УДК 517.956.2

Об усреднении локально периодических эллиптических и параболических операторов[1]

© 2020. Н. Н. Сеник

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3694

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,s}$, где $s > 1/2$, и Q — единичный куб в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле. Пусть задан набор комплексных равномерно ограниченных отображений $A_{kl} \in C^{0,1}(\bar{\Omega}; \tilde{L}_\infty(Q))^{n\times n}$ на $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^d$, липшицевых по первой переменной и периодических относительно решетки $\mathbb{Z}^d$ по второй. Положим $D = -i\nabla$ и $A^\varepsilon_{kl}(x) = A_{kl}(x, x/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, и рассмотрим матричный оператор $\mathscr{A}^\varepsilon$, который определяется формулой

$$\mathscr{A}^\varepsilon = D^* A^\varepsilon D = \sum_{k,l=1}^{d} D_k A^\varepsilon_{kl} D_l \tag{1}$$

и действует из комплексного пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega)^n$ функций с нулевым следом на $\partial\Omega$ в двойственное к нему пространство $H^{-1}(\Omega)^n$. При малых значениях параметра ε коэффициенты оператора $\mathscr{A}^\varepsilon$ быстро осциллируют с, грубо говоря, медленно меняющейся амплитудой и потому называются локально периодическими. Отметим, что гладкость функции $A = \{A_{kl}\}_{k,l=1}^d$ по одной из переменных обеспечивает только гладкое изменение амплитуды осцилляций функции $A^\varepsilon = \{A^\varepsilon_{kl}\}_{k,l=1}^d$, но сама A^ε может иметь разрывы.

Мы будем предполагать, что оператор $\mathscr{A}^\varepsilon$ сильно эллиптичен и, более того, сильно коэрцитивен равномерно по параметру ε из некоторого интервала $\mathcal{E} = (0, \varepsilon_0]$, т. е. при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполнена оценка

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du, Du)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_A \|Du\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad u \in \mathring{H}^1(\Omega)^n, \tag{2}$$

с постоянной $c_A > 0$. Благодаря неравенству Фридрихса также

$$\operatorname{Re}(A^\varepsilon Du, Du)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_A C_F^{-2} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad u \in \mathring{H}^1(\Omega)^n, \tag{3}$$

где C_F — постоянная из неравенства Фридрихса (можно взять, например, $C_F = \operatorname{diam}\Omega$), и потому при произвольных $\varepsilon \in \mathcal{E}$ спектр оператора $\mathscr{A}^\varepsilon$ находится в «усеченном» секторе

$$\mathcal{S}_I = \bigl\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant c_A^{-1}\|A\|_{L_\infty} \operatorname{Re} z \ \text{ и } \ \operatorname{Re} z \geqslant c_A C_F^{-2}\bigr\}, \tag{4}$$

а сам оператор оказывается m-секториальным. Определим теперь семейство «усеченных» секторов

$$\mathcal{S}(\delta,\gamma) = \bigl\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant \delta \operatorname{Re} z \ \text{ и } \ \operatorname{Re} z \geqslant \gamma\bigr\}. \tag{5}$$

[1]Работа поддержана грантом Российского научного фонда №17-11-01069.

Сектору $\mathcal{S}_I$ в нем отвечают параметры $\delta_I = c_A^{-1}\|A\|_{L_\infty}$ и $\gamma_I = c_A C_F^{-2}$. Далее, пусть функция $\rho \in C^{0,1}(\bar{\Omega}; \tilde{L}_\infty(Q))^{n\times n}$ такова, что матрица $\rho(x,y)$ самосопряжена и положительно определена равномерно по переменным x и y. Из семейства (5) выделим еще один «усеченный» сектор $\mathcal{S}_\rho$ — с параметрами $\delta_\rho = \delta_I$ и $\gamma_\rho = \gamma_I\|\rho\|_{L_\infty}^{-1}$. Очевидно, что $\mathcal{S}_\rho \subset \mathcal{S}(\delta,\gamma)$ при любых $\delta > \delta_\rho$ и $\gamma < \gamma_\rho$, притом $\operatorname{dist}(\mathcal{S}_\rho, \partial\mathcal{S}(\delta,\gamma)) > 0$. По $\delta > \delta_\rho$ подберем $\gamma_\rho(\delta) < \gamma_\rho$ так, чтобы расстояние между верхними гранями секторов $\mathcal{S}(\delta,\gamma_\rho(\delta))$ и $\mathcal{S}_\rho$ совпало с расстоянием между их боковыми гранями, и положим $\mathcal{S}_\rho(\delta) = \mathcal{S}(\delta,\gamma_\rho(\delta))$. По построению $\mathcal{S}_\rho(\delta)$ лежит в правой полуплоскости и $\operatorname{Re}\mathcal{S}_\rho(\delta) \geqslant \gamma_\rho(\delta) > 0$. Замыкание дополнения к $\mathcal{S}_\rho(\delta)$ обозначим через $\mathcal{R}_\rho(\delta)$.

Положим $\rho^\varepsilon(x) = \rho(x, x/\varepsilon)$. Если $\mu \notin \mathcal{S}_\rho$, то оператор $\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon$ обратим, а обратный к нему ограничен равномерно по $\varepsilon \in \mathcal{E}$. При f и φ из $L_2(\Omega)^n$ рассмотрим эллиптическую задачу

$$\mathscr{A}^\varepsilon u_\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon u_\varepsilon = f \tag{6}$$

и задачу Коши для однородного параболического уравнения

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} = -\mathscr{A}^\varepsilon v_\varepsilon, \\ \rho^\varepsilon v_\varepsilon|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Как известно из классических фактов теории усреднения, функции u_ε и $v_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$, $t > 0$, сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решениям соответственно эллиптической задачи

$$\mathscr{A}^0 u_0 - \mu\rho^0 u_0 = f \tag{8}$$

и задачи Коши

$$\begin{cases} \rho^0 \dfrac{\partial v_0}{\partial t} = -\mathscr{A}^0 v_0, \\ \rho^0 v_0|_{t=0} = \varphi, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathscr{A}^0$ — оператор того же вида, что и $\mathscr{A}^\varepsilon$, но с медленно меняющимися коэффициентами; медленно изменяется и функция ρ^0. В приложениях это обычно интерпретируется как усреднение среды, или ее «гомогенизация».

В простейшем случае, когда $\rho(x,y) = I$, сходимость решений означает, что у резольвенты оператора $\mathscr{A}^\varepsilon$ и соответствующей параболической полугруппы есть пределы в сильной операторной топологии на пространстве $L_2(\Omega)^n$. Сильной сходимости по операторной норме между $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$, вообще говоря, нет, но можно говорить об операторных приближениях.

Операторным приближениям и оценкам погрешности в полностью периодическом случае (когда функция A не зависит от первого аргумента) посвящены многие работы, см., например, [1]–[12]. Хотя локально периодические задачи усреднения во многом и близки к полностью периодическим, они оказываются существенно сложнее технически и потому разработаны хуже. В работе [13] были найдены приближения для резольвенты оператора $\mathscr{A}^\varepsilon$, однако скорость сходимости в операторной топологии на $L_2(\Omega)^n$ была заведомо неточна. Результаты такого типа для параболической полугруппы $e^{-t\mathscr{A}^\varepsilon}$, по-видимому, ранее получены не были. Отметим все же статью [14], где для аналогичной скалярной задачи во всем пространстве была найдена грубая оценка скорости сходимости параболической полугруппы по операторной норме на $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Эллиптическая и параболическая задачи (6) и (7) тесно связаны между собой, и, чтобы в полной мере использовать эту связь, мы будем интересоваться зависимостью погрешности приближений для «обобщенной» резольвенты задачи (6) не только от малого параметра ε, но еще и от спектрального параметра μ (теорема 1). В дальнейшем это позволит нам установить «правильную» зависимость погрешности приближений для параболической полугруппы как от малого параметра ε, так и от времени t (теорема 2). Идея перехода от двухпараметрических оценок для резольвенты полностью периодического оператора к двухпараметрическим оценкам для соответствующей параболической полугруппы была предложена в работе [8] (см. также [11]).

2. Эффективный оператор и корректор. Оператор $\mathscr{A}^0$, который появляется в задачах (8) и (9), называется эффективным. Он определяется следующим образом. Каким-нибудь способом продолжим A до $A \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{L}_\infty(Q))$. При $x \in \mathbb{R}^d$ и $\xi \in \mathbb{C}^{d\times n}$ введем функцию $N_\xi(x, \cdot\,)$ — решение вспомогательной задачи

$$D_2^* A(x, \cdot\,)(D_2 N_\xi(x, \cdot\,) + \xi) = 0, \qquad \int_Q N_\xi(x, y)\, dy = 0, \tag{10}$$

на кубе Q с периодическими граничными условиями; иначе говоря, $N_\xi(x, \cdot\,)$ принадлежит периодическому пространству Соболева $\tilde{H}^1(Q)^n$ и удовлетворяет равенствам (10). Благодаря условию (2) эта задача сильно эллиптична, а ее решение существует и единственно. Тогда отображение $\xi \mapsto N_\xi$ есть оператор умножения на функцию, которую обозначим через N. Несложно видеть, что $N \in C^{0,1}(\bar{\mathbb{R}}^d; \tilde{H}^1(Q))$, а потому

$$A^0(x) = \int_Q A(x, y)\,(I + D_2 N(x, y))\, dy \tag{11}$$

принадлежит классу $C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Эффективный оператор $\mathscr{A}^0$ задается формулой

$$\mathscr{A}^0 = D^* A^0 D \tag{12}$$

и действует между $H^2(\Omega)^n \cap \mathring{H}^1(\Omega)^n$ и $L_2(\Omega)^n$. Он m-секториален со спектром внутри «усеченного» сектора $\mathcal{S}_I$.

Эффективный коэффициент ρ^0, также входящий в задачи (8) и (9), представляет собой среднее от ρ по ячейке:

$$\rho^0(x) = \int_Q \rho(x, y)\, dy. \tag{13}$$

При этом оператор $\mathscr{A}^0 - \mu\rho^0$ оказывается обратимым при любых $\mu \notin \mathcal{S}_\rho$.

Чтобы описать приближения в пространстве $H^1(\Omega)^n$, нам понадобятся так называемые корректоры. Фиксируем линейный ограниченный оператор продолжения $\mathscr{E}$, отображающий $L_2(\Omega)^n$, $H^1(\Omega)^n$ и $H^2(\Omega)^n$ в такие же классы на $\mathbb{R}^d$. Корректор $\mathscr{K}_\mu^\varepsilon$ непрерывно переводит $L_2(\Omega)^n$ в $H^1(\Omega)^n$ и действует по формуле

$$U_\varepsilon(x) = \mathscr{K}_\mu^\varepsilon f(x) = \int_Q N(x+\varepsilon z, x/\varepsilon)\, D\mathscr{E} u_0(x+\varepsilon z)\, dz. \tag{14}$$

В его определении неявно присутствует сглаживание по Стеклову, и этим сглаживанием $\mathscr{K}_\mu^\varepsilon$ отличается от традиционного «эллиптического» корректора, образ которого в наших условиях, вообще говоря, не содержится ни в $H^1(\Omega)^n$, ни даже в $L_2(\Omega)^n$. Аналогично вводится «параболический» корректор:

$$V_\varepsilon(x,t) = \mathscr{K}^\varepsilon(t)\varphi(x) = \int_Q N(x+\varepsilon z, x/\varepsilon)\, D\mathscr{E} v_0(x+\varepsilon z)\, dz. \tag{15}$$

Благодаря сглаживанию он ограничен как оператор между $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$.

3. Основные результаты. Начнем с приближений для эллиптической задачи. Всюду далее $d_z = \operatorname{dist}(z, \mathcal{S}_\rho)$.

Теорема 1. *Пусть $\delta > \delta_\rho$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\mu \in \mathcal{R}_\rho(\delta)$ и $f \in L_2(\Omega)^n$*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon d_\mu^{-1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{16}$$

$$\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon U_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon^{1/2} d_\mu^{-1/4})\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{17}$$

Постоянная C контролируется явно через величины δ, n, d, c_A, а также L_∞-нормы функций A, $D_1 A$, ρ, $D_1\rho$ и ρ^{-1}.

Обе оценки могут быть перенесены на произвольные μ вне спектра эффективной задачи (8), следует лишь заменить $\mathcal{E}$ на некоторую окрестность нуля $\mathcal{E}_\mu \subset \mathcal{E}$, но постоянная C при этом станет зависеть от расстояния между μ и данным спектром. Отметим, что при фиксированном μ погрешность приближения (16) имеет порядок ε — такой же, как в случае задачи во всем пространстве; однако влияние границы ведет к ухудшению погрешности приближения (17), которое сейчас имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$.

Перейдем к приближениям для параболической полугруппы.

Теорема 2. *Пусть $\gamma \in (0, \gamma_\rho)$. Тогда при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $t \geqslant \varepsilon^2$ и $\varphi \in L_2(\Omega)^n$*

$$\|v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - v_0(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant Ce^{-\gamma t}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \tag{18}$$

$$\|v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - v_0(\,\cdot\,,t) - \varepsilon V_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant Ce^{-\gamma t}\varepsilon^{1/2} t^{-3/4}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}. \tag{19}$$

Постоянная C явно контролируется через величины γ, n, d, c_A, а также L_∞-нормы функций A, $D_1 A$, ρ, $D_1\rho$ и ρ^{-1}.

Поясним, что экспоненциальное убывание погрешности по времени связано с тем, что спектр задачи (6) находится в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \geqslant \gamma_\rho\}$, а γ_ρ положительно. Отметим также, что при малых t порядка ε^2 и ниже эффект усреднения, связанный с быстрыми осцилляциями коэффициентов, пропадает.

3. Метод исследования. Для доказательства эллиптических оценок из теоремы 1 мы развиваем подход к локально периодическим задачам усреднения во всем пространстве, предложенный в работе [15] (см. также [16]). Напомним, что главная его идея заключалась в том, чтобы установить операторное равенство вида

$$(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon)^{-1} - (\mathscr{A}^0 - \mu\rho^0)^{-1} - \varepsilon\mathscr{K}_\mu^\varepsilon = (\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon)^{-1}(\cdots)(\mathscr{A}^0 - \mu\rho^0)^{-1},$$

которое интерпретировалось как обобщенное резольвентное тождество. Далее выяснялось, что старшие вклады от слагаемых в скобках сокращают друг друга, а оставшиеся слагаемые малы. При этом использовались различные соображения двойственности, в частности, первая формула Грина позволяла перейти от решения исходной задачи (6) к решению похожей сопряженной задачи. Однако сейчас в формуле Грина появляется граничный член, который приводит к возникновению еще одного слагаемого — поправки $\mathscr{B}_\mu^\varepsilon$ типа пограничного слоя, сосредоточенной в ε-окрестности границы $\partial\Omega$. Если учесть это новое слагаемое, то, как и для задачи во всем пространстве, получим

$$\|(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon)^{-1} - (\mathscr{A}^0 - \mu\rho^0)^{-1} - \varepsilon\mathscr{K}_\mu^\varepsilon - \varepsilon\mathscr{B}_\mu^\varepsilon\|_{L_2\to L_2} \leqslant C\varepsilon d_\mu^{-1/2},$$
$$\|(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon)^{-1} - (\mathscr{A}^0 - \mu\rho^0)^{-1} - \varepsilon\mathscr{K}_\mu^\varepsilon - \varepsilon\mathscr{B}_\mu^\varepsilon\|_{L_2\to H^1} \leqslant C\varepsilon.$$

Вычисление поправки $\mathscr{B}_\mu^\varepsilon$ сводится к обращению оператора $\mathscr{A}^\varepsilon$, но ее удается подходящим образом оценить, что в конечном итоге как раз и приводит к приближениям (16) и (17).

В основе доказательства теоремы 2 лежит представление операторной экспоненты через «обобщенную» резольвенту, см. [8] и [11]. Выберем $\delta > \delta_\rho$ так, чтобы $\gamma_\rho(\delta)$ совпало с γ. Тогда

$$v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}_\rho(\delta)} e^{-\mu t}(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu\rho^\varepsilon)^{-1}\varphi\,d\mu,$$

где контур $\partial\mathcal{R}_\rho(\delta)$ обходится в положительном направлении вокруг «усеченного» сектора $\mathcal{S}_\rho$. Аналогичные представления верны также для функций v_0 и V_ε. Тогда оценки (18) и (19) вытекают из соответствующих оценок теоремы 1.

Благодарности. Автор признателен жюри конкурса стипендии им. В. А. Рохлина и конкурса стипендий «Молодая математика России», поддержкой которых пользовался при выполнении этой работы.

Литература

[1] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524. **[2]** V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 224–237. **[3]** G. Griso, *Anal. Appl.*, **4**:1 (2006), 61–79. **[4]** М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **24**:6 (2012), 139–177. **[5]** T. A. Suslina, *Mathematika*, **59**:2 (2013), 463–476. **[6]** C. E. Kenig, F. Lin, Zh. Shen, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **103**:3 (2012), Q1
1009–1036. **[7]** Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **27**:4 (2015), 87–166. **[8]** Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, **49**:1 (2015), 88–93. **[9]** Yu. M. Meshkova,

T. A. Suslina, *Appl. Anal.*, **95**:8 (2016), 1736–1775. **[10]** Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, **51**:3 (2017), 87–93. **[11]** Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **29**:6 (2017), 99–158. **[12]** Yu. M. Meshkova, T. A. Suslina, arXiv: 1702.00550. **[13]** С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, *Докл. РАН*, **415**:3 (2007), 304–309. **[14]** С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, *Докл. РАН*, **428**:2 (2009), 166–170. **[15]** N. N. Senik, arXiv: 1703.02023. **[16]** Н. Н. Сеник, *Функц. анализ и его прил.*, **51**:2 (2017), 92–96.

Н. Н. Сеник
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nnsenik@gmail.com

Поступила в редакцию
13 мая 2019 г.

Вопрос к автору

Q1. Проверьте, пожалуйста, том в работе [6]. По DOI получается 203, остальное совпадает.