcal{A}(\tau)u\|_{-1,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau}, \qquad u\in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n. \tag{1.5.11}$$

В следующей лемме будет доказано, что оператор $\mathcal{A}(\tau)$ коэрцитивен, и будет найден отвечающий ему сектор.

Лемма 1.5.1. *При всех $\tau\in\mathcal{T}$ оператор $\mathcal{A}(\tau)$ m-секториален с сектором $\varepsilon^2\mathcal{S}$. Кроме того, если $u\in\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$, то*
$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}(\tau)u,u)_{\mathcal{F}} + \varepsilon^2 c_\natural\|u\|^2_{2,\mathcal{F}} \geqslant c_*\|D(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.12}$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого значения $\tau\in\mathcal{T}$, скажем $\tau_0=(k_0,\varepsilon_0)$, нашелся элемент $u_0\in\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$, такой что
$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}(\tau_0)u_0,u_0)_{\mathcal{F}} + \varepsilon_0^2 c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} - c_*\|D(\tau_0)u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} < 0.$$
Отображение
$$k\mapsto \operatorname{Re}(\mathcal{A}(k,\varepsilon_0)u_0,u_0)_{\mathcal{F}} + \varepsilon_0^2 c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} - c_*\|D(k,\varepsilon_0)u_0\|^2_{2,\mathcal{F}}$$
представляет собой полином, поэтому неравенство
$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}(k,\varepsilon_0)u_0,u_0)_{\mathcal{F}} + \varepsilon_0^2 c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} - c_*\|D(k,\varepsilon_0)u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} < 0$$
для него выполнено и при k в некоторой открытой окрестности точки k_0. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество тех точек этой окрестности, которые содержатся в $\mathbb{Q}^*$. Так как $\mathcal{K}$ имеет положительную меру, то равенство $\tilde{v}_0(k,x)=\mathbb{1}_{\mathcal{K}}(k)\,u_0(x)$ определяет в пространстве $L_2(\mathbb{Q}^*;\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n)$ ненулевую функцию. Пусть v_0 есть прообраз $\tilde{v}_0$ при отображении $\mathcal{G}\mathcal{H}^{\varepsilon_0}\otimes\mathcal{I}$. Тогда $v_0\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$, а из (1.5.3) вытекает, что
$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathcal{A}^{\varepsilon_0}v_0,v_0)_{\mathbb{R}^d} + c_\natural\|v_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} - c_*\|Dv_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} &=\\ =\varepsilon_0^{-2}\int_{\mathcal{K}}\Big(\operatorname{Re}(\mathcal{A}(k,\varepsilon_0)u_0,u_0)_{\mathcal{F}} + \varepsilon_0^2 c_\natural\|u_0\|^2_{2,\mathcal{F}} &- c_*\|D(k,\varepsilon_0)u_0\|^2_{2,\mathcal{F}}\Big)\,dk<0.\end{aligned}$$
Однако это противоречит (1.1.13).

Подобным же образом можно показать, что не существует таких $\tau\in\mathcal{T}$ и $u\in\tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$ с $\|u\|_{2,\mathcal{F}}=1$, для которых $(\mathcal{A}(\tau)u,u)_{\mathcal{F}}\notin\varepsilon^2\mathcal{S}$; ср. с проверкой аналогичного результата в лемме 1.3.1. $\square$

Из леммы следует, что если $\mu \notin \mathcal{S}$, то $\mathcal{A}_\mu(\tau)$ имеет ограниченный обратный. Ясно также, что m-секториален будет, причем с тем же сектором, и сопряженный к $\mathcal{A}_\mu(\tau)$ оператор, который мы обозначим через $\mathcal{A}_\mu(\tau)^+$. Все дальнейшие рассуждения можно параллельно проводить и для $\mathcal{A}_\mu(\tau)^+$. Мы не станем отдельно формулировать соответствующие результаты, но будем ссылаться на них по номеру аналогичного утверждения для оператора $\mathcal{A}_\mu(\tau)$, добавляя «+» после номера, например: «лемма 1.5.1$^+$», «оценка (1.5.12$^+$)» и т. п.

Следующее утверждение содержит различные эллиптические оценки для $\mathcal{A}_\mu(\tau)$.

Лемма 1.5.2. *При всех $\mu \notin \mathcal{S}$, $\tau \in \mathcal{T}$ и $f \in L_2(\mathcal{F})^n$, $g \in L_2(\mathcal{F})^{d\times n}$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}(f + D(\tau)^* g)\|_{1,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}} + \|g\|_{2,\mathcal{F}}, \tag{1.5.13}$$

$$\|D(\tau)D_2(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.14}$$

Постоянные в оценках зависят лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим неравенство

$$|\tau|\|u\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|u\|_{1_1,2,\mathcal{F};\tau,\varepsilon}, \qquad u \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n. \tag{1.5.15}$$

Чтобы его получить, разложим функцию $u \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$ в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^{d_1}} \hat{u}_z(x_2)\, e^{-2\pi i\langle x_1, z\rangle}.$$

Если $k \in \mathbb{Q}^*$, то, очевидно,

$$\|D_1(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} |2\pi z - k|^2 \|\hat{u}_z\|^2_{2,\mathbb{R}^{d_2}} \geqslant |k|^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}}, \tag{1.5.16}$$

а отсюда и вытекает (1.5.15).

Положим $u = (\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}(f + D(\tau)^* g)$. Мы проверим оценку (1.5.13) сначала при $g = 0$, а потом — при $f = 0$. Итак, поскольку $\mu \notin \mathcal{S}$, то

$$\varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S})^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.17}$$

Из неравенств (1.5.12), (1.5.15) тогда следует, что

$$\begin{aligned}
|\tau|^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}} &\leqslant \|D(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}} + \varepsilon^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \\
&\lesssim |(\mathcal{A}_\mu(\tau)u, u)_\mathcal{F}| + \varepsilon^2\|u\|^2_{2,\mathcal{F}} \leqslant \\
&\leqslant \big(\|f\|_{2,\mathcal{F}} + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}\big)\|u\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \\
&\lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}\|u\|_{2,\mathcal{F}},
\end{aligned}$$

или, после сокращения,

$$|\tau|^2\|u\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.18}$$

Далее, используя (1.5.12) и (1.5.18), получаем:

$$\begin{aligned}\|D(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}^2 &\lesssim |(\mathcal{A}_\mu(\tau)u,u)_{\mathcal{F}}| + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leqslant \\ &\leqslant \big(\|f\|_{2,\mathcal{F}} + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}\big)\|u\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \\ &\lesssim |\tau|^{-2}\|f\|_{2,\mathcal{F}}^2.\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

Вместе оценки (1.5.18) и (1.5.19) показывают, что

$$\|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Этим установлено (1.5.13) при $g = 0$. Пусть теперь $f = 0$. Тогда, опять в силу (1.5.12),

$$\begin{aligned}\|D(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}^2 &\lesssim |(\mathcal{A}_\mu(\tau)u,u)_{\mathcal{F}}| + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2 = \\ &= |(g, D(\tau)u)_{\mathcal{F}}| + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leqslant \\ &\leqslant \|D(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}\|g\|_{2,\mathcal{F}} + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2,\end{aligned}$$

откуда

$$\|D(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}^2 \lesssim \|g\|_{2,\mathcal{F}}^2 + \varepsilon^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2.$$

В итоге

$$\|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau}^2 \lesssim \|g\|_{2,\mathcal{F}}^2 + |\tau|^2\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2,$$

и для завершения доказательства неравенства (1.5.13) нужно лишь применить ко второму слагаемому оценку ($1.5.19^+$).

Перейдем к оценке (1.5.14). Она представляет собой результат о повышении гладкости решений эллиптических уравнений, поэтому мы будем использовать технику разностных отношений (определения и необходимые свойства см. в доказательстве леммы 1.2.2). Положим $u = (\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}f$. Так как

$$\mathcal{A}_\mu(\tau)D_{2,i}^{(h)}u = D_{2,i}^{(h)}f - [D_{2,i}^{(h)}, \mathcal{A}_\mu(\tau)]u,$$

то

$$D(\tau)D_{2,i}^{(h)}u = D(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}D_{2,i}^{(h)}f - D(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}[D_{2,i}^{(h)}, \mathcal{A}_\mu(\tau)]u. \tag{1.5.20}$$

Первое слагаемое в правой части легко оценивается с помощью ($1.5.13^+$), достаточно перейти к сопряженному оператору и учесть, что для произвольного $v \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})$

$$\|D_{2,i}^{(-h)}v\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|D_{2,i}v\|_{2,\mathcal{F}} = \varepsilon^{-1}\|D_{2,i}(\tau)v\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Тем самым

$$\|D(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}D_{2,i}^{(h)}f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \varepsilon^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.21}$$

Ниже будет доказано, что коммутатор в другом слагаемом удовлетворяет оценке

$$\|[D_{2,i}^{(h)}, \mathcal{A}_\mu(\tau)]u\|_{-1,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau}, \qquad u \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n. \tag{1.5.22}$$

Из нее следует, что при любых $v \in L_2(\mathcal{F})^{d\times n}$

$$|(D(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}[D_{2,i}^{(h)}, \mathcal{A}_\mu(\tau)]u, v)_{\mathcal{F}}| \lesssim \|u\|_{1,2,\mathcal{F};\tau}\|(\mathcal{A}_\mu(\tau)^+)^{-1}D(\tau)^*v\|_{1,2,\mathcal{F};\tau}.$$

Применим к правой части последовательно (1.5.13$^+$) и (1.5.13), тогда

$$\|D(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}[D_{2,i}^{(h)},\mathcal{A}_\mu(\tau)]u\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathscr{F}}. \tag{1.5.23}$$

Объединяя (1.5.20) и (1.5.21), (1.5.23), находим:

$$\|D(\tau)D_{2,i}^{(h)}u\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim \varepsilon^{-1}\|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Так как данная оценка равномерна по h, то функция $D(\tau)u$ имеет слабую производную $D_{2,i}(\tau)D(\tau)u$, причем

$$\|D(\tau)D_{2,i}(\tau)u\|_{2,\mathscr{F}} = \varepsilon\|D(\tau)D_{2,i}u\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Нам осталось только установить (1.5.22).

Поскольку $\mathcal{T}_{-he_{2,i}}$ — изометрический изоморфизм, то оценка (1.5.22) равносильна тому, что

$$\|[D_{2,i}^{(h)},\mathcal{A}_\mu(\tau)]\mathcal{T}_{-he_{2,i}}u\|_{-1,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}, \qquad u\in\tilde{H}^1(\mathscr{F})^n. \tag{1.5.24}$$

Запишем стоящий слева оператор в виде

$$\begin{aligned}[D_{2,i}^{(h)},\mathcal{A}_\mu(\tau)]\mathcal{T}_{-he_{2,i}} = D(\tau)^*(D_{2,i}^{(h)}A)D(\tau) - \varepsilon(D_{2,i}^{(h)}a_1)^*D(\tau) &+\\ + \varepsilon D(\tau)^*(D_{2,i}^{(h)}a_2) + \varepsilon^2(D_{2,i}^{(h)}q)&.\end{aligned}$$

Это выражение имеет ту же структуру, что и сам оператор $\mathcal{A}(\tau)$. Кроме того, мультипликаторные нормы коэффициентов в выражении равномерно ограничены по h. Действительно, если функция $\gamma\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathscr{F})$ такова, что $D_{2,i}\gamma\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathscr{F})$, то

$$D_{2,i}^{(h)}\gamma(x) = \int_0^1 \mathcal{T}_{the_{2,i}}D_{2,i}\gamma(x)\,dt,$$

см. (1.2.7). По двойственности это равенство распространяется на распределения $\gamma\in C_c^\infty(\mathscr{F})^*$:

$$((D_{2,i}^{(h)}\gamma)u,v)_{\mathscr{F}} = \int_0^1((D_{2,i}\gamma)\mathcal{T}_{-the_{2,i}}u,\mathcal{T}_{-the_{2,i}}v)_{\mathscr{F}}\,dt, \qquad u,v\in C_c^\infty(\mathscr{F}).$$

Отсюда становится ясно, что $\|D_{2,i}^{(h)}A\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}A\|_{\mathbf{M}}$, $\|D_{2,i}^{(h)}a_1\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}a_1\|_{\mathbf{M}}$, $\|D_{2,i}^{(h)}a_2\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}a_2\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_{2,i}^{(h)}q\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_{2,i}q\|_{\mathbf{M}}$. Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве ограниченности $\mathcal{A}(\tau)$, приходим к (1.5.24). □

Разложим теперь в «прямой интеграл» эффективный оператор:

$$(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\,\mathcal{A}_\mu^0\,(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus}\mathcal{A}_\mu^0(\tau)\,dk. \tag{1.5.25}$$

Здесь $\mathcal{A}_\mu^0(\tau) = \mathcal{A}^0(\tau) - \varepsilon^2\mu$, а $\mathcal{A}^0(\tau)\colon \tilde{H}^1(\mathscr{F})^n \to \tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n$ определен равенством

$$\mathcal{A}^0(\tau) = D(\tau)^*A^0D(\tau) + \varepsilon(a_1^0)^*D(\tau) + \varepsilon D(\tau)^*a_2^0 + \varepsilon^2q^0. \tag{1.5.26}$$

Такие же соображения, как в доказательстве леммы 1.5.1, показывают, что если $\tau\in\mathscr{T}$, то оператор $\mathcal{A}^0(\tau)$ коэрцитивен и m-секториален с сектором $\varepsilon^2\mathcal{S}$.

Лемма 1.5.3. *При всех $\tau \in \mathcal{T}$ оператор $\mathcal{A}^0(\tau)$ m-секториален с сектором $\varepsilon^2\mathcal{S}$. Кроме того, если $u \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$, то*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0(\tau)u, u)_{\mathcal{F}} + \varepsilon^2 c_\natural \|u\|^2_{2,\mathcal{F}} \geqslant c_* \|D(\tau)u\|^2_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.27}$$

Тем самым при $\mu \notin \mathcal{S}$ оператор $\mathcal{A}^0_\mu(\tau)$ обратим и обратный к нему непрерывен. Следующее утверждение является аналогом леммы 1.5.2.

Лемма 1.5.4. *При всех $\mu \notin \mathcal{S}$, $\tau \in \mathcal{T}$ и $f \in L_2(\mathcal{F})^n$, $g \in L_2(\mathcal{F})^{d\times n}$*

$$\|(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}(f + D(\tau)^* g)\|_{1,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}} + \|g\|_{2,\mathcal{F}}, \tag{1.5.28}$$

$$\|D(\tau)D(\tau)(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.29}$$

Постоянные в оценках зависят лишь d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Доказательство. Мы не будем проводить доказательство во всех подробностях, так как оно совершенно аналогично проверке леммы 1.5.2, а ограничимся лишь несколькими пояснениями. Согласно лемме 1.5.3, оператор $\mathcal{A}^0_\mu(\tau)$ коэрцитивен и, кроме того,

$$\varepsilon^2\|(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S})^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.30}$$

Тогда, повторяя прежние рассуждения, придем к (1.5.28). Далее, в неравенстве (1.5.29) сейчас стоит дифференцирование $D(\tau)D(\tau)$ вместо $D(\tau)D_2(\tau)$, как было в лемме 1.5.2, и поэтому нужно дополнительно оценивать композицию $D(\tau)D_1(\tau)$ с $(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}$. Однако коэффициенты оператора $\mathcal{A}^0(\tau)$ не зависят от «периодической» переменной, так что он коммутирует с $D_1(\tau)$, а значит, искомая оценка для $D(\tau)D_1(\tau)(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}$ прямо вытекает из соответствующего результата для $D(\tau)(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}D_1(\tau)$. □

Замечание 1.5.5. Условие $\tau \in \mathcal{T}$ использовалось в доказательстве леммы трижды. Во-первых, мы учитывали его при выводе неравенства (1.5.16). Во-вторых, оно гарантировало коэрцитивность оператора $\mathcal{A}^0(\tau)$. Наконец, это условие было необходимо нам для того, чтобы сектор для $\mathcal{A}^0(\tau)$ совпал с $\varepsilon^2\mathcal{S}$, и тогда была верна оценка (1.5.30). Однако из доказательства ясно, что если, скажем, для некоторого сужения оператора $\mathcal{A}^0(\tau)$ все три перечисленных результата оказываются выполненными при каком-либо $\tau \notin \mathcal{T}$, то для данного сужения утверждение леммы останется в силе и при таком τ. Это наблюдение нам понадобится в дальнейшем.

Оператор $\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon \otimes \mathcal{I}$ унитарно отображает $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ на прямой интеграл пространств $L_2(\mathbb{Q}^*; L_2(\mathcal{F})^n)$, а потому можно сформулировать аналог теоремы 1.4.1, используя слои $\mathcal{A}_\mu(\tau)$, $\mathcal{A}^0_\mu(\tau)$ «прямых интегралов» (1.5.3), (1.5.25).

Теорема 1.5.6. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда при любых $\tau \in \mathcal{T}$ и $f \in L_2(\mathcal{F})^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1} f - (\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathcal{F}},$$

$$\|D_2(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1} f - D_2(\tau)(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Постоянные в оценках зависят лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Перейдем к результатам с корректорами. Пусть $\mathcal{P}$ — ортогональный проектор в пространстве $L_2(\mathcal{F})^n$ на $L_2(\mathbb{R}^{d_2})^n$ как подпространство функций, зависящих только от «непериодической» переменной x_2:

$$\mathcal{P}u(x) = \int_{\mathbb{Q}} u(y_1, x_2)\, dy_1. \qquad (1.5.31)$$

Отметим, что с помощью проектора $\mathcal{P}$ неравенство Пуанкаре записывается в виде

$$\|\mathcal{P}^{\perp} u\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \pi^{-1} \|D_1(\tau)u\|_{2,\mathcal{F}}, \qquad u \in L_2(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{H}^1(\mathbb{Q})). \qquad (1.5.32)$$

Введем оператор $\mathcal{K}_\mu(\tau)\colon L_2(\mathcal{F})^n \to \tilde{H}^1(\mathcal{F})^n$:

$$\mathcal{K}_\mu(\tau) = (ND(\tau) + \varepsilon M)(\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}. \qquad (1.5.33)$$

Сейчас мы убедимся, что он непрерывен.

Лемма 1.5.7. *При всех $\mu \notin \mathcal{S}$, $\tau \in \mathcal{T}$ и $f \in L_2(\mathcal{F})^n$*

$$\|\mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}},$$
$$\|D_1\mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Постоянные в оценках зависят лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Доказательство. Положим $u_0 = (\mathcal{A}^0_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f$ и $U = \mathcal{K}_\mu(\tau)f$. Коэффициенты оператора $\mathcal{A}^0(\tau)$ не зависят от «периодической» переменной, и, кроме того, $\mathcal{P}$ и $D(\tau)$ перестановочны на периодических пространствах Соболева, поэтому $\mathcal{A}^0(\tau)$ коммутирует с проектором $\mathcal{P}$. Это означает, что функция u_0 не зависит от переменной x_1. Тогда, в силу мультипликаторных свойств функций N и M (см. п. 1.2.1),

$$\begin{aligned}\|D_1U\|_{2,\mathcal{F}} &\leqslant \|D_1N\|_{\mathbf{M}}\|D(\tau)u_0\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} + \varepsilon\|D_1M\|_{\mathbf{M}}\|u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}} \leqslant \\ &\leqslant \big(\|D_1N\|_{\mathbf{M}} + \|D_1M\|_{\mathbf{M}}\big)\|u_0\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|D_1D_2(\tau)U\|_{2,\mathcal{F}} &\leqslant \varepsilon\|D_1D_2N\|_{\mathbf{M}}\|D(\tau)u_0\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} + \varepsilon^2\|D_1D_2M\|_{\mathbf{M}}\|u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}} + \\ &\quad + \|D_1N\|_{\mathbf{M}}\|D(\tau)D_2(\tau)u_0\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}} + \varepsilon\|D_1M\|_{\mathbf{M}}\|D_2(\tau)u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^{d_2}} \leqslant \\ &\leqslant \big(\|D_1D_2N\|_{\mathbf{M}} + \|D_1D_2M\|_{\mathbf{M}}\big)|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} + \\ &\quad + \big(\|D_1N\|_{\mathbf{M}} + \|D_1M\|_{\mathbf{M}}\big)\|D_2(\tau)u_0\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau},\end{aligned}$$

откуда с помощью леммы 1.5.4 выводится, что

$$\|D_1U\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Согласно определениям функций N и M, среднее значение U по ячейке $\mathbb{Q}$ равно нулю, так что L_2-нормы U и $D_2(\tau)U$ оцениваются по стандартному неравенству Пуанкаре через L_2-нормы D_1U и $D_1D_2(\tau)U$. ☐

Замечание 1.5.8. Условие $\tau \in \mathcal{T}$ в самом доказательстве никак не использовалось — оно было необходимо лишь для того, чтобы мы могли применить лемму 1.5.4. Тем самым если при каком-нибудь $\tau \notin \mathcal{T}$ для оператора $(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}$ будет выполнено утверждение леммы 1.5.4, то сохранится и утверждение леммы 1.5.7.

Замечание 1.5.9. В отличии от того, что мы видели в леммах 1.5.2, 1.5.4, где $D_1(\tau)$ и $D_2(\tau)$ уменьшали нормы операторов $(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}$ и $(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}$, грубо говоря, домножая их на $|\tau|$, дифференцирование D_1 не изменяет порядок нормы $\mathcal{K}_\mu(\tau)$. Причина заключается, конечно же, в том, что корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ содержит быстро осциллирующие по первой переменной функции.

Заметим, что прямой интеграл операторов $\mathcal{P}$ переводит преобразование Гельфанда в преобразование Фурье. Точнее,

$$\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{P}\, dk\, (\mathcal{G}\otimes\mathcal{I})\, u(k,x) = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})\, u(k,x_2).$$

Отсюда заменой переменных получаем:

$$\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{P}\, dk\, (\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\, u(k,x) = (\mathcal{H}^{1/\varepsilon}\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})\, u(k,x_2).$$

Теперь, вспоминая определение сглаживателя $\mathcal{P}^\varepsilon$ (см. (1.3.1)), убеждаемся в том, что $\mathcal{P}$ есть его слой в разложении в прямой интеграл:

$$(\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\, \mathcal{P}^\varepsilon\, (\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{P}\, dk. \tag{1.5.34}$$

Используя это разложение, а также разложение (1.5.25) для эффективного оператора, находим:

$$(\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\, \mathcal{K}_\mu^\varepsilon\, (\mathcal{G}\mathcal{H}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \varepsilon\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus} \mathcal{K}_\mu(\tau)\, dk. \tag{1.5.35}$$

Таким образом, теорема 1.4.2 может быть записана в следующем виде.

Теорема 1.5.10. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда при любых $\tau \in \mathcal{T}$ и $f \in L_2(\mathscr{F})^n$*

$$\|D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}f - D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}f - D_1(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau)f\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Постоянная в оценке зависит лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Введем операторы $\mathcal{S}(\tau), \mathcal{T}(\tau)\colon \tilde{H}^1(\mathscr{F})^n \to \tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\tau) = ((k+D_2(\tau))^* A + \varepsilon a_1^*)(k+D_2(\tau)) +{}& \\ + \varepsilon(k+D_2(\tau))^* a_2 + \varepsilon^2 q,& \end{aligned} \tag{1.5.36}$$

$$\mathcal{T}(\tau) = ((k+D_2(\tau))^* A + \varepsilon a_1^*) D_1 \tag{1.5.37}$$

(ср. с (1.3.4) и (1.3.5)). Ясно, что они ограничены и удовлетворяют оценкам

$$\|\mathcal{S}(\tau)u\|_{-1,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathscr{F};\tau},$$
$$\|\mathcal{T}(\tau)u\|_{-1,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}$$

(см. доказательство (1.5.11)). Эти оценки могут быть улучшены, если вместо (1.5.7)–(1.5.9) использовать более точные неравенства (1.5.4)–(1.5.6):

$$|(\mathcal{S}(\tau)u, v)_{\mathscr{F}}| \lesssim \big(\varepsilon\|D_1(\tau)u\|_{2,\mathscr{F}} + \|u\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\big(\varepsilon\|D_1(\tau)v\|_{2,\mathscr{F}} + \|v\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big), \quad (1.5.38)$$

$$|(\mathcal{T}(\tau)u, v)_{\mathscr{F}}| \lesssim \|D_1 u\|_{2,\mathscr{F}}\big(\varepsilon\|D_1(\tau)v\|_{2,\mathscr{F}} + \|v\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big). \quad (1.5.39)$$

Точно так же по $\mathcal{A}(\tau)^+$ строятся операторы $\mathcal{S}(\tau)^+$ и $\mathcal{T}(\tau)^+$, при этом $\mathcal{S}(\tau)^+$ оказывается сопряжен к $\mathcal{S}(\tau)$. Отметим тождество, связывающее эти операторы с $\mathcal{A}(\tau)$:

$$\mathcal{A}(\tau) = D_1^* A D_1 + \mathcal{S}(\tau) + \mathcal{T}(\tau) + (\mathcal{T}(\tau)^+)^*. \quad (1.5.40)$$

Нам удобно разбить теорему 1.4.4 на два отдельных утверждения. В первом мы рассмотрим сужение оператора $\mathcal{L}_\mu$ на ортогональное дополнение к образу проектора $\mathcal{P}^\varepsilon$. Далее через $\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+$, $\mathcal{K}_\mu(\tau)^+$ обозначаются аналоги $\mathcal{A}_\mu^0(\tau)$, $\mathcal{K}_\mu(\tau)$ для $\mathcal{A}_\mu(\tau)^+$ (мы уже отмечали, что $(\mathcal{A}_\mu^0)^+$ и $\mathcal{A}_\mu^0$ сопряжены друг к другу — см. п. 1.6.3, — поэтому взаимно сопряжены и $\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+$ и $\mathcal{A}_\mu^0(\tau)$).

Лемма 1.5.11. *При всех $\mu \notin \mathcal{S}$, $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{L}_\mu(\mathcal{I} - \mathcal{P}^\varepsilon) f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная в оценке зависит лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\# \in \{A, a_1, a_2, q\}$.

Доказательство. Сначала мы оценим норму оператора $\mathcal{L}_\mu(k)$ (см. его определение в (1.3.7)) при $k \in \mathbb{R}^{d_1}$. Заметим, что если положить $\tau = (k, 1)$, то получится $\mathcal{A}_\mu^0(k) = \mathcal{A}_\mu^0(\tau)\mathcal{P}$. Тогда при всех $f, g \in L_2(\mathbb{R}^{d_2})^n$

$$(\mathcal{L}_\mu(k) f, g)_{\mathbb{R}^{d_2}} = (\mathcal{S}(\tau)u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, U^+)_{\mathscr{F}},$$

где $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1} f$, $U = \mathcal{K}_\mu(\tau) f$ и $U^+ = \mathcal{K}_\mu(\tau)^+ g$. Мы хотели бы воспользоваться неравенствами (1.5.38), (1.5.39) и леммами 1.5.4, 1.5.7, чтобы оценить эту форму. Однако сейчас параметр τ принадлежит множеству $\mathbb{R}^{d_1} \times \{1\}$, а не $\mathscr{T}$, и если справедливость (1.5.38) и (1.5.39) при $\tau \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}_+$ не вызывает сомнений (см. (1.5.4)–(1.5.6)), то в указанных леммах ограничение на τ было по существу. Тем не менее соответствующие утверждения переносятся и на случай оператора $\mathcal{A}_\mu^0(\tau)\mathcal{P}$ при $\tau \in \mathbb{R}^{d_1} \times \{1\}$. Чтобы в этом убедится, достаточно показать, что для него выполнены соотношения

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^0(\tau)u, u)_{\mathscr{F}} + c_\natural \|u\|_{2,\mathscr{F}}^2 \geqslant c_* \|D(\tau)u\|_{2,\mathscr{F}}^2, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n,$$

и

$$\|(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1} f\|_{2,\mathscr{F}} \leqslant \operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S})^{-1} \|f\|_{2,\mathscr{F}}, \qquad f \in L_2(\mathbb{R}^{d_2})^n.$$

(см. замечания 1.5.5 и 1.5.8; добавим лишь, что при $u \in H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n$ неравенство (1.5.16) переходит в тождественное равенство). Но эти соотношения прямо следуют из леммы 1.3.1 для оператора $\mathcal{A}_\mu^0(k)$. В итоге

$$|(\mathcal{L}_\mu(k) f, g)_{\mathbb{R}^{d_2}}| \lesssim \big(\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + \|D_1 U\|_{2,\mathscr{F}}\big)\big(|\tau|\|D_1 U^+\|_{2,\mathscr{F}} + \|U^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big),$$

откуда
$$|(\mathcal{L}_\mu(k)f,g)_{\mathbb{R}^{d_2}}| \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}}\|g\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}}.$$

Перейдем теперь к оператору $\mathcal{L}_\mu$. Пусть $f,g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$, а $\hat f = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})f$, $\hat g = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{I})g$. Тогда

$$\begin{aligned}|(\mathcal{L}_\mu(\mathcal{I}-\mathcal{P}^\varepsilon)f,g)_{\mathbb{R}^d}| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{d_1}\setminus\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*} |(\mathcal{L}_\mu(k)\hat f(k,\cdot),\hat g(k,\cdot))_{\mathbb{R}^{d_2}}|\,dk \lesssim \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^{d_1}\setminus\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}^*} |k|^{-1}\|\hat f(k,\cdot)\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}}\|\hat g(k,\cdot)\|_{2,\mathbb{R}^{d_2}}\,dk \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\pi^{-1}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Отсюда и вытекает нужное утверждение. □

Разумеется, такая же оценка справедлива и для $\mathcal{L}_\mu^+(\mathcal{I}-\mathcal{P}^\varepsilon)$, и поэтому в теореме 1.4.4 вместо $\mathcal{L}_\mu$ и $\mathcal{L}_\mu^+$ достаточно взять $\mathcal{L}_\mu\mathcal{P}^\varepsilon$ и $\mathcal{L}_\mu^+\mathcal{P}^\varepsilon$.

Введем оператор $\mathcal{L}_\mu(\tau)\colon L_2(\mathfrak{F})^n \to L_2(\mathfrak{F})^n$ формулой

$$\mathcal{L}_\mu(\tau) = (\mathcal{K}_\mu(\tau)^+)^*\big(\mathcal{S}(\tau)(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1} + \mathcal{T}(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau)\big). \tag{1.5.41}$$

Используя (1.5.34), несложно понять, что

$$(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})\,\mathcal{L}_\mu\mathcal{P}^\varepsilon\,(\mathcal{GH}^\varepsilon\otimes\mathcal{I})^{-1} = \varepsilon\int_{\mathbb{Q}^*}^{\oplus}\mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P}\,dk. \tag{1.5.42}$$

Оператор $\mathcal{L}_\mu(\tau)^+$, построенный для $\mathcal{A}_\mu(\tau)^+$ по аналогии с $\mathcal{L}_\mu(\tau)$ для $\mathcal{A}_\mu(\tau)$, связан с $\mathcal{L}_\mu^+\mathcal{P}^\varepsilon$ похожим соотношением. Положим

$$\hat{\mathcal{C}}_\mu(\tau) = (\mathcal{K}_\mu(\tau)-\mathcal{L}_\mu(\tau))\mathcal{P} + \mathcal{P}(\mathcal{K}_\mu(\tau)^+ - \mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^*.$$

Теперь теорема 1.4.4 сводится к проверке следующего результата.

Теорема 1.5.12. *Пусть $\mu\notin\mathcal{S}$. Тогда при любых $\tau\in\mathcal{T}$ и $f\in L_2(\mathfrak{F})^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}f - \hat{\mathcal{C}}_\mu(\tau)f\|_{2,\mathfrak{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathfrak{F}}.$$

Постоянная в оценке зависит лишь от d, n, μ, мультипликаторных норм коэффициентов и констант $c_\#$, $C_\#$, где $\#\in\{A,a_1,a_2,q\}$.

1.5.2 *«Резольвентное» тождество*

При доказательстве теорем ключевую роль будет играть тождество, связывающее операторы $(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}$, $(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}$ и $\mathcal{K}_\mu(\tau)$. Такое соотношение довольно естественно интерпретировать как обобщенное резольвентное тождество.

Пусть $f\in L_2(\mathfrak{F})^n$, а $g\in\tilde H^{-1}(\mathfrak{F})^n$. Всюду далее $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}f$, $U = \mathcal{K}_\mu(\tau)f$, и $u^+ = (\mathcal{A}_\mu(\tau)^+)^{-1}g$. Так как оператор $\mathcal{A}^0(\tau)$ коммутирует с $\mathcal{P}$, то

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau)f, g)_{\mathfrak{F}} &= \\ = (\mathcal{A}_\mu^0(\tau)\mathcal{P}u_0, u^+)_{\mathfrak{F}} - (\mathcal{A}_\mu(\tau)(\mathcal{P}u_0+U),u^+)_{\mathfrak{F}}&.\end{aligned} \tag{1.5.43}$$

Согласно определениям эффективных коэффициентов,

$$\begin{aligned}
A^0\mathcal{P} &= \mathcal{P}(A + AD_1N)\mathcal{P},\\
a_1^0\mathcal{P} &= \mathcal{P}(a_1 + (D_1N)^*a_1)\mathcal{P},\\
a_2^0\mathcal{P} &= \mathcal{P}(a_2 + AD_1M)\mathcal{P},\\
q^0\mathcal{P} &= \mathcal{P}(q + a_1^*D_1M)\mathcal{P},
\end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{A}_\mu^0(\tau)\mathcal{P} = \mathcal{P}\big(\mathcal{A}_\mu(\tau) + \mathcal{T}(\tau)(ND(\tau) + \varepsilon M)\big)\mathcal{P}.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{A}_\mu^0(\tau)\mathcal{P}u_0, u^+)_{\mathcal{F}} - (\mathcal{A}_\mu(\tau)\mathcal{P}u_0, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}} = (\mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}}. \tag{1.5.44}$$

С другой стороны, как видно из тождества (1.5.40),

$$\mathcal{P}\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{P}(\mathcal{S}(\tau) + \mathcal{T}(\tau))$$

(мы учли, что $\mathcal{T}(\tau)^+\mathcal{P} = 0$), так что

$$(\mathcal{A}_\mu(\tau)U, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}} = (\mathcal{S}(\tau)U, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}} + (\mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}} \tag{1.5.45}$$

(напомним, что $\mathcal{P}U = 0$). Второй член в правой части (1.5.45) совпадает с правой частью (1.5.44), и тем самым мы можем переписать (1.5.43) в виде

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau)f, g)_{\mathcal{F}} = \\
&\quad = -(\mathcal{A}_\mu(\tau)(\mathcal{P}u_0 + U), \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathcal{F}} - (\mathcal{S}(\tau)U, \mathcal{P}u^+)_{\mathcal{F}}.
\end{aligned} \tag{1.5.46}$$

Далее, из определений функций N и M (см. (1.2.1) и (1.2.2)) следует, что

$$D_1^*AD_1U + (\mathcal{T}(\tau)^+)^*\mathcal{P}u_0 = 0,$$

поэтому, вновь используя тождество (1.5.40) и принимая во внимание, что $\mathcal{T}(\tau)\mathcal{P} = 0$, находим:

$$\mathcal{P}^\perp\mathcal{A}_\mu(\tau)(\mathcal{P}u_0 + U) = \mathcal{P}^\perp\mathcal{S}(\tau)(\mathcal{P}u_0 + U) + \mathcal{P}^\perp\mathcal{T}(\tau)U + \mathcal{P}^\perp((\mathcal{T}(\tau)^+)^* - \varepsilon^2\mu)U.$$

Проектор $\mathcal{P}^\perp$ в последнем слагаемом можно опустить, так как $\mathcal{T}(\tau)^+\mathcal{P} = 0$ и $\mathcal{P}U = 0$, а потому

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}_\mu(\tau)(\mathcal{P}u_0 + U), \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathcal{F}} = \\
&\quad = (\mathcal{S}(\tau)(\mathcal{P}u_0 + U) + \mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathcal{F}} + ((\mathcal{T}(\tau)^+)^*U - \varepsilon^2\mu U, u^+)_{\mathcal{F}}.
\end{aligned} \tag{1.5.47}$$

Подставляя (1.5.47) в (1.5.46) и вспоминая еще, что операторы $\mathcal{S}(\tau)$ и $\mathcal{S}(\tau)^+$ взаимно сопряжены, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau)f, g)_{\mathcal{F}} = \\
&\quad = -(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathcal{F}} - (U, \mathcal{S}(\tau)^+u^+ + \mathcal{T}(\tau)^+u^+ - \varepsilon^2\bar{\mu}u^+)_{\mathcal{F}}.
\end{aligned} \tag{1.5.48}$$

Это соотношение и есть искомое «резольвентное» тождество.

Сейчас всё готово для доказательства теорем 1.5.6, 1.5.10 и 1.5.12.

Распишем разность резольвент операторов $\mathcal{A}(\tau)$ и $\mathcal{A}^0(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1} - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1} = (\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P} - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{K}_\mu(\tau) + \\
+ (\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}^\perp - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}^\perp + \mathcal{K}_\mu(\tau).
\end{aligned}
\tag{1.5.49}
$$

Слагаемые из последней строки сразу могут быть отнесены к погрешности. В самом деле, переходя к сопряженному оператору и учитывая неравенство Пуанкаре (1.5.32) и лемму 1.5.2$^+$, видим, что

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}^\perp f\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Такая же оценка верна и для $(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}^\perp f$ (необходимо только использовать лемму 1.5.4$^+$). Кроме того, в силу леммы 1.5.7,

$$\|\mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

В итоге дело сводится к доказательству оценки

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Сначала мы установим, что

$$\|(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim |\tau|^{-1}\|f\|_{2,\mathscr{F}}. \tag{1.5.50}$$

Для этого воспользуемся тождеством (1.5.48) при $f, g \in L_2(\mathscr{F})^n$ и оценим каждое слагаемое в его правой части с помощью (1.5.38), (1.5.39) и (1.5.38$^+$), (1.5.39$^+$):

$$
\begin{aligned}
&|(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathscr{F}}| \lesssim \\
&\quad \lesssim \big(\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + \|D_1 U\|_{2,\mathscr{F}}\big)\big(\|\mathcal{P}^\perp u^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + |\tau|\|D_1(\tau)u^+\|_{2,\mathscr{F}}\big)
\end{aligned}
\tag{1.5.51}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&|(U, \mathcal{S}(\tau)^+ u^+ + \mathcal{T}(\tau)^+ u^+ - \varepsilon^2 \bar{\mu} u^+)_{\mathscr{F}}| \lesssim \\
&\quad \lesssim \big(\|U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + |\tau|\|D_1 U\|_{2,\mathscr{F}}\big)\big(\|D_1(\tau)u^+\|_{2,\mathscr{F}} + \|u^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big).
\end{aligned}
\tag{1.5.52}
$$

Применяя к функции U стандартное неравенство Пуанкаре, а к $\mathcal{P}^\perp u^+$ — неравенство (1.5.32), получаем:

$$
\begin{aligned}
&|((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau) f, g)_{\mathscr{F}}| \lesssim \\
&\quad \lesssim |\tau|^{-1}\big(|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + \|D_1 U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\big(\|D_1(\tau)u^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau} + |\tau|\|u^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big).
\end{aligned}
\tag{1.5.53}
$$

Отсюда и из лемм 1.5.4, 1.5.7 и 1.5.2$^+$ сразу следует (1.5.50).

Проверим теперь, что

$$\|D_2(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - D_2(\tau)(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - D_2(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau) f\|_{2,\mathscr{F}} \lesssim \|f\|_{2,\mathscr{F}}. \tag{1.5.54}$$

Пусть $f \in L_2(\mathscr{F})^n$ и $g = \tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n$. Нам, как и ранее, предстоит надлежащим образом оценить слагаемые из правой части тождества (1.5.48). Однако приведенных выше рассуждений для этого оказывается уже недостаточно: возникшие в (1.5.53) производные второго порядка от u^+ не позволяют взять $g = D_2(\tau)^* h$ с негладкой h.

Чтобы обойти эту трудность, мы поступим следующим образом. По $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n)$ найдем функцию $\psi \in L_2(\mathbb{Q}; H^1(\mathbb{R}^{d_2})^n)$, которая является решением уравнения

$$D_2(\tau)^* D_2(\tau)\psi + |\tau|^2 \psi = \varphi. \tag{1.5.55}$$

Уравнение может быть записано также в виде

$$(l + D_2(\tau))^* (l + D_2(\tau))\psi = \varphi, \tag{1.5.56}$$

где l — произвольный вектор из $\mathbb{R}^{d_1} \oplus 0$ длиной $|\tau|$. Наши дальнейшие построения будут зависеть от конкретного выбора l, но на конечный результат этот выбор никак не повлияет. Очевидно, ψ имеет производную первого порядка $D\psi$, а также производную второго порядка $D_2 D\psi$, поэтому корректно определен оператор $\mathcal{E}(\tau)\colon L_2(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n) \to \tilde{H}^1(\mathcal{F})^{d\times n}$, сопоставляющий φ функцию $(l + D_2(\tau))\psi$. Несложно показать, что $\mathcal{E}(\tau)$ ограничен, причем

$$|\tau| \|D_1(\tau)\mathcal{E}(\tau)\varphi\|_{2,\mathcal{F}} + \|\mathcal{E}(\tau)\varphi\|_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} \leqslant \|D_1(\tau)\varphi\|_{2,\mathcal{F}} + 2\|\varphi\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.57}$$

Действительно, из того, что

$$\|\psi\|^2_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} = \|\mathcal{E}(\tau)\varphi\|^2_{2,\mathcal{F}} = (\varphi, \psi)_{\mathcal{F}},$$

следует оценка

$$|\tau| \|\mathcal{E}(\tau)\varphi\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|\varphi\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Аналогично из соотношений

$$\|D_{1,i}(\tau)\psi\|^2_{1_2,2,\mathcal{F};\tau} = \|D_{1,i}(\tau)\mathcal{E}(\tau)\varphi\|^2_{2,\mathcal{F}} = (D_{1,i}(\tau)\varphi, D_{1,i}(\tau)\psi)_{\mathcal{F}}$$

получаем:

$$|\tau| \|D_1(\tau)\mathcal{E}(\tau)\varphi\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|D_1(\tau)\varphi\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Наконец, суммируя равенства

$$\|D_{2,i}(\tau)\mathcal{E}(\tau)\varphi\|^2_{2,\mathcal{F}} = (\varphi, D_{2,i}(\tau) D_{2,i}(\tau)\psi)_{\mathcal{F}}$$

и учитывая, что ψ удовлетворяет (1.5.55), находим:

$$\|D_2(\tau)\mathcal{E}(\tau)\varphi\|^2_{2,\mathcal{F}} = (\varphi, D_2(\tau)^* D_2(\tau)\psi)_{\mathcal{F}} = (\varphi, \varphi - |\tau|^2\psi)_{\mathcal{F}} \leqslant 2\|\varphi\|^2_{2,\mathcal{F}}.$$

Всё это вместе влечет (1.5.57).

Перепишем теперь первое слагаемое в правой части тождества (1.5.48), используя оператор $\mathcal{E}(\tau)$. Так как $(l + D_2(\tau))^* \mathcal{E}(\tau) = \mathcal{I}$ на $L_2(\mathbb{R}^{d_2}; \tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n)$ (это равносильно равенству (1.5.56)), то

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathcal{F}} = \\
&\quad = \varepsilon\big([D_2, \mathcal{S}(\tau)]\mathcal{P}u_0 + [D_2, \mathcal{T}(\tau)]U, \mathcal{E}(\tau)\mathcal{P}^\perp u^+\big)_{\mathcal{F}} + \\
&\qquad + \big(\mathcal{S}(\tau)(l + D_2(\tau))\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)(l + D_2(\tau))U, \mathcal{E}(\tau)\mathcal{P}^\perp u^+\big)_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Отметим, что коммутаторы дифференцирования D_2 с операторами $\mathcal{S}(\tau)$ и $\mathcal{T}(\tau)$ имеют ту же форму, что и сами операторы $\mathcal{S}(\tau)$ и $\mathcal{T}(\tau)$ (см. (1.5.36) и (1.5.37)):

$$\begin{aligned}[D_2,\mathcal{S}(\tau)] &= \big((k+D_2(\tau))^*(D_2A)+\varepsilon(D_2a_1^*)\big)(k+D_2(\tau))+\\ &\quad+\varepsilon(k+D_2(\tau))^*(D_2a_2)+\varepsilon^2(D_2q),\\ [D_2,\mathcal{T}(\tau)] &= \big((k+D_2(\tau))^*(D_2A)+\varepsilon(D_2a_1^*)\big)D_1.\end{aligned}$$

Поскольку, кроме того, коэффициенты в этих выражениях также являются мультипликаторами, то для $[D_2,\mathcal{S}(\tau)]$ и $[D_2,\mathcal{T}(\tau)]$ выполняются оценки вида (1.5.38) и (1.5.39). Из них и из (1.5.38) и (1.5.39) следует, что

$$\begin{aligned}&|(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0+\mathcal{T}(\tau)U,\mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathscr{F}}|\lesssim\\ &\quad\lesssim\big(\|D_2(\tau)u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\times\\ &\qquad\times\big(|\tau|\|D_1(\tau)\mathcal{E}(\tau)\mathcal{P}^\perp u^+\|_{2,\mathscr{F}}+\|\mathcal{E}(\tau)\mathcal{P}^\perp u^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\end{aligned}$$

(мы использовали очевидное равенство $\|(l+D_2(\tau))v\|_{2,\mathscr{F}}=\|v\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}$). Применим еще (1.5.32) и (1.5.57):

$$\begin{aligned}&|(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0+\mathcal{T}(\tau)U,\mathcal{P}^\perp u^+)_{\mathscr{F}}|\lesssim\\ &\quad\lesssim\big(\|D_2(\tau)u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\|D_1(\tau)u^+\|_{2,\mathscr{F}}.\end{aligned}\tag{1.5.58}$$

Для второго слагаемого в правой части (1.5.48) годятся прежние рассуждения (ср. с (1.5.52)):

$$|(U,\mathcal{S}(\tau)^+u^++\mathcal{T}(\tau)^+u^+-\varepsilon^2\bar{\mu}u^+)_{\mathscr{F}}|\lesssim\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\|u^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}.\tag{1.5.59}$$

Из (1.5.48) и (1.5.58), (1.5.59) вытекает, что

$$\begin{aligned}&|((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-\mathcal{K}_\mu(\tau)f,g)_{\mathscr{F}}|\lesssim\\ &\quad\lesssim\big(\|D_2(\tau)u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\|u^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}.\end{aligned}\tag{1.5.60}$$

Эта оценка верна при произвольных $f\in L_2(\mathscr{F})^n$ и $g\in\tilde{H}^{-1}(\mathscr{F})^n$. Если мы положим $g=D_2(\tau)^*h$ с $h\in L_2(\mathscr{F})^{d\times n}$ и воспользуемся леммами 1.5.4, 1.5.7 и 1.5.2$^+$, то получим (1.5.54).

Замечание 1.5.13. Оператор $\mathcal{E}(\tau)$ был нужен для того, чтобы в некотором смысле провести «интегрирование по частям» и «перенести» дифференцирование по «периодической» переменой, появляющееся при оценке мультипликаторов, с функции $\mathcal{P}^\perp u^+$ на второй сомножитель. Необходимость в таком операторе исчезла бы, если бы коэффициенты a_1 и q были, например, ограниченными функциями.

1.5.4 *Доказательство теоремы* 1.5.10

Доказательство данной теоремы почти дословно совпадает с проверкой второй оценки в теореме 1.5.6. С помощью неравенства Пуанкаре (1.5.32) и лемм 1.5.2$^+$, 1.5.4$^+$ утверждение сводится к доказательству того, что

$$\|D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-D_1(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau)f\|_{2,\mathscr{F}}\lesssim\|f\|_{2,\mathscr{F}}.$$

Но этот результат будет прямо следовать из неравенства (1.5.60), если подставить в него функцию $g = D_1(\tau)^* h$, где $h \in L_2(\mathcal{F})^{d\times n}$, а затем оценить получившиеся в правой части слагаемые при помощи лемм 1.5.4, 1.5.7 и 1.5.2⁺.

1.5.5 *Доказательство следствия* 1.4.3

Так как класс $H^r(\mathbb{R}^{d_1})$ вложен в $H^1(\mathbb{R}^{d_1})$, то

$$\|D_1^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D_1(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - D_1(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon D_1\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} + \\ + \|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.5.61}$$

Благодаря неравенству (1.3.3) и теоремам 1.4.1 и 1.4.2, члены в правой части не превосходят $\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}$ с некоторым постоянным множителем. Далее, операторные нормы $D_1\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ на пространстве L_2, опять в силу (1.3.3), имеют порядок ε^{-1} и 1 соответственно, а тогда стандартная интерполяция дает:

$$\|D_1^{r,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{-r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.5.62}$$

Сопоставляя (1.5.61) с (1.5.62), приходим к (1.4.4).

1.5.6 *Доказательство теоремы* 1.5.12

Нам необходимо оценить оператор

$$(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1} - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1} - (\mathcal{K}_\mu(\tau) - \mathcal{L}_\mu(\tau))\mathcal{P} - \mathcal{P}(\mathcal{K}_\mu(\tau)^+ - \mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^* = \\ = (\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P} - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{K}_\mu(\tau) + \mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P} + \mathcal{P}(\mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^* + \\ + \big(\mathcal{P}^\perp(\mathcal{A}_\mu(\tau)^+)^{-1} - \mathcal{P}^\perp(\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+)^{-1} - \mathcal{K}_\mu(\tau)^+\big)^*.$$

Несложно понять, что слагаемое из последней строки имеет порядок погрешности. Действительно, $\mathcal{P}\mathcal{K}_\mu(\tau)^+ = 0$, и тогда по неравенству (1.5.32)

$$\|\mathcal{P}^\perp(\mathcal{A}_\mu(\tau)^+)^{-1}f - \mathcal{P}^\perp(\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+)^{-1}f - \mathcal{K}_\mu(\tau)^+f\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \\ \lesssim \|D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu(\tau)^+)^{-1}f - D_1(\tau)(\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+)^{-1}f - D_1(\tau)\mathcal{K}_\mu(\tau)^+f\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Но, как мы уже знаем из теоремы 1.5.10⁺, правая часть этого неравенства не превосходит $\|f\|_{2,\mathcal{F}}$ с точностью до постоянного множителя. Таким образом, осталось рассмотреть оператор

$$(\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P} - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{K}_\mu(\tau) + \mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P} + \mathcal{P}(\mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^*.$$

Ниже считается, что $f, g \in L_2(\mathcal{F})^n$. Введем дополнительные обозначения $u_0^+ = (\mathcal{A}_\mu^0(\tau)^+)^{-1}g$ и $U^+ = \mathcal{K}_\mu(\tau)^+g$. Напомним, что

$$(\mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P}f, g)_\mathcal{F} = (\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, U^+)_\mathcal{F} = \\ = (\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0 + \mathcal{T}(\tau)U, \mathcal{P}^\perp U^+)_\mathcal{F}$$

(см. (1.5.41); в последнем равенстве было учтено, что $\mathcal{P}U^+=0$). Выражение для $\mathcal{L}_\mu(\tau)^+\mathcal{P}$ удобнее записать в виде

$$(f,\mathcal{L}_\mu(\tau)^+\mathcal{P}g)_{\mathscr{F}} = (U,(\mathcal{S}(\tau)^+ + \mathcal{T}(\tau)^+)(\mathcal{P}u_0^+ + U^+))_{\mathscr{F}} - (U,\mathcal{S}(\tau)^+U^+)_{\mathscr{F}}$$

(поясним, что $\mathcal{T}(\tau)^+\mathcal{P}=0$, поэтому дополнительное слагаемое в правой части оказывается равным нулю). Теперь на основании «резольвентного» тождества (1.5.48) имеем:

$$\begin{aligned}
&\big((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-(\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f-\mathcal{K}_\mu(\tau)f+\mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P}f+\mathcal{P}(\mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^*f,g\big)_{\mathscr{F}}=\\
&\quad=-(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0+\mathcal{T}(\tau)U,\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+))_{\mathscr{F}}-\\
&\qquad-(U,(\mathcal{S}(\tau)^++\mathcal{T}(\tau)^+)(u^+-\mathcal{P}u_0^+-U^+))_{\mathscr{F}}-\\
&\qquad-(U,\mathcal{S}(\tau)^+U^+-\varepsilon^2\bar{\mu}u^+)_{\mathscr{F}}.
\end{aligned}\tag{1.5.63}$$

Мы оценим каждое слагаемое в правой части по отдельности.

Заметим, что неравенство (1.5.58) останется верным, если заменить в нём u^+ на $\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+)$ (конкретный вид этой функции при доказательстве не использовался). Тогда

$$\begin{aligned}
&|(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0+\mathcal{T}(\tau)U,\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+))_{\mathscr{F}}|\lesssim\\
&\quad\lesssim\big(\|D_2(\tau)u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+|\tau|\|u_0\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big)\|D_1(\tau)\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+)\|_{2,\mathscr{F}}.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Пуанкаре (1.5.32)

$$\begin{aligned}
\|D_1(\tau)\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+)\|_{2,\mathscr{F}}&\leqslant\|D_1(\tau)\mathcal{P}^\perp(u^+-u_0^+-U^+)\|_{2,\mathscr{F}}+\|D_1(\tau)\mathcal{P}^\perp u_0^+\|_{2,\mathscr{F}}\lesssim\\
&\lesssim\|D_1(\tau)(u^+-u_0^+-U^+)\|_{2,\mathscr{F}}+\|D_1(\tau)D_1(\tau)u_0^+\|_{2,\mathscr{F}},
\end{aligned}$$

поэтому

$$|(\mathcal{S}(\tau)\mathcal{P}u_0+\mathcal{T}(\tau)U,\mathcal{P}^\perp(u^+-U^+))_{\mathscr{F}}|\lesssim\|f\|_{2,\mathscr{F}}\|g\|_{2,\mathscr{F}}\tag{1.5.64}$$

ввиду лемм 1.5.4, 1.5.7 и 1.5.4$^+$ и теоремы 1.5.10$^+$.

Далее, второе слагаемое в (1.5.63) оценивается с помощью (1.5.38$^+$) и (1.5.39$^+$), а также неравенства Пуанкаре (1.5.32) (для функции U):

$$|(U,(\mathcal{S}(\tau)^++\mathcal{T}(\tau)^+)(u^+-\mathcal{P}u_0^+-U^+))_{\mathscr{F}}|\lesssim\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\|u^+-\mathcal{P}u_0^+-U^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}$$

(ср. с (1.5.59)). Применяя к $\mathcal{P}^\perp u_0^+$ и U^+ неравенство Пуанкаре, видим, что

$$\begin{aligned}
\|u^+-\mathcal{P}u_0^+-U^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}&\leqslant\|u^+-u_0^+-U^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}+\|\mathcal{P}^\perp u_0^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}\lesssim\\
&\lesssim\|D_1(\tau)(u^+-u_0^+-U^+)\|_{2,\mathscr{F}}+\|u^+-u_0^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}+\\
&\quad+\|D_1(\tau)u_0^+\|_{1,2,\mathscr{F};\tau}+\|D_1U^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}.
\end{aligned}$$

Следовательно, леммы 1.5.7 и 1.5.4$^+$, 1.5.7$^+$ и теоремы 1.5.6$^+$, 1.5.10$^+$ дают:

$$|(U,(\mathcal{S}(\tau)^++\mathcal{T}(\tau)^+)(u^+-\mathcal{P}u_0^+-U^+))_{\mathscr{F}}|\lesssim\|f\|_{2,\mathscr{F}}\|g\|_{2,\mathscr{F}}.\tag{1.5.65}$$

Наконец, для оценки последнего слагаемого в правой части (1.5.63) необходимо воспользоваться неравенством (1.5.38$^+$):

$$|(U,\mathcal{S}(\tau)^+U^+-\varepsilon^2\bar{\mu}u^+)_{\mathscr{F}}|\lesssim\|D_1U\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big(|\tau|\|D_1(\tau)u^+\|_{2,\mathscr{F}}+\|D_1U^+\|_{1_2,2,\mathscr{F};\tau}\big).$$

Из лемм 1.5.7 и 1.5.2⁺, 1.5.7⁺ тогда вытекает, что

$$|(U, \mathcal{S}(\tau)^+ U^+ - \varepsilon^2 \bar{\mu} u^+)_{\mathcal{F}}| \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}} \|g\|_{2,\mathcal{F}}. \tag{1.5.66}$$

Объединяя (1.5.63) с (1.5.64)–(1.5.66), окончательно получаем:

$$\left|\left((\mathcal{A}_\mu(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - (\mathcal{A}_\mu^0(\tau))^{-1}\mathcal{P}f - \mathcal{K}_\mu(\tau)f + \mathcal{L}_\mu(\tau)\mathcal{P}f + \mathcal{P}(\mathcal{L}_\mu(\tau)^+)^* f, g\right)_{\mathcal{F}}\right| \lesssim \\ \lesssim \|f\|_{2,\mathcal{F}} \|g\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

1.5.7 *Доказательство следствия* 1.4.5

Как нам известно из теоремы 1.4.4,

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{1.5.67}$$

и если еще доказать, что выполнено соотношение

$$\|D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon D\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{1.5.68}$$

то искомый результат получится интерполяцией между (1.5.67) и (1.5.68). Остается убедиться, что последнее соотношение действительно имеет место.

При помощи оценки (1.3.3) и теорем 1.4.1 и 1.4.2 проверка (1.5.68) сводится к доказательству неравенства

$$\|D\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f - D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.5.69}$$

Разность корректоров $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ представима в виде композиции $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ с некоторым равномерно ограниченным оператором, действующим из $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ (см. § 1.3, в особенности замечание 1.3.2). Отсюда и выводится (1.5.69), лишь вместо (1.2.24) нужно использовать непрерывность $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ как отображения между $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^1(\mathbb{R}^d)^n$.

1.6 Комментарии к главе 1

1.6.1 *О спектральном параметре*

Утверждения, сформулированные в § 1.4, могут быть распространены на все μ из резольвентного множества эффективного оператора как (неограниченного) оператора на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, однако интервал $\mathscr{E}$, возможно, придется уменьшить. Дело в том, что выбор параметра μ имеет непосредственное значение только при доказательстве лемм 1.5.2 и 1.5.4, а остальные результаты уже на них опираются. По существу, в указанных леммах необходимо, чтобы обратные к $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$ и $\mathcal{A}_\mu^0$ операторы были ограничены на всём $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ равномерно по $\varepsilon \in \mathscr{E}$ — см. равносильные этому оценки (1.5.17) и (1.5.30). Последняя из них при $\mu \notin \operatorname{spec}\mathcal{A}^0$, очевидно, выполнена. Покажем, как получить первую, если параметр $\mu \notin \operatorname{spec}\mathcal{A}^0$ оказался внутри сектора $\mathcal{S}$.

Пусть $\nu \notin \mathcal{S}$. По теореме 1.4.1, при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}$

$$\|(\mathcal{A}_\nu^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{A}_\nu^0)^{-1}\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C_\nu \varepsilon.$$

Тогда если ε настолько мало, что

$$|\mu - \nu| \|\mathcal{A}_\nu^0(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}((\mathcal{A}_\nu^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{A}_\nu^0)^{-1})\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} < 1,$$

то из тождества

$$(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} = \big(\mathcal{I} - (\mu-\nu)\mathcal{A}_\nu^0(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}((\mathcal{A}_\nu^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{A}_\nu^0)^{-1})\big)^{-1} \times \\ \times \mathcal{A}_\nu^0(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}((\mathcal{A}_\nu^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{A}_\nu^0)^{-1})\mathcal{A}_\nu^0(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$$

будет следовать, что $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$ имеет ограниченный обратный на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Отсюда же вытекает, что норма этого обратного оператора будет еще и равномерно ограничена по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{\mu,\nu} \wedge \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_{\mu,\nu} < \frac{\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}\mathcal{A}^0)}{C_\nu|\mu-\nu|(\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}\mathcal{A}^0) + |\mu-\nu|)}.$$

Таким образом, результаты данной главы останутся верны и при μ внутри $\mathcal{S}$, но вне $\operatorname{spec}\mathcal{A}^0$, если заменить $\mathcal{E}$ на, быть может меньший, интервал $\mathcal{E}_\mu = (0, \varepsilon_{\mu,\nu} \wedge \varepsilon_0]$.

1.6.2 *О мультипликаторных коэффициентах*

С самого начала мы предполагали, что функции a_1, $D_2 a_1$ и a_2, $D_2 a_2$ принадлежат $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$, а распределения q, $D_2 q$ — $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F})^*)$, и потом, используя периодичность, доказывали, что все они являются также мультипликаторами между соответствующими пространствами на $\mathbb{R}^d$ (забегая вперед, заметим, что это более широкие классы — см. леммы 1.6.1 и 1.6.2). Но можно было бы сразу считать, что коэффициенты представляют собой периодические мультипликаторы между таким пространствами, именно: пусть a_1, a_2 вместе со слабыми производными $D_2 a_1$, $D_2 a_2$ принадлежат $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$, причем при $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|a_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \leqslant c_{a_1}\|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + C_{a_1}\|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2, \tag{1.6.1}$$

$$\|a_2 u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \leqslant c_{a_2}\|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + C_{a_2}\|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2, \tag{1.6.2}$$

и пусть q и $D_2 q$ принадлежат $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), H^{-1}(\mathbb{R}^d))$, причем при $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$

$$|(qu, u)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant c_q\|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + C_q\|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2. \tag{1.6.3}$$

Тогда если

$$c_{a_1}^{1/2} + c_{a_2}^{1/2} + c_q < c_A, \tag{1.6.4}$$

то оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$, как и прежде, будет ограничен и коэрцитивен, а следовательно, и m-секториален, и отвечающий ему сектор дается старой формулой (но, конечно, входящие в нее константы, которые связаны с мультипликаторными коэффициентами, имеют новый смысл). Некоторые отличия от рассмотренного ранее случая начинаются далее.

Дело в том, что при «сужении» периодических мультипликаторов с $\mathbb{R}^d$ на $\mathcal{F}$ получаются мультипликаторы между периодическим пространствами Соболева, а постоянные в неравенствах вида (1.6.1)–(1.6.3), вообще говоря, увеличиваются.

Лемма 1.6.1. *Подпространство периодических мультипликаторов из* $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$ *совпадает с пространством периодически продолженных мультипликаторов из* $\mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$.

Доказательство. Предположим, что периодическая функция γ принадлежит $\mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$, причем выполнена оценка

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathcal{F}} \leqslant c_\gamma \|Du\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_\gamma \|u\|^2_{2,\mathcal{F}}, \qquad u \in \tilde{H}^1(\mathcal{F}). \tag{1.6.5}$$

Выберем покрытие пространства $\mathbb{R}^d$ множествами $\mathcal{F}_i = \xi_i + \mathcal{F}$; можно считать, что его кратность равномерно ограничена. Построим функции $\varphi_i \in C^\infty(\mathcal{F}_i)$, которые принимают значения в интервале $[0,1]$, обращаются в нуль на $\partial\mathcal{F}_i$ и для которых $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|D\varphi_i\|_{\infty,\mathbb{R}^d} < \infty$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i^2 = 1$ (на каждом множестве вида $K \times \mathbb{R}^{d_2}$, где K — компакт в $\mathbb{R}^{d_1}$, от этой суммы остается только конечное число слагаемых). Пусть $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$ и $\operatorname{supp} u \subset \cup_{i\in I_u} \mathcal{F}_i$ (I_u — конечный набор индексов). Положим $u_i = \varphi_i u$ и продолжим периодически u_i из $\mathcal{F}_i$ на $\mathbb{R}^d$. Тогда $u_i \in \tilde{H}^1(\mathcal{F})$ и

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} = \sum_{i\in I_u} \|\gamma u_i\|^2_{2,\mathcal{F}_i} = \sum_{i\in I_u} \|\gamma u_i\|^2_{2,\mathcal{F}} \leqslant \sum_{i\in I_u} \big(c_\gamma \|Du_i\|^2_{2,\mathcal{F}} + C_\gamma \|u_i\|^2_{2,\mathcal{F}}\big).$$

Далее, если $\delta > 0$, то

$$\|Du_i\|^2_{2,\mathcal{F}} = \|Du_i\|^2_{2,\mathcal{F}_i} \leqslant (1+\delta)\|\varphi_i Du\|^2_{2,\mathcal{F}_i} + (1+\delta^{-1})\|D\varphi_i \cdot u\|^2_{2,\mathcal{F}_i}, \tag{1.6.6}$$

откуда видим, что при любом $\delta > 0$ найдется постоянная $C_\gamma(\delta)$ (которая не зависит от u), такая что

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant (c_\gamma + \delta)\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + C_\gamma(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.7}$$

Тем самым $\gamma \in \mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$.

Обратно, пусть периодическая функция γ принадлежит пространству $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$, притом

$$\|\gamma u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant c_\gamma \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + C_\gamma \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.6.8}$$

Построим конечное разбиение единицы $\{\psi_i\}_{i\in I}$ для тора $\mathbb{T}^{d_1}$ так, чтобы выполнялось равенство $\sum_{i\in I} \psi_i^2 = 1$, а диаметры носителей ψ_i были строго меньше единицы. Последнее условие гарантирует, что ψ_i как периодическая функция на $\mathbb{R}^d$ равна нулю на $\partial\mathcal{F}_i$, где $\mathcal{F}_i = \xi_i + \mathcal{F}$ с некоторым $\xi_i \in \mathbb{Q}$.

Пусть $u \in \tilde{C}_c^1(\mathcal{F})$; положим $u_i = \psi_i u$ на $\mathcal{F}_i$ и продолжим u_i нулем на $\mathbb{R}^d$. Поскольку $u_i \in H^1(\mathbb{R}^d)$, то

$$\|\gamma u\|_{2,\mathcal{F}}^2 = \sum_{i\in I} \|\gamma u_i\|_{2,\mathcal{F}_i}^2 = \sum_{i\in I} \|\gamma u_i\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \leqslant \sum_{i\in I} \big(c_\gamma \|Du_i\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + C_\gamma \|u_i\|_{2,\mathbb{R}^d}^2\big).$$

Применяя еще неравенство вида (1.6.6), получаем, что при любом $\delta > 0$ найдется постоянная $C_\gamma(\delta)$, такая что

$$\|\gamma u\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leqslant (c_\gamma + \delta)\|Du\|_{2,\mathcal{F}}^2 + C_\gamma(\delta)\,\|u\|_{2,\mathcal{F}}^2, \tag{1.6.9}$$

а значит, $\gamma \in \mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$. □

Из этой леммы вытекает, что совпадают и пространства $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ и $\mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$. Действительно, как мы уже видели в § 1.1, пространство $\mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ вложено (в известном смысле) в подпространство периодических мультипликаторов из $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$, а следовательно, вложено и в $\mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$. С другой стороны, если $\gamma \in \mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$, то, используя непрерывный оператор продолжения $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \colon H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathbb{R}^d)$, при $u \in H^1(\mathcal{F})$ получаем:

$$\|\gamma u\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|\gamma \mathcal{E}_{\mathcal{F}} u\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|\mathcal{E}_{\mathcal{F}} u\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|u\|_{1,2,\mathcal{F}}.$$

Тем самым $\gamma \in \mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$.

Аналогом леммы 1.6.1 для более широкого класса мультипликаторов является следующее утверждение.

Лемма 1.6.2. *Подпространство периодических мультипликаторов из* $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), H^{-1}(\mathbb{R}^d))$ *совпадает с пространством периодически продолженных мультипликаторов из* $\mathbf{M}(\tilde{H}^1(\mathcal{F}), \tilde{H}^{-1}(\mathcal{F}))$.

Отметим, что постоянные $C_\gamma(\delta)$ в (1.6.7), (1.6.9) и в таких же оценках, которые возникают в доказательстве леммы 1.6.2, зависят от соответствующих разбиений единицы, так что мы каким-нибудь способом зафиксируем эти разбиения.

Эффективный оператор при новых условиях останется ограниченным и коэрцитивным, но получающийся для него сектор будет шире, чем $\mathcal{S}$. Напомним, что сектор эффективного оператора находился из вспомогательной леммы 1.2.3, которая опиралась на мультипликаторные оценки коэффициентов между пространствами на множестве $\mathcal{F}$. Как было видно из доказательства леммы 1.6.1, при переходе от $\mathbb{R}^d$ к $\mathcal{F}$ константы в оценках типа (1.6.1)–(1.6.3) только ухудшаются. Тем самым первоначально при проверке основных утверждений необходимо выбирать μ вне некоторого большего, чем $\mathcal{S}$, сектора. Однако, когда резольвентная сходимость при таких μ установлена, мы можем распространить все результаты на $\mu \notin \operatorname{spec} \mathcal{A}^0$ (см. п. 1.6.1). Подчеркнем, что сужать интервал $\mathcal{E}$ может потребоваться лишь для $\mu \in \mathcal{S}$ — как и прежде.

В случае, когда исходный оператор самосопряжен, приближения к нему также могут быть выбраны самосопряженными. Прежде всего покажем, что всегда $(\mathcal{A}^0)^+ = (\mathcal{A}^0)^*$. Согласно (1.2.1) и (1.2.1$^+$)

$$\int_{\mathbb{Q}} A^+(I+D_1N^+)\,dy_1 = \int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N)^*A^*(I+D_1N^+)\,dy_1 = \\ = \int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N)^*A^*\,dy_1,$$

так что $(A^0)^+ = (A^0)^*$ (см. (1.2.9) и (1.2.9$^+$)). Также в силу (1.2.2) и (1.2.1$^+$)

$$\int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N^+)^*a_1^+\,dy_1 = \int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N^+)^*(a_2+AD_1M)\,dy_1 = \\ = \int_{\mathbb{Q}} (a_2+AD_1M)\,dy_1,$$

а в силу (1.2.1) и (1.2.2$^+$)

$$\int_{\mathbb{Q}} (a_2^+ + A^+D_1M^+)\,dy_1 = \int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N)^*(a_1+A^+D_1M^+)\,dy_1 = \\ = \int_{\mathbb{Q}} (I+D_1N)^*a_1\,dy_1,$$

поэтому $(a_1^0)^+ = a_2^0$ и $(a_2^0)^+ = a_1^0$ (см. (1.2.10), (1.2.11) и (1.2.10$^+$), (1.2.11$^+$)). Наконец, используя (1.2.2) и (1.2.2$^+$), видим, что

$$\int_{\mathbb{Q}} (a_1^+)^*D_1M^+\,dy_1 = \int_{\mathbb{Q}} (A^{-1}a_2+D_1M)^*(A^+D_1M^+ + a_1)\,dy_1 - \int_{\mathbb{Q}} (A^{-1}a_2)^*a_1\,dy_1 = \\ = \int_{\mathbb{Q}} (A^{-1}a_2+D_1M)^*a_1\,dy_1 - \int_{\mathbb{Q}} (A^{-1}a_2)^*a_1\,dy_1 = \\ = \int_{\mathbb{Q}} (D_1M)^*a_1\,dy_1,$$

откуда $(q^0)^+ = (q^0)^*$ (см. (1.2.12) и (1.2.12$^+$)). Таким образом, $(\mathcal{A}^0)^+ = (\mathcal{A}^0)^*$, и эффективный оператор самосопряжен, когда самосопряжен исходный.

Перейдем к корректорам. Если $A^+ = A$ и $a_1 = a_2$, то, очевидно, $N^+ = N$ и $M^+ = M$ (см. (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.1$^+$), (1.2.2$^+$)). Тогда при условии, что $\mathcal{A}^\varepsilon$ самосопряжен, а μ вещественно, будет выполнено $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ = \mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и $\mathcal{L}_\mu^+ = \mathcal{L}_\mu$, и, значит, корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ также будет самосопряженным. Что касается корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, то он останется несамосопряженным, однако вместо него в оценке (1.4.3) всегда можно взять самосопряженный оператор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon + (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^*$ (или даже $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$), поскольку при любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon D_1 f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d};$$

проверка этого неравенства аналогична доказательству ограниченности $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ (см. лемму 1.5.7), заметим лишь, что вместо оценки для нормы оператора $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ между $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ следует использовать оценку для нормы оператора $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}D_1$ (который совпадает с $D_1(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$) между теми же пространствами.

Оператор $\mathcal{P}^\varepsilon$ в корректоре $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ (в том числе и внутри $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$) может быть заменен другим сглаживателем, — например, сглаживанием по Стеклову. Поясним, как это делается.

Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon_1$ есть сглаживание по Стеклову по переменной x_1, то есть

$$\mathcal{S}^\varepsilon_1 u(x) = \int_{\mathbb{Q}} u(x_1 + \varepsilon z_1, x_2)\, dz_1.$$

Легко понять, что $\mathcal{S}^\varepsilon_1$ (как и $\mathcal{P}^\varepsilon$) коммутирует с резольвентой эффективного оператора. Нам достаточно показать, что при $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D_1(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}^\varepsilon_1)(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.6.10}$$

(см. (1.3.2) и (1.4.3)) и

$$\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}^\varepsilon_1)(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.6.11}$$

(см. (1.3.2), (1.3.8) и (1.4.5)). Для этого потребуется несколько простых фактов об операторах $\mathcal{P}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon_1$. Ниже через $\|\cdot\|_{m_2,2,\mathbb{R}^d}$ и $\|\cdot\|_{m_2,2,\mathcal{F}}$ обозначаются нормы в $L_2(\mathbb{R}^{d_1}; H^m(\mathbb{R}^{d_2}))$ и $L_2(\mathbb{Q}; H^m(\mathbb{R}^{d_2}))$.

Лемма 1.6.3. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.12}$$

Кроме того, если F *— периодическая функция из* $\mathbf{M}(H^m(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$, *где* $m \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$\|F^\varepsilon \mathcal{P}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|F\|_{\mathbf{M}} \|u\|_{m_2,2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.13}$$

Доказательство. Пусть $v \in C^\infty_c(\mathcal{F})$. По неравенству Пуанкаре,

$$\|(\mathcal{P} - \mathcal{I})v\|_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|D_1(\tau)v\|_{2,\mathcal{F}}.$$

Отсюда и из (1.5.2) и (1.5.34) вытекает (1.6.12). Далее, так как $\mathcal{P}v \in H^m(\mathbb{R}^{d_2})$ и $\|\mathcal{P}v\|_{m,2,\mathbb{R}^{d_2}} \leqslant \|v\|_{m_2,2,\mathcal{F}}$, то

$$\|F\mathcal{P}v\|_{2,\mathcal{F}} \leqslant \|F\|_{\mathbf{M}} \|v\|_{m_2,2,\mathcal{F}}.$$

Используя (1.5.34) снова, приходим к (1.6.13). □

Аналогичными свойствами обладает и сглаживатель $\mathcal{S}^\varepsilon_1$.

Лемма 1.6.4. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|(\mathcal{S}^\varepsilon_1 - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.14}$$

Кроме того, если F *— периодическая функция из* $\mathbf{M}(H^m(\mathbb{R}^{d_2}), L_2(\mathcal{F}))$, *где* $m \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$\|F^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|F\|_{\mathbf{M}} \|u\|_{m_2,2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.15}$$

Доказательство. Оценка (1.6.14) следует из формулы Тейлора, см. лемму 2.3.6. Чтобы установить (1.6.15), применим неравенство Коши и учтем периодичность функции F:

$$\|F^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} |F(y_1,x_2)\,u(x)|^2\,dx\,dy_1.$$

Изменяя порядок интегрирования и принимая во внимание то, что F является мультипликатором, получаем (1.6.15). $\square$

Положим $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} D_1(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0 = (N^\varepsilon D + M^\varepsilon)D_1(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0 + \\ + \varepsilon^{-1}((D_1N)^\varepsilon D + (D_1M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0. \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

Первое слагаемое в правой части легко оценивается с помощью (1.6.13) и (1.6.15), если заметить, что функции N и M являются мультипликаторами (см. п. 1.2.1), а сглаживатели коммутируют с дифференцированием:

$$\begin{aligned} \|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)D_1(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \\ \leqslant 2\|N\|_{\mathbf{M}}\|DD_1u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + 2\|M\|_{\mathbf{M}}\|D_1u_0\|_{1_2,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|u_0\|_{2,2,\mathbb{R}^d}. \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

Перейдем к другому слагаемому. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{P}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}_1^\varepsilon$ перестановочны, поэтому

$$\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon = \mathcal{P}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}_1^\varepsilon) + \mathcal{S}_1^\varepsilon(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I}). \tag{1.6.18}$$

Тогда из (1.6.13), (1.6.15) и мультипликаторных свойств функций D_1N, D_1M (см. п. 1.2.1) мы находим, что

$$\begin{aligned} &\|((D_1N)^\varepsilon D + (D_1M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \\ &\leqslant \|D_1N\|_{\mathbf{M}}\big(\|(\mathcal{S}_1^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d}\big) + \\ &+ \|D_1M\|_{\mathbf{M}}\big(\|(\mathcal{S}_1^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{1_2,2,\mathbb{R}^d} + \|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{1_2,2,\mathbb{R}^d}\big), \end{aligned}$$

откуда, ввиду (1.6.12) и (1.6.14),

$$\|((D_1N)^\varepsilon D + (D_1M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|u_0\|_{2,2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.19}$$

Теперь (1.6.16), (1.6.17), (1.6.19) вместе с (1.2.24) дают (1.6.10).

Оценка (1.6.11) доказывается похожим образом. В силу лемм 1.6.3 и 1.6.4 и мультипликаторных свойств функций N и M,

$$\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{S}_1^\varepsilon)u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|u_0\|_{2,2,\mathbb{R}^d}$$

(ср. с (1.6.19)). Остается только сослаться на (1.2.24).

В заключение отметим, что возможность перехода от $\mathcal{P}^\varepsilon$ к $\mathcal{S}^\varepsilon$ в оценке (1.4.3) была указана в работе [PSu12]. Там изучался полностью периодический оператор вида $b(D)^*\boldsymbol{C}^\varepsilon b(D)$ с равномерно положительно определенной функцией $\boldsymbol{C}$ (соответственно, было справедливо условие (1.1.19) — см. п. 1.1.4), а вместо соотношения (1.6.18) использовалось некоторое специальное свойство функции N (его обобщением является лемма 1.6.5, приведенная ниже). Выясняется, что для более широкого класса операторов, когда условие (1.1.19) уже может не выполняться, без дополнительных предположений о функциях N и M (таких, например, как в п. 1.6.5) упомянутое свойство становится бесполезным — по этому поводу см. замечание 1.6.6.

Выше мы уже отмечали, что именно оператор $\mathcal{P}^\varepsilon$ гарантирует включение образа корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ в пространство $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, так что избавиться от сглаживателя, вообще говоря, нельзя. Однако в некоторых случаях без него всё же удается обойтись. Подобная ситуация имеет место, когда, например, $N \in \mathbf{M}(L_2(\mathcal{F}))$ и $M \in \mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ (ввиду периодичности функций N и M, данные условия равносильны включениям в $\mathbf{M}(L_2(\mathbb{R}^d))$ и $\mathbf{M}(H^1(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$ соответственно). Чтобы в этом убедиться, нужно проверить, что при произвольных $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D_1(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.6.20}$$

(ср. с (1.6.10)) и

$$\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{1.6.21}$$

(ср. с (1.6.11)); здесь, как и в предыдущем пункте, $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f$.

Начнем с более простой оценки (1.6.21). Так как

$$\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|N\|_{\mathbf{M}}\|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|M\|_{\mathbf{M}}\|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d},$$

то, согласно лемме 1.6.3 и неравенству (1.2.24),

$$\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|u_0\|_{2,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Перейдем к (1.6.20). Имеем:

$$\begin{aligned} D_1(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0 = (N^\varepsilon D + M^\varepsilon)D_1(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0 +{}& \\ + \varepsilon^{-1}((D_1N)^\varepsilon D + (D_1M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0.& \end{aligned} \tag{1.6.22}$$

Первое слагаемое в правой части оценивается сразу с помощью (1.2.24):

$$\begin{aligned} &\|(N^\varepsilon D + M^\varepsilon)D_1(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \\ &\quad \leqslant \|N\|_{\mathbf{M}}\|DD_1u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|M\|_{\mathbf{M}}\|D_1u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

Второе слагаемое требует дополнительных соображений, поскольку общих свойств функций D_1N и D_1M из п. 1.2.1 сейчас недостаточно. В работе [Su04$_2$] было обнаружено, что если решение задачи на ячейке является мультипликатором, то его производная по «периодической» переменной — также мультипликатор (см. [Su04$_2$, предложение 8.2]). Следующее утверждение обобщает тот результат.

Лемма 1.6.5. *Пусть $f \in \mathbf{M}(H^m(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$, где $m \in \mathbb{N}_0$, и пусть $u(\cdot, x_2) \in \tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n$ при почти всех $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ удовлетворяет равенству*

$$D_1^*A(\cdot, x_2)D_1u(\cdot, x_2) = D_1^*f(\cdot, x_2) \tag{1.6.24}$$

в смысле функционалов на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$. Тогда для любых $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\|D_1u \cdot w\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \lesssim \|uD_1w\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + \|uw\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 + \|w\|_{m,2,\mathbb{R}^d}^2. \tag{1.6.25}$$

Тем самым если $u \in \mathbf{M}(H^m(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$, то $D_1u \in \mathbf{M}(H^{m+1}(\mathbb{R}^d), L_2(\mathbb{R}^d))$ и

$$\|D_1u \cdot w\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \lesssim \|D_1w\|_{m,2,\mathbb{R}^d}^2 + \|w\|_{m,2,\mathbb{R}^d}^2. \tag{1.6.26}$$

Доказательство. Сначала покажем, что при всех $w \in \tilde{C}_c^1(\mathcal{F})$

$$\|D_1 u \cdot w\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|u D_1 w\|^2_{2,\mathcal{F}} + \|w\|^2_{m,2,\mathcal{F}}. \tag{1.6.27}$$

Введем для краткости обозначения $u_{x_2} = u(\cdot, x_2)$, $w_{x_2} = w(\cdot, x_2)$ и т. д. Применим обе части равенства (1.6.24) к функции $u_{x_2}|w_{x_2}|^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(A_{x_2} D_1 u_{x_2} w_{x_2}, D_1 u_{x_2} w_{x_2})_{\mathbb{Q}} = \\
&\quad = (A_{x_2} D_1 w_{x_2} \cdot u_{x_2}, D_1 u_{x_2} w_{x_2})_{\mathbb{Q}} + (A_{x_2} D_1 u_{x_2} \cdot \bar{w}_{x_2}, \overline{D_1 w_{x_2}} \cdot u_{x_2})_{\mathbb{Q}} + \\
&\qquad + (f_{x_2} w_{x_2}, D_1 u_{x_2} w_{x_2})_{\mathbb{Q}} + (f_{x_2} \bar{w}_{x_2}, \overline{D_1 w_{x_2}} \cdot u_{x_2})_{\mathbb{Q}}.
\end{aligned}$$

Слагаемое слева оценим снизу при помощи леммы 1.2.1, слагаемые справа — сверху по неравенству Коши. Затем проинтегрируем соотношение по переменной x_2 и после несложных преобразований получим:

$$\|D_1 u \cdot w\|^2_{2,\mathcal{F}} \lesssim \|u D_1 w\|^2_{2,\mathcal{F}} + \|f w\|^2_{2,\mathcal{F}}.$$

Вспоминая, что f является мультипликатором, приходим к (1.6.27).

Чтобы отсюда вывести оценку (1.6.25), достаточно воспользоваться подходящим разбиением единицы для $\mathbb{R}^d$ (например, такое разбиение единицы для случая $m \leqslant 1$ было построено в доказательстве леммы 1.6.1). □

Замечание 1.6.6. Если предположить, что функция A удовлетворяет условию (1.1.19), то член $\|uw\|^2_{2,\mathbb{R}^d}$ в (1.6.25) можно опустить. Дело в том, что он появляется при переносе соответствующего неравенства с $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}^d$. Однако условие (1.1.19) позволяет установить нужную оценку сразу для $\mathbb{R}^d$, достаточно только заметить, что равенство функционалов в (1.6.24) остается верным и на классе $C_c^1(\mathbb{R}^{d_1})^n$.

Сейчас функции $N \in \mathbf{M}(L_2(\mathcal{F}))$ и $M \in \mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ являются решениями задач вида (1.6.24) с $f \in \mathbf{M}(L_2(\mathcal{F}))$ для первой и $f \in \mathbf{M}(H^1(\mathcal{F}), L_2(\mathcal{F}))$ — для второй (см. (1.2.1) и (1.2.2)), поэтому мы можем применить лемму 1.6.5. Используя еще масштабное преобразование, находим, что при $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$

$$\begin{aligned}
\|(D_1 N)^\varepsilon D u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \varepsilon^2 \|D_1 D u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + \|D u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \\
\|(D_1 M)^\varepsilon u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \varepsilon^2 \|D_1 u\|^2_{1,2,\mathbb{R}^d} + \|u\|^2_{1,2,\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}$$

Тем самым

$$\|((D_1 N)^\varepsilon D + (D_1 M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|D_1 u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} + \|(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d}.$$

Теперь из леммы 1.6.3 и неравенства (1.2.24) вытекает, что

$$\|((D_1 N)^\varepsilon D + (D_1 M)^\varepsilon)(\mathcal{P}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|u_0\|_{2,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{1.6.28}$$

Соотношение (1.6.22) и оценки (1.6.23) и (1.6.28) влекут за собой (1.6.20).

В то время как $D_2(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ сходится по операторной норме, композиция $D_1(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ может не иметь даже сильного предела. Причина заключается в том, что $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ содержит быстро осциллирующие функции, поэтому слагаемое $\varepsilon D_1\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ в (1.4.3) лишь равномерно ограничено по ε, но, вообще говоря, не мало. Сильная (а тогда и равномерная) сходимость оператора $D_1(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ эквивалентна равенству корректора нулю, что, в свою очередь, эквивалентно соотношениям $D_1^* A = 0$ и $D_1^* a_2 = 0$.

В самом деле, ввиду теоремы 1.4.2 и результатов из п. 1.6.4, при любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D_1 u_\varepsilon - D_1 u_0 - \varepsilon D_1 U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{1.6.29}$$

где $u_\varepsilon = (\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1} f$, $u_0 = (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f$ и $U_\varepsilon = (N^\varepsilon D + M^\varepsilon)\mathcal{S}^\varepsilon_1 u_0$. С другой стороны, если $D_1 u_\varepsilon$ сходится, то обязательно к $D_1 u_0$, поскольку, как хорошо известно, U_ε имеет равный нулю слабый предел. Тогда, объединяя (1.6.29) с очевидной оценкой

$$\varepsilon\|D_1 U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|D_1 u_\varepsilon - D_1 u_0 - \varepsilon D_1 U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_1 u_\varepsilon - D_1 u_0\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \|D_1 U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} = 0. \tag{1.6.30}$$

Напомним, что $\mathcal{A}^0_\mu$ является изоморфизмом $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ и $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а значит, мы можем выбрать $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ так, чтобы функция u_0 была равна 1 на параллелепипеде $P_{2r\times R}(0) = Q_{2r}(0) \times Q_R(0)$ (при фиксированных $r, R > 0$) в $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Учитывая, что $P_{r\times R}(0) + \varepsilon\mathbb{Q} \subset P_{2r\times R}(0)$ для $\varepsilon \leqslant r$, при таких ε и при $x \in P_{r\times R}(0)$ находим:

$$\mathcal{S}^\varepsilon_1 u_0(x) = \int_{\mathbb{Q}} u_0(x_1 + \varepsilon z, x_2)\, dz = 1.$$

Отсюда $\varepsilon D_1 U_\varepsilon = (D_1 M)^\varepsilon$ на $P_{r\times R}(0)$, а потому

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \|D_1 U_\varepsilon\|^2_{2,\mathbb{R}^d} &\geqslant \|(D_1 M)^\varepsilon\|^2_{2,P_{r\times R}(0)} = \\
&= \varepsilon^{d_1} \|D_1 M\|^2_{2,P_{\varepsilon^{-1}r\times R}(0)} \geqslant \\
&\geqslant \varepsilon^{d_1} \lfloor \varepsilon^{-1} r\rfloor^{d_1} \|D_1 M\|^2_{2,\mathbb{Q}\times Q_R(0)} \geqslant \\
&\geqslant (r-\varepsilon)^{d_1} \|D_1 M\|^2_{2,\mathbb{Q}\times Q_R(0)}.
\end{aligned}$$

Но тогда, согласно (1.6.30), $D_1 M = 0$ на $\mathcal{F}$, и тем самым $M = 0$ (см. задачу (1.2.2)). Теперь похожие рассуждения (только с $Du_0 = 1$ на $P_{2r\times R}(0)$) показывают, что и $N = 0$. Обратное утверждение очевидно из теоремы 1.4.2: если $N = 0$ и $M = 0$, то оператор $D_1(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ равномерно сходится. Существование же нулевых решений задач (1.2.1) и (1.2.2) равносильно выполнению равенств $D_1^* A = 0$ и $D_1^* a_2 = 0$.

Таким образом, для сходимости (сильной или равномерной) оператора $D_1(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $D_1^* A = 0$ и $D_1^* a_2 = 0$. Заметим, что в таком случае эффективные коэффициенты получаются простым усреднением коэффициентов исходного оператора по ячейке $\mathbb{Q}$.

Часть II

УСРЕДНЕНИЕ ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Краткое содержание второй части

Во второй части мы продолжим изучать задачу усреднения для сильно эллиптических операторов. До сих пор коэффициенты операторов зависели от «медленной» переменной x_2 и «быстрой» переменной $\varepsilon^{-1}x_1$. Эти переменные принадлежали взаимно ортогональным пространствам и в данном смысле были разделены. Сейчас мы отказываемся от подобного разделения и берем x и $\varepsilon^{-1}x$ в качестве «медленной» и «быстрой» переменной соответственно. Получающиеся операторы перестают быть периодическими и — при должной регулярности коэффициентов — становятся локально периодическими.

Положим $\mathbb{Q} = [-1/2, 1/2]^d$. Пусть $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^d$, где $A_{ij} \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))^{n\times n}$ с произвольным $s \in [0,1]$; это условие мы будем подразумевать без каких-либо оговорок. Отметим, что не исключается ни случай $s = 0$, когда A лишь равномерно непрерывна, ни случай $s = 1$, когда A уже липшицева. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$, который действует между $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ и дается выражением

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D = \sum_{i,j=1}^d D_i A_{ij}^\varepsilon D_j,$$

где $D = -i\nabla$, а $A^\varepsilon(x) = A(x, \varepsilon^{-1}x)$. Предположим, что $\mathcal{A}^\varepsilon$ равномерно коэрцитивен по ε из некоторого интервала $\mathcal{E} = (0, \varepsilon_0]$, — иначе говоря, существуют постоянные $c_A > 0$ и $C_A \geqslant 0$, такие что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{\mathbb{R}^d} + C_A \|u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \geqslant c_A \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2$$

при всех $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ тогда оказывается m-секториальным, поэтому если μ находится вне соответствующего сектора $\mathcal{S}$, то определена и равномерно ограничена резольвента $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$. Наша цель — изучить ее поведение, когда $\varepsilon \to 0$.

Основные результаты

Пусть $N_\xi(x, \cdot)$ при $x \in \mathbb{R}^d$ и $\xi \in \mathbb{C}^{d\times n}$ — периодическое векторное решение задачи

$$D^* A(x,\cdot)\,(DN_\xi(x,\cdot) + \xi) = 0, \qquad \int_{\mathbb{Q}} N_\xi(x,y)\,dy = 0,$$

на ячейке $\mathbb{Q}$, то есть $N_\xi(x,\cdot)$ принадлежит $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$ и в слабом смысле удовлетворяет выписанным равенствам. Из равномерной коэрцитивности оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ вытекает, что задача однозначно разрешима, и, таким образом, $N_\xi(x,\cdot)$ корректно определено. Как видно, отображение $\xi \mapsto N_\xi$ линейно по ξ, стало быть сводится к оператору умножения на функцию, которую мы обозначим через N. Легко понять, что N имеет ту же самую гладкость по первому аргументу, что и A, а потому $N \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))$.

Эффективный оператор $\mathcal{A}^0$ отображает $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ по формуле

$$\mathcal{A}^0 = D^* A^0 D,$$

в которой

$$A^0(x) = \int_{\mathbb{Q}} A(x,y)\,(I + D_2 N(x,y))\,dy.$$

Из свойств функций A и N следует, что $A^0 \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d)$. Выясняется также, что оператор $\mathcal{A}^0$ сильно эллиптичен, а значит, m-секториален, причем его сектор может быть выбран равным сектору $\mathcal{S}$.

Теорема. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда если $s = 0$, то $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится по операторной норме в L_2 к $(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$. Если же $s \in (0,1]$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через s, n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,s}}$.

Следующий результат касается приближения резольвенты в классе Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)^n$, поэтому мы будем считать, что $s \neq 0$. В качестве традиционного корректора выступит оператор $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$, заданный равенством

$$\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f(x) = \int_{\mathbb{Q}} N(x + \varepsilon z, \varepsilon^{-1} x)\, D(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f(x + \varepsilon z)\,dz.$$

Он непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, если $s = 1$. Чтобы и при $s < 1$ $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ был непрерывен в паре пространств $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^s(\mathbb{R}^d)^n$, нужно дополнительно предположить, что дробная производная $D_1^{s,2} = D^{s,2}_{\mathbb{R}^d} \otimes \mathcal{I}$ от функции A по «медленной» переменной равномерно ограничена (об этом условии см. в § 3.1). Ниже $D^{r,2} = D^{r,2}_{\mathbb{R}^d}$.

Теорема. *Пусть $s \in (0,1)$ и $D_1^{s,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ или $s = 1$. Тогда если $\mu \notin \mathcal{S}$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{s,2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}^\varepsilon_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через s, n, d, μ, c_A, C_A, $\|A\|_{C^{0,s}}$, а при $s < 1$ — еще и через $\|D_1^{s,2} A\|_{L_\infty}$.

Отметим, что в корректор $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ входит быстро осциллирующая функция $x \mapsto N(x + \varepsilon z, \varepsilon^{-1} x)$, так что операторная норма $D^{s,2}\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ на пространстве L_2 неограниченно растет, когда $\varepsilon \to 0$. Однако если $s < 1$, то благодаря множителю ε слагаемое с корректором всё же оказывается мало; последняя теорема тогда влечет за собой сходимость композиции $D^{s,2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$. Мы докажем подобный результат для $D^{r,2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ при любых $r \in (0,1)$ и даже с меньшими требованиями на коэффициенты.

Теорема. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда если $s = 0$ и $r \in (0,1)$, то $D^{r,2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится по операторной норме в L_2 к $D^{r,2}(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$. Если же $s \in (0,1]$ и $r \in (0,1)$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^{s \wedge (1-r)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через s, r, n, d, μ, c_A, C_A и $\|A\|_{C^{0,s}}$.

Подчеркнем, что в наших условиях образ корректора $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ попадает лишь в $H^s(\mathbb{R}^d)^n$, а значит, использовать этот оператор в приближении для композиции $D^{r,2}(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}$ при $r>s$ заведомо нельзя.

Теперь мы уточним аппроксимацию из первой теоремы за счет еще одного корректора. Корректор такого типа уже встречался в первой части, однако сейчас он будет устроен сложнее.

Пусть $(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^+$ — сопряженный к $\mathcal{A}^\varepsilon-\mu$ оператор. Для него аналогичным образом строятся такие же объекты, как и для $\mathcal{A}^\varepsilon-\mu$, — их мы помечаем символом «+». Предположим, что или $s=1/2$ и $D_1^{1/2,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$, или $s>1/2$. В таком случае, согласно утверждениям о повышении гладкости, $(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}$ будет непрерывно отображать $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{3/2}(\mathbb{R}^d)^n$. Кроме того, будет корректно определен и ограничен дифференциальный оператор третьего порядка

$$\mathcal{L}=D^*\left(\int_{\mathbb{Q}}(N^+(\cdot,y))^*D_1^*A(\cdot,y)\,(I+D_2N(\cdot,y))\,dy\right)D,$$

действующий из $H^{3/2}(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^{-3/2}(\mathbb{R}^d)^n$. Отсюда видно, что композиция

$$\mathcal{L}_\mu=(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}$$

окажется непрерывной в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Далее, пусть

$$M_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{Q}}(I+D_2N^+(x,x/\varepsilon+z))^*\Delta_{\varepsilon z}A(x,x/\varepsilon+z)\,(I+D_2N(x,x/\varepsilon+z))\,dz$$

и

$$\mathcal{M}^\varepsilon=D^*M_\varepsilon D.$$

Зададим с помощью $\mathcal{M}^\varepsilon$ ограниченный в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ оператор

$$\mathcal{M}^\varepsilon_\mu=(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}\mathcal{M}^\varepsilon(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}.$$

Тогда искомый корректор будет иметь вид

$$\mathcal{C}^\varepsilon_\mu=(\mathcal{K}^\varepsilon_\mu-\mathcal{L}_\mu)-\mathcal{M}^\varepsilon_\mu+((\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^+-\mathcal{L}^+_\mu)^*.$$

Теорема. *Пусть $s=1/2$ и $D_1^{1/2,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$ или $s\in(1/2,1]$. Тогда если $\mu\notin\mathcal{S}$, то для всех $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}^\varepsilon_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d}\leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через s, n, d, μ, c_A, C_A, $\|A\|_{C^{0,s}}$, а если $s=1/2$, — то еще и через $\|D_1^{1/2,2}A\|_{L_\infty}$.

Интерполяция дает следующий результат.

Следствие. *Пусть $s\in[1/2,1)$ и $D_1^{s,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$ или $s=1$. Тогда если $\mu\notin\mathcal{S}$, а $r\in(0,s]$, то для всех $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}^\varepsilon_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d}\leqslant C\varepsilon^{s(2-r)/(2-s)}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C явно контролируется через s, n, d, μ, c_A, C_A, $\|A\|_{C^{0,s}}$, а если $s<1$, — то еще и через $\|D_1^{s,2}A\|_{L_\infty}$.

Мы видим, что в $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, по сравнению с таким же корректором из первой части, появился новый член $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$. Можно показать, что избавиться от него, сохраняя порядок погрешности, вообще говоря, нельзя — см. п. 2.6.4. Тем самым данный член оказывается своего рода особенностью непериодических задач.

С другой стороны, если от $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ в теореме оставить лишь $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$, то погрешность станет порядка $\varepsilon^{1\wedge 2s/(2-s)}$. Выясняется, что аналогичный результат справедлив для любых $s \in (0,1)$, причем без дополнительных условий на дробную производную $D_1^{1/2,2}A$. Помимо прочего, это наводит на мысль, что $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ при $s < 2/3$ играет ведущую роль в корректоре $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$.

Теорема. *Пусть* $s \in (0,1)$. *Тогда если* $\mu \notin \mathcal{S}$, *то для всех* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^{1\wedge 2s/(2-s)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C *явно контролируется через* s, n, d, μ, c_A, C_A *и* $\|A\|_{C^{0,s}}$.

С помощью интерполяции приходим к еще одному утверждению.

Следствие. *Пусть* $s \in (0,1)$. *Тогда если* $\mu \notin \mathcal{S}$, *а* $r \in (0,1)$, *то для всех* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant C\varepsilon^{(1-r)(1\wedge 2s/(2-s))} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Постоянная C *явно контролируется через* s, n, d, μ, c_A, C_A *и* $\|A\|_{C^{0,s}}$.

Схема доказательства

В основе доказательства лежит результат для операторов с «липшицевыми» коэффициентами, так что с них и начнем.

При $s = 1$ мы, в сущности, развиваем подход, описанный в главе 1. Напомним, что его главная идея — установить операторное тождество вида

$$(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} (\ldots) (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}.$$

Как и прежде, ключевым моментом является то, что старший вклад от оператора $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ сокращается со старшим вкладом от суммы $(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$ и $\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, поэтому оставшиеся в скобках слагаемые оказываются малы. В итоге отсюда сравнительно легко получаются все нужные оценки сразу. Важно отметить, что эти оценки точны по порядку и, вообще говоря, не могут быть улучшены.

Оговоримся, что теорию Флоке–Блоха, на которую мы опирались ранее, в локально периодической постановке использовать уже не так удобно. По этой причине сглаживатель в корректоре $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ сейчас другой; вместе с ним изменились и технические приемы.

Левая часть тождества образует «сглаженное» первое приближение, а именно благодаря «липшицевости» коэффициентов образ такого операторного приближения содержится в пространстве $H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Это в конечном счете обеспечивает корректность проводимых вычислений.

Чтобы от «липшицевых» коэффициентов перейти к «гёльдеровым», мы используем стандартное сглаживание. Зафиксируем неотрицательную функцию $J \in C_c^\infty(B_1(0))$, такую что $\int_{\mathbb{R}^d} J(x)\,dx = 1$. Положим $J_\delta(x) = \delta^{-d} J(\delta^{-1}x)$ и $A_\delta(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\delta(x-\hat{x})\,A(\hat{x},y)\,d\hat{x}$. Приближения для регуляризованного оператора $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta) = D^* A_\delta^\varepsilon D$ строятся с помощью эффективного оператора $\mathcal{A}^0(\delta)$ и корректоров $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$, $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ по уже доказанным утверждениям. Как выясняется далее, резольвенты операторов $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$, $\mathcal{A}^0(\delta)$ и корректоры $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$, $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ при $\delta \to 0$ сходятся в интересующих нас операторных нормах к резольвентам операторов $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}^0$ и корректорам $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ соответственно, причем скорость сходимости можно оценить через скорость сходимости A_δ к A. Нам остается лишь оптимальным образом выбрать подпоследовательность $\delta(\varepsilon)$.

Подчеркнем, что при $s = 1$ оценки погрешностей содержат липшицеву полунорму функции A. Но такая же полунорма для A_δ бесконечно растет, а значит, при уменьшении s погрешность неизбежно ухудшается. Так, если $s = 0$, то приведенное рассуждение позволяет доказать сходимость оператора $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$, но ничего не говорит о ее скорости.

Глава 2

Локально периодический оператор с «липшицевыми» коэффициентами

2.1 Исходный оператор

Пусть функции A_{ij} принадлежат классу $C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))^{n\times n}$, где $\mathbb{Q} = Q_1(0)$. Тогда $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^d$ можно представлять себе как равномерно ограниченное отображение $A\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbf{B}(\mathbb{C}^{d\times n})$, липшицевое по первому аргументу и периодическое — по второму. Как известно, для произвольной ограниченной функции $u\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to L_2(\mathbb{Q})$, которая удовлетворяет условию Каратеодори, отображение $\tau^\varepsilon u\colon \mathbb{R}^d \to L_2(\mathbb{Q})$, заданное при $x \in \mathbb{R}^d$ и $z \in \mathbb{Q}$ равенством

$$\tau^\varepsilon u(x,z) = u(x, \varepsilon^{-1}x, z), \tag{2.1.1}$$

оказывается измеримым (пространство $L_2(\mathbb{Q})$ не играет здесь выделенной роли, но участвует в дальнейших построениях). Отметим очевидное свойство τ^ε: если u, v — функции из $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ в $L_2(\mathbb{Q})$, то

$$\tau^\varepsilon uv = \tau^\varepsilon u \cdot \tau^\varepsilon v. \tag{2.1.2}$$

Ниже при различных u пользуемся обозначением $u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u$.

Отображение A дифференцируемо лишь по одному аргументу, но нам встретятся функции, имеющие производные уже по обеим переменным. Чтобы их различать, условимся обозначать через D_1 дифференцирование по первому аргументу, а через D_2 — по второму, то есть $D_1 = -i\nabla_1$ и $D_2 = -i\nabla_2$. Аналогичные обозначения используются и для дифференцирования дробного порядка: $D_1^{r,p} = D_{\mathbb{R}^d}^{r,p} \otimes \mathcal{I}$ и $D_2^{r,p} = \mathcal{I} \otimes D_{\mathbb{Q}}^{r,p}$. В тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, индекс будет опускаться.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^\varepsilon\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D. \tag{2.1.3}$$

Ясно, что он ограничен, а его норма не превосходит $C_\flat = \|A\|_{\mathbf{M}}$ (функции A и $D_1 A$ являются мультипликаторами на $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, и величины $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$ имеют соответствующий смысл):

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon u\|_{-1,2,\mathbb{R}^d} \leqslant C_\flat \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n. \tag{2.1.4}$$

Мы потребуем, чтобы он был еще и слабо коэрцитивен равномерно по параметру $\varepsilon \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = (0, \varepsilon_0]$ с $\varepsilon_0 \in (0,1]$. Другими словами, мы предполагаем, что найдутся такие постоянные $c_A > 0$ и $C_A \geqslant 0$, что

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du, Du)_{\mathbb{R}^d} + C_A \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_A \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n. \tag{2.1.5}$$

Тогда при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ становится m-секториальным, причем отвечающий ему сектор

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant c_A^{-1} C_\flat (\operatorname{Re} z + C_A)\} \tag{2.1.6}$$

не зависит от ε. Тем самым, если $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $\mu \notin \mathcal{S}$, то $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu = \mathcal{A}^\varepsilon - \mu$ — изоморфизм, а потому он обратим; более того, при любых $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ выполнено

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.1.7}$$

Мы хотим изучить поведение операторов $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ и $D(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$, когда $\varepsilon \to 0$.

Замечание 2.1.1. Решающую роль для следующей главы сыграет то, как оценочные постоянные будут зависеть здесь от величины $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$. Забегая вперед, отметим, что такая зависимость появляется либо непосредственно от функции A, либо через применение различных фактов о повышении гладкости из эллиптической теории. Мы будем указывать, в какие из констант и каким образом входит $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$. До сих пор липшицевость функции A не требовалась, поэтому и сектор $\mathcal{S}$, и неравенство (2.1.7) сохранят свой вид для операторов с $A \in C(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$.

2.1.1 *О коэрцитивности*

Обсудим подробнее условие коэрцитивности (2.1.5). Как и ранее в главе 1, из подобного условия вытекает, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ сильно эллиптичен при всех положительных ε. Однако обратим внимание на то, что если для доказательства оценки (1.1.17) из главы 1 было достаточно выполнения условия (1.1.4) хотя бы для одного значения параметра ε, то сейчас важно, чтобы его аналог имел место уже для некоторой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ (как нетрудно понять, это отличие обусловлено тем, что раньше «быстрая» переменная $\varepsilon^{-1}x_1$ и «медленная» переменная x_2 были «разделены»).

Прежде всего покажем, что из равномерной (по параметру $\varepsilon \in \mathscr{E}$) слабой коэрцитивности оператора $D^* A^\varepsilon D$ на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ (то есть из (2.1.5)) вытекает равномерная (по переменной $x \in \mathbb{R}^d$) сильная коэрцитивность оператора $D^* A(x,\cdot) D$ на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$.

Лемма 2.1.2. *При всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $u \in \tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$*

$$\operatorname{Re}(A(x,\cdot)\, Du, Du)_{\mathbb{Q}} \geqslant c_A \|Du\|^2_{2,\mathbb{Q}}. \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Подставим в (2.1.5) $u_\varepsilon = \varepsilon u^\varepsilon \varphi$, где $u \in \tilde{C}^1(\mathbb{Q})^n$, а $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, и учтем, что u_ε и $Du_\varepsilon - (Du)^\varepsilon \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ сходятся в L_2 к нулю:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \langle A^\varepsilon(x)\, (Du)^\varepsilon(x), (Du)^\varepsilon(x)\rangle |\varphi(x)|^2\, dx \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} c_A \int_{\mathbb{R}^d} |(Du)^\varepsilon(x)|^2 |\varphi(x)|^2\, dx.$$

Далее, воспользуемся тем, что для произвольной $f \in C_c(\mathbb{R}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} f(x,y)\, dx\, dy \tag{2.1.9}$$

(см. [A92, леммы 5.5 и 5.6]; мы уже неоднократно применяли различные варианты этого факта — ср., например, с (1.2.16)). Тогда получим:

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}}\langle A(x,y)\,Du(y),Du(y)\rangle|\varphi(x)|^2\,dx\,dy \geqslant c_A\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}}|Du(y)|^2|\varphi(x)|^2\,dx\,dy.$$

Поскольку функция $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ произвольна, а функция A непрерывна по первой переменной, то отсюда находим, что для любого $x\in\mathbb{R}^d$

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{Q}}\langle A(x,y)\,Du(y),Du(y)\rangle\,dy \geqslant c_A\int_{\mathbb{Q}}|Du(y)|^2\,dy. \qquad \square$$

Теперь легко убедиться, что A отвечает условию Лежандра–Адамара (ср. с леммой 1.1.1).

Лемма 2.1.3. *Функция A удовлетворяет условию Лежандра–Адамара:*

$$\operatorname{Re}\langle A(\cdot)\,\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle \geqslant c_A|\xi|^2|\eta|^2, \qquad \xi\in\mathbb{R}^d,\eta\in\mathbb{C}^n. \tag{2.1.10}$$

Доказательство. Фиксируем $\delta>0$. По теореме Лебега о дифференцировании, при всех $x_0\in\mathbb{R}^d$ и почти всех $y_0\in\mathbb{R}^d$ найдется $r>0$ (зависящее от x_0 и y_0), такое что

$$|B_r(y_0)|^{-1}\int_{B_r(y_0)}|A(x_0,y)-A(x_0,y_0)|\,dy \leqslant \delta. \tag{2.1.11}$$

Выберем функцию $\varphi\in C_c^\infty(B_1(0))$, для которой $\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(y)|^2\,dy=1$. Тогда если $\varphi_r(y)=r^{-d/2}\varphi(r^{-1}(y-y_0))$, то $\varphi_r\in C_c^\infty(B_r(y_0))$, причем $\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_r(y)|^2\,dy=1$. Пусть $\xi\in\mathbb{R}^d$ и $\eta\in\mathbb{C}^n$ — произвольные ненулевые векторы. Положим $u_k(y)= = k^{-1}\varphi_r(y)\,e^{ik\langle y,\xi\rangle}\eta$. Мы будем считать, что $y_0\in\operatorname{int}\mathbb{Q}$, а r настолько мало, что $B_r(y_0)\subset\operatorname{int}\mathbb{Q}$. В таком случае $u_k\in\tilde H^1(\mathbb{Q})$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d}|Du_k(y)-\varphi_r(y)\,e^{ik\langle y,\xi\rangle}\xi\otimes\eta|^2\,dy = k^{-2}|\eta|^2\int_{B_r(y_0)}|D\varphi_r(y)|^2\,dy \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Подставим $u=u_k$ в (2.1.8) с $x=x_0$ и перейдем к пределу:

$$\operatorname{Re}\int_{B_r(y_0)}\langle A(x_0,y)\,\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle|\varphi_r(y)|^2\,dy \geqslant c_A|\xi|^2|\eta|^2.$$

Отметим также, что согласно (2.1.11)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B_r(y_0)}\langle A(x_0,y)\,\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle|\varphi_r(y)|^2\,dy-\langle A(x_0,y_0)\,\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle\right| =\\
&\qquad=\left|\int_{B_r(y_0)}\langle (A(x_0,y)-A(x_0,y_0))\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle|\varphi_r(x)|^2\,dx\right| \leqslant\\
&\qquad\leqslant \delta\nu_d\|\varphi\|^2_{\infty,\mathbb{R}^d}|\xi|^2|\eta|^2
\end{aligned}$$

(напомним, что ν_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$). Объединяя два последних неравенства, приходим к оценке

$$\operatorname{Re}\langle A(x_0,y_0)\,\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta\rangle \geqslant \big(c_A-\delta\nu_d\|\varphi\|^2_{\infty,\mathbb{R}^d}\big)|\xi|^2|\eta|^2.$$

Ввиду произвольности δ, из нее сразу же получается (2.1.10). $\square$

Условие Лежандра–Адамара не влечет за собой, вообще говоря, ни исходное условие слабой коэрцитивности (2.1.5), ни вытекающее из него условие (2.1.8) — см. соответствующее обсуждение в п. 1.1.1. Более простое требование, достаточное для выполнения (2.1.5) (а тогда и (2.1.8)), имеет следующий вид: существует постоянная $c > 0$, такая что при всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$\operatorname{Re}(A(x,\cdot)\,Du, Du)_{\mathbb{R}^d} \geqslant c\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{2.1.12}$$

то есть оператор $D^* A(x,\cdot)\,D$ сильно коэрцитивен на $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ равномерно по переменной x (ср. с (1.1.19) в главе 1).

Лемма 2.1.4. *Из условия* (2.1.12) *следует условие* (2.1.5)*, притом с произвольной постоянной $c_A < c$.*

Доказательство. Предварительно запишем условие (2.1.12) в форме

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x_0, \varepsilon^{-1}x)\,Du, Du\rangle\,dx \geqslant c\int_{\mathbb{R}^d} |Du|^2\,dx, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n \tag{2.1.13}$$

(аргумент x у функций для краткости опускается), где $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon > 0$ произвольны.

Идея доказательства леммы во многом повторяет вывод неравенства Гординга. Сначала оценка (2.1.5) локализуется с помощью разбиения единицы. Используя равномерную непрерывность функции A, мы фиксируем ее первый аргумент в каждом элементе соответствующего покрытия, после чего становится возможным применить (2.1.13) и завершить доказательство.

По $\delta > 0$ найдем $\delta_0 > 0$, такое что $\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}} \leqslant \delta$ при любых $|h| \leqslant \delta_0$. Выберем покрытие пространства $\mathbb{R}^d$ шарами $B_i = B_{\delta_0}(x_i)$ таким образом, чтобы его кратность — обозначим ее через κ — была равномерно ограничена. Построим функции $\varphi_i \in C_c^\infty(B_i)$ со значениями в интервале $[0,1]$, для которых $\|D\varphi_i\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leqslant \rho$ и $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i^2 = 1$ (на каждом компакте в этой сумме отлично от нуля только конечное число слагаемых).

Пусть $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} &\langle A(x, \varepsilon^{-1}x)\,Du, Du\rangle\,dy = \\ &= \sum_{i\in I_u}\int_{B_i} \langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,\varphi_i Du, \varphi_i Du\rangle\,dx + \\ &\quad + \sum_{i\in I_u}\int_{B_i} \langle (A(x, \varepsilon^{-1}x) - A(x_i, \varepsilon^{-1}x))\,\varphi_i Du, \varphi_i Du\rangle\,dx,\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

где суммирование ведется по минимальному (конечному) набору индексов I_u, отвечающему условию $\operatorname{supp} u \subset \cup_{i\in I_u} B_i$. Очевидно, что последнее слагаемое в (2.1.14) оценивается сверху через $\delta\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}$; в другом распишем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}\langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,\varphi_i Du, \varphi_i Du\rangle &= \langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,D(\varphi_i u), D(\varphi_i u)\rangle - \\ &- \langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,\varphi_i Du, D\varphi_i \cdot u\rangle - \\ &- \langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,D\varphi_i \cdot u, \varphi_i Du\rangle - \\ &- \langle A(x_i, \varepsilon^{-1}x)\,D\varphi_i \cdot u, D\varphi_i \cdot u\rangle.\end{aligned}$$

То слагаемое, которое возникает из первого члена в правой части, мы оценим снизу с помощью (2.1.13), остальные — сверху:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_{B_i}\langle A(x_i,\varepsilon^{-1}x)\varphi_i Du,\varphi_i Du\rangle\,dx \geqslant\\ \geqslant c\|D(\varphi_i u)\|^2_{2,B_i} - 2\|A\|_{\mathbf{M}}\|\varphi_i Du\|_{2,B_i}\|D\varphi_i\cdot u\|_{2,B_i} - \|A\|_{\mathbf{M}}\|D\varphi_i\cdot u\|^2_{2,B_i}.\end{aligned}$$

Поскольку при произвольных $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\|D(\varphi_i u)\|^2_{2,B_i} = \|\varphi_i Du\|^2_{2,B_i} + 2\operatorname{Re}(\varphi_i Du, D\varphi_i\cdot u)_{B_i} + \|D\varphi_i\cdot u\|^2_{2,B_i} \geqslant\\ \geqslant (1-\alpha)\|\varphi_i Du\|^2_{2,B_i} + (1-\alpha^{-1})\|D\varphi_i\cdot u\|^2_{2,B_i}\end{aligned}$$

и

$$2\|\varphi_i Du\|_{2,B_i}\|D\varphi_i\cdot u\|_{2,B_i} \leqslant \alpha\|\varphi_i Du\|^2_{2,B_i} + \alpha^{-1}\|D\varphi_i\cdot u\|^2_{2,B_i},$$

то

$$\operatorname{Re}\int_{B_i}\langle A(x_i,\varepsilon^{-1}x)\varphi_i Du,\varphi_i Du\rangle\,dx \geqslant (c-\delta)\|\varphi_i Du\|^2_{2,B_i} - C(\delta)\,\|D\varphi_i\cdot u\|^2_{2,B_i}.$$

Просуммируем эти неравенства по $i\in I_u$ и учтем свойства покрытия $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и функций φ_i:

$$\operatorname{Re}\sum_{i\in I_u}\int_{B_i}\langle A(x_i,\varepsilon^{-1}x)\varphi_i Du,\varphi_i Du\rangle\,dx \geqslant (c-\delta)\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d} - \kappa\rho^2 C(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Объединяя оценки для двух слагаемых из (2.1.14), окончательно получаем:

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du, Du)_{\mathbb{R}^d} \geqslant (c-2\delta)\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d} - \kappa\rho^2 C(\delta)\,\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Тем самым мы доказали, что неравенство (2.1.5) выполнено с постоянной c_A, сколь угодно близкой к c. □

Как видно, условие (2.1.5) влечет за собой (2.1.8) и, с другой стороны, само является следствием (2.1.12). Все они оказались бы равносильны, если бы (2.1.12) вытекало из (2.1.8). Однако известны примеры функций A, для которых выполнено лишь (2.1.8), но не (2.1.12) — см. [BF15]. В таких случаях некоторая подпоследовательность операторов $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ всё еще может сходится в каком-нибудь смысле к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$ (см. его определение в § 2.2), но $\mathcal{A}^0$ уже не будет сильно эллиптическим.

Отметим еще, что рассуждения с разбиением единицы позволяют перейти от (2.1.8) к оценке вида (2.1.12), но лишь с дополнительным слагаемым $C\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}$ в левой части (другими словами, получается слабая коэрцитивность, а не сильная). Тогда легко понять, что в неравенстве (2.1.13), появилось бы уже растущее при $\varepsilon\to 0$ слагаемое $\varepsilon^{-2}C_A\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d}$, и тем самым вместо условия равномерной коэрцитивности (2.1.5) мы пришли бы к оценке вида

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du, Du)_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon^{-2}C_A\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_A\|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u\in H^1(\mathbb{R}^d)^n.$$

По этой причине ослабить условие (2.1.12) до слабой коэрцитивности без дополнительных предположений, по-видимому, нельзя.

Приведем теперь пример функции A, которая удовлетворяла бы достаточному условию (2.1.12). Пусть $b(D)$ — матричный дифференциальный оператор первого порядка с символом

$$\xi \mapsto b(\xi) = \sum_{i=1}^{d} b_i \xi_i,$$

где $b_i \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Предположим, что при некотором $\alpha > 0$

$$b(\xi)^* b(\xi) \geqslant \alpha|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

(тем самым $m \geqslant n$). Далее, пусть $\boldsymbol{C} \in C(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))^{m\times m}$, причем вещественная часть $\boldsymbol{C}$ равномерно положительно определена. Положим $A_{ij} = b_i^* \boldsymbol{C} b_j$. Тогда, применяя преобразование Фурье, приходим к (2.1.12):

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(A(x,\cdot)\,Du, Du)_{\mathbb{R}^d} &= \operatorname{Re}(\boldsymbol{C}(x,\cdot)\,b(D)\,u, b(D)\,u)_{\mathbb{R}^d} \geqslant \\ &\geqslant \|(\operatorname{Re}\boldsymbol{C})^{-1}\|_{\mathbf{M}}^{-1} \|b(D)\,u\|_{2,\mathbb{R}^d}^2 \geqslant \\ &\geqslant \alpha \|(\operatorname{Re}\boldsymbol{C})^{-1}\|_{\mathbf{M}}^{-1} \|Du\|_{2,\mathbb{R}^d}^2.\end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что равномерная положительная определенность функции A является более сильным ограничением, чем равномерная положительная определенность функции $\boldsymbol{C}$ в данном примере.

Те же самые построения, что и в п. 1.1.4, позволяют свести локально периодический оператор теории упругости к оператору $b(D)^* \boldsymbol{C}^\varepsilon b(D)$; мы не будем здесь повторяться.

2.2 Эффективный оператор

Определим при $\xi \in \mathbb{C}^{d\times n}$ и $x \in \mathbb{R}^d$ функцию $N_\xi(x,\cdot)$ как решение задачи

$$D_2^* A(x,\cdot)\,(D_2 N_\xi(x,\cdot) + \xi) = 0 \tag{2.2.1}$$

в пространстве $\tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n$. Мы уже видели в п. 2.1.1, см. лемму 2.1.2, что оператор $D_2^* A(x,\cdot)\,D_2$ сильно коэрцитивен на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$, поэтому согласно стандартному неравенству Пуанкаре его вещественная часть положительно определена на $\tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n$:

$$\operatorname{Re}(A(x,\cdot)\,Du, Du)_{\mathbb{Q}} \gtrsim \|u\|_{1,2,\mathbb{Q}}^2, \qquad u \in \tilde{H}_0^1(\mathbb{Q})^n.$$

Поскольку $D_2^* A(x,\cdot)\,\xi \in \tilde{H}^{-1}(\mathbb{Q})^n$, то задача (2.2.1) однозначно разрешима.

Пусть N — отображение, сопоставляющее элементу ξ функцию N_ξ. Ясно, что N_ξ линейно зависит от ξ, поэтому N есть оператор умножения на функцию, которую мы также обозначим через N. Следующая лемма показывает, что N имеет ту же гладкость по первому аргументу, что и A.

Лемма 2.2.1. *Верно включение* $N \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{H}_0^1(\mathbb{Q}))$.

Доказательство. Из тождества (2.2.1) и леммы 2.1.2 вытекает, что

$$c_A\|D_2N(x,\cdot)\|_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \|A(x,\cdot)\|_{\infty,\mathbb{Q}}, \tag{2.2.2}$$

а значит,

$$\|D_2N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d;L_2(\mathbb{Q}))} \leqslant c_A^{-1}\|A\|_{\mathbf{M}}. \tag{2.2.3}$$

Далее, отметим, что для любых функций u, v на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}$ выполнено

$$\Delta_h uv = \Delta_h u\cdot v + \mathcal{T}_h u\cdot\Delta_h v, \tag{2.2.4}$$

где $\mathcal{T}_h$ — оператор сдвига первой переменной на вектор $h\in\mathbb{R}^d$. Имея в виду это соотношение, из (2.2.1) находим:

$$D_2^*(\mathcal{T}_hA\cdot D_2\Delta_hN) = -D_2^*(\Delta_hA\cdot(I+D_2N)).$$

Воспользуемся леммой 2.1.2, чтобы оценить левую часть:

$$c_A\|D_2\Delta_hN(x,\cdot)\|_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \|\Delta_hA(x,\cdot)\cdot(I+D_2N(x,\cdot))\|_{2,\mathbb{Q}}. \tag{2.2.5}$$

Отсюда

$$\|D_1D_2N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d;L_2(\mathbb{Q}))} \leqslant c_A^{-1}\|D_1A\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d;L_2(\mathbb{Q}))},$$

и остается сослаться на (2.2.3).

Таким образом, $D_2N\in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d;L_2(\mathbb{Q}))$. Но тогда из неравенства Пуанкаре следует, что и $N\in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d;L_2(\mathbb{Q}))$. ☐

Замечание 2.2.2. Так как $L_\infty(\mathbb{R}^d;H^1(\mathbb{Q}))$ совпадает с пространством мультипликаторов в паре $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{R}^d;H^1(\mathbb{Q}))$, то соответствующие нормы функций N и D_1N будем обозначать через $\|N\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1N\|_{\mathbf{M}}$. По тем же соображениям через $\|D_2N\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1D_2N\|_{\mathbf{M}}$ обозначаются нормы D_2N и D_1D_2N в $L_\infty(\mathbb{R}^d;L_2(\mathbb{Q}))$. Иначе говоря, под $\mathbf{M}$ здесь понимается пространство L_∞ со значениями в самом узком классе, которому функция заведомо (на основании леммы 2.1.2) принадлежит.

Замечание 2.2.3. Как видно из доказательства леммы, от $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ зависит только константа в оценке для $\|D_1N\|_{\mathbf{M}}$, притом $\|D_1N\|_{\mathbf{M}}\lesssim\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$.

Зададим отображение $A^0\colon\mathbb{R}^d\to\mathbf{B}(\mathbb{C}^{d\times n})$,

$$A^0(x) = \int_{\mathbb{Q}} A(x,y)\,(I+D_2N(x,y))\,dy. \tag{2.2.6}$$

Поскольку функции A и D_2N непрерывны по первому аргументу, то непрерывна и A^0. Более того, $A^0\in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d)$. Действительно, неравенство

$$\|A^0\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N\|_{\mathbf{M}} \tag{2.2.7}$$

вытекает непосредственно из определения A^0, а оценка

$$\|DA^0\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}\|D_1D_2N\|_{\mathbf{M}} + \|D_1A\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N\|_{\mathbf{M}} \tag{2.2.8}$$

получается из тождества

$$\Delta_hA^0(x) = \int_{\mathbb{Q}} \Delta_hA(x,y)\,(I+D_2N(x,y))\,dy + \int_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_hA(x,y)\,\Delta_hD_2N(x,y)\,dy \tag{2.2.9}$$

(см. (2.2.4)). Тем самым величина $\|A^0\|_{C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d)}$ конечна.

Эффективный оператор $\mathcal{A}^0\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ вводится по формуле

$$\mathcal{A}^0 = D^* A^0 D. \tag{2.2.10}$$

Хорошо известно, что функция A^0 отвечает условию Лежандра–Адамара, и так как она еще и равномерно ограничена и равномерно непрерывна, то оператор $\mathcal{A}^0$ оказывается ограниченным и слабо коэрцитивным (в соответствии с неравенством Гординга), а следовательно, и m-секториальным. Нетрудно показать, что он удовлетворяет соотношению вида (2.1.5) с теми же самыми постоянными, однако константа в оценке нормы, вообще говоря, отличается от той, что в (2.1.4). Тем не менее сектор для эффективного оператора можно выбрать равным сектору $\mathcal{S}$ для исходного. (Похожая ситуация имела место и в случае операторов с периодическими коэффициентами, см. п. 1.2.2.) Чтобы в этом убедиться, потребуется следующее вспомогательное утверждение (ср. с леммой 1.2.3).

Лемма 2.2.4. *Зададим форму* $\mathfrak{a}^0$ *на* $H^1(\mathbb{R}^d)^n \oplus L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$ *равенством*

$$\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle A(x,y)\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y), \mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y)\rangle\, dx\, dy,$$

в котором $\mathfrak{D}\mathfrak{u}(x,y) = D_1\mathfrak{u}_1(x) \oplus D_2\mathfrak{u}_2(x,y)$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$. *Тогда*

$$|\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u})| \leqslant C_\flat \|\mathfrak{D}\mathfrak{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{2.2.11}$$

и

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) \geqslant c_A \|\mathfrak{D}\mathfrak{u}\|^2_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} - C_A\|\mathfrak{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.2.12}$$

Доказательство. Первая оценка очевидна сразу, мы проверим вторую. Фиксируем $\mathfrak{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n \oplus C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \tilde{C}^\infty(\mathbb{Q}))^n$ и положим $u^{(\varepsilon)} = \mathfrak{u}_1 + \varepsilon\mathfrak{u}_2^\varepsilon$. Подставим $u^{(\varepsilon)}$ в (2.1.5) и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда поскольку $u^{(\varepsilon)} - \mathfrak{u}_1$ и $Du^{(\varepsilon)} - (\mathfrak{D}\mathfrak{u})^\varepsilon$ стремятся к нулю в L_2, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\langle A^\varepsilon(x)\,(\mathfrak{D}\mathfrak{u})^\varepsilon(x), (\mathfrak{D}\mathfrak{u})^\varepsilon(x)\rangle\, dx \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} c_A\int_{\mathbb{R}^d}|(\mathfrak{D}\mathfrak{u})^\varepsilon(x)|^2\, dx - C_A\|\mathfrak{u}_1\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Вычисляя обе части неравенства с помощью (2.1.9), получаем (2.2.12). □

Замечание 2.2.5. Форма $\mathfrak{a}^0$ естественным образом возникает в теории двухмасштабной сходимости, ссылки по этому поводу см. в замечании 1.2.4.

Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ и $U = ND_1 u$. Согласно лемме 2.2.1, $U \in L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$, поэтому $\mathfrak{u} = u \oplus U$ принадлежит области определения формы $\mathfrak{a}^0$. Заметим, что если $\mathfrak{v} \in 0 \oplus L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$, то

$$\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{v}) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}}\langle A(x,y)\,(I + D_2N(x,y))Du_1(x), D_2\mathfrak{v}_2(x,y)\rangle\, dx\, dy,$$

а потому $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{v}) = 0$ ввиду (2.2.1). Отсюда и из (2.2.6)

$$\mathfrak{a}^0(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) = \mathfrak{a}^0(\mathfrak{u}, u \oplus 0) = (\mathcal{A}^0 u, u)_{\mathbb{R}^d}.$$

Используя еще лемму 2.2.4, находим, что $(\mathcal{A}^0 u, u)_{\mathbb{R}^d} \in \mathcal{S}$ при произвольных $\|u\|_{2,\mathbb{R}^d} = 1$. Это и означает, что $\mathcal{S}$ может быть выбран в качестве сектора для $\mathcal{A}^0$.

Подведем итог сказанному. Если $\mu \notin \mathcal{S}$, то оператор $\mathcal{A}^0_\mu = \mathcal{A}^0 - \mu$ является изоморфизмом. Кроме того, он изоморфно отображает пространство $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, что вытекает из теоремы о повышении гладкости решений эллиптических уравнений с липшицевыми коэффициентами (см., например, [McLoo, теорема 4.16]; ср. с леммой 1.5.4 в главе 1). Таким образом, при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ справедлива оценка

$$\|(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f\|_{2,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.2.13}$$

Замечание 2.2.6. Как и в случае оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$, постоянная в неравенстве для $(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}$, аналогичном (2.1.7), не включает $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$. С другой стороны, константа в оценке нормы оператора $DD(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}$ на L_2 зависит линейно от $\|DA^0\|_{\mathbf{M}}$, а значит, и линейно от $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$ (в силу (2.2.7), (2.2.8) и замечания 2.2.3).

2.3 Корректоры

Пусть оператор $\mathcal{K}_\mu \colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to H^1(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$ действует по формуле

$$\mathcal{K}_\mu = N D_1 (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}. \tag{2.3.1}$$

Как видно из леммы 2.2.1 и оценки (2.2.13), он непрерывен:

$$\|D_1 D_2 \mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} + \|\mathcal{K}_\mu f\|_{1,2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.3.2}$$

Замечание 2.3.1. Из замечаний 2.2.3 и 2.2.6 понятно, что от $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$ зависят, причем линейно, только постоянные в оценках для норм операторов $D_1 \mathcal{K}_\mu$ и $D_1 D_2 \mathcal{K}_\mu$ на L_2.

Напомним, что традиционный для теории усреднения корректор имеет вид $\tau^\varepsilon \mathcal{K}_\mu$. Однако его образ, вообще говоря, не содержится даже в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а потому, как и ранее в главе 1, классический корректор надлежит сначала подходящим образом регуляризовать. Для данной цели сейчас используется сглаживание по Стеклову.

2.3.1 *Сглаживающий оператор*

Введем оператор сдвига $\mathcal{T}^\varepsilon \colon L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}) \to L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}; L_2(\mathbb{Q}))$:

$$\mathcal{T}^\varepsilon u(x, y, z) = u(x + \varepsilon z, y), \tag{2.3.3}$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}$ и $z \in \mathbb{Q}$. Разумеется, его можно определить и на более широком множестве функций, но нам удобно трактовать появление новой переменной z как переход к векторнозначному пространству со значениями в $L_2(\mathbb{Q})$. Отметим, что

$$\mathcal{T}^\varepsilon uv = \mathcal{T}^\varepsilon u \cdot \mathcal{T}^\varepsilon v \tag{2.3.4}$$

при любых u и v, для которых левая и правая часть имеет смысл. Далее, сопряженный к $\mathcal{T}^\varepsilon$ оператор действует по формуле

$$(\mathcal{T}^\varepsilon)^* u(x,y) = \int_{\mathbb{Q}} u(x-\varepsilon z, y, z)\, dz.$$

Он естественным образом задан и на пространствах $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ и $L_2(\mathbb{R}^d)$. Мы определим оператор сглаживания по Стеклову $\mathcal{S}^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}) \to L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ как сужение $(\mathcal{T}^\varepsilon)^*$ на $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то есть

$$\mathcal{S}^\varepsilon u(x,y) = \int_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}^\varepsilon u(x,y,z)\, dz. \tag{2.3.5}$$

Замечание 2.3.2. Оператор сдвига $\mathcal{T}^\varepsilon$ и сглаживатель по Стеклову $\mathcal{S}^\varepsilon$ тесно связаны с операторами «анфолдинга» и «локального усреднения», которые возникают в методе «анфолдинга» (см., [CDG02], а также [CDG08]). Пусть $[x]_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}^d$ — центр ячейки, содержащей точку x, например $[x]_{\mathbb{Q}} = k$, если $x \in \operatorname{int}\mathbb{Q}_k$, где $\mathbb{Q}_k = k + \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{Z}^d$ (можно каким-нибудь способом выбрать одно значение $[x]_{\mathbb{Q}}$ и когда x лежит и на границе ячейки; впрочем, достаточно, чтобы данное отображение было определено лишь почти всюду). Тогда оператор «анфолдинга» $\mathfrak{T}^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}) \to L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}; L_2(\mathbb{Q}))$ дается равенством

$$\mathfrak{T}^\varepsilon u(x,y,z) = \mathcal{T}^\varepsilon u(\varepsilon[\varepsilon^{-1}x]_{\mathbb{Q}}, y, z);$$

иначе говоря, $\mathfrak{T}^\varepsilon$ фиксирует значение первого аргумента функции $\mathcal{T}^\varepsilon u$ в каждой из ячеек $\varepsilon\mathbb{Q}_k$, где $k \in \mathbb{Z}^d$. Оператор «локального усреднения» $\mathfrak{M}^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}) \to L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ представляет собой сужение $(\mathfrak{T}^\varepsilon)^*$ на $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ и имеет вид

$$\mathfrak{M}^\varepsilon u(x,y) = \int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{T}^\varepsilon u(x,y,z)\, dz.$$

Отметим, что функция $\mathfrak{M}^\varepsilon u(\cdot, y)$ кусочно-постоянна при почти всех y, так что имеет разрывы, а потому в качестве сглаживателя в методе «анфолдинга» используется не сам $\mathfrak{M}^\varepsilon$, а некоторое «регулярное» приближение к нему — так называемый оператор «разделения масштабов».

Ясно, что $\mathcal{S}^\varepsilon$ самосопряжен. Ниже приведены некоторые другие элементарные свойства операторов $\mathcal{T}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon$.

Лемма 2.3.3. *При всех $\varepsilon > 0$ оператор $\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon$ изометрично отображает $\tilde{L}_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ в $L_2(\mathbb{R}^d; L_2(\mathbb{Q}))$.*

Доказательство. Производя замену переменной, находим, что

$$\|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon u\|^2_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{Q}} |u(x, \varepsilon^{-1}x - z)|^2\, dx\, dz.$$

Так как функция u периодична по второму аргументу, правая часть в точности равна $\|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}$. ☐

Лемма 2.3.4. *При всех $\varepsilon > 0$ оператор $\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon$ непрерывно отображает $\tilde{L}_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, притом соответствующая норма не превосходит* 1.

Доказательство. Из неравенства Коши и леммы 2.3.3 сразу же следует, что

$$\|\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} = \|u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \qquad \square$$

Как $\mathcal{T}^\varepsilon$, так и $\mathcal{S}^\varepsilon$ сходятся к единичному оператору в сильной операторной топологии, но не по норме. Равномерная сходимость всё же имеет место, если сузить эти операторы на пространства Соболева.

Лемма 2.3.5. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$

$$\|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon \|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.3.6}$$

Доказательство. Заметим, что

$$u(x+\varepsilon z, y) - u(x,y) = \varepsilon i \int_0^1 \langle D_1 u(x+\varepsilon t z, y), z\rangle\, dt,$$

откуда

$$\|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})u(\cdot, y, z)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \varepsilon r_{\mathbb{Q}} \|D_1 u(\cdot, y)\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

где $r_{\mathbb{Q}} = 1/2\,\mathrm{diam}\,\mathbb{Q}$ (разумеется, $r_{\mathbb{Q}} = 1/2d^{1/2}$). Возводя данное неравенство в квадрат и интегрируя по y и z, приходим к (2.3.6). $\square$

Лемма 2.3.6. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$

$$\|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon \|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}, \tag{2.3.7}$$

$$\|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon^2 \|D_1 D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.3.8}$$

Доказательство. Оценка (2.3.7) прямо вытекает из неравенства Коши и леммы 2.3.5. Чтобы доказать (2.3.8), воспользуемся формулой Тейлора:

$$u(x+\varepsilon z, y) - u(x,y) = \varepsilon i \langle D_1 u(x,y), z\rangle - \varepsilon^2 \int_0^1 (1-t)\langle D_1 D_1 u(x+\varepsilon t z, y)\, z, z\rangle\, dt.$$

Первое слагаемое в правой части имеет нулевое среднее значение при почти всех x и y (поскольку центр ячейки $\mathbb{Q}$ находится в начале координат), а значит,

$$\|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I})u(\cdot, y)\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \varepsilon^2 r_{\mathbb{Q}}^2 \|D_1 D_1 u(\cdot, y)\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Остается возвести полученное неравенство в квадрат и проинтегрировать по переменной y. $\square$

Следующий результат является комбинацией двух последних лемм.

Лемма 2.3.7. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in \tilde{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$

$$\|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon u - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon \|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.$$

Доказательство. Запишем разность $\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon u$ и $\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u$ в виде

$$\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon u - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u = \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u + \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I}) u.$$

(Оговоримся, что оператор $\mathcal{S}^\varepsilon$ действует на функции только двух переменных, поэтому, применяя $\mathcal{S}^\varepsilon$ к $\mathcal{T}^\varepsilon u$, необходимо трактовать новую переменную, которая возникает из-за $\mathcal{T}^\varepsilon$, как параметр; это равносильно отождествлению $\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon$ с $\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon$.) Тогда в силу лемм 2.3.3 и 2.3.6

$$\|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon\|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

а согласно леммам 2.3.4 и 2.3.5

$$\|\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon\|D_1 u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.$$

Отсюда и вытекает искомая оценка. □

Замечание 2.3.8. Утверждения лемм 2.3.3–2.3.7 останутся в силе, если заменить в них L_2-нормы на L_p-нормы с $p\in[1,\infty]$, нужно только вместо неравенства Коши использовать неравенство Гёльдера. В частности, выясняется, что при всех $\varepsilon>0$ и $u\in\tilde{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$ выполнено

$$\|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon u-\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon u\|_{1,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon\|D_1 u\|_{1,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.3.9}$$

Данная оценка понадобится нам в п. 2.6.4.

2.3.2 *Корректоры*

Корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n\to H^1(\mathbb{R}^d)^n$ дается формулой

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon=\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu, \tag{2.3.10}$$

или, в подробной записи,

$$\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f(x)=\int_{\mathbb{Q}} N(x+\varepsilon z,\varepsilon^{-1}x)\,D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f(x+\varepsilon z)\,dz.$$

Он непрерывен благодаря сглаживателю $\mathcal{S}^\varepsilon$, причем

$$\varepsilon\|D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}+\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.3.11}$$

Действительно, принимая во внимание равенство

$$\varepsilon D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon=\varepsilon\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon D_1\mathcal{K}_\mu+\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon D_2\mathcal{K}_\mu \tag{2.3.12}$$

и используя лемму 2.3.4, находим, что

$$\varepsilon\|D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}+\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\|\mathcal{K}_\mu f\|_{1,2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

а тогда (2.3.11) следует из (2.3.2).

Хотя L_2-норма функции $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ лишь равномерно ограничена по параметру ε, L_2-норма $\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ оказывается мала, когда $\varepsilon\to 0$.

Лемма 2.3.9. *При всех* $\varepsilon\in\mathcal{E}$ *и* $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.3.13}$$

Доказательство. По определению $\mathcal{S}^\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$,

$$\mathcal{S}^\varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{Q}}\int_{\mathbb{Q}} \mathcal{K}_\mu f(x+\varepsilon w+\varepsilon z, \varepsilon^{-1}x+z)\,dw\,dz,$$

или

$$\mathcal{S}^\varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{Q}}\int_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}^\varepsilon \mathcal{K}_\mu f(x+\varepsilon w, \varepsilon^{-1}x+z, z)\,dw\,dz.$$

Кроме того, так как $\mathcal{K}_\mu f(x,\cdot)$ — периодическая функция с нулевым средним, то

$$\int_{\mathbb{Q}}\int_{\mathbb{Q}} \mathcal{K}_\mu f(x+\varepsilon w, \varepsilon^{-1}x+z)\,dw\,dz = 0,$$

а значит,

$$\mathcal{S}^\varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{Q}}\int_{\mathbb{Q}} (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})\mathcal{K}_\mu f(x+\varepsilon w, \varepsilon^{-1}x+z, z)\,dw\,dz.$$

Проводя замену переменных $x \mapsto x+\varepsilon w$ и вновь учитывая, что функция $\mathcal{K}_\mu f$ периодична по второму аргументу, находим:

$$\|\mathcal{S}^\varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})\mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}.$$

Нужный результат теперь получается из леммы 2.3.5 и оценки (2.3.2). □

Замечание 2.3.10. Напомним, что в периодическом случае композиция сглаживателя $\mathcal{P}^\varepsilon$ и корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ была равна нулю (нулю был равен каждый слой этой композиции в прямом интеграле, см. (1.5.34) и (1.5.35)). Доказанное в лемме 2.3.9 свойство является в некотором роде аналогом того результата.

Чтобы ввести второй корректор, потребуются дополнительные обозначения. Пусть $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^+$ — сопряженный к $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$ оператор. Мы можем построить для него эффективный оператор $(\mathcal{A}_\mu^0)^+$, корректор $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+$ и другие объекты (которые также будут помечены знаком "+") точно так же, как это было сделано ранее для оператора $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$. (Заметим, что $(\mathcal{A}_\mu^0)^+$ и $\mathcal{A}_\mu^0$ оказываются взаимно сопряженными — см. п. 2.6.2.) Поскольку функции A и A^+ удовлетворяют одинаковым условиям, то все результаты, которые имеют место для $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$, переносятся и на $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^+$. Мы будем ссылаться на эти результаты, добавляя "+" после номера соответствующего утверждения для $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$, например: лемма 2.3.9$^+$, оценка (2.3.11$^+$).

Зададим $\mathcal{L}_\mu\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$ выражениями

$$\mathcal{L}_\mu = (D_1\mathcal{K}_\mu^+)^* A(D_1(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} + D_2\mathcal{K}_\mu) \tag{2.3.14}$$

и

$$\mathcal{M}_\mu^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\big(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon(D_1((\mathcal{A}_\mu^0)^+)^{-1} + D_2\mathcal{K}_\mu^+)\big)^*\tau^\varepsilon[A,\mathcal{T}^\varepsilon](D_1(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} + D_2\mathcal{K}_\mu). \tag{2.3.15}$$

Удобнее работать не напрямую с этими операторами, а с их формами. Если $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f$, $U = \mathcal{K}_\mu f$ и $u_0^+ = ((\mathcal{A}_\mu^0)^+)^{-1}g$, $U^+ = \mathcal{K}_\mu^+ g$, то, очевидно,

$$(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} = (A(D_1u_0 + D_2U), D_1U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{2.3.16}$$

и

$$(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} = \varepsilon^{-1}(\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}. \qquad (2.3.17)$$

Несложно понять, что $\mathcal{L}_\mu$ и $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ непрерывны. В самом деле,

$$|(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}} \|D_1 u_0 + D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|D_1 U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}},$$

и потому, согласно оценкам (2.2.13), (2.3.2) и (2.3.2$^+$),

$$\|\mathcal{L}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (2.3.18)$$

Аналогично, учитывая тождество

$$\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon] = \tau^\varepsilon (\mathcal{I} - \mathcal{T}^\varepsilon) A \cdot \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon \qquad (2.3.19)$$

(см. (2.1.2) и (2.3.4)), находим, что

$$|(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant r_{\mathbb{Q}} \|D_1 A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}},$$

откуда, в силу леммы 2.3.3 и оценок (2.2.13), (2.3.2) и (2.2.13$^+$), (2.3.2$^+$),

$$\|\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (2.3.20)$$

Второй корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon \colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$ определяется равенством

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon - \mathcal{L}_\mu) - \mathcal{M}_\mu^\varepsilon + ((\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ - \mathcal{L}_\mu^+)^*. \qquad (2.3.21)$$

Его непрерывность вытекает из оценок (2.3.11), (2.3.18), (2.3.20) и (2.3.11$^+$), (2.3.18$^+$), притом

$$\|\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad (2.3.22)$$

Замечание 2.3.11. Оператор $\mathcal{L}_\mu$ может быть записан в форме

$$\mathcal{L}_\mu = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} \mathcal{L} (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1},$$

где $\mathcal{L} \colon H^2(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ — дифференциальный оператор третьего порядка с ограниченными коэффициентами:

$$\mathcal{L} = D^* \biggl(\int_{\mathbb{Q}} N^+(\cdot, y)^* D_1^* A(\cdot, y) (I + D_2 N(\cdot, y)) \, dy \biggr) D$$

(ср. с замечанием 1.3.2). Аналогичным образом представляется и оператор $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$. Введем функцию

$$M_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{Q}} (I + D_2 N^+(x, \varepsilon^{-1}x + z))^* \Delta_{\varepsilon z} A(x, \varepsilon^{-1}x + z) (I + D_2 N(x, \varepsilon^{-1}x + z)) \, dz$$

(она, очевидно, ограничена). Тогда

$$\mathcal{M}_\mu^\varepsilon = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} \mathcal{M}^\varepsilon (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1},$$

где $\mathcal{M}^\varepsilon \colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ — дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными коэффициентами:

$$\mathcal{M}^\varepsilon = D^* M_\varepsilon D.$$

Замечание 2.3.12. Напомним, что в периодическом случае корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ не содержал слагаемое $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ (см. (1.3.8)). В п. 2.6.4 мы приведем пример, который показывает, что обойтись без этого слагаемого сейчас, вообще говоря, нельзя. Там же мы укажем некоторые частные случаи, когда от $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ всё же удается избавиться.

Замечание 2.3.13. Согласно замечанию 2.3.1, постоянные в оценке (2.3.11) для $D_1\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и в оценке (2.3.13) для $\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ зависят от $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ линейно. То же самое можно сказать и о константах в (2.3.18), (2.3.20), а следовательно, и в (2.3.22).

2.4 Основные результаты

Теорема 2.4.1. *Если $\mu\notin\mathcal{S}$, то при любых $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{2.4.1}$$

$$\|D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.4.2}$$

Оценки точны по порядку, а постоянные зависят лишь от параметров n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Следствие 2.4.2. *Если $\mu\notin\mathcal{S}$ и $r\in(0,1)$, то при любых $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^{1-r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.4.3}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров r, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Теорема 2.4.3. *Если $\mu\notin\mathcal{S}$, то при любых $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.4.4}$$

Оценка точна по порядку, а постоянная зависит лишь от параметров n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Следствие 2.4.4. *Если $\mu\notin\mathcal{S}$ и $r\in(0,1]$, то при любых $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^{2-r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.4.5}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

2.5 Доказательство основных результатов

Наша ближайшая цель — получить аналог «резольвентного» тождества из главы 1, которое бы связало операторы $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$, $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ и $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$. При этом мы продолжим использовать, по существу, те же самые идеи, что и в п. 1.5.2, но технические приемы будут значительно отличаться, что сопряжено в первую очередь со сменой сглаживающего оператора. Доказательства теорем 2.4.1 и 2.4.3 будут строиться уже вокруг полученного тождества.

Зафиксируем произвольные функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$, $g \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ и положим $u_0 = (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f$, $U = \mathcal{K}_\mu f$, $U_\varepsilon = \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f$ и $u_\varepsilon^+ = ((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^+)^{-1}g$. Тогда

$$((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} = (\mathcal{A}^0 u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} - (\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon u_0 + \varepsilon U_\varepsilon), u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} - \\ - (\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon)u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon\mu(U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}. \tag{2.5.1}$$

Рассмотрим отдельно два первых слагаемых в правой части. По определению эффективных коэффициентов (см. формулу (2.2.6)),

$$(\mathcal{A}^0 u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = (A(D_1 u_0 + D_2 U), D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

поэтому, применяя лемму 2.3.3, получаем:

$$(\mathcal{A}^0 u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = (\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1 u_0 + D_2 U), \mathcal{T}^\varepsilon D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{2.5.2}$$

(мы учли, что u_ε^+ не зависит от второго аргумента, а значит, $\tau^\varepsilon u_\varepsilon^+ = u_\varepsilon^+$). Далее, ввиду (2.3.5) и (2.3.12),

$$(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon u_0 + \varepsilon U_\varepsilon), u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = (\tau^\varepsilon A\mathcal{T}^\varepsilon(D_1 u_0 + D_2 U), D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\ + \varepsilon(\tau^\varepsilon A\mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.5.3}$$

Теперь, коммутируя $\mathcal{T}^\varepsilon$ с A в первом слагаемом справа и комбинируя получающееся тождество с (2.5.2), находим, что

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^0 u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} &- (\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon u_0 + \varepsilon U_\varepsilon), u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = \\ &= (\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} - \\ &- (\tau^\varepsilon[A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} - \\ &- \varepsilon(\tau^\varepsilon A\mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Из приведенных в § 2.1–2.3 фактов уже сейчас понятно, что последние два члена в правой части (2.5.4) малы при $\varepsilon \to 0$. То же самое можно было бы сказать и о первом, если бы мы могли перенести в нём дифференцирование D_1 с $(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})u_\varepsilon^+$ сразу на $A(D_1 u_0 + D_2 U)$. Следующее утверждение технического характера позволит нам это сделать.

Лемма 2.5.1. *Пусть $F \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_2(\mathbb{Q}))^{d\times n}$ таково, что при всех $x \in \mathbb{R}^d$ $D_2^* F(x, \cdot) = 0$ как функционал на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$. Тогда если $\varepsilon > 0$, то $D_1^*\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon F = \tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^* F$ в смысле функционалов на $C_c^1(\mathbb{R}^d; C(\mathbb{Q}))^n$.*

Доказательство. Заменой F на функцию $(x, y) \mapsto F(\varepsilon x, y)$ (которая, очевидно, также удовлетворяет условиям леммы) можно свести дело к случаю, когда $\varepsilon = 1$. Иначе говоря, достаточно проверить, что при любых $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d; C(\mathbb{Q}))^n$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle F(x+z, x), D_1\varphi(x, z)\rangle\, dx\, dz = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle D_1^* F(x+z, x), \varphi(x, z)\rangle\, dx\, dz,$$

или, что то же самое,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle F(x,x+y), D_1\psi(x,y)\rangle\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle D_1^* F(x,x+y), \psi(x,y)\rangle\,dx\,dy,$$

где $\psi(x,y) = \varphi(x+y,-y)$. Поскольку φ и ψ принадлежат классу $C_c^1(\mathbb{R}^d; C(\mathbb{Q}))^n$ лишь одновременно, то это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle F(x,x+y), D_1\varphi(x,y)\rangle\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle D_1^* F(x,x+y), \varphi(x,y)\rangle\,dx\,dy \quad (2.5.5)$$

уже при произвольных $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d; C(\mathbb{Q}))^n$.

Если бы функция F была гладкой по второму аргументу, то последнее равенство доказывалось бы элементарным интегрированием по частям. Мы найдем последовательность гладких соленоидальных функций, которая сходится в подходящем смысле к F, и тогда соотношение (2.5.5) получится предельным переходом с данной последовательности.

Пусть $e_k(y) = e^{2\pi i\langle y,k\rangle}$, где $k \in \mathbb{Z}^d$, и пусть $F_K(x,\cdot)$ — частная сумма ряда Фурье для функции $F(x,\cdot)$:

$$F_K(x,\cdot) = \sum_{|k|\leqslant K} \hat{F}_k(x)\,e_k.$$

По предположению, $D_2^* F(x,\cdot) = 0$ на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$, поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\langle \hat{F}_k(x), k\rangle = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{Q}} \langle F(x,y), De_k(y)\rangle\,dy = 0.$$

Отметим еще, что $D\hat{F}_k(x)$ представляют собой коэффициенты Фурье функции $D_1F(x,\cdot)$. Интегрирование по частям тогда дает:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle F_K(x,x+y), D_1\varphi(x,y)\rangle\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} \langle (D_1^* F)_K(x,x+y), \varphi(x,y)\rangle\,dx\,dy. \quad (2.5.6)$$

Здесь $(D_1^* F)_K(x,\cdot)$ — частная сумма ряда Фурье для $D_1^* F(x,\cdot)$.

Теперь покажем, как от (2.5.6) перейти к (2.5.5). Для этого заметим, что если f — функция из $L_\infty(\mathbb{R}^d; \tilde{L}_2(\mathbb{Q}))$, а $f_K(x,\cdot)$ — частичная сумма ряда Фурье для $f(x,\cdot)$, то $f_K \to f$ в $*$-слабой топологии на $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})^*$, когда $K \to \infty$. Действительно, при любой $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ последовательность функций $x \mapsto (f_K(x,\cdot), \psi(x,\cdot))_{\mathbb{Q}}$ сходится к функции $x \mapsto (f(x,\cdot), \psi(x,\cdot))_{\mathbb{Q}}$, так как $f_K(x,\cdot)$ сходится к $f(x,\cdot)$ в $L_2(\mathbb{Q})$. Далее, все эти функции равномерно ограничены, что видно из оценки

$$|(f_K(x,\cdot), \psi(x,\cdot))_{\mathbb{Q}}| \leqslant \|f(x,\cdot)\|_{2,\mathbb{Q}}\|\psi(x,\cdot)\|_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d; L_2(\mathbb{Q}))}\|\psi\|_{\infty,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

а их носители содержатся внутри некоторого компактного множества. В итоге $(f_K, \psi)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \to (f,\psi)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$ согласно теореме Лебега. Вместе с тем функция $(x,y) \mapsto f(x,x+y)$ также принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^d; \tilde{L}_2(\mathbb{Q}))$, так как благодаря периодичности

$$\int_{\mathbb{Q}} |f(x,x+y)|^2\,dy = \int_{\mathbb{Q}} |f(x,y)|^2\,dy,$$

а потому

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} f_K(x,x+y)\overline{\psi(x,y)}\,dx\,dy \to \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} f(x,x+y)\overline{\psi(x,y)}\,dx\,dy.$$

Применяя это утверждение к F_K и $(D_1^*F)_K$ в (2.5.6), приходим к (2.5.5). □

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.5.4). По определению функции U имеем:

$$\begin{aligned}&(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0+D_2U),(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}=\\&\quad=(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(I+D_2N)D_1u_0,(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Предположим сначала, что u_0, u_ε^+ принадлежат $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$. Тогда, поскольку $D_2^*A(x,\cdot)\,(I+D_2N(x,\cdot))\,D_1u_0(x)=0$ на $\tilde{H}^1(\mathbb{Q})^n$ для всех фиксированных x из $\mathbb{R}^d$ (см. (2.2.1)), можно воспользоваться леммой 2.5.1, и, следовательно,

$$\begin{aligned}&(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(I+D_2N)D_1u_0,(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}=\\&\quad=(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^*A(I+D_2N)D_1u_0,(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

при любых $u_0,u_\varepsilon^+\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$. Более того, так как форма

$$(u_0,u_\varepsilon^+)\mapsto(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(I+D_2N)D_1u_0,(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

непрерывна на $H^1(\mathbb{R}^d)^n\times H^1(\mathbb{R}^d)^n$ (см. леммы 2.2.1, 2.3.3), а форма

$$(u_0,u_\varepsilon^+)\mapsto(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^*A(I+D_2N)D_1u_0,(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

непрерывна на $H^2(\mathbb{R}^d)^n\times L_2(\mathbb{R}^d)^n$ (см. леммы 2.2.1, 2.3.3), то равенство (2.5.7) распространяется на все $u_0\in H^2(\mathbb{R}^d)^n$ и $u_\varepsilon^+\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$. Вспоминая вновь определение U, находим, что

$$\begin{aligned}&(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0+D_2U),(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}=\\&\quad=(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^*A(D_1u_0+D_2U),(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

Если теперь учесть (2.5.8), то (2.5.4) примет вид

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}^0u_0,u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}-(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon u_0+\varepsilon U_\varepsilon),u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}=\\&\quad=(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^*A(D_1u_0+D_2U),(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}-\\&\qquad-(\tau^\varepsilon[A,\mathcal{T}^\varepsilon](D_1u_0+D_2U),D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}-\\&\qquad-\varepsilon(\tau^\varepsilon A\mathcal{T}^\varepsilon D_1U,D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

Подставляя (2.5.9) в (2.5.1), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}&((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f,g)_{\mathbb{R}^d}=\\&\quad=(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^*A(D_1u_0+D_2U),(\mathcal{T}^\varepsilon-\mathcal{I})u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}-\\&\qquad-(\tau^\varepsilon[A,\mathcal{T}^\varepsilon](D_1u_0+D_2U),D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}-\\&\qquad-\varepsilon(\tau^\varepsilon A\mathcal{T}^\varepsilon D_1U,D_1u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}-\\&\qquad-(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)u_0,u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}+\varepsilon\mu(U_\varepsilon,u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}.\end{aligned}\tag{2.5.10}$$

Это и есть искомое «резольвентное» тождество.

Сейчас мы можем приступить к доказательствам основных результатов.

Оценим слагаемые из правой части (2.5.10). В силу лемм 2.3.3 и 2.3.5,

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \lesssim \\ \lesssim \varepsilon\big(\|Du_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} + \|D_1 D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} + \|D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}\big)\|Du_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Используя соотношение (2.3.19) и лемму 2.3.3, видим также, что

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon r_{\mathbb{Q}} \|D_1 A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|D_1 u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \lesssim \\ \lesssim \varepsilon\big(\|Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}\big)\|Du_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d}\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

(напомним: $r_{\mathbb{Q}} = 1/2 \operatorname{diam} \mathbb{Q}$) и

$$\begin{aligned}\varepsilon|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1 u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \varepsilon \|A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|D_1 u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \lesssim \\ \lesssim \varepsilon \|D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|Du_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Далее, из оценки (2.1.4) и леммы 2.3.6 вытекает, что

$$\begin{aligned}|(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \|(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \|u_\varepsilon^+\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \\ \lesssim \varepsilon \|Du_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \|u_\varepsilon^+\|_{1,2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Наконец, согласно лемме 2.3.4,

$$\varepsilon|(U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant \varepsilon \|U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \|u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \|U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}|((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \\ \lesssim \varepsilon\big(\|Du_0\|_{1,2,\mathbb{R}^d} + \|D_1 D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} + \|U\|_{1,2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}\big)\|u_\varepsilon^+\|_{1,2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Тогда из (2.5.14) вместе с (2.2.13), (2.3.2), (2.3.11) и (2.1.7$^+$) получаем оценку

$$|((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

которая доказывает (2.4.1). С другой стороны, полагая $g = D^* h$, где $h \in \in L_2(\mathbb{R}^d)^{d \times n}$, и используя (2.2.13), (2.3.2) и (2.1.7$^+$), получаем оценку

$$|((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f, D^* h)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|h\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

которая доказывает (2.4.2).

Замечание 2.5.2. Принимая во внимание замечания 2.1.1, 2.2.6, 2.3.1, 2.3.13, а также их аналоги для сопряженных операторов, можно понять, что константы в (2.4.1) и (2.4.2) линейны по $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$.

2.5.3 *Доказательство следствия* 2.4.2

Так как при $r \in (0,1)$ пространство $H^r(\mathbb{R}^d)^n$ вкладывается в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, то из теоремы 2.4.1 и оценки (2.3.11) сразу же вытекает, что

$$\begin{aligned} \|D^{r,2}((\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \\ \lesssim \|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что норма оператора $D^{r,2}\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ на L_2 имеет порядок ε^{-r} (это легко получается из (2.3.11) с помощью интерполяции).

2.5.4 *Доказательство теоремы* 2.4.3

Введем обозначения $u_0^+ = ((\mathcal{A}^0_\mu)^+)^{-1}g$, $U^+ = \mathcal{K}^+_\mu g$ и $U^+_\varepsilon = (\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^+ g$. Мы начнем с того, что перепишем подходящим образом разность корректоров $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$ и $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$, исключая из нее слагаемые порядка ε (в оценке (2.4.4) такие слагаемые будут иметь порядок погрешности). Вместе с «резольвентным» тождеством (2.5.10) это даст асимптотическое представление для оператора $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1} - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} - \varepsilon\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$ (см. (2.5.22) ниже). Доказательство неравенства (2.4.4) тогда сведется к оценке членов этого представления.

Итак, по определению $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$,

$$(\mathcal{C}^\varepsilon_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} = (\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} - (\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} - (\mathcal{M}^\varepsilon_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} + (f, (\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^+ g)_{\mathbb{R}^d} - (f, \mathcal{L}^+_\mu g)_{\mathbb{R}^d},$$

и наша ближайшая цель — показать, что

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} - \varepsilon(\mathcal{M}^\varepsilon_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon(f, (\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^+ g)_{\mathbb{R}^d} - \varepsilon(f, \mathcal{L}^+_\mu g)_{\mathbb{R}^d} &\approx \\ \approx (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})(u_0^+ + \varepsilon U^+_\varepsilon))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &- \\ - (\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), D_1(u_0^+ + \varepsilon U^+_\varepsilon))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &- \\ - \varepsilon(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1(u_0^+ + \varepsilon U^+_\varepsilon))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}&. \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Здесь символ $\approx$ означает равенство с точностью до членов, которые в конечном счете будут отнесены к погрешности.

Рассмотрим форму оператора $\mathcal{L}_\mu$. По лемме 2.3.3,

$$(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} = (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.$$

Убедимся, что $\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon U^+$ в правой части можно заменить на $\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon U^+$. Действительно,

$$\begin{aligned} |(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| &\leqslant \\ \leqslant \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}&, \end{aligned}$$

поэтому из лемм 2.3.3, 2.3.7, а также оценок (2.2.13), (2.3.2) и (2.3.2$^+$) следует:

$$|(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Принимая еще во внимание равенство $U^+_\varepsilon = \tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon U^+$, находим, что

$$(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), U^+_\varepsilon)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.5.16}$$

Проверим теперь соотношение

$$(f, \mathcal{L}_\mu^+ g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1(u_0^+ + \varepsilon U_\varepsilon^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}. \tag{2.5.17}$$

Для этого сначала применим лемму 2.3.3:

$$(f, \mathcal{L}_\mu^+ g)_{\mathbb{R}^d} = (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon A D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}.$$

Затем прокоммутируем $\mathcal{T}^\varepsilon$ и A. Так как

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon] D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon r_{\mathbb{Q}} \|D_1 A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}\end{aligned}$$

(мы учли (2.3.19)), то, согласно лемме 2.3.3 и оценкам (2.3.2) и (2.2.13$^+$), (2.3.2$^+$),

$$|(\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon] D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

В результате

$$(f, \mathcal{L}_\mu^+ g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}.$$

Нужно еще показать, что слагаемое $\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+)$ (отметим здесь, что $\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 u_0^+$ в нём совпадает с $\mathcal{T}^\varepsilon D_1 u_0^+$) может быть заменено на $D_1(u_0^+ + \varepsilon U_\varepsilon^+)$. Поскольку

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \mathcal{T}^\varepsilon D_1 u_0^+ - D_1 u_0^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I}) D_1 u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}},\end{aligned}$$

то леммы 2.3.3, 2.3.5 и оценки (2.3.2) и (2.2.13$^+$) дают:

$$|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \mathcal{T}^\varepsilon D_1 u_0^+ - D_1 u_0^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Далее, по определению U_ε^+,

$$\varepsilon D_1 U_\varepsilon^+ = \varepsilon \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_1 U^+ + \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U^+.$$

Слагаемое, получающееся из $\varepsilon \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_1 U^+$, легко оценивается сразу, так как

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \varepsilon \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_1 U^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \|A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_1 U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}},\end{aligned}$$

а значит,

$$|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \varepsilon \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_1 U^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

см. леммы 2.3.3, 2.3.4 и оценки (2.3.2) и (2.3.2$^+$). Что касается $\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U^+$, то

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_2 U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \leqslant \\ \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_2 U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}},\end{aligned}$$

откуда, ввиду лемм 2.3.3, 2.3.7 и оценок (2.3.2) и (2.3.2$^+$),

$$|(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_2 U^+ - \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Таким образом, мы пришли к (2.5.17).

Аналогичные рассуждения позволяют заменить $\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon(D_1u_0^+ + D_2U^+)$ в форме оператора $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ на $D_1(u_0^+ + \varepsilon U_\varepsilon^+)$, и тем самым

$$(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} \approx \varepsilon^{-1}(\tau^\varepsilon[A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1u_0 + D_2U), D_1(u_0^+ + \varepsilon U_\varepsilon^+))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{2.5.18}$$

Рассмотрим оставшийся член с корректором $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+$. Имеем:

$$(f, (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ g)_{\mathbb{R}^d} = (\mathcal{A}^0 u_0, U_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} - \mu(u_0, U_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}$$

(см. определения функций u_0 и U_ε^+). Последнее слагаемое мало, как видно из лемм 2.3.6 и 2.3.9$^+$ и оценок (2.2.13) и (2.3.11$^+$):

$$|(u_0, U_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant \|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0\|_{2,\mathbb{R}^d}\|U_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|u_0\|_{2,\mathbb{R}^d}\|\mathcal{S}^\varepsilon U_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Следовательно,

$$(f, (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\mathcal{A}^0 u_0, U_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}.$$

Используя еще лемму 2.3.3 и определение эффективных коэффициентов, находим:

$$(f, (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+ g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1u_0 + D_2U), \mathcal{T}^\varepsilon U_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{2.5.19}$$

(U_ε^+ не зависит от второй переменной, поэтому $\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon U_\varepsilon^+ = \mathcal{T}^\varepsilon U_\varepsilon^+$).

На основании (2.5.16)–(2.5.19) соотношение (2.5.15) сводится к оценке

$$|(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{2.5.20}$$

Докажем ее. Из леммы 2.5.1 ясно, что

$$\begin{aligned}(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} = \\ = (\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

(равенство сначала проверяется для $u_0, u_0^+ \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$, а потом распространяется по непрерывности — ср. с выводом (2.5.8)). Очевидно также, что

$$\begin{aligned}&|(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U) - \tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \leqslant \\ &\quad\leqslant \|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U) - \tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|(\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Отсюда, согласно леммам 2.3.5, 2.3.7 и оценкам (2.2.13), (2.3.2) и (2.2.13$^+$),

$$\begin{aligned}&|(\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U) - \tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \lesssim \\ &\quad\lesssim \varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Теперь достаточно установить, что

$$|(\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon A(D_1u_0 + D_2U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})D_1u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Здесь оцениваемая величина содержит два интегрирования по множеству $\mathbb{Q}$: одно обусловлено скалярным произведением, а второе возникает из-за действия сглаживания $\mathcal{S}^\varepsilon$. Легко понять, что изменение порядка интегрирования соответствует перемене ролей операторов $\mathcal{T}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon$, так что

$$\begin{aligned}(\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I}) D_1 u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &= \\ = (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) D_1 u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}&.\end{aligned}$$

Применяя снова лемму 2.5.1, получаем:

$$\begin{aligned}(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) D_1 u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &= \\ = (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}&.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}|(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| &\leqslant \\ \leqslant \|\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}&,\end{aligned}$$

и, в силу лемм 2.3.3, 2.3.6 и оценок (2.2.13), (2.3.2) и (2.2.13$^+$),

$$|(\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I}) u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}| \lesssim \varepsilon^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

что завершает доказательство неравенства (2.5.20), а вместе с ним — и соотношения (2.5.15).

В итоге (2.5.10) и (2.5.15) дают:

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} &\approx \\ \approx (\tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_1^* A(D_1 u_0 + D_2 U), (\mathcal{T}^\varepsilon - \mathcal{I})(u_\varepsilon^+ - u_0^+ - \varepsilon U_\varepsilon^+))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &- \\ - (\tau^\varepsilon [A, \mathcal{T}^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), D_1(u_\varepsilon^+ - u_0^+ - \varepsilon U_\varepsilon^+))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &- \\ - \varepsilon(\tau^\varepsilon A \mathcal{T}^\varepsilon D_1 U, D_1(u_\varepsilon^+ - u_0^+ - \varepsilon U_\varepsilon^+))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} &- \\ - (\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon\mu(U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}&.\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Используя сначала неравенства (2.5.11), (2.5.12) и (2.5.13) с $u_\varepsilon^+ - u_0^+ - \varepsilon U_\varepsilon^+$ вместо u_ε^+, а затем оценки (2.2.13), (2.3.2) и (2.4.2$^+$), мы заключаем, что нормы операторов, связанных с первыми тремя формами в правой части, имеют порядок ε^2. Последние две формы перепишем так:

$$(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = ((\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0, g + \bar{\mu} u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}$$

и

$$\varepsilon(U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} = \varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon(U_\varepsilon, (\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}.$$

Ввиду леммы 2.3.6 и оценок (2.2.13) и (2.1.7$^+$),

$$\begin{aligned}|(\mathcal{A}^\varepsilon(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant \|(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \big(\|g\|_{2,\mathbb{R}^d} + |\mu| \|u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d}\big) &\lesssim \\ \lesssim \varepsilon^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}&.\end{aligned}$$

В то же время, по леммам 2.3.6, 2.3.9 и оценкам (2.3.11) и (2.1.7$^+$),

$$\begin{aligned}\varepsilon|(U_\varepsilon, u_\varepsilon^+)_{\mathbb{R}^d}| \leqslant \varepsilon \|\mathcal{S}^\varepsilon U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \|u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \varepsilon \|U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \|(\mathcal{I} - \mathcal{S}^\varepsilon) u_\varepsilon^+\|_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \\ \lesssim \varepsilon^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}&.\end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 2.5.3. Имея в виду замечания 2.1.1, 2.2.6, 2.3.1, 2.3.13, а также их аналоги для сопряженных операторов и аккуратно учитывая зависимость постоянных от липшицевой полунормы функции A, нетрудно убедиться, что константа в (2.4.4) оказывается квадратичной по $\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}$.

2.5.5 *Доказательство следствия* 2.4.4

Мы знаем из теоремы 2.4.3, что

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^2\|f\|_{2,\mathbb{R}^d},\tag{2.5.23}$$

и если еще установить оценку

$$\|D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon D\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d},\tag{2.5.24}$$

то, интерполируя между (2.5.23) и (2.5.24), придем к (2.4.5). Отдельные члены из (2.5.24) уже были рассмотрены ранее, см. (2.4.2), и сейчас в проверке нуждается лишь неравенство

$$\|D\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f-D\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.25}$$

Напомним, что сопряженный к $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ оператор ограничен, а значит,

$$|(f,Du_0^+)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.26}$$

Отсюда и из леммы 2.2.1 становится ясно, что $\mathcal{K}_\mu^+$ непрерывно отображает $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$:

$$\|D_2U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}+\|U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\lesssim\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.27}$$

Тогда, по лемме 2.3.4, непрерывен и корректор $(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+$ как оператор из $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$|(f,(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+g)_{\mathbb{R}^d}|\leqslant\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.28}$$

Далее,

$$|(\mathcal{L}_\mu f,g)_{\mathbb{R}^d}|\leqslant\|D_1^*A(D_1u_0+D_2U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

поэтому, в силу (2.2.13), (2.3.2) и (2.5.27),

$$|(\mathcal{L}_\mu f,g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.29}$$

Аналогично

$$|(f,\mathcal{L}_\mu^+g)_{\mathbb{R}^d}|\leqslant\|D_1U\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|A^+(D_1u_0^++D_2U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

откуда, согласно (2.3.2), (2.5.26) и (2.5.27),

$$|(f,\mathcal{L}_\mu^+g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.30}$$

Наконец,

$$|(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f,g)_{\mathbb{R}^d}|\leqslant r_{\mathbb{Q}}\|D_1A\|_{\mathbf{M}}\|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon(D_1u_0+D_2U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon(D_1u_0^++D_2U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

так что из леммы 2.3.3 и оценок (2.2.13), (2.3.2), (2.5.26) и (2.5.27) находим:

$$|(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f,g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}.\tag{2.5.31}$$

Теперь (2.5.25) вытекает из (2.3.21) и (2.5.28)–(2.5.31).

2.6 Комментарии к главе 2

2.6.1 *О спектральном параметре*

Как и ранее в главе 1, все утверждения — теоремы 2.4.1, 2.4.3 и следствия 2.4.2, 2.4.4 — остаются в силе для любых $\mu \notin \operatorname{spec}\mathcal{A}^0$ (под $\operatorname{spec}\mathcal{A}^0$ подразумевается спектр $\mathcal{A}^0$ как оператора на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$), хотя и при $\mu \in \mathcal{S}$ может потребоваться заменить $\mathcal{E}$ на, возможно более узкий, интервал $\mathcal{E}_\mu$.

Предположим, что $\mu \in \mathcal{S}$. Сейчас от положения спектрального параметра зависит только, будут ли выполнены неравенства (2.1.7) и (2.2.13). Если $\mu \notin \operatorname{spec}\mathcal{A}^0$, то справедливость последнего вытекает из тождества Гильберта; первое же сводится, опять с помощью тождества Гильберта, к тому, что при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Такую оценку несложно получить, повторив рассуждения из п. 1.6.1 с подходящим тождеством для резольвент. Из них же следует, что в качестве $\mathcal{E}_\mu$ можно взять интервал $(0, \varepsilon_{\mu,\nu} \wedge \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_{\mu,\nu}$ — произвольное число, удовлетворяющее соотношению

$$\varepsilon_{\mu,\nu} < \frac{\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}\mathcal{A}^0)}{C_\nu |\mu-\nu| (\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}\mathcal{A}^0) + |\mu-\nu|)}$$

с некоторым $\nu \notin \mathcal{S}$ (C_ν — константа из правой части неравенства (2.4.1), записанного для спектрального параметра ν).

2.6.2 *О самосопряженности*

Легко понять, что $(\mathcal{A}^0)^+ = (\mathcal{A}^0)^*$. Действительно, ввиду (2.2.1) и (2.2.1$^+$),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}} A^+(x,y)\,(I + D_2 N^+(x,y))\,dy &= \int_{\mathbb{Q}} (I + D_2 N(x,y))^* A^+(x,y)\,(I + D_2 N^+(x,y))\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{Q}} (I + D_2 N(x,y))^* A^*(x,y)\,dy,\end{aligned}$$

откуда $(A^+)^0 = (A^0)^*$ (см. (2.2.6) и (2.2.6$^+$)). Тем самым если $A^+ = A$, то $(A^0)^* = A^0$ и $N^+ = N$, а потому при вещественном μ приближения к резольвенте оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$, выписанные в (2.4.1) и (2.4.3)–(2.4.5), оказываются самосопряженными. Приближение из (2.4.2) также можно сделать самосопряженным, взяв, например, $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon + (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^*$ (или $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, как в следствии 2.4.5; см. (2.5.24)) вместо корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ — для этого нужно только учесть, что оператор $D(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^*$ равномерно ограничен на L_2, см. (2.5.28).

2.6.3 *О сходимости в классе Соболева H^1*

В следствии 2.4.2 мы доказали, что при $r < 1$ композиция $D^{r,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ сходится в равномерной операторной топологии. Однако, из-за быстро осциллирующих функций в корректоре $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, у оператора $D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ может не быть даже сильного предела. Покажем, что сильная (а тогда и равномерная) сходимость оператора $D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ возможна, лишь когда $N = 0$.

Достаточность очевидна из теоремы 2.4.1. Пусть $D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ имеет сильный предел. Хорошо известно, что $D(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ сходится в слабой операторной топологии к $D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$, а значит, и в сильной пределом будет $D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$. Тогда, согласно теореме 2.4.1, при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\varepsilon \| DU_\varepsilon \|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \| Du_\varepsilon - Du_0 - \varepsilon DU_\varepsilon \|_{2,\mathbb{R}^d} + \| Du_\varepsilon - Du_0 \|_{2,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Отсюда и из равенства (2.3.12), леммы 2.3.4 и оценки (2.3.2)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon D_2 U \|_{2,\mathbb{R}^d} = 0.$$

Учитывая еще лемму 2.3.7 и оценку (2.3.2), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \tau^\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon D_2 U \|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} = 0.$$

Но в силу леммы 2.3.3 норма в левой части не зависит от ε и совпадает с нормой функции $D_2 U$, а потому последняя тождественно равна нулю. Так как $\mathcal{A}_\mu^0$ является изоморфизмом между $H^2(\mathbb{R}^d)^n$ и $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а f есть произвольный элемент из $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, мы делаем вывод, что $D_2 N = 0$ (см. (2.3.1)), и тем самым $N = 0$ (ввиду неравенства Пуанкаре).

В свою очередь, равенство $N = 0$ равносильно тому, что $D_2^* A = 0$ (поскольку задача (2.2.1) однозначно разрешима — см. лемму 2.1.2). Очевидно, что тогда $A^0(x)$ совпадает со средним значением отображения $A(x, \cdot)$ по ячейке $\mathbb{Q}$.

В заключение отметим, что если интересоваться сходимостью композиции не с полным градиентом, а только с одной (или несколькими) из его компонент, то достаточно, например, предположить, что функция A не зависит от соответствующей компоненты «быстрой» переменной. Скажем, композиция i-й компоненты градиента с резольвентой будет равномерно сходиться, если A не зависит от i-й компоненты второго аргумента. Именно так было с дифференцированием по «непериодической» переменной в главе 1 — см. оценку (1.4.2) из теоремы 1.4.1.

2.6.4 *О слагаемом $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ в корректоре $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$*

Как мы знаем, оператор $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ равномерно ограничен по ε, см. (2.3.20). В некоторых случаях удается показать, что, более того,

$$\| \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f \|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon \| f \|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{2.6.1}$$

и тогда $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ может быть исключен из корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, поскольку там, где последний используется (именно: в теореме 2.4.3 и следствии 2.4.4), соответствующее слагаемое имеет порядок погрешности.

Оценка (2.6.1) справедлива, например, при $A \in C^{1,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$. Для того чтобы в этом убедиться, отметим следующее: если $u, v \in \tilde{H}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})^{d\times n}$, то $u\bar{v} \in \tilde{W}_1^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ и, согласно (2.3.9),

$$\left|(\tau^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{T}^\varepsilon)A\cdot\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon u, \tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon v)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} - (\tau^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A\cdot\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon u, \tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon v)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon r_{\mathbb{Q}}\|D_1 A\|_{\mathbf{M}}\|\tau^\varepsilon\mathcal{T}^\varepsilon u\bar{v} - \tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon u\bar{v}\|_{1,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \varepsilon^2\|D_1 u\bar{v}\|_{1,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

(мы изменили порядок интегрирования во втором слагаемом слева, чтобы перейти от $(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A$ к $(\mathcal{I}-\mathcal{T}^\varepsilon)A$; подобный прием уже применялся в доказательстве теоремы 2.4.3). Это означает, что функцию $\tau^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{T}^\varepsilon)A$ в $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ можно заменить на $\tau^\varepsilon(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A$, допустив ошибку порядка ε. Сейчас $A \in C^{1,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$, поэтому такие же рассуждения, как при выводе (2.3.8), позволяют получить оценку

$$\|(\mathcal{S}^\varepsilon - \mathcal{I})A\|_{\mathbf{M}} \lesssim \varepsilon^2\|D_1 D_1 A\|_{\mathbf{M}},$$

которая как раз и дает улучшение порядка нормы $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ в ε раз.

Другой пример, когда выполняется неравенство (2.6.1), уже был рассмотрен в главе 1. Дело в том, что если функция A^ε имеет вид $A^\varepsilon(x) = A(x_2, \varepsilon^{-1}x_1)$, где $x = x_1 \oplus x_2$, то вместо $\mathcal{T}^\varepsilon$ можно взять оператор сдвига по одной лишь переменной x_1:

$$\mathcal{T}_1^\varepsilon u(x,y)(z_1) = u(x_1 + \varepsilon z_1, x_2, y);$$

иначе говоря, достаточно проводить сглаживание только по «периодической» переменной (подобное сглаживание появилось в п. 1.6.4). В этом случае функция $(\mathcal{I}-\mathcal{T}_1^\varepsilon)A$ оказывается тождественно равной нулю. Впрочем, даже исходя из определения (2.3.15) с оператором $\mathcal{T}^\varepsilon$, нетрудно проверить, что оценка (2.6.1) всё же имеет место; похожий результат приведен в лемме 3.5.1 ниже.

Принимая во внимание указанные примеры, можно предположить, что соотношение (2.6.1) верно и если $A \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$. Однако это не так, и мы построим оператор, для которого слагаемое $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ имеет произвольный наперед заданный порядок $o(1)$.

Рассмотрим одномерный случай, когда $A(x,y) = A_1(x)\,A_2(y)$, а функции A_1 и A_2 вещественнозначны. Решение задачи (2.2.1) находится явно, притом

$$I + D_2 N(x,y) = \left(\int_{-1/2}^{1/2} A(x,w)^{-1}\,dw\right)^{-1} A(x,y)^{-1} = \alpha_2 A_2(y)^{-1},$$

где α_2 — среднее гармоническое функции A_2 по ячейке $[-1/2, 1/2]$. Тем самым

$$D_1 u_0(x) + D_2 U(x,y) = \alpha_2 A_2(y)^{-1} D u_0(x),$$

и квадратичная форма оператора $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ принимает вид

$$(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, f)_{\mathbb{R}} = \varepsilon^{-1}\alpha_2^2((\mathcal{I}-\mathcal{T}^\varepsilon)A_1\cdot\tau^\varepsilon A_2^{-1}\mathcal{T}^\varepsilon D u_0, \mathcal{T}^\varepsilon D u_0)_{\mathbb{R}\times\mathbb{Q}}.$$

Так как $\|(\mathcal{I}-\mathcal{T}^\varepsilon)A_1\|_{\mathbf{M}} \lesssim \varepsilon$, то лемма 2.3.5 позволяет заменить здесь функции $\mathcal{T}^\varepsilon Du_0$ на Du_0. Используя еще определение оператора $\mathcal{S}^\varepsilon$, видим, что

$$(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, f)_{\mathbb{R}} \approx \varepsilon^{-1}\alpha_2^2((\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A_1\cdot\tau^\varepsilon A_2^{-1}Du_0, Du_0)_{\mathbb{R}} \tag{2.6.2}$$

(как и прежде, символ $\approx$ имеет смысл равенства с точностью до слагаемых, которые в конечном счете перейдут в погрешность).

Зададим функцию χ рядом Фурье

$$\chi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2}\cos\pi\lambda_k x;$$

последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ определим позже, сейчас достаточно знать, что $\lambda_k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_{k+1} > \lambda_k$. Ряд сходится абсолютно и равномерно, поэтому $\chi \in C(\bar{\mathbb{R}})$. Пусть A_1 представляет собой равномерно положительно определенную липшицевую функцию, производная которой на интервале $[0,1]$ совпадает с χ, а вне этого интервала равна нулю. Учитывая, что χ имеет нулевое среднее значение, а максимум отображения $x \mapsto \left|\int_0^x \chi(t)\,dt\right|$ не превосходит $\pi/6$, мы можем взять, например,

$$A_1(x) = \begin{cases} 1+\int_0^x \chi(t)\,dt, & x\in[0,1];\\ 1 & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Пусть $\tilde{A}_1$ — периодическое продолжение A_1 из $[0,1]$ на всю ось. Ясно, что носитель $(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A_1$ сосредоточен внутри интервала $[-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2]$. Покажем, что функцию A_1 в (2.6.2) можно заменить на $\mathbb{1}_{(0,1)}\tilde{A}_1$, допустив ошибку порядка ε. Действительно, $(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A_1$ совпадает с $(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)\tilde{A}_1$ на $[\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2]$; для окрестностей же $B_{\varepsilon/2}(0)$ и $B_{\varepsilon/2}(1)$, согласно теореме вложения, получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}|((\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)A_1\cdot\tau^\varepsilon A_2^{-1}Du_0, Du_0)_{B_{\varepsilon/2}(0)\cup B_{\varepsilon/2}(1)}| &\leqslant\\ \leqslant r_{\mathbb{Q}}\|DA_1\|_{\mathbf{M}}\|Du_0\|^2_{2,B_{\varepsilon/2}(0)\cup B_{\varepsilon/2}(1)} \lesssim \varepsilon\|Du_0\|^2_{\infty,\mathbb{R}} &\lesssim \varepsilon\|Du_0\|^2_{1,2,\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается оценка с $\tilde{A}_1$ вместо A_1. В результате

$$(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, f)_{\mathbb{R}} \approx \varepsilon^{-1}\alpha_2^2((\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)\tilde{A}_1\cdot\tau^\varepsilon A_2^{-1}Du_0, Du_0)_{(0,1)}. \tag{2.6.3}$$

Выберем f таким образом, чтобы $|Du_0|^2$ равнялось единице на $(0,1)$. Нам осталось фиксировать функции A_1 и A_2. Последнюю определим так:

$$A_2(y) = 16\pi(2+\sin 2\pi y)^{-1};$$

отметим, что $\alpha_2 = 8\pi$. Далее, пусть $\zeta \in C([0,1])$ — монотонная функция, удовлетворяющая условиям $\zeta(0)=0$ и $\zeta(\varepsilon)\geqslant\varepsilon$. Найдем последовательность $\{\varepsilon_l\}_{l\in L}$ (L — счетное подмножество натуральных чисел), для которой $2/\varepsilon_l \in \mathbb{N}$ и $\lceil\zeta(\varepsilon_l)^{-1/2}\rceil = l$, и положим $\lambda_k = 2/\varepsilon_k$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}-\mathcal{S}^\varepsilon)\tilde{A}_1(x) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{x+\varepsilon z}^{x}\cos\pi\lambda_k t\,dz\,dt =\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\pi\lambda_k k^2}\Big(1-\frac{\sin(\pi\lambda_k\varepsilon/2)}{\pi\lambda_k\varepsilon/2}\Big)\sin\pi\lambda_k x\end{aligned}$$

(эти равенства выполнены при произвольных ε и λ_k), то

$$
\begin{aligned}
&((\mathcal{I}-\mathcal{S}^{\varepsilon_l})\tilde{A}_1 \cdot \tau^{\varepsilon_l} A_2^{-1} D u_0, D u_0)_{(0,1)} = \\
&\quad = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{16\pi^2\lambda_k k^2}\Big(1-\frac{\sin(\pi\lambda_k\varepsilon_l/2)}{\pi\lambda_k\varepsilon_l/2}\Big)\int_0^1 \sin(\pi\lambda_k x)\sin(2\pi x/\varepsilon_l)\,dx = \\
&\quad = \frac{1}{32\pi^2\lambda_l l^2}.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (2.6.3)

$$
(\mathcal{M}_\mu^{\varepsilon_l} f, f)_{\mathbb{R}} \approx \lceil \zeta(\varepsilon_l)^{-1/2}\rceil^{-2} = \zeta(\varepsilon_l)(1+o(1)),
$$

когда $l\to\infty$. Тем самым избавиться от оператора $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ в теореме 2.4.3, не изменив порядок погрешности, нельзя.

Сделаем некоторые пояснения в связи с функцией χ. Несложно понять, что то, насколько «редким» будет множество L (а значит, и насколько гладкой будет χ), зависит от скорости стремления функции ζ к нулю. Так, если ζ имеет степенную асимптотику, то, начиная с некоторого места, L не будет содержать лакун; если же ζ убывает медленнее любой степени, то ряд для χ может стать лакунарным. Скажем, при $\zeta(\varepsilon) = (\log_2 \varepsilon^{-1})^{-2}$ множество L состоит из чисел вида 2^k, где $k\in\mathbb{N}$. Известно, что получающаяся в таком случае функция χ хотя и непрерывна, но не удовлетворяет условию Гёльдера ни в одной точке (см. [H16, § 4]). Тем не менее производная от A_1 остается кусочно непрерывной с двумя точками разрыва. Вероятно, если данная производная не будет гладкой ни в какой точке, норма оператора $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ окажется в точности порядка единицы.

Глава 3

Локально периодический оператор с «гёльдеровыми» коэффициентами

3.1 Постановка задачи и основные определения

В этой главе мы продолжим изучать задачу усреднения для локально периодического оператора $\mathcal{A}^\varepsilon\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ вида $\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D$ (все обозначения из предыдущей главы сохраняются), однако условие липшицевости функции A по первому аргументу будет ослаблено до гёльдеровости с показателем $s \in [0,1)$, иначе говоря мы будем считать выполненным включение $A \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$. Подчеркнем, что возможность $s = 0$ не исключается. Вместе с тем некоторые результаты потребуют дополнительной гладкости, место которой в шкале гёльдеровых классов окажется между $C^{0,s}$ и $C^{0,r}$ с любым $r > s$ (см. подробнее в п. 3.1.1); такие случаи далее будут специально оговариваться. Как и ранее, мы предполагаем, что оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ слабо коэрцитивен равномерно по $\varepsilon \in \mathcal{E}$, то есть выполнено условие (2.1.5). Через $\mathcal{S}$ обозначен сектор для семейства $\mathcal{A}^\varepsilon$, который задан формулой (2.1.6). Если $\mu \notin \mathcal{S}$, то при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.1}$$

Перейдем к эффективному оператору. Благодаря лемме 2.1.2 (ее вывод опирался на классический результат из теории двухмасштабной сходимости, который требовал лишь непрерывности функции A по первой переменной) и неравенству Пуанкаре, решение вспомогательной задачи (2.2.1) существует и единственно, причем заведомо $N \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{H}_0^1(\mathbb{Q}))$ (см. (2.2.3) и (2.2.5)). Эффективный оператор $\mathcal{A}^0\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$ определяется прежней формулой (2.2.10). Легко понять, что $A^0 \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d)$ (см., например, оценки (2.2.7) и (2.2.9)), поэтому с помощью леммы 2.2.4 (доказательство остается без изменений) выясняется, что оператор $\mathcal{A}^0$ также m-секториален, а его сектор содержится в $\mathcal{S}$ (соответствующие выкладки могут быть найдены в § 2.2). Тем самым если $\mu \notin \mathcal{S}$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, то

$$\|(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.2}$$

Мы зафиксируем произвольную точку μ из дополнения к сектору $\mathcal{S}$ и все дальнейшие рассуждения будем проводить для нее (см. также п. 3.5.1).

Как обычно, для описания корректоров нужен вспомогательный оператор $\mathcal{K}_\mu\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$, который вводится равенством (2.3.1).

Поскольку $N \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{H}_0^1(\mathbb{Q}))$, а $\mathcal{A}_\mu^0$ — изоморфизм, то

$$\|D_2\mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|\mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.1.3}$$

при любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$, и потому $\mathcal{K}_\mu$ непрерывен.

Отсюда и из леммы 2.3.4 сразу же можно заключить, что непрерывен и корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$ (обратим внимание на то, что пока мы его реализуем как оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$), действующий по старой формуле (2.3.10); более того, для всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.4}$$

Рассмотрим еще оператор $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n \to L_2(\mathbb{R}^d)^n$, задаваемый равенством (2.3.15). Сейчас

$$\|(\mathcal{I} - \mathcal{T}^\varepsilon)A\|_{\mathbf{M}} \leqslant \varepsilon^s r_{\mathbb{Q}}^s \|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$$

(как и в предыдущей главе, под мультипликаторной нормой для функции A и ее производных понимается L_∞-норма), и тогда, повторяя вывод оценки (2.3.20), мы видим, что при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ выполняется

$$\|\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{-(1-s)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.5}$$

Для дальнейшей работы с корректорами нужна будет дополнительная гладкость коэффициента A. Напомним, что в главе 2 корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ использовался в приближении по операторной норме между $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, а его непрерывность в этой паре пространств обеспечивалась, по существу, тем, что производные липшицевых функций являются мультипликаторами на L_2. Однако гёльдеровы функции даже локально могут не принадлежать классу Соболева–Слободецкого с таким же показателем — о более тонких свойствах и говорить не приходится.

Например, если $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то функция $x \mapsto \gamma_s(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m^{-sk} \cos 2\pi m^k x$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем s (см. [St73]). Вместе с тем при достаточно малых $|h|$

$$\int_0^1 |\gamma_s(x+h) - \gamma_s(x)|^2\, dx \gtrsim |h|^{2s}$$

(снова см. [St73]), поэтому величина

$$\|D^{s,2}\chi\gamma_s\|_{2,\mathbb{R}}^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |h|^{-1-2s} |\chi(x+h)\gamma_s(x+h) - \chi(x)\gamma_s(x)|^2\, dx\, dh$$

оказывается неограниченной, скажем, для «гладких характеристических функций» $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ интервалов единичной длины. Отсюда также понятно, что дробная производная $D^{s,2}\gamma_s$ (в интересующем нас контексте она представляет собой аналог производной липшицевой функции) не может быть мультипликатором на $L_2(\mathbb{R})$.

Таким образом, с липшицевых функций на гёльдеровы мультипликаторные свойства не переносятся. По этой причине, переходя к приближению в операторной норме между $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ (разумеется, при $s > 0$), мы вынуждены несколько сузить круг рассматриваемых коэффициентов A. Именно, предположим, что $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Данное требование в точности означает, что дробная производная $D_1^{s,2}A$ является мультипликатором на $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Кроме того, оно влечет за собой и включение функции A в пространство мультипликаторов на $H^s(\mathbb{R}^d; L_2(\mathbb{Q}))$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что при $r \in (0,1)$

$$\|D_1^{r,2}uv\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \leqslant \|D_1^{r,2}u \cdot v\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|uD_1^{r,2}v\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \tag{3.1.6}$$

для любых функций u и v на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}$, для которых левая и правая части имеют смысл. Согласно формуле (2.2.4),

$$\Delta_h uv = \Delta_h u \cdot v - \mathcal{T}_h u \Delta_{-h} v.$$

Оценим по неравенству треугольника норму $\Delta_h uv$ в пространстве L_2 на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^d$ с весом $(x,y,h) \mapsto |h|^{-d-2r}$. Учитывая еще, что $\mathcal{T}_h$ изометричен на $L_2(\mathbb{R}^d)$, приходим к (3.1.6). Нужное утверждение для A теперь следует из (3.1.6) и равномерной ограниченности $D_1^{s,2}A$ и A.

Определим, как увеличение гладкости коэффициента отражается на свойствах эффективного оператора и корректоров.

Возведем оценку (2.2.5) в квадрат, домножим на $|h|^{-d-2s}$, а затем проинтегрируем по $h \in \mathbb{R}^d$. Тогда получим:

$$c_A\|D_1^{s,2}D_2N(x,\cdot)\|_{2,\mathbb{Q}} \leqslant \|D_1^{s,2}A(x,\cdot)\cdot(I + D_2N(x,\cdot))\|_{2,\mathbb{Q}}. \tag{3.1.7}$$

Аналогичное соотношение для $D_1^{s,2}N(x,\cdot)$ вытекает из неравенства Пуанкаре. В итоге

$$\|D_1^{s,2}D_2N\|_{\mathbf{M}} + \|D_1^{s,2}N\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D_1^{s,2}A\|_{\mathbf{M}}\|I + D_2N\|_{\mathbf{M}}. \tag{3.1.8}$$

(Напомним читателю, что мультипликаторная норма функции N и различных ее производных есть норма в пространстве L_∞ со значениями в наименьшем из классов L_2 и H^1, которому рассматриваемая функция заведомо, на основании леммы 2.1.2, принадлежит — см. замечание 2.2.2.)

Исходя из тождества (2.2.9) для функции $\Delta_h A^0$, подобными рассуждениями можно доказать оценку

$$\|D^{s,2}A^0\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_1^{s,2}A\|_{\mathbf{M}}\|I + D_2N\|_{\mathbf{M}} + \|A\|_{\mathbf{M}}\|D_1^{s,2}D_2N\|_{\mathbf{M}}, \tag{3.1.9}$$

так что A^0 обладает теми же мультипликаторными свойствами, что и A. Это, в свою очередь, позволяет установить непрерывность оператора $D^{s,2}D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$ на L_2, как видно из следующего общего результата о повышении гладкости.

Лемма 3.1.1. *Пусть $s > 0$ и $r \in (0,s)$. Тогда при всех $f \in H^{-(1-r)}(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}D(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-(1-r),2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.10}$$

Если, кроме того, $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то это неравенство выполнено и для $r = s$.

Доказательство. Подействуем оператором Δ_h на обе части тождества $\mathcal{A}^0_\mu u_0 = f$ и примем во внимание (2.2.4):

$$\mathcal{A}^0_\mu \Delta_h u_0 = D^* \mathcal{T}_h(\Delta_{-h} A^0 \cdot Du_0) + \Delta_h f. \tag{3.1.11}$$

Отсюда и из (3.1.2) далее следует, что

$$\|\Delta_h Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|\Delta_{-h} A^0 \cdot Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|\Delta_h f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d},$$

а тогда

$$\|D^{r,2} Du_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D^{r,2} A^0 \cdot Du_0\|^2_{2,\mathbb{R}^d} + \int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2r} \|\Delta_h f\|^2_{-1,2,\mathbb{R}^d}\, dh. \tag{3.1.12}$$

Заметим, что дробная производная $D^{r,2} A^0$ равномерно ограничена: в случае $r = s$ это прямо вытекает из условия (см. (3.1.8) и (3.1.9)), а при $r < s$

$$\|D^{r,2} A^0\|^2_{\mathbf{M}} \lesssim \|D^{s,\infty} A^0\|^2_{\mathbf{M}} \int_{B_1(0)} |h|^{-d+2(s-r)}\, dh + \|A^0\|^2_{\mathbf{M}} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1(0)} |h|^{-d-2r}\, dh. \tag{3.1.13}$$

Учитывая еще (3.1.2), получаем оценку для первого члена в правой части (3.1.12):

$$\|D^{r,2} A^0 \cdot Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.14}$$

Перейдем ко второму члену. По определению,

$$\|\Delta_h f\|^2_{-1,2,\mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-1} |\mathcal{F}\Delta_h f(\xi)|^2\, d\xi.$$

Здесь $\mathcal{F}\Delta_h f(\xi) = (e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1)\mathcal{F} f(\xi)$, а, как известно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2r} |e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1|^2\, dh = 2\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2r}(1 - \cos\langle h,\xi\rangle)\, dh \sim |\xi|^{2r},$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2r} \|\Delta_h f\|^2_{-1,2,\mathbb{R}^d}\, dh \sim \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-1} |\xi|^{2r} |\mathcal{F} f(\xi)|^2\, d\xi \lesssim \|f\|^2_{-(1-r),2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.15}$$

Продолжая (3.1.12) на основании (3.1.14) и (3.1.15), убеждаемся в справедливости (3.1.10). ☐

Оценка (3.1.8) и лемма 3.1.1 (вместе с формулой (3.1.6)) гарантируют, что при сделанных предположениях относительно $D^{s,2}_1 A$ оператор $\mathcal{K}_\mu$ непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ уже в $H^s(\mathbb{R}^d; \tilde{H}^1(\mathbb{Q}))^n$, то есть для всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D^{s,2}_1 D_2 \mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|D^{s,2}_1 \mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.16}$$

Теперь проверим, что корректор $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ ограничен как оператор между $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ и $H^s(\mathbb{R}^d)^n$. Поскольку мы уже выяснили, что он непрерывен на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, нужно лишь оценить норму $D^{s,2}\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$.

Начнем с того, что рассмотрим оператор $D^{r,2}\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon$. Имеем:

$$\Delta_h \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u = \int_{\mathbb{Q}} \big(u(x+h+\varepsilon z, \varepsilon^{-1}x + \varepsilon^{-1}h) - u(x+\varepsilon z, \varepsilon^{-1}x)\big)\, dz.$$

Если положить $v_{\varepsilon,h}(x,y) = u(x+h, y+\varepsilon^{-1}h) - u(x,y)$, то правая часть, очевидно, совпадет с $\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon v_{\varepsilon,h}$, а значит,

$$\|\Delta_h \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|v_{\varepsilon,h}\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

по лемме 2.3.4. Представляя функцию $v_{\varepsilon,h}$ в виде

$$v_{\varepsilon,h}(x,y) = (u(x+h,y) - u(x,y)) + (u(x+h, y+\varepsilon^{-1}h) - u(x+h,y)),$$

далее находим, что

$$\begin{aligned}\|\Delta_h \tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} |u(x+h,y) - u(x,y)|^2\,dx\,dy +\\ +2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{Q}} |u(x, y+\varepsilon^{-1}h) - u(x,y)|^2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Когда u достаточно гладкая, это неравенство можно домножить на $|h|^{-d-2r}$ с $r\in(0,1)$ и проинтегрировать по $\mathbb{R}^d$, получая в итоге оценку

$$\|D^{r,2}\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon u\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D_1^{r,2}u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \varepsilon^{-r}\big(\|D_2^{r,2}u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\big) \tag{3.1.17}$$

(здесь использовалась периодичность отображения $u(x,\cdot)$).

В случае корректора $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ роль u играет функция $U = \mathcal{K}_\mu f$, так что, в силу (3.1.17),

$$\|D^{s,2}U_\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D_1^{s,2}U\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \varepsilon^{-s}\big(\|D_2^{s,2}U\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|U\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\big).$$

Теперь вложение $H^s(\mathbb{Q})$ в $H^1(\mathbb{Q})$ и неравенства (3.1.3) и (3.1.16) показывают, что при всех $\varepsilon\in\mathscr{E}$ и $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\varepsilon^s\|D^{s,2}\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.18}$$

Условие на дробную производную $D_1^{s,2}A$ нельзя полностью отбросить и в случае корректора $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$; более того, появляется еще и ограничение на показатель s.

Дело вот в чём. Когда коэффициенты были «липшицевыми», оператор $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$ состоял из пяти слагаемых: $\mathcal{M}^\varepsilon_\mu$, $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ и сопряженного к $(\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^+$, а также $\mathcal{L}_\mu$ и сопряженного к $\mathcal{L}^+_\mu$. Первые три, как мы знаем, остаются непрерывными на пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ даже для $s=0$. В то же время $\mathcal{L}_\mu$ содержал дифференцирование по первому аргументу, стало быть при малых s прежняя формула, вообще говоря, не имеет смысла. Однако если предположить, что $D_1^{1/2,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$ (это заведомо выполнено при $s>1/2$), то функции $A(D_1u_0+D_2U)$ и U^+ будут принадлежать $H^{1/2}(\mathbb{R}^d;\tilde{L}_2(\mathbb{Q}))$, а следовательно, оператор $\mathcal{L}_\mu\colon L_2(\mathbb{R}^d)^n\to L_2(\mathbb{R}^d)^n$, действующий по формуле (2.3.14), окажется корректно определенным и ограниченным.

Лемма 3.1.2. *Пусть $s\geqslant 1/2$ и $D_1^{1/2,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$. Тогда при всех $f\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{L}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.1.19}$$

Доказательство. Предварительно сделаем одно простое замечание. Если $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)^d$ и $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)$, где H — гильбертово пространство, то

$$(u, Dv)_{L_2(\mathbb{R}^d;H)} = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}u(\xi), \xi\mathcal{F}v(\xi))_H \, d\xi$$

($\mathcal{F}$ — преобразование Фурье на $L_2(\mathbb{R}^d; H)$), и потому

$$\begin{aligned} |(u, Dv)_{L_2(\mathbb{R}^d;H)}| \leqslant \|(-\Delta)^{1/2}u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;H)} \|(-\Delta)^{1/2}v\|_{L_2(\mathbb{R}^d;H)} \sim \\ \sim \|D^{1/2,2}u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;H)} \|D^{1/2,2}v\|_{L_2(\mathbb{R}^d;H)} \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

согласно неравенству Коши и определению дробного лапласиана.

Для формы оператора $\mathcal{L}_\mu$ это означает, что

$$|(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \|D_1^{1/2,2} A(D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \|D_1^{1/2,2} U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \tag{3.1.21}$$

(см. (2.3.16); здесь $H = L_2(\mathbb{Q})^n$). Первый сомножитель можно оценить далее, используя (3.1.6):

$$\|D_1^{1/2,2} A(D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \leqslant \|D_1^{1/2,2} (D_1 u_0 + D_2 U)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} + \|D_1 u_0 + D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}.$$

Теперь достаточно сослаться на лемму 3.1.1 и неравенства (3.1.2), (3.1.3), (3.1.16) и (3.1.16$^+$). ☐

3.1.1 *О достаточном условии на коэффициент*

Как мы уже отмечали, при дополнительном условии на функцию A ее гладкость в шкале гёльдеровых классов находится между $C^{0,s}$ и $C^{0,r}$ с произвольным $r > s$. Более чувствительной является шкала так называемых обобщенных классов Гёльдера: в ней оказывается возможным указать достаточное условие для равномерной ограниченности $D^{s,2}A$, не прибегая к дробным производным высших порядков.

Пусть U — банахово пространство, а u — функция из $L_\infty(\mathbb{R}^d; U)$. Ее модуль непрерывности задается равенством

$$\omega(u; t) = \sup_{|h| \leqslant t} \|\varDelta_h u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d;U)}.$$

По определению, $C^{0,s,\infty}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$ совпадает с $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$, а $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$ при $p \in [1, \infty)$ есть подпространство тех функций $u \in C(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$, для которых конечна величина

$$[u]^p_{C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)} = \int_0^\infty t^{-sp-1} \omega(u; t)^p \, dt.$$

Соответствующая норма имеет вид

$$\|u\|_{C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)} = [u]_{C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)} + \|u\|_{C(\bar{\mathbb{R}}^d;U)}.$$

Понятно, что класс $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$ вложен в $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$. Однако $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$ при $p < \infty$ является собственным подпространством, поскольку из ограниченности нормы u в $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d; U)$ помимо конечности $\sup_{t>0} t^{-s} \omega(u; t)$

вытекает еще и то, что $t^{-s}\omega(u;t) \to 0$, когда $t \to 0$. Тем самым $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ является также подмножеством «малого пространства Гёльдера» $c^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$, которое выделяется из $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ как раз условием $t^{-s}\omega(u;t) \to 0$. Отметим, что $c^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ совпадает с замыканием класса $C^\infty(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ в $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$, а потому функцию из $C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ всегда можно приблизить по норме $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$ гладкими функциями из $C^\infty(\bar{\mathbb{R}}^d;U)$. Заметим, наконец, что если $r > s$ и $p < \infty$, то

$$C^{0,r}(\bar{\mathbb{R}}^d;U) \subset C^{0,s,p}(\bar{\mathbb{R}}^d;U) \subset c^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U) \subset C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;U).$$

Некоторые другие свойства обобщенных классов Гёльдера могут быть найдены в [AF03, п. 7.35].

Вернемся к функции A. Предположим, что $A \in C^{0,s,2}(\bar{\mathbb{R}}^d;\tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$. Из включения сразу следует, что $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}$ конечны. Далее, переходя к полярным координатам, легко понять, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-2s-d} |\Delta_h A(x,y)|^2\, dh \lesssim \int_0^\infty t^{-2s-1}\omega(A;t)^2\, dt,$$

откуда также $\|D_1^{s,2}A\|_{\mathbf{M}} \lesssim [A]_{C^{0,s,2}(\bar{\mathbb{R}}^d;L_\infty(\mathbb{Q}))}$. Таким образом, все требования, наложенные на A, оказываются выполненными.

3.2 Основные результаты

Напомним, что всюду предполагается, что $A \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d;\tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда если $s = 0$, то $(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ к $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$. Если же $s \in (0,1)$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^s \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.1}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Теорема 3.2.2. *Пусть $s \in (0,1)$ и $\mu \notin \mathcal{S}$. Предположим дополнительно, что $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Тогда для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{s,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^s \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.2}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$, $\|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,2}A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда если $s = 0$ и $r \in (0,1)$, то $D^{r,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ к $D^{r,2}(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$. Если же $s \in (0,1)$ и $r \in (0,1)$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{s\wedge(1-r)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.3}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, r, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Теорема 3.2.4. *Пусть $s \in [1/2, 1)$ и $\mu \notin \mathcal{S}$. Предположим дополнительно, что $D_1^{1/2,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Тогда для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{2s/(2-s)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.4}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$, $\|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{1/2,2} A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Следствие 3.2.5. *Пусть $s \in [1/2, 1)$ и $\mu \notin \mathcal{S}$. Предположим дополнительно, что $D_1^{s,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Тогда если $r \in (0, s]$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{s(2-r)/(2-s)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.5}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$, $\|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,2} A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Теорема 3.2.6. *Пусть $s \in (0, 1)$ и $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{1 \wedge 2s/(2-s)} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.6}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

Следствие 3.2.7. *Пусть $s \in (0, 1)$ и $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда если $r \in (0, 1)$, то для всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1} f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1} f + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{(1-r)(1 \wedge 2s/(2-s))} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.2.7}$$

Постоянная в оценке зависит лишь от параметров s, n, d, μ, величин $\|A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$ и констант c_A и C_A.

3.3 Доказательство основных результатов. Регуляризация

Идея доказательства состоит в том, чтобы сначала подходящим образом сгладить коэффициент A и воспользоваться уже полученными результатами из главы 2, а затем установить сходимость возникающих регуляризованных операторов к соответствующим им операторам, но уже для исходной функции A. Так как ранее оценки включали липшицеву полунорму коэффициента, а сейчас функция A лишь гёльдерова, то следует ожидать, что погрешности приближений ухудшатся, и наша цель — выяснить насколько.

Далее подразумевается, что $s \in [0, 1)$ и $A \in C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$; все дополнительные условия на A выписываются явно.

3.3.1 *Приближение для исходных коэффициентов*

Зафиксируем функцию $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, такую что $J \in C_c^\infty(B_1(0))$ и $\int_{\mathbb{R}^d} J(x)\,dx = 1$. Тогда $J_\delta(x) = \delta^{-d} J(\delta^{-1} x)$, $\delta > 0$, будет представлять собой стандартное ядро усреднения, и с его помощью мы сгладим коэффициент. Положим

$$A_\delta(x, y) = J_\delta * A(\cdot, y)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\delta(x - \hat{x})\, A(\hat{x}, y)\, d\hat{x}.$$

Поскольку

$$\Delta_h A_\delta(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\delta(x-\hat{x})\, \Delta_h A(\hat{x},y)\, d\hat{x}, \tag{3.3.1}$$

то из элементарного неравенства

$$\|J_\delta * u\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leqslant \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \tag{3.3.2}$$

сразу же вытекают оценки для норм функции A_δ и ее производных порядка s.

Лемма 3.3.1. *При* $\delta > 0$ *выполнено* $\|A_\delta\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}$ *и* $\|D_1^{s,\infty} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}}$. *Если также* $D_1^{s,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, *то* $\|D_1^{s,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_1^{s,2} A\|_{\mathbf{M}}$.

Замечание 3.3.2. В этом утверждении мы не касались производных младших порядков, однако нетрудно понять, что при $r < s$

$$\|D_1^{r,\infty} A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \|D_1^{r,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D_1^{s,\infty} A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta\|_{\mathbf{M}}$$

(ср. с (3.1.13)), поэтому и здесь лемма 3.3.1 оказывается полезной. Будем иметь данное замечание в виду.

Как видно, A_δ принадлежит пространству $C^{0,s}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$, причем соответствующая норма равномерно ограничена по δ. Эта функция, конечно, обладает и большей гладкостью, в частности $D_1 A_\delta \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, но L_∞-норма $D_1 A_\delta$ бесконечно растет, когда $\delta \to 0$. Следующий результат позволит нам контролировать скорость роста.

Лемма 3.3.3. *Если* $r \in (s,1]$, *то* $\|D_1^{r,\infty} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \delta^{-(r-s)}$ *равномерно относительно* $\delta > 0$. *Кроме того, при* $r \in (s,1)$ *выполнено* $\|D_1^{r,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \delta^{-(r-s)}$ *равномерно по* $\delta > 0$ *и* $\|D_1^{s,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim |\ln\delta|$ *равномерно по* $\delta \leqslant e^{-1}$.

Доказательство. Предварительно рассмотрим функцию $\Delta_h A_\delta$ при различных величинах h. Пусть сначала $|h| \leqslant \delta$. Очевидно, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta_h J_\delta(x-\hat{x})\, A(x+2^{-1}h, y)\, d\hat{x} = 0,$$

поэтому

$$\Delta_h A_\delta(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_h J_\delta(x-\hat{x})\, (A(\hat{x},y) - A(x+2^{-1}h,y))\, d\hat{x}.$$

Мы оценим правую часть этого равенства, учитывая, что интегрирование фактически ведется лишь по объединению шаров $B_\delta(x+h)$ и $B_\delta(x)$, которое само содержится в шаре $B_{2\delta}(x)$:

$$|\Delta_h A_\delta(x,y)| \leqslant 3\|D_1^{s,\infty} A\|_{\mathbf{M}} \delta^s \int_{B_{2\delta}(0)} |\Delta_h J_\delta(\hat{x})|\, d\hat{x}. \tag{3.3.3}$$

Для $|h| > \delta$ будет достаточно оценки

$$|\Delta_h A_\delta(x,y)| \leqslant \|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}, \tag{3.3.4}$$

вытекающей из (3.3.1) и (3.3.2).

Теперь ясно, что

$$\sup_{|h|\leqslant\delta}|h|^{-r}|\Delta_h A_\delta(x,y)| \lesssim \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}\|D^{r,\infty}J\|_{\infty,\mathbb{R}^d}\delta^{-(r-s)}$$

(см. (3.3.3)) и

$$\sup_{|h|>\delta}|h|^{-r}|\Delta_h A_\delta(x,y)| \leqslant \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}\delta^{-(r-s)}$$

(см. (3.3.4)). Отсюда сразу следует искомое соотношение для $D_1^{r,\infty}A_\delta$.

Перейдем к $D_1^{r,2}A_\delta$. По определению,

$$|D_1^{r,2}A_\delta(x,y)|^2 = \int_{B_\delta(0)}|h|^{-d-2r}|\Delta_h A_\delta(x,y)|^2\,dh + \\ + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(0)}|h|^{-d-2r}|\Delta_h A_\delta(x,y)|^2\,dh.$$

Первое слагаемое в правой части оценивается на основании (3.3.3): после несложных преобразований мы находим, что

$$\int_{B_\delta(0)}|h|^{-d-2r}|\Delta_h A_\delta(x,y)|^2\,dh \lesssim \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}^2\|D^{r,2}J\|_{\infty,\mathbb{R}^d}^2\delta^{-2(r-s)}.$$

Во втором, согласно (3.3.4), можно заменить $\Delta_h A_\delta$ на $\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}$. Отдельно изучим случаи, когда $r>s$ и $r=s$. Если $r>s$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(0)}|h|^{-d-2r}\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}^2\,dh \leqslant \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}^2\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(0)}|h|^{-d-2(r-s)}\,dh \lesssim \\ \lesssim (r-s)^{-1}\|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}^2\delta^{-2(r-s)}.$$

Если же $r=s$, то мы разобьем область интегрирования на $B_1(0)\setminus B_\delta(0)$ и $\mathbb{R}^d\setminus B_1(0)$ (сейчас предполагается, что $\delta\leqslant e^{-1}$). Тогда

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\delta(0)}|h|^{-d-2s}\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}^2\,dh \lesssim \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}^2|\ln\delta|$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1(0)}|h|^{-d-2s}\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}^2\,dh \lesssim s^{-1}\|A\|_{\mathbf{M}}^2$$

(так как $\|\Delta_h A\|_{\mathbf{M}}\leqslant 2\|A\|_{\mathbf{M}}$). Доказательство леммы завершено. □

Займемся теперь вопросом о сходимости функций A_δ и $D_1^{r,2}A_\delta$.

Лемма 3.3.4. *Если $\delta\to 0$, то $\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\to 0$, причем $\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\lesssim\delta^s$ для $s>0$ равномерно по $\delta>0$. Кроме того, при $r\in(0,s)$ и $t\in(r,s)$ справедлива равномерная относительно $\delta>0$ оценка $\|D_1^{r,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}}\lesssim\delta^{t-r}$. При условии, что $D_1^{s,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$, в качестве t можно взять s.*

Доказательство. Имеем:

$$A_\delta(x,y) - A(x,y) = \int_{B_\delta(0)}J_\delta(\hat{x})\,(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))\,d\hat{x}.$$

Сходимость при $s = 0$ выводится очевидным образом из равномерной непрерывности функции A. В случае $s > 0$ необходимо воспользоваться ограниченностью $D_1^{s,\infty}A$:

$$|A_\delta(x,y) - A(x,y)| \leqslant \|D_1^{s,\infty}A\|_{\mathbf{M}}\delta^s.$$

Докажем утверждение для дробной производной $D_1^{r,2}A_\delta$. Поскольку

$$\Delta_h(A_\delta(x,y) - A(x,y)) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\delta(\hat{x})\,\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))\,d\hat{x},$$

то достаточно подходящим образом оценить $\Delta_h(A(x-\hat{x},y)-A(x,y))$. С одной стороны,

$$|\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))| \leqslant |\Delta_h A(x-\hat{x},y)| + |\Delta_h A(x,y)|,$$

откуда

$$\int_{B_\delta(0)} |h|^{-d-2r}|\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))|^2\,dh \lesssim \|D_1^{t,2}A\|_{\mathbf{M}}^2\delta^{2(t-r)}. \tag{3.3.5}$$

С другой стороны,

$$|\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))| \leqslant |\mathcal{T}_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))| + |A(x-\hat{x},y) - A(x,y)|,$$

и тем самым

$$|\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))| \leqslant 2\|D_1^{t,\infty}A\|_{\mathbf{M}}\delta^t$$

(мы учли, что $|\hat{x}| < \delta$). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(0)} |h|^{-d-2r}|\Delta_h(A(x-\hat{x},y) - A(x,y))|^2\,dh \lesssim \|D_1^{t,\infty}A\|_{\mathbf{M}}^2\delta^{2(t-r)}. \tag{3.3.6}$$

Теперь (3.3.5) вместе с (3.3.6) дают оценку для $D_1^{r,2}(A_\delta - A)$. □

Замечание 3.3.5. Такие же рассуждения, как в доказательстве леммы, позволяют установить оценку $\|D_1^{r,\infty}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} \lesssim \delta^{s-r}$, из которой видно, что A_δ сходится к A по норме пространства $C^{0,r}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(\mathbb{Q}))$ при произвольных $r < s$. В то же время хорошо известно, что функции из класса $C^{0,s}$ с $s > 0$, вообще говоря, не могут быть приближены гладкими функциями, а замыкание C^∞ в $C^{0,s}$ образует собственное подпространство $c^{0,s}$. По-видимому, подобная ситуация имеет место и с приближением для дробной производной $D_1^{s,2}A$.

3.3.2 *Приближение для исходного оператора*

Сгладив коэффициент A, мы можем ввести и отвечающий ему регуляризованный оператор. Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta) = D^* A_\delta^\varepsilon D\colon H^1(\mathbb{R}^d)^n \to H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, где $A_\delta^\varepsilon = (A_\delta)^\varepsilon$. Из леммы 3.3.1 ясно, что

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)u\|_{-1,2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|A\|_{\mathbf{M}}\|u\|_{1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.7}$$

Несложно также понять, что при достаточно малых δ оператор $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ остается коэрцитивным, хотя и с меньшей постоянной вместо c_A в условии (2.1.5).

Лемма 3.3.6. *При всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon(\delta) Du, Du)_{\mathbb{R}^d} + C_A \|u\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \geqslant c_{A_\delta} \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n, \tag{3.3.8}$$

где $c_{A_\delta} = c_A - \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}$, так что $c_{A_\delta} \to c_A$, когда $\delta \to 0$.

Доказательство. Оценка следует из условия (2.1.5), если учесть, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon(\delta) Du, Du)_{\mathbb{R}^d} \geqslant \operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon Du, Du)_{\mathbb{R}^d} - \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} \|Du\|^2_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Сходимость c_{A_δ} к c_A обеспечивает лемма 3.3.4. □

Замечание 3.3.7. Согласно той же лемме 3.3.4, при $s > 0$ мы можем полностью контролировать величину c_{A_δ}.

Таким образом, как только $c_{A_\delta} > 0$, оператор $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ оказывается m-секториальным с сектором

$$\mathcal{S}_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| \leqslant c^{-1}_{A_\delta} C_\flat (\operatorname{Re} z + C_A) \right\}. \tag{3.3.9}$$

Он имеет ту же самую вершину, что и сектор $\mathcal{S}$ для исходного оператора (см. его определение в (2.1.6)), но больший угол раствора, так что $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\delta$. Далее, поскольку $c_{A_\delta} \to c_A$, то $\mathcal{S}_\delta$ сходится к $\mathcal{S}$ в смысле Вайсмана, то есть $\operatorname{dist}(z, \mathcal{S}_\delta) \to \operatorname{dist}(z, \mathcal{S})$ для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Это позволяет при $\mu \notin \mathcal{S}$ получить оценку нормы $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1}$, которая равномерна сразу по двум параметрам — ε и δ.

Лемма 3.3.8. *Пусть $\mu \notin \mathcal{S}$. Тогда найдется такое $\delta_\mu > 0$, что $\mu \notin \mathcal{S}_\delta$ при всех $\delta \leqslant \delta_\mu$. Более того, если $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \leqslant \delta_\mu$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$, то*

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Нам известно, что $\operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S}_\delta) \to \operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S})$, а поскольку также $\operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S}) > 0$, то для достаточно малых δ выполнено $\operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S}_\delta) \geqslant d_\mu$ с некоторым $d_\mu > 0$ (и тем самым $\mu \notin \mathcal{S}_\delta$). Уменьшая δ еще, добьемся того, чтобы постоянная c_{A_δ} была отделена от нуля (может потребоваться лишь при $\operatorname{Re} \mu < -C_A$). Тогда оператор $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ окажется равномерно ограниченным и коэрцитивным, а расстояние от отвечающего ему сектора до μ будет не меньше положительного числа d_μ, откуда и вытекает (3.3.10). □

Замечание 3.3.9. Если $s > 0$, то можно найти, насколько близки границы секторов $\mathcal{S}_\delta$ и $\mathcal{S}$ (см. замечание 3.3.7), а значит, δ_μ контролируется явно.

Всюду ниже будем считать, что $\delta \in \mathscr{D}_\mu$, где $\mathscr{D}_\mu = (0, \delta_\mu]$, а величина δ_μ выбрана так, как указано в лемме 3.3.8. Это допущение, в частности, гарантирует отделенность постоянной c_{A_δ} от нуля, чем мы будем часто пользоваться. Чтобы избежать лишних оговорок, примем также, что $\delta_\mu \leqslant e^{-1}$.

Следующий результат позволит в приближениях перейти от резольвенты исходного оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ к резольвенте регуляризованного оператора $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$.

Лемма 3.3.10. *При всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.11}$$

Доказательство. Положим $u_{\varepsilon,\delta} = \mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1}f$ и $u^+_\varepsilon = ((\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^+)^{-1}g$, где $f, g \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$. Поскольку операторы $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^+$ и $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu$ взаимно сопряжены, то

$$\begin{aligned}|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f, g)_{\mathbb{R}^d}| &= \left|(u_{\varepsilon,\delta}, (\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^+u^+_\varepsilon)_{\mathbb{R}^d} - (\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)u_{\varepsilon,\delta}, u^+_\varepsilon)_{\mathbb{R}^d}\right| = \\ &= |((A^\varepsilon - A^\varepsilon_\delta)Du_{\varepsilon,\delta}, Du^+_\varepsilon)_{\mathbb{R}^d}|.\end{aligned}$$

Учитывая (3.3.10) и (3.1.1$^+$), приходим к (3.3.11). ☐

3.3.3 *Приближение для решения вспомогательной задачи*

Функция A_δ удовлетворяет неравенству вида (2.1.8), но с постоянной c_{A_δ} вместо c_A, а так как эта постоянная положительна при любом $\delta \in \mathscr{D}_\mu$, то вспомогательная задача для регуляризованного оператора $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ имеет единственное решение; обозначим его через N_δ (обозначение N_ξ из § 2.2 больше использоваться не будет, поэтому опасности смешения нет).

Сначала мы установим оценки функции N_δ и ее дробных производных.

Лемма 3.3.11. *При любых $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ выполнено $\|N_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim 1$ и $\|D^{r,2}_1 D_2 N_\delta\|_{\mathbf{M}} + \|D^{r,2}_1 N_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D^{r,2}_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}}$, где $r \in (0,1)$.*

Доказательство. Соотношения для D_2N_δ и $\Delta_h D_2 N_\delta$ вида (2.2.2) и (2.2.5) сразу же дают:

$$\|D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|A_\delta\|_{\mathbf{M}}$$

и

$$\|D^{r,2}_1 D_2 N_\delta\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D^{r,2}_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}}\|I + D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}.$$

Согласно неравенству Пуанкаре, подобные соотношения верны для N_δ и $D^{r,2}_1 N_\delta$. Осталось только воспользоваться леммой 3.3.1. ☐

Следующее утверждение сводит вопрос о сходимости N_δ к аналогичному вопросу для A_δ.

Лемма 3.3.12. *При всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ выполнено $\|N_\delta - N\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}$ и, если $s > 0$, $\|D^{r,2}_1(D_2N_\delta - D_2N)\|_{\mathbf{M}} + \|D^{r,2}_1(N_\delta - N)\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D^{r,2}_1(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}$, где $r \in (0,s)$. Последняя из оценок остается верна и с $r = s$, при условии что $D^{s,2}_1 A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$.*

Доказательство. По определению функций N и N_δ,

$$D^*_2 A D_2(N_\delta - N) = -D^*_2(A_\delta - A)(I + D_2N_\delta). \tag{3.3.12}$$

Если при фиксированном $x \in \mathbb{R}^d$ скалярно домножить это равенство на $N_\delta(x,\cdot) - N(x,\cdot)$, затем к левой части применить лемму 2.1.2, а правую — оценить сверху, то получим:

$$\|D_2N_\delta - D_2N\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|I + D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}. \tag{3.3.13}$$

Далее, из (3.3.12) с помощью формулы (2.2.4) легко выводится, что

$$\begin{aligned}D_2^*(\mathcal{T}_h A\cdot D_2\Delta_h(N_\delta-N)) = -D_2^*(\Delta_h A\cdot(D_2N_\delta-D_2N))-\\ -D_2^*(\Delta_h(A_\delta-A)\cdot(I+D_2N_\delta))-\\ -D_2^*(\mathcal{T}_h(A_\delta-A)\cdot D_2\Delta_h N_\delta).\end{aligned}$$

Обращаясь к лемме 2.1.2 и проводя несложные преобразования, находим:

$$\begin{aligned}\|D_1^{r,2}(D_2N_\delta-D_2N)\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D_1^{r,2}A\|_{\mathbf{M}}\|D_2N_\delta-D_2N\|_{\mathbf{M}}+\\ +\|D_1^{r,2}(A_\delta-A)\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}+\\ +\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}\|D_1^{r,2}D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}.\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Благодаря неравенству Пуанкаре, оценки (3.3.13) и (3.3.14) переносятся на функции $N_\delta-N$ и $D_1^{r,2}(N_\delta-N)$. Теперь достаточно сослаться на лемму 3.3.1 (при $r<s$ — также на замечание 3.3.2) и лемму 3.3.11. ☐

3.3.4 *Приближение для эффективного коэффициента*

Обозначим через A_δ^0 эффективный коэффициент, отвечающий оператору $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$; иначе говоря, мы полагаем $A_\delta^0=(A_\delta)^0$.

Как и прежде, нас интересует вопрос об ограниченности и сходимости.

Лемма 3.3.13. *При любых $\delta\in\mathcal{D}_\mu$ выполнено $\|A_\delta^0\|_{\mathbf{M}}\lesssim 1$ и $\|D^{r,2}A_\delta^0\|_{\mathbf{M}}\lesssim \|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}}$, где $r\in(0,1)$.*

Доказательство. Первое соотношение следует из неравенства

$$\|A_\delta^0\|_{\mathbf{M}}\leqslant\|A_\delta\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}$$

и лемм 3.3.1 и 3.3.11. Эти же леммы вместе с оценкой

$$\|D^{r,2}A_\delta^0\|_{\mathbf{M}}\leqslant\|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}+\|A_\delta\|_{\mathbf{M}}\|D_1^{r,2}D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}$$

(ср. с (3.1.9)) дают второе соотношение. ☐

Лемма 3.3.14. *При всех $\delta\in\mathcal{D}_\mu$ выполнено $\|A_\delta^0-A^0\|_{\mathbf{M}}\lesssim\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}$ и, если $s>0$, $\|D_1^{r,2}(A_\delta^0-A^0)\|_{\mathbf{M}}\lesssim\|D_1^{r,2}(A_\delta-A)\|_{\mathbf{M}}+\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}$, где $r\in(0,s)$. Последняя из оценок справедлива и с $r=s$, при условии что $D_1^{s,2}A\in\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q})$.*

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}A_\delta^0(x)-A^0(x)=\int_{\mathbb{Q}}(A_\delta(x,y)-A(x,y))\,(I+D_2N_\delta(x,y))\,dy+\\ +\int_{\mathbb{Q}}A(x,y)\,(D_2N_\delta(x,y)-D_2N(x,y))\,dy,\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

то, очевидно,

$$\|A_\delta^0-A\|_{\mathbf{M}}\leqslant\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}\|I+D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}}+\|A\|_{\mathbf{M}}\|D_2N_\delta-D_2N\|_{\mathbf{M}}.$$

Тогда по леммам 3.3.11 и 3.3.12 получаем первую оценку.

Докажем вторую. С этой целью подействуем оператором Δ_h на тождество (3.3.15) и воспользуемся формулой (2.2.4):

$$\begin{aligned}\Delta_h(A^0_\delta - A^0)(x) = \int_{\mathbb{Q}} &\Delta_h(A_\delta - A)(x,y)\,(I + D_2N_\delta(x,y))\,dy + \\ + \int_{\mathbb{Q}} &\mathcal{T}_h(A_\delta - A)(x,y)\,D_2\Delta_hN_\delta(x,y)\,dy + \\ + \int_{\mathbb{Q}} &\Delta_hA(x,y)\,(D_2N_\delta(x,y) - D_2N(x,y))\,dy + \\ + \int_{\mathbb{Q}} &\mathcal{T}_hA(x,y)\,\Delta_h(D_2N_\delta - D_2N)(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что

$$\begin{aligned}\|D_1^{r,2}(A^0_\delta - A^0)\|_{\mathbf{M}} \lesssim\ &\|D_1^{r,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}}\|I + D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}} + \\ &+ \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|D_1^{r,2}D_2N_\delta\|_{\mathbf{M}} + \\ &+ \|D_1^{r,2}A\|_{\mathbf{M}}\|D_2N_\delta - D_2N\|_{\mathbf{M}} + \\ &+ \|A\|_{\mathbf{M}}\|D_1^{r,2}(D_2N_\delta - D_2N)\|_{\mathbf{M}},\end{aligned}$$

и остается учесть леммы 3.3.1, 3.3.11 и 3.3.12 (если $r < s$, то также замечание 3.3.2). □

3.3.5 *Приближение для эффективного оператора*

Пусть $\mathcal{A}^0(\delta)$ — эффективный оператор для $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$. Его ограниченность не вызывает сомнений. Кроме того, как мы знаем из § 2.2, он удовлетворяет оценке вида (3.3.8) с теми же самыми константами, что и для $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$, а значит, является m-секториальным. Наконец, в качестве сектора можно выбрать $\mathcal{S}_\delta$ — сектор оператора $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ (снова см. § 2.2). Повторяя теперь рассуждения из доказательства леммы 3.3.8, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.3.15. *При всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1}f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.16}$$

Мы уже видели, что при $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$ повышается гладкость решения задачи $\mathcal{A}^0_\mu u_0 = f$. Разумеется, аналогичный результат имеет место и для решения задачи с оператором $\mathcal{A}^0_\mu(\delta)$, но здесь важно отследить зависимость от параметра δ. Ограничимся случаем, когда правая часть принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)^n$.

Лемма 3.3.16. *Пусть $r \in (0,1)$. Тогда при всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}D\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.17}$$

Доказательство. Положим $u_{0,\delta} = \mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1}f$. Проделывая те же выкладки, что и при доказательстве леммы 3.1.1, получаем:

$$\|D^{r,2}Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D^{r,2}A^0_\delta\|_{\mathbf{M}}\|Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Теперь леммы 3.3.13 и 3.3.15 влекут (3.3.17). □

Так как функция A^0_δ сходится к A^0 (напомним, что в этом состоял результат леммы 3.3.14), то и резольвента оператора $\mathcal{A}^0$ может быть приближена резольвентой $\mathcal{A}^0(\delta)$ — см. вывод леммы 3.3.10.

Лемма 3.3.17. *При всех $\delta \in \mathcal{D}_\mu$ и $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1} f - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f\|_{1,2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} \|f\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.18}$$

С помощью данного утверждения мы заменим $(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}$ во всех приближениях на $\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1}$. При изучении корректоров пригодится другой результат.

Лемма 3.3.18. *Пусть $s > 0$ и $r \in (0, s)$. Тогда при всех $\delta \in \mathcal{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}(D\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1} f - D(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1} f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D^{r,2}_1(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big) \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.19}$$

Если $D^{s,2}_1 A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то неравенство остается в силе и с $r = s$.

Доказательство. Из тождества (3.1.11) и аналогичного соотношения с функцией $\mathcal{A}^0_\mu(\delta)\Delta_h u_{0,\delta}$ находим, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^0_\mu \Delta_h (u_{0,\delta} - u_0) = -D^*(A^0_\delta - A^0) D\Delta_h u_{0,\delta} +& \\
+ D^* \mathcal{T}_h (\Delta_{-h}(A^0_\delta - A^0) \cdot Du_{0,\delta}) +& \\
+ D^* \mathcal{T}_h (\Delta_{-h} A^0 \cdot (Du_{0,\delta} - Du_0)).&
\end{aligned}$$

Оператор, стоящий в левой части равенства, является изоморфизмом, поэтому L_2-норма функции $\Delta_h D(u_{0,\delta} - u_0)$ может быть оценена сверху через H^{-1}-норму правой части. Тем самым

$$\begin{aligned}
\|D^{r,2}(Du_{0,\delta} - Du_0)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A^0_\delta - A^0\|_{\mathbf{M}} \|D^{r,2} Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} +& \\
+ \|D^{r,2}_1 (A^0_\delta - A^0)\|_{\mathbf{M}} \|Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} +& \\
+ \|D^{r,2} A^0\|_{\mathbf{M}} \|Du_{0,\delta} - Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d}&
\end{aligned}$$

(мы учли, что $\mathcal{T}_h$ изометричен на L_2). Для первого множителя в каждом слагаемом необходимо использовать или оценки (3.1.9) (при $r = s$) и (3.1.13) (при $r < s$), или лемму 3.3.14, для второго — или лемму 3.3.15, или леммы 3.3.1 и 3.3.16 (вместе с замечанием 3.3.2, если $r < s$), или лемму 3.3.17. ☐

3.3.6 *Приближения для корректоров*

Построение корректоров для $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)$ начинается со вспомогательного оператора $\mathcal{K}_\mu(\delta)$. Положим $U_\delta = \mathcal{K}_\mu(\delta) f$, где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Очевидно, что

$$\|D_2 U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \leqslant \|D_2 N_\delta\|_{\mathbf{M}} \|Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

а тогда из лемм 3.3.11, 3.3.15 вытекает равномерная ограниченность $D_2\mathcal{K}_\mu(\delta)$ как оператора из $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})^n$. Далее, если $r \in (0,1)$, то, согласно формуле (3.1.6),

$$\|D^{r,2}_1 D_2 U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}} \leqslant \|D^{r,2}_1 D_2 N_\delta\|_{\mathbf{M}} \|Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_2 N_\delta\|_{\mathbf{M}} \|D^{r,2} Du_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

и, применяя еще леммы 3.3.11, 3.3.15 и 3.3.16, видим, что ограничен и оператор $D^{r,2}_1 D_2 \mathcal{K}_\mu(\delta)$. Отсюда и из неравенства Пуанкаре получаем следующие две леммы.

Лемма 3.3.19. *При всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_2\mathcal{K}_\mu(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|\mathcal{K}_\mu(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Лемма 3.3.20. *Пусть $r \in (0,1)$. Тогда при всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_1^{r,2}D_2\mathcal{K}_\mu(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|D_1^{r,2}\mathcal{K}_\mu(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \big(\|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Подобным же образом определяется скорость сходимости оператора $\mathcal{K}_\mu(\delta)$ и различных композиций с его участием, нужно лишь записать разность функций U_δ и U в виде

$$U_\delta - U = N_\delta(D_1u_{0,\delta} - D_1u_0) + (N_\delta - N)D_1u_0 \tag{3.3.20}$$

и дополнительно использовать леммы 3.3.1, 3.3.12, 3.3.17 и 3.3.18, а также замечание 3.3.2 (когда порядок дифференцирования меньше s).

Лемма 3.3.21. *При всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D_2\mathcal{K}_\mu(\delta)f - D_2\mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|\mathcal{K}_\mu(\delta)f - \mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Лемма 3.3.22. *Пусть $s > 0$ и $r \in (0,s)$. Тогда при всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\begin{aligned}\|D_1^{r,2}(D_2\mathcal{K}_\mu(\delta)f - D_2\mathcal{K}_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|D_1^{r,2}(\mathcal{K}_\mu(\delta)f - \mathcal{K}_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \\ \lesssim \big(\|D_1^{r,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Если $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то неравенство остается в силе и с $r = s$.

Имея в распоряжении оценки для оператора $\mathcal{K}_\mu(\delta)$, довольно просто установить, как быстро растут нормы корректоров $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ и $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ и с какой скоростью эти корректоры сходятся к $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ и $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$. Начнем с $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$.

Лемма 3.3.23. *При всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Доказательство. Утверждение прямо следует из лемм 2.3.4 и 3.3.19. □

Лемма 3.3.24. *Пусть $r \in (0,1)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon^{-r}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.21}$$

Доказательство. Положим $U_{\varepsilon,\delta} = \mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)f$. По формуле (3.1.17) с U_δ в роли функции u,

$$\|D^{r,2}U_{\varepsilon,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|D_1^{r,2}U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \varepsilon^{-r}\big(\|D_2U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \|U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\big).$$

Учитывая леммы 3.3.19 и 3.3.20, приходим к (3.3.21). □

Результаты о сходимости корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ получаются вполне аналогично, при этом собственно скорость сходимости находится из лемм 3.3.21 и 3.3.22.

Лемма 3.3.25. *При всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta) f - \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Лемма 3.3.26. *Пусть $s > 0$ и $r \in (0, s)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in$ $\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|D^{r,2}(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta) f - \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{r,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon^{-r} \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big) \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \quad (3.3.22)$$

Если $D_1^{s,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то неравенство остается в силе и с $r = s$.

Перейдем к оценкам для корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$. У нас уже есть нужные соотношения для входящих в него операторов $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ и $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)^+$, и сейчас остается рассмотреть $\mathcal{L}_\mu(\delta)$ и $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon(\delta)$ (как обычно, нет необходимости изучать $\mathcal{L}_\mu(\delta)^+$ отдельно).

Лемма 3.3.27. *При всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{L}_\mu(\delta) f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)^2 \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Доказательство. Пусть $U_\delta^+ = \mathcal{K}_\mu(\delta)^+ g$, где $g \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$. С помощью (3.1.20) убеждаемся, что

$$|(\mathcal{L}_\mu(\delta) f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \|D_1^{1/2,2} A_\delta (D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \|D_1^{1/2,2} U_\delta^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

(ср. с (3.1.21)). Первый сомножитель, согласно формуле (3.1.6), допускает оценку

$$\begin{aligned}\|D_1^{1/2,2} A_\delta (D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \leqslant \|A_\delta\|_{\mathbf{M}} \|D_1^{1/2,2}(D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\ + \|D_1^{1/2,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} \|D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},\end{aligned}$$

поэтому, в силу лемм 3.3.1, 3.3.15, 3.3.16, 3.3.19 и 3.3.20,

$$\|D_1^{1/2,2} A_\delta (D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big) \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Оценка

$$\|D_1^{1/2,2} U_\delta^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big) \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}$$

для второго сомножителя очевидна из леммы 3.3.20⁺. □

Лемма 3.3.28. *Пусть $s \geqslant 1/2$ и $D_1^{1/2,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. Тогда при всех $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{L}_\mu(\delta) f - \mathcal{L}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big) \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Доказательство. Если $g \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$, то

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\mu(\delta) f - \mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d} = ((A_\delta - A)(D_1 u_{0,\delta} + D_2 U_\delta), D_1 U_\delta^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\ + (A(D_1 u_{0,\delta} - D_1 u_0 + D_2 U_\delta - D_2 U), D_1 U_\delta^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\ + (A(D_1 u_0 + D_2 U), D_1 U_\delta^+ - D_1 U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Все слагаемые далее оцениваются подобно тому, как это было сделано в предыдущей лемме, дополнительно лишь требуется принять во внимание утверждения о сходимости регуляризованных объектов, именно: леммы 3.3.17–3.3.18, 3.3.21–3.3.22 и 3.3.22⁺. □

Займемся последним оператором — $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)$.

Лемма 3.3.29. *При всех* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\delta \in \mathcal{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{-(1-s)}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Доказательство. Напомним, что форма оператора $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)$ имеет вид

$$(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)f,g)_{\mathbb{R}^d} = \varepsilon^{-1}(\tau^{\varepsilon}[A_\delta,\mathcal{T}^{\varepsilon}](D_1u_{0,\delta}+D_2U_\delta),\tau^{\varepsilon}\mathcal{T}^{\varepsilon}(D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta))_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.$$

Так как

$$\|(\mathcal{T}^{\varepsilon}-\mathcal{I})A_\delta\|_{\mathbf{M}} \leqslant \varepsilon^s r^s_{\mathbb{Q}}\|D^{s,\infty}_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}},$$

а норма функции $D^{s,\infty}_1 A_\delta$ равномерно ограничена (см. лемму 3.3.1), то

$$|(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)f,g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon^{-(1-s)}\|D_1u_{0,\delta}+D_2U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}$$

(здесь были учтены равенство (2.3.19) и лемма 2.3.3). Оценка для $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)$ теперь вытекает из лемм 3.3.15, 3.3.19 и 3.3.15$^+$, 3.3.19$^+$. □

Лемма 3.3.30. *При всех* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\delta \in \mathcal{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)f-\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{-1}\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Доказательство. Запишем тождество:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}(\delta)f-\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mu}f,g)_{\mathbb{R}^d} = \\
&\quad= \big(\tau^{\varepsilon}[A_\delta-A,\mathcal{T}^{\varepsilon}](D_1u_{0,\delta}+D_2U_\delta),\tau^{\varepsilon}\mathcal{T}^{\varepsilon}(D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta)\big)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\
&\qquad+ \big(\tau^{\varepsilon}[A,\mathcal{T}^{\varepsilon}](D_1u_{0,\delta}-D_1u_0+D_2U_\delta-D_2U),\tau^{\varepsilon}\mathcal{T}^{\varepsilon}(D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta)\big)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} + \\
&\qquad+ \big(\tau^{\varepsilon}[A,\mathcal{T}^{\varepsilon}](D_1u_0+D_2U),\tau^{\varepsilon}\mathcal{T}^{\varepsilon}(D_1u^+_{0,\delta}-D_1u^+_0+D_2U^+_\delta-D_2U^+)\big)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Слагаемые справа имеют похожую структуру: каждое состоит из произведения трех функций, одна из которых оценивается через мультипликаторную норму $A_\delta-A$, а две другие — равномерно ограничены относительно δ. Рассмотрим, например, первое слагаемое. Ввиду равенства типа (2.3.19) и леммы 2.3.3, оно не превосходит

$$\|(\mathcal{T}^{\varepsilon}-\mathcal{I})(A_\delta-A)\|_{\mathbf{M}}\|D_1u_{0,\delta}+D_2U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}. \tag{3.3.24}$$

Сразу ясно, что $\|(\mathcal{T}^{\varepsilon}-\mathcal{I})(A_\delta-A)\|_{\mathbf{M}} \leqslant 2\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}$. Вместе с тем, как видно из лемм 3.3.15, 3.3.19 и 3.3.15$^+$, 3.3.19$^+$,

$$\|D_1u_{0,\delta}+D_2U_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}$$

и

$$\|D_1u^+_{0,\delta}+D_2U^+_\delta\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Стало быть, первый член удовлетворяет нужному неравенству. Два оставшихся в (3.3.23) слагаемых также не вызывают затруднений. □

Сопоставляя оценки, полученные для входящих в $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ операторов, приходим к следующим утверждениям.

Лемма 3.3.31. *При всех* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta) f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2} A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2 + \varepsilon^{-(1-s)}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Лемма 3.3.32. *Пусть* $s \geqslant 1/2$ *и* $D_1^{1/2,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$. *Тогда при всех* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta) f - \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|D_1^{1/2,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon^{-1}\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

3.3.7 *Приближения для регуляризованного оператора*

Оператор $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)$ укладывается в рамки главы 2, и к нему применимы результаты теорем 2.4.1 и 2.4.3. Необходимо, однако, подчеркнуть, что погрешность в указанных результатах зависит от параметра δ, так как содержит липшицеву полунорму коэффициента A_δ (и только поэтому: L_∞-норма A_δ равномерно ограничена, согласно лемме 3.3.1). Понять, каким образом эта полунорма влияет на приближения, можно из замечаний 2.5.2 и 2.5.3: в случае теоремы 2.4.1 при $\delta \to 0$ погрешность растет не быстрее первой степени нормы $D_1 A_\delta$, а в случае теоремы 2.4.3 — не быстрее ее квадрата.

Для удобства мы выпишем отдельно результаты, которые нам потребуется при доказательстве.

Теорема 3.3.33. *Если* $\mu \notin \mathcal{S}$, *то при любых* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1} f - \mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1} f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\big(\|D_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.25}$$

Теорема 3.3.34. *Если* $\mu \notin \mathcal{S}$ *и* $r \in (0,1)$, *то при любых* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ *и* $f \in$ $\in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|D^{r,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1} f - \mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1} f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta) f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\big(\|D_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.26}$$

Поясним здесь, что, на основании вложения H^r в H^1, от L_2-нормы дробной производной функции $u_{\varepsilon,\delta} - u_{0,\delta} - \varepsilon U_{\varepsilon,\delta}$ можно перейти к H^1-норме этой функции. Мы уже отмечали выше, что

$$\|Du_{\varepsilon,\delta} - Du_{0,\delta} - \varepsilon DU_{\varepsilon,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|u_{\varepsilon,\delta} - u_{0,\delta}\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon\big(\|D_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}} + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Оценка для недостающего члена $\varepsilon U_{\varepsilon,\delta}$ вытекает из леммы 3.3.23.

Теорема 3.3.35. *Если* $\mu \notin \mathcal{S}$, *то при любых* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, $\delta \in \mathscr{D}_\mu$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$

$$\|\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1} f - \mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1} f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta) f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^2\big(\|D_1 A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2 + 1\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.3.27}$$

3.4 Доказательство основных результатов. Окончание

Далее, как и прежде, предполагаем, что $\delta \in \mathscr{D}_\mu$. Кроме того, мы будем считать, что и $\varepsilon \in \mathscr{E} \cap \mathscr{D}_\mu$. Это не ограничивает общности, поскольку, с одной стороны, при доказательстве сходимости совершенно не важно, насколько широким является множество индексов, а с другой стороны, оценки, полученные для $\varepsilon \in \mathscr{E} \cap \mathscr{D}_\mu$, могут быть распространены на весь интервал $\mathscr{E}$ (но, возможно, с большими константами в правой части). Во втором случае достаточно принять во внимание, что все оцениваемые операторы ограничены, а величина δ_μ явно контролируется (см. замечание 3.3.9).

3.4.1 *Доказательство теоремы* 3.2.1

Согласно леммам 3.3.10 и 3.3.17,

$$\|\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|\mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Используя еще теорему 3.3.33, находим:

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Если $s = 0$, то $\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} \to 0$ (см. лемму 3.3.4), а значит, устремляя ε и δ к нулю, получаем операторную сходимость резольвент. Если же $s > 0$, то величины $\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}$ и $\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}}$ оцениваются с помощью лемм 3.3.3, 3.3.4. В результате

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon\delta^{-(1-s)} + \varepsilon)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d},$$

или, поскольку $\varepsilon \leqslant \varepsilon\delta^{-(1-s)}$,

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \delta^s(1 + \varepsilon\delta^{-1})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Чтобы правая часть была мала при $\varepsilon \to 0$, необходимо для каждого фиксированного ε должным образом подобрать $\delta(\varepsilon)$. Легко понять, что оптимальным (с точки зрения зависимости погрешности от ε) будет выбор $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, а тогда для $\varepsilon \in \mathscr{E} \cap \mathscr{D}_\mu$ окажется

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^s\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

3.4.2 *Доказательство теоремы* 3.2.2

Так как пространство H^s вложено в H^1, то на основании лемм 3.3.10 и 3.3.17 можно оценить скорость, с которой при $\delta \to 0$ сходятся операторы $D^{s,2}\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1}$ и $D^{s,2}\mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1}$:

$$\|D^{s,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D^{s,2}(\mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Аналогичный результат для $D^{s,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ вытекает из леммы 3.3.26:

$$\varepsilon\|D^{s,2}(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)f - \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\varepsilon\|D_1^{s,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Вместе с теоремой 3.3.34 всё это приводит к оценке

$$\begin{aligned}&\|D^{s,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \\ &\quad\lesssim \big(\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\|D_1^{s,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Отсюда, учитывая неравенство $\|D_1^{s,2}(A_\delta - A)\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|D_1^{s,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \|D_1^{s,2}A\|_{\mathbf{M}}$ и применяя леммы 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.4, находим, что

$$\|D^{s,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \delta^s(1+\varepsilon\delta^{-1})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Как и в доказательстве теоремы 3.2.1, погрешность будет иметь оптимальный порядок при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Замечание 3.4.1. Даже сейчас, когда в (3.4.1) мы оцениваем норму функции $D_1^{s,2}(A_\delta - A)$ константой, содержащий эту норму член имел лучший порядок, чем оставшиеся. Тем самым усилить итоговый результат за счет сходимости дробной производной на данном пути не удастся; в частности, приближение для $D^{r,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$ при $r \in (0,s)$ будет иметь тот же порядок погрешности, что и для $D^{s,2}(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}$.

3.4.3 *Доказательство теоремы* 3.2.3

Доказательство этой теоремы во многом повторяет предыдущее, лишь вместо того, чтобы пытаться установить скорость сходимости оператора $\varepsilon D^{r,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$, мы просто оценим его норму. (Здесь следует подчеркнуть, что отвечающая ему композиция $\varepsilon D^{r,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ при $r \geqslant s$, вообще говоря, не отображает $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ — из-за недостаточной регулярности функции N и резольвенты $(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}$.)

Итак, в соответствии с леммами 3.3.10, 3.3.17 и 3.3.24 и теоремой 3.3.34,

$$\begin{aligned}\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \\ &\lesssim \big(\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon\|D_1^{r,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon^{1-r} + \varepsilon\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}}\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Если $s = 0$, то по лемме 3.3.4 $\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} \to 0$, поэтому переходя к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а потом — при $\delta \to 0$, получаем искомый результат.

Пусть теперь $s > 0$. Оценка для нормы $D_1^{r,2}A_\delta$ зависит от взаимного положения r и s, так что рассмотрим три случая. Если $r < s$, то

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon^{1-r} + \varepsilon\delta^{-(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{3.4.2}$$

см. замечание 3.3.2 и леммы 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.4. Из этих же лемм при $r = s$ и $r > s$ получаем соответственно, что

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon|\ln\delta| + \varepsilon^{1-r} + \varepsilon\delta^{-(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.4.3}$$

и

$$\|D^{r,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon^{1-r} + \varepsilon\delta^{-(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.4}$$

Очевидно, что порядок погрешности в (3.4.2) и (3.4.4) станет наилучшим, если положить $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Что касается (3.4.3), то здесь следует учесть, что сумма первого и последнего слагаемого в правой части будет иметь оптимальный порядок снова при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, а член с логарифмом для такого δ оказывается подчинен оставшимся (поскольку $\varepsilon|\ln\varepsilon| \lesssim \varepsilon^s$ равномерно по $\varepsilon \in \mathcal{D}_\mu$).

3.4.4 *Доказательство теоремы* 3.2.4

Используя леммы 3.3.10, 3.3.17 и 3.3.32, а также теорему 3.3.35, находим:

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\\ &\quad\lesssim\big(\|A_\delta-A\|_{\mathbf{M}}+\varepsilon\|D_1^{1/2,2}(A_\delta-A)\|_{\mathbf{M}}+\varepsilon^2\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2+\varepsilon^2\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Если $s=1/2$, то производная $D_1^{1/2,2}A$, по условию, равномерно ограничена, так что неравенство можно продолжить с помощью лемм 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.4:

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim(\delta^s+\varepsilon+\varepsilon^2\delta^{-2(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.5}$$

Если же $s>1/2$, то, согласно леммам 3.3.3 и 3.3.4, при любом $r\in(1/2,s)$

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim(\delta^s+\varepsilon\delta^{r-1/2}+\varepsilon^2\delta^{-2(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.6}$$

Выбирая r настолько близким к s, что выполняется $2r\geqslant 3s-1$, мы видим, что либо $\varepsilon\delta^{r-1/2}\leqslant\delta^s$, либо $\varepsilon\delta^{r-1/2}\leqslant\varepsilon^2\delta^{-2(1-s)}$. Это значит, что порядок погрешности как в (3.4.5), так и в (3.4.6) определяют лишь первый и последний член в правой части. Теперь легко понять, что лучшим порядком будет $\varepsilon^{2s/(2-s)}$, а чтобы его достигнуть, нужно положить $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{2/(2-s)}$ (заметим здесь, что $\delta(\varepsilon)\in\mathcal{D}_\mu$ при $\varepsilon\in\mathcal{D}_\mu$).

3.4.5 *Доказательство следствия* 3.2.5

Если мы установим неравенство

$$\varepsilon\|D^{s,2}(\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f-\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^s\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{3.4.7}$$

то из теоремы 3.2.2 будет следовать, что

$$\|D^{s,2}((\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f-(\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon f)\|_{2,\mathbb{R}^d}\lesssim\varepsilon^s\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}, \tag{3.4.8}$$

а тогда искомая оценка получится интерполяцией между (3.2.4) и (3.4.8).

Пусть $g\in H^{-s}(\mathbb{R}^d)^n$ и, как обычно, $U^+=\mathcal{K}_\mu^+g$. С помощью ($3.1.2^+$) легко показать, что

$$\|D_2U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}+\|U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\lesssim\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.9}$$

Отсюда и из леммы 2.3.4 находим:

$$\varepsilon|(f,(\mathcal{K}_\mu^\varepsilon)^+g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.10}$$

Далее, повторяя вывод неравенства (3.1.5), но используя (3.4.9) вместо ($3.1.3^+$), убеждаемся в том, что

$$\varepsilon|(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f,g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\varepsilon^s\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-1,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.11}$$

Перейдем к оператору $\mathcal{L}_\mu$. Рассуждение с преобразованием Фурье как в лемме 3.1.2 приводит к соотношению

$$|(\mathcal{L}_\mu f,g)_{\mathbb{R}^d}|\lesssim\|D_1^{s,2}A(D_1u_0+D_2U)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|D_1^{1-s,2}U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}.$$

Первый множитель справа не вызывает никаких затруднений, см. (3.1.6), а также (3.1.2), (3.1.3), (3.1.10) и (3.1.16). Для второго, опять по (3.1.6), имеем:

$$\|D_1^{1-s,2}U^+\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}} \lesssim \|D_1^{1-s,2}N\|_{\mathbf{M}}\|Du_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|N\|_{\mathbf{M}}\|D^{1-s,2}Du_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Поскольку сейчас $1-s \leqslant s$, то $\|D_1^{1-s,2}N\|_{\mathbf{M}} \lesssim \|D_1^{s,2}N\|_{\mathbf{M}} + \|N\|_{\mathbf{M}}$, а оценка для $D^{1-s,2}Du_0^+$ вытекает из леммы 3.1.1$^+$. Таким образом,

$$\varepsilon|(\mathcal{L}_\mu f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-s,2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.4.12}$$

Неравенство

$$\varepsilon|(f, \mathcal{L}_\mu^+ g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{-s,2,\mathbb{R}^d} \tag{3.4.13}$$

доказывается вполне аналогично: мы начинаем с соотношения

$$|(f, \mathcal{L}_\mu^+ g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \|D_1^{s,2}U\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}}\|D_1^{1-s,2}A^+(D_1u_0^+ + D_2U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}},$$

а затем применяем оценку (3.1.16) и лемму 3.1.1$^+$.

В итоге (3.4.10)–(3.4.13) влекут за собой (3.4.7).

3.4.6 *Доказательство теоремы* 3.2.6

Напомним, что корректор $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ задается выражением

$$\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta) = (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta) - \mathcal{L}_\mu(\delta)) - \mathcal{M}_\mu^\varepsilon(\delta) + (\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)^+ - \mathcal{L}_\mu(\delta)^+)^*.$$

Оператором $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon(\delta)$, как мы знаем из леммы 3.3.30, можно приблизить $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$; остальные слагаемые в $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ достаточно оценить сверху при помощи лемм 3.3.23, 3.3.27 и 3.3.23$^+$, 3.3.27$^+$:

$$\varepsilon\|\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)f + \mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \big(\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon + \varepsilon\|D_1^{1/2,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Добавим к этому еще оценки для скорости сходимости $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon(\delta)^{-1}$ и $\mathcal{A}_\mu^0(\delta)^{-1}$ из лемм 3.3.10, 3.3.17 и оценку погрешности приближения с корректором $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\delta)$ из теоремы 3.3.35, тогда получим:

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f + \varepsilon\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \\ &\qquad \lesssim \big(\|A_\delta - A\|_{\mathbf{M}} + \varepsilon + \varepsilon\|D_1^{1/2,2}A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2 + \varepsilon^2\|D_1A_\delta\|_{\mathbf{M}}^2\big)\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

К крайним членам в правой части далее применим леммы 3.3.3 и 3.3.4. Порядок оставшихся слагаемых определяется, в зависимости от положения s относительно точки $1/2$, либо из леммы 3.3.3, либо из леммы 3.3.1 и замечания 3.3.2. Так или иначе находим, что

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f + \varepsilon\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon\delta^{-(1-2s)} + \varepsilon^2\delta^{-2(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.4.14}$$

при $s < 1/2$,

$$\|(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon)^{-1}f - (\mathcal{A}_\mu^0)^{-1}f + \varepsilon\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon|\ln\delta|^2 + \varepsilon^2\delta^{-2(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.4.15}$$

при $s = 1/2$,

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f + \varepsilon\mathcal{M}^\varepsilon_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim (\delta^s + \varepsilon + \varepsilon^2\delta^{-2(1-s)})\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.4.16}$$

при $s > 1/2$.

Теперь заметим, что в каждом случае оптимальный порядок суммы первого и последнего члена справа достигается при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{2/(2-s)}$. Несложно показать, что такая подстановка дает лучший порядок и для всей правой части. Действительно, $\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-(1-2s)}$ в (3.4.14) совпадает с $\varepsilon^{3s/(2-s)}$, что, очевидно, не превосходит $\varepsilon^{2s/(2-s)}$, а $\varepsilon|\ln\delta(\varepsilon)|^2$ в (3.4.15) с точностью до множителя равен произведению $\varepsilon^{2s/(2-s)}$ и $\varepsilon^{1/3}|\ln\varepsilon|^2$ (здесь, напомним, $s = 1/2$), и тем самым также ограничен сверху величиной $\varepsilon^{2s/(2-s)}$. В результате уже для всех $s \in (0,1)$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f - (\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f + \varepsilon\mathcal{M}^\varepsilon_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{1\wedge 2s/(2-s)}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

3.4.7 *Доказательство следствия 3.2.7*

Обе резольвенты, а также оператор $\varepsilon\mathcal{M}^\varepsilon_\mu$ непрерывно переводят $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $H^1(\mathbb{R}^d)^n$, причем соответствующие нормы равномерно ограничены по ε (см. (3.1.1), (3.1.2) и (3.4.11)). Значит,

$$\|D(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}f - D(\mathcal{A}^0_\mu)^{-1}f + \varepsilon D\mathcal{M}^\varepsilon_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Отсюда и из (3.2.6) интерполяцией получаем (3.2.7).

3.5 Комментарии к главе 3

3.5.1 *О спектральном параметре*

Результаты из § 3.2 естественным образом переносятся с $\mu \notin \mathcal{S}$ на $\mu \notin$ $\notin \operatorname{spec}\mathcal{A}^0$. Мы не станем останавливаться на этом подробно, необходимые детали могут быть найдены в п. 2.6.1. Добавим лишь, что сначала следует проверить, что при ε из подходящего интервала $\mathscr{E}_\mu$ оператор $(\mathcal{A}^\varepsilon_\mu)^{-1}$ равномерно ограничен на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а затем, пользуясь резольвентной сходимостью $\mathcal{A}^\varepsilon(\delta)$ к $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0(\delta)$ к $\mathcal{A}^0$, убедиться в том, что при достаточно малых δ равномерно ограничены на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ (уже по двум параметрам) и операторы $\mathcal{A}^\varepsilon_\mu(\delta)^{-1}$ и $\mathcal{A}^0_\mu(\delta)^{-1}$. Интервал $\mathscr{D}_\mu$, как и $\mathscr{E}_\mu$, в данном случае определяется из резольвентных тождеств.

3.5.2 *О самосопряженности*

Поскольку объекты, которые мы изучали в этой главе, задаются теми же самыми выражениями, что и в главе 2, всё сказанное в п. 2.6.2 по поводу самосопряженности приближений справедливо и сейчас. Отметим еще, что возможность замены корректора $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu$ на $\mathcal{K}^\varepsilon_\mu + (\mathcal{K}^\varepsilon_\mu)^*$ (для $A^+ = A$, разумеется) или $\mathcal{C}^\varepsilon_\mu$ доказывалась при проверке следствия 3.2.5.

Когда функция A удовлетворяет условию Гёльдера с показателем s, но $D_1^{s,2}A \notin \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, оператор $D^{s,2}\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$, вообще говоря, оказывается не ограничен на L_2. В таком случае теорема 3.2.2, конечно, не может быть выполнена. Однако она останется в силе, если в ее утверждении заменить s на произвольное $r < s$ (производная $D_1^{r,2}A$ уже принадлежит $\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$). То же можно сказать и о следствии 3.2.5 (вместо s нужно взять число из интервала $[1/2, s)$).

3.5.4 *О периодическом случае*

Случай периодических операторов имеет ряд специфических свойств, которые стоит обсудить отдельно.

Начнем с того, что коротко напомним постановку периодической задачи и связанные с ней обозначения. В пространстве $\mathbb{R}^d$ выделяются d_1 «периодических» направлений. Мы предполагаем, что d_1 строго положительно; $d_2 = d - d_1$ может оказаться равным нулю. Переменные $x \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^d$ при таком разбиении пространства записываются как $x = x_1 \oplus x_2$ и $y = y_1 \oplus y_2$. Функция A тогда представляется в виде $A(x,y) = A(x_2, y_1)$. (Отметим, что по сравнению с частью I здесь аргументы x_2 и y_1 расположены в обратном порядке.) Она периодична по переменной y_1 и гёльдерова — по x_2. Показатель гёльдеровости, s, будет считаться лежащим в интервале $(0,1)$. Заметим, что условия на дробные производные функции A по переменной x переписываются через такие же условия на дробные производные по переменной x_2. В самом деле,

$$\begin{aligned} D_1^{s,\infty}A(x,y) &= \sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} |h|^{-s}|\Delta_h A(x,y)| = \\ &= \sup_{h_1\in\mathbb{R}^{d_1}} (1+|h_1|^2)^{-s/2} \sup_{h_2\in\mathbb{R}^{d_1}\setminus\{0\}} |h_2|^{-s}|\Delta_{h_2}A(x_2,y_1)| = \\ &= D_{x_2}^{s,\infty}A(x_2,y_1) \end{aligned}$$

(мы выделили $|h_2|^{-s}$ из $|h|^{-s}$ и сделали замену $h_1 \mapsto |h_2|^{-1}h_1$ в одном из супремумов), откуда находим, что $D_1^{s,\infty}A = D_{x_2}^{s,\infty}A$, а из цепочки равенств

$$\begin{aligned} |D_1^{r,2}A(x,y)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2r}|\Delta_h A(x,y)|^2\,dh = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (1+|h_1|^2)^{-(d+2r)/2}\,dh_1 \int_{\mathbb{R}^{d_2}} |h_2|^{-d_2-2r}|\Delta_{h_2}A(x_2,y_1)|^2\,dh_2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (1+|h_1|^2)^{-(d+2r)/2}\,dh_1\,|D_{x_2}^{r,2}A(x_2,y_1)|^2 \end{aligned}$$

(снова вынесли $|h_2|^{-s}$ и сделали замену переменной $h_1 \mapsto |h_2|^{-1}h_1$) получаем, что $D_1^{r,2}A \sim D_{x_2}^{r,2}A$ (обозначения типа $D_{x_2}^{s,\infty}$ и $D_{x_2}^{r,2}$ не требуют пояснений).

Индексами у операторов τ^ε, $\mathcal{T}^\varepsilon$, $\mathcal{S}^\varepsilon$ мы станем помечать, по какой из переменных — «периодической» или «непериодической» — он действует;

так, $\tau_1^\varepsilon u(x,y_2,z) = u(x,\varepsilon^{-1}x_1,y_2,z)$, $\mathcal{T}_1^\varepsilon u(x,y,z_1) = u(x_1+\varepsilon z_1, x_2, y)$ и $\mathcal{S}_1^\varepsilon u(x,y) = \int_{\mathbb{Q}_1} \mathcal{T}_1^\varepsilon u(x,y,z_1)\,dz_1$. Операторы с разными индексами перестановочны, а композиция операторов одного типа представляет собой аналогичный оператор, но уже по полной переменной.

В п. 2.6.4 было указано, что $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ в «липшицевом» периодическом случае можно отнести к погрешности. Выясняется, что то же самое верно и сейчас. Во-первых, теорема 3.2.6 (а тогда и следствие 3.2.7) оказывается справедлива и без $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ в приближении — тем самым уточняются результаты теорем 3.2.1 и 3.2.3. Во-вторых, слагаемое $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ можно опустить из корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ в теореме 3.2.4 (а тогда и в следствии 3.2.5), что в немалой степени упрощает соответствующие приближения. Перечисленные утверждения очевидным образом вытекают из следующей леммы, доказательство которой пока отложим.

Лемма 3.5.1. *Пусть $s \in (0,1)$ и $r \in (0,s)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^{-1+2r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.5.1}$$

Если $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то неравенство остается в силе и с $r = s$.

Как мы видели в главе 1, корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ был нужен для приближения композиции резольвенты с дифференцированием по «периодической» переменной, но не с дифференцированием по «непериодической» переменной (см. теоремы 1.4.1 и 1.4.2). Для дробных производных ситуация аналогичная. Именно, утверждение теоремы 3.2.3 с $D_{x_2}^{r,2}$ вместо $D^{r,2}$ верно с такой же погрешностью, как в теореме 3.2.2. Действительно, множитель ε^{1-r} возникал ранее из-за дифференцирования быстро осциллирующего множителя в операторе $\varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ (см. лемму 3.3.24), а дифференцирование по «непериодической» переменной оставляет $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon(\delta)$ равномерно ограниченным по ε. Более того, из подобных соображений ясно, что $D_{x_2}^{r,2}$ можно заменить на D_{x_2}, причем порядок погрешности сохранится равным ε^s (см. замечание 2.3.1 и доказательство теоремы 3.2.3). Еще раз подчеркнем, что никакой дополнительной гладкости здесь не требуется.

Другое упрощение, связанное с периодичностью оператора, касается непосредственно корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$. Дело в том, что по «непериодической» переменной изначально предполагается некоторая гладкость, и потому дополнительное сглаживание относительно нее оказывается излишним. Тогда вместо $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ в теореме 3.2.2 (теперь уже с $D_{x_1}^{s,2}$) достаточно взять оператор $\tau_1^\varepsilon\mathcal{S}_1^\varepsilon\mathcal{K}_\mu$ (мы встречались с ним ранее — см. п. 1.6.4). Кроме того, соответствующие замены можно провести и внутри корректора $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$ в теореме 3.2.4 и следствии 3.2.5. Обоснованием перехода от $\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu$ к $\tau_1^\varepsilon\mathcal{S}_1^\varepsilon\mathcal{K}_\mu$ служит следующее утверждение.

Лемма 3.5.2. *Пусть $s \in (0,1)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$*

$$\|\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu f - \tau_1^\varepsilon\mathcal{S}_1^\varepsilon\mathcal{K}_\mu f\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^r\|f\|_{2,\mathbb{R}^d} \tag{3.5.2}$$

с любым фиксированным $r \in (0,s)$. Если $D_1^{s,2}A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q})$, то также

$$\|D^{s,2}(\tau^\varepsilon\mathcal{S}^\varepsilon\mathcal{K}_\mu f - \tau_1^\varepsilon\mathcal{S}_1^\varepsilon\mathcal{K}_\mu f)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}. \tag{3.5.3}$$

Итак, займемся доказательствами.

Доказательство леммы 3.5.1. Легко понять, что A коммутирует с $\mathcal{T}_1^\varepsilon$ и что ни одна из функций A, N и N^+ не зависит от y_2, а тем самым

$$\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} = (\tau_1^\varepsilon \mathcal{T}_1^\varepsilon [A, \mathcal{T}_2^\varepsilon](D_1 u_0 + D_2 U), \tau_1^\varepsilon \mathcal{T}_1^\varepsilon \mathcal{T}_2^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}}.$$

Используя лемму 2.3.3 для $\tau_1^\varepsilon \mathcal{T}_1^\varepsilon$, отсюда находим, что

$$\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} = ((\mathcal{I} - \mathcal{T}_2^\varepsilon) A \cdot \mathcal{T}_2^\varepsilon (D_1 u_0 + D_2 U), \mathcal{T}_2^\varepsilon (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2}.$$

Если $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1)$, то интерполяция между оценкой из леммы 2.3.5 для $\mathcal{T}_2^\varepsilon$ и очевидным неравенством

$$\|(\mathcal{T}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2} \leqslant 2\|u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}$$

дает:

$$\|(\mathcal{T}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2} \lesssim \varepsilon^r \big(\|D_1^{r,2} u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}\big) \tag{3.5.4}$$

(поскольку $\|D_{x_2}^{r,2} u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} \lesssim \|D_1^{r,2} u\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}$; далее подобные оговорки опускаются). Этот результат позволяет заменить $\mathcal{T}_2^\varepsilon$ в правом сомножителе из последнего выражения для формы $\mathcal{M}_\mu^\varepsilon$ на единичный оператор, совершив ошибку порядка ε^{2r}. Действительно, ввиду (3.5.4),

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{T}_2^\varepsilon - \mathcal{I})(D_1 u_0^+ + D_2 U^+)\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2} \lesssim \\ &\quad \lesssim \varepsilon^r \big(\|D^{r,2} D u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|D_1^{r,2} D_2 U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|D_2 U^+\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}\big),\end{aligned}$$

поэтому, оценивая слагаемые с производными первого порядка при помощи (3.1.2⁺) и (3.1.3⁺), а оставшиеся члены — при помощи (3.1.10⁺) и (3.1.16⁺) (но с r вместо s; здесь важно, что $D_1^{r,2} A \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1)$ для $r < s$), мы видим, что левая часть не превосходит $\varepsilon^r \|g\|_{2,\mathbb{R}^d}$ (с некоторым постоянным множителем). То, что второй сомножитель в форме оценивается через $\varepsilon^s \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}$, ясно сразу — см. (3.1.2) и (3.1.3). Таким образом,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} &\approx (\mathcal{T}_2^\varepsilon (D_1 u_0 + D_2 U), A^+ (D_1 u_0^+ + D_2 U^+))_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2} - \\ &\quad - (\mathcal{T}_2^\varepsilon A (D_1 u_0 + D_2 U), D_1 u_0^+ + D_2 U^+)_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2}\end{aligned}$$

(символом $\approx$ обозначаем равенство с точностью до членов порядка ε^{2r}).

Упростим выражение справа. Оба слагаемых однотипны, поэтому достаточно рассмотреть только одно, например последнее. Согласно (2.2.1), левый сомножитель в нём соленоидален по второму аргументу:

$$\begin{aligned}&D_2^* A(x_2, y_1)(D_1 u_0(x) + D_2 U(x, y_1)) = \\ &\quad = D_2^* A(x_2, y_1)(D_2 N(x_2, y_1) + I) D u_0(x) = 0;\end{aligned}$$

следовательно, $D_2 U^+$ можно опустить. Далее, по определению коэффициента A^0, см. (2.2.6),

$$\int_{\mathbb{Q}_1} A(x_2, y_1)(D_1 u_0(x) + D_2 U(x, y_1))\, dy_1 = A^0(x_2) D u_0(x),$$

благодаря чему рассматриваемое слагаемое приобретает простой вид:

$$(\mathcal{T}_2^\varepsilon A(D_1u_0+D_2U), D_1u_0^+ + D_2U^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1\times\mathbb{Q}_2} = (\mathcal{T}_2^\varepsilon A^0 D_1u_0, D_1u_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_2}.$$

Аналогичные соображения для другого слагаемого приводят в итоге к соотношению

$$\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\mathcal{T}_2^\varepsilon Du_0, (A^+)^0 Du_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_2} - (\mathcal{T}_2^\varepsilon A^0 Du_0, Du_0^+)_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_2},$$

или, если еще учесть определение оператора S_2^ε и его самосопряженность,

$$\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} \approx (\mathcal{S}_2^\varepsilon Du_0, (A^+)^0 Du_0^+)_{\mathbb{R}^d} - (A^0 Du_0, \mathcal{S}_2^\varepsilon Du_0^+)_{\mathbb{R}^d}.$$

Вспомним теперь, что $(A^+)^0 = (A^0)^*$ (см. п. 3.5.2). Тогда правую часть можно переписать так:

$$\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d} \approx ((\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0, (A^0)^* Du_0^+)_{\mathbb{R}^d} - (A^0 Du_0, (\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0^+)_{\mathbb{R}^d}. \tag{3.5.5}$$

Покажем, что каждое слагаемое имеет порядок ε^{2r}.

Из рассуждений с преобразованием Фурье в доказательстве леммы 3.1.2 получаем:

$$|(A^0 Du_0, (\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0^+)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \|D^{r,2}A^0 Du_0\|_{2,\mathbb{R}^d} \|D^{1-r,2}(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Функция $D^{r,2}A^0Du_0$ оценивается сразу на основании формулы (3.1.6), неравенств (3.1.9) (при $r = s$) и (3.1.13) (при $r < s$) и леммы 3.1.1. Что касается функции $D^{1-r,2}(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+$, то ее норма с точностью до постоянного множителя совпадает с нормой $(-\Delta)^{(1-r)/2}(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+$. Дробный оператор Лапласа, очевидно, коммутирует со сдвигами, поэтому

$$\|D^{1-r,2}(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} \sim \|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})(-\Delta)^{(1-r)/2}u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Интерполируя между второй оценкой из леммы 2.3.6 для $\mathcal{S}_2^\varepsilon$ и элементарным соотношением

$$\|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1} \leqslant 2\|u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1},$$

при любых $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1)$ находим, что

$$\|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1} \lesssim \varepsilon^{2r}\big(\|(-\Delta_1)^r u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1} + \|u\|_{2,\mathbb{R}^d\times\mathbb{Q}_1}\big). \tag{3.5.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})(-\Delta)^{(1-r)/2}u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \varepsilon^{2r}\big(\|(-\Delta)^{(1+r)/2}u_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|u_0^+\|_{1,2,\mathbb{R}^d}\big) \sim \\ &\sim \varepsilon^{2r}\big(\|D^{r,2}Du_0^+\|_{2,\mathbb{R}^d} + \|u_0^+\|_{1,2,\mathbb{R}^d}\big),\end{aligned}$$

а правая часть оценивается далее с помощью неравенства (3.1.2$^+$) и леммы 3.1.1$^+$. В результате

$$|(A^0 Du_0, (\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})Du_0^+)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon^{2r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Поскольку другое слагаемое из (3.5.5) устроено точно так же, как только что рассмотренное, то окончательно

$$|\varepsilon(\mathcal{M}_\mu^\varepsilon f, g)_{\mathbb{R}^d}| \lesssim \varepsilon^{2r}\|f\|_{2,\mathbb{R}^d}\|g\|_{2,\mathbb{R}^d}. \qquad \square$$

Доказательство леммы 3.5.2. Будем исходить из равенства

$$\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U - \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon U = \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon (\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})U.$$

Применим к оператору $\tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon$ в правой части аналог леммы 2.3.4. Тогда получим, что

$$\|\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U - \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon U\|_{2,\mathbb{R}^d} \leqslant \|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1},$$

и останется только учесть оценки (3.5.6) (но с r вместо $2r$) и (3.1.3) и (3.1.16) (с r вместо s):

$$\|\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U - \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon U\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \varepsilon^r \big(\|D_1^{r,2} U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}\big) \lesssim \varepsilon^r \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.$$

Предположим теперь, что производная $D_1^{s,2} A$ равномерно ограничена. В таком случае нетрудно видеть, что для функции $D^{s,2} \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon (\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})U$ справедливо соотношение (3.1.17), а потому

$$\begin{aligned}&\|D^{s,2}(\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U - \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon U)\|_{2,\mathbb{R}^d} \lesssim \\ &\qquad \lesssim \|D_1^{s,2} U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \varepsilon^{-s}\big(\|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|(\mathcal{S}_2^\varepsilon - \mathcal{I})U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1}\big).\end{aligned}$$

Продолжая неравенство с помощью (3.5.6) (при $r = s/2$), (3.1.3) и (3.1.16), получаем:

$$\begin{aligned}\|D^{s,2}(\tau^\varepsilon \mathcal{S}^\varepsilon U - \tau_1^\varepsilon \mathcal{S}_1^\varepsilon U)\|_{2,\mathbb{R}^d} &\lesssim \|D_1^{s,2} D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|D_1^{s,2} U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \\ &+ \|D_2 U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} + \|U\|_{2,\mathbb{R}^d \times \mathbb{Q}_1} \lesssim \|f\|_{2,\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено. □

Заключение

Еще раз перечислим основные результаты работы.

Во-первых, были рассмотрены сильно эллиптические периодические операторы второго порядка во всём пространстве $\mathbb{R}^d$. Операторы имели дивергентную форму и могли включать младшие члены довольно общего вида. Коэффициенты зависели от «быстрой» и «медленной» переменной, которые были разделены в том смысле, что принадлежали двум взаимно ортогональным подпространствам в $\mathbb{R}^d$. По «быстрой» переменной предполагалась периодичность, по «медленной» — липшицевость. Были получены два члена в приближении резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и старший член в приближении резольвенты по операторной норме из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Все приближения сопровождались точными по порядку оценками погрешностей.

Во-вторых, данные результаты были перенесены на локально периодические операторы без младших членов. Коэффициенты таких операторов также зависят от «быстрой» и «медленной» переменной, однако они не обязательно «разделены». Как и ранее, по «быстрой» переменной предполагалась периодичность, по «медленной» — липшицевость.

В-третьих, были найдены аналоги указанных приближений для локально периодических операторов в том случае, когда липшицевость по «медленной» переменной заменялась гёльдеровостью с показателем $s \in \in [0, 1)$. Оказалось, что от s зависит сам характер полученных результатов. Так, при $s = 0$ удалось установить лишь сходимость резольвенты, но не скорость сходимости. Если $s > 0$, то можно оценить и скорость, она также определяется величиной s.

Список литературы

[BP84] *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 352 с.

[BSu03] *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // *Алгебра и анализ.* — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 1–108.

[BSu05] ———. Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора // *Алгебра и анализ.* — 2005. — Т. 17, № 6. — С. 1–104.

[BSu06] ———. Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ // *Алгебра и анализ.* — 2006. — Т. 18, № 6. — С. 1–130.

[Bor08] *Борисов Д. И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // *Алгебра и анализ.* — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 19–42.

[VSu12] *Василевская Е. С., Суслина Т. А.* Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров // *Алгебра и анализ.* — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 1–103.

[Zh89] *Жиков В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии // *Дифференц. уравнения.* — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 44–50.

[ZhKO93] *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.

[ZhPas16] *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения // *УМН.* — 2016. — Т. 429, № 3. — С. 27–122.

[ZVPDL14] *Зябловский А. А., Виноградов А. П., Пухов А. А., Дорофеенко А. В., Лисянский А. А.* $\mathcal{PT}$-симметрия в оптике // *УФН.* — 2014. — Т. 184, № 11. — С. 1177–1198.

[LL03] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учеб. пособ. в 10 т. — 5-е изд. изд. — М.: Физматлит, 2003. — Т. VII. Теория упругости. — 264 с.

[MKh64] *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи с мелкозернистой границей // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 65, № 3. — С. 458–472.

[MKh05] ———. Усредненные модели микронеоднородных сред. — Киев: Наук. думка, 2005. — 550 с.

[OShY90] *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 311 с.

[PT07] *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // *Доклады академии наук.* — 2007. — Т. 415, № 3. — С. 304–309.

[PSu12] *Пахнин М. А., Суслина Т. А.* Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области // *Алгебра и анализ.* — 2012. — Т. 24, № 6. — С. 139–177.

[Sev81] *Севостьянова Е. В.* Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами // *Матем. сб.* — 1981. — Т. 115 (157), № 2 (6). — С. 204–222.

[Se13] *Сеник Н. Н.* Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях // *Алгебра и анализ.* — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 182–259.

[St73] *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: «Мир», 1973. — 342 с.

[Su04$_1$] *Суслина Т. А.* Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе // *Алгебра и анализ.* — 2004. — Т. 16, № 1. — С. 269–292.

[Su04$_2$] ———. Усреднение стационарной периодической системы Максвелла // *Алгебра и анализ.* — 2004. — Т. 16, № 5. — С. 162–244.

[Su10] ———. Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка // *Алгебра и анализ.* — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 108–222.

[Su14] ———. Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора // *Алгебра и анализ.* — 2014. — Т. 26, № 4. — С. 195–263.

[AF03] *Adams R., Fournier J.* Sobolev Spaces. — 2nd edition. — Amsterdam: Academic Press, 2003. — 320 pp.

[A92] *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // *SIAM J. Math. Anal.* — 1992. — Vol. 23, no. 6. — Pp. 1482–1518.

[Be05] *Bender C. M.* Introduction to $\mathcal{PT}$-symmetric quantum theory // *Contemp. Phys.* — 2005. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 277–292.

[BLP78] *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. — Amsterdam: North-Holland, 1978. — 699 pp.

[BSu01] *Birman M., Suslina T.* Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics // Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics / Ed. by A. A. Borichev, N. K. Nikolski. — Basel: Birkhäuser, 2001. — Pp. 71–107.

[BF15] *Briane M., Francfort G. A.* Loss of ellipticity through homogenization in linear elasticity // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2015. — Vol. 25, no. 5. — Pp. 905–928.

[BCSu11] *Bunoiu R., Cardone G., Suslina T.* Spectral approach to homogenization of an elliptic operator periodic in some directions // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2011. — Vol. 34, no. 9. — Pp. 1075–1096.

[CDG02] *Cioranescu D., Damlamian A., Griso G.* Periodic unfolding and homogenization // *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* — 2002. — Vol. 335, no. 1. — Pp. 99–104.

[CDG08] ———. The periodic unfolding method in homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* — 8002. — Vol. 40, no. 4. — Pp. 1585–1620.

[CV97] *Conca C., Vanninathan M.* Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition // *SIAM J. Appl. Math.* — 1997. — Vol. 57, no. 6. — Pp. 1639–1659.

[DGS73] *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine // *Boll. Unione Mat. Ital.* — 1973. — Vol. 8, no 4. — Pp. 391–411.

[EZ06] Metamaterials / Ed. by N. Engheta, R. W. Ziolkowski. — Piscataway, New Jersey: Wiley–IEEE Press, 2006. — 440 pp.

[EG92] *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure Theory and Fine Properties of Functions. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 1992. — 288 pp.

[Gib10] *Gibson R. F.* A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92, no. 12. — Pp. 2793–2810.

[Gri02] *Griso G.* Estimation d'erreur et éclatement en homogénéisation périodique // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* — 2002. — Vol. 335, no. 4. — Pp. 333–336.

[Gri04] ———. Error estimate and unfolding for periodic homogenization // *Asymptot. Anal.* — 2004. — Vol. 40, no. 3,4. — Pp. 269–286.

[Gri06] ———. Interior error estimate for periodic homogenization // *Anal. Appl.* — 2006. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 61–79.

[H16] *Hardy G. H.* Weierstrass's non-differentiable function // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1916. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 301–325.

[KLS12] *Kenig C. E., Lin F., Shen Zh.* Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2012. — Vol. 203, no. 3. — Pp. 1009–1036.

[KLS13] ———. Periodic homogenization of Green and Neumann functions // *Comm. Pure Appl. Math.* — 2014. — Vol. 67, no. 8. — Pp. 1219–1262.

[LNW02] *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // *Int. J. Pure Appl. Math.* — 2002. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 35–86.

[M11] *Maz'ya V. G.* Sobolev Spaces. — Berlin: Springer, 2011. — 866 pp.

[MSh09] *Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.* Theory of Sobolev Multipliers. — Berlin: Springer, 2009. — 614 pp.

[MV06] *Maz'ya V. G., Verbitsky I. E.* Form boundedness of the general second-order differential operator // *Comm. Pure Appl. Math.* — 2006. — Vol. 59, no. 9. — Pp. 1286–1329.

[McL00] *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 372 pp.

[MT97] *Murat F., Tartar L.* H-Convergence // Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials / Ed. by A. Cherkaev, R. Kohn. — Boston: Birkhäuser, 1997. — Pp. 21–43.

[Ng89] *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* — 1989. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 608–623.

[ShZh17] *Shen Zh., Zhuge J.* Convergence rates in periodic homogenization of systems of elasticity // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2017. — Vol. 145, no. 3. — Pp. 1187–1202.

[Sp68] *Spagnolo S.* Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* — 1968. — Vol. 22, no 4. — Pp. 571–597.

[Su13$_1$] *Suslina T. A.* Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L^2-operator error estimates // *Mathematatika.* — 2013. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 463–476.

[Su13$_2$] ———. Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients // *SIAM J. Math. Anal.* — 2013. — Vol. 45, no. 6. — Pp. 3453–3493.

[ZhP05] *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory // *Russ. J. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 515–524.