

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДРОБНЫМ ЛАПЛАСИАНОМ НЕЙМАНА И КРИТИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© Н. С. УСТИНОВ

Получены достаточные условия существования решений с минимальной энергией для задачи, порожденной дробным неравенством Соболева, в ограниченной области $\Omega \in C^2 : (-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u(x) + u(x) = u^{2_s^*-1}(x)$. Дробный лапласиан $(-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s$ в левой части — это s -ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $s \in (0, 1)$, $2_s^* = 2n/(n - 2s)$. В локальном случае $s = 1$ соответствующие результаты были получены ранее для лапласиана и p -лапласиана с условием Неймана.

§1. Введение

В настоящей работе изучается вопрос существования решений с минимальной энергией в C^2 -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ для задачи

$$(-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u + u = |u|^{2_s^*-2}u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega), \quad (1)$$

где $s \in (0, 1)$ и $2_s^* := \frac{2n}{n-2s}$. Дробный лапласиан $(-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s$ в левой части уравнения — это спектральный лапласиан Неймана (определения дробных лапласианов и функциональных пространств будут даны в §2).

Решение задачи (1) с минимальной энергией (с точностью до домножения на константу) — это минимайзер (если он существует) функционала $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u]$:

$$\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u] := \frac{\langle (-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2}, \quad \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} := \inf_{u \in \mathcal{D}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u]. \quad (2)$$

В силу неоднородности $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u]$ при гомотетиях, в пространстве ($\Omega = \mathbb{R}^n$) или полупространстве ($\Omega = \mathbb{R}_+^n$) инфимум в (2) не достигается, и, таким образом, решений с минимальной энергией у задачи (1) не существует.

Ключевые слова: дробный лапласиан, существование решений, достижимость точной константы, спектральный лапласиан Неймана.

Работа поддержана грантом РФФИ №20-01-00630А.

Однако известно, что имеет место дробное неравенство Соболева (см. [15, теорема 1.2, (22)])

$$\mathcal{S}_{s, \mathbb{R}^n}^{\text{Sp}} := \min_{u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)} \frac{\langle (-\Delta)^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_{2^*}^s(\mathbb{R}^n)}^2} > 0,$$

и минимум достигается (см. [4]) на единственной функции (здесь и далее: *с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов*)

$$\Phi_{s,a}(x) := (a^2 + |x|^2)^{\frac{2s-n}{2}} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}^n}^{\text{Sp}} = 2^{2s} \pi^s \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + s)}{\Gamma(\frac{n}{2} - s)} \left[\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right]^{\frac{2s}{n}}. \quad (3)$$

Более того, в полупространстве \mathbb{R}_+^n имеет место соотношение (см. [9, теорема 1.2])

$$\mathcal{S}_{s, \mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}} = \min_{u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_{2^*}^s(\mathbb{R}_+^n)}^2} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}} = 2^{-\frac{2s}{n}} \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}^n}^{\text{Sp}}, \quad (4)$$

а минимайзер, как и в \mathbb{R}^n , единственен и равен $\Phi_{s,a}(x)$. В частности, $\Phi_{s,a}(x)$ (после домножения на подходящую константу) является решением уравнения

$$(-\Delta)_{\text{Sp}}^s u = |u|^{2^*_s-2} u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^n$$

с минимальной энергией.

В локальном случае $s = 1$ задача (1) имеет вид (здесь $2^* := \frac{2n}{n-2}$)

$$-\Delta u + u = |u|^{2^*-2} u, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0, \quad (5)$$

а в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_+^n рассматривается задача без слабого члена в левой части. В этом случае решение единственно и равно $\Phi_{1,a}(x)$, а точные константы (см. (3) и (4) при $s = 1$) известны давно (см. [2, 11]). В [1, 13] было показано, что при $n \geq 3$ в C^2 -гладкой ограниченной области Ω задача (5) имеет положительное решение с минимальной энергией. В [14] была изучена задача для уравнения, аналогичного (5), с p -лапласианом в левой части.

В настоящей работе получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — C^2 -гладкая ограниченная область и $2s > 1$. Тогда задача (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение с минимальной энергией.

Замечание 1. Мы полагаем, что условия теоремы 1 являются точными, однако этот вопрос остается открытым.

Для других определений дробного лапласиана Неймана (см., например, [9]) аналогичные задачи не рассматривались. Задача такого типа для спектрального лапласиана Дирихле была рассмотрена в [12].

Статья имеет следующую структуру: в §2 приводятся предварительные сведения о дробных лапласианах и вводится продолжение Стинга–Торреа. В §3 утверждение теоремы 1 выводится из четырех вспомогательных лемм. Доказательства этих лемм приведены в §§4–5.

Введем некоторые обозначения.

- $\mathbb{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса r с центром в точке x . Для краткости, $\mathbb{B}_r := \mathbb{B}_r(0)$.
- $\omega_{n-1} := \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ — площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n .
- $\varphi_r(x)$ — гладкая функция-срезка

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} 1, & |x| < \frac{r}{2} \\ 0, & |x| > r \end{cases}, \quad |\nabla_x \varphi_r(x)| \leq \frac{C}{r}.$$

- Через C мы будем обозначать константы, зависящие только от n и s , значение которых для нас несущественно; в случае зависимости константы от дополнительного параметра мы будем указывать его в скобках.
- Запись $o_\varepsilon(1)$ означает, что величина стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Полупространство $\mathbb{R}_+^n := \{x \equiv (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.
- Для функции $f \in L_1(\Omega)$ функция \bar{f} определяется равенством

$$\bar{f}(x) := f(x) - |\Omega|^{-1} \cdot \int_{\Omega} f(x) dx, \quad \int_{\Omega} \bar{f}(x) dx = 0. \quad (6)$$

§2. Предварительные сведения

Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в \mathbb{R}^n определяется как

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)), \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где преобразование Фурье \mathcal{F} задается формулой

$$\mathcal{F}u(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} u(x) dx.$$

Его квадратичная форма имеет вид

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Областью определения $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$ является пространство $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n) \mid \langle (-\Delta)^s u, u \rangle < \infty\}.$$

Ввиду дробного неравенства Соболева пространство $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$ совпадает с замыканием пространства $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по форме $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$.

Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta)_{\text{Sp}}^s$ определяется как s -ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме: при $\Omega = \mathbb{R}_+^n$

$$\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle := \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{2s} |\widehat{\mathcal{F}}u(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\widehat{\mathcal{F}}u(\xi)$ определяется по формуле

$$\widehat{\mathcal{F}}u(\xi) := \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) e^{-i\langle \xi', x' \rangle} \cos(x_n \xi_n) dx,$$

а в случае ограниченной липшицевой области Ω квадратичная форма равна

$$\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \langle u, \phi_j \rangle^2, \quad (7)$$

где λ_j — собственные числа, а ϕ_j — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа (мы считаем, что $\lambda_0 = 0$ для собственной функции $\phi_0 = C$). Областью определения квадратичной формы $\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle$ является пространство $\mathcal{D}^s(\Omega)$:

$$\mathcal{D}^s(\Omega) := \{u \in L_{2^*}^s(\Omega) \mid \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle < \infty\}.$$

В ограниченной области Ω это пространство совпадает со стандартным пространством Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (см. [16] и [17, §2.3.3]). Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 = \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Введенная норма эквивалентна стандартной норме в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство леммы 1 в работе [7]).

В [10] было показано, что спектральный лапласиан Неймана может быть получен посредством продолжения Стинга–Торреа (далее, **СТ-продолжение**; для краткости будем обозначать $X \equiv (x, t)$): решение w_{Sp} задачи

$$-\operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla_X w(x, t)) = 0 \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} \right|_{x \in \partial \Omega} = 0$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] := \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X w(x, t)|^2 dx dt \quad (8)$$

существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u(x) = -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} t^{1-2s} \partial_t w_{\mathbb{S}^p}(x, t) \quad \text{с} \quad C_s := \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \cdot \Gamma(1-s)}. \quad (9)$$

Кроме того, $w_{\mathbb{S}^p}$ можно получить как минимайзер функционала (8) по пространству

$$\mathfrak{W}_s(\Omega \times \mathbb{R}_+) := \{w(X) \mid \mathcal{E}_{s,\Omega}[w] < \infty, w|_{t=0} = u\},$$

и несложно показать, что квадратичная форма (7) выражается через (8):

$$\langle (-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u, u \rangle = C_s \mathcal{E}_{s,\Omega}[w_{\mathbb{S}^p}]. \quad (10)$$

Отдельно отметим, что соответствующий результат для оператора $(-\Delta)^s$ в \mathbb{R}^n был получен в [3], а функция $w_{\mathbb{S}^p}$ в этом случае называется продолжением Каффарелли–Сильвестра (**КС-продолжение**).

Мы будем называть любую функцию $w \in \mathfrak{W}_s(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ **допустимым** продолжением функции $u(x)$. Для допустимого продолжения очевидно неравенство $\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] \geq \mathcal{E}_{s,\Omega}[w_{\mathbb{S}^p}]$.

Покажем, что решения с минимальной энергией в задаче (1) можно считать неотрицательными. Действительно, замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u]$, как показывает следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ при $s \in (0, 1)$. Тогда $|u| \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\langle (-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s u, u \rangle \geq \langle (-\Delta)_{\mathbb{S}^p}^s |u|, |u| \rangle.$$

Кроме того, если $u(x)$ меняет знак в Ω , то неравенство строгое.

Доказательство. Дословно повторяет доказательство теоремы 3 в работе [8]. \square

§3. Доказательство теоремы 1

Схема доказательства похожа на [12, теорема 2], однако вложение здесь критическое и требует модификации предельного случая принципа Лионса [6]. Рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k(x)$ для функционала (2): согласно предложению 1 можно считать, что $u_k(x) \geq 0$ и

$\|u_k\|_{L_{2_s^*}(\Omega)} = 1$. По функциям u_k построим СТ-продолжения $w_k(X)$ и определим функции $U_k(x)$ формулой

$$U_k(x) := C_s \int_0^\infty t^{1-2s} |\nabla_X w_k(X)|^2 dt. \quad (11)$$

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, функции w_k ограничены по норме, порождаемой квадратичной формой $\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] + \|w\|_{L_2(\Omega)}^2$, а функции U_k и $|u_k|^{2_s^*}$ ограничены в $L_1(\Omega)$. Не умаляя общности, можно считать, что:

- $u_k \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$; отсюда следует, что $u_k \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$;
- $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$ (это соотношение определяет w с точностью до константы);
- $|u_k|^{2_s^*} \rightarrow \mu$ и $U_k \rightarrow \mathcal{M}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Из построения u_k и U_k следует, что выполнена цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1d\mathcal{M} + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\|U_k\|_{L_1(\Omega)} + \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] \\ &= \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \left(\int_\Omega 1d\mu \right)^{\frac{2}{2_s^*}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следующие утверждения доказаны в §4.

Лемма 1. *Произвольную константу в определении w можно выбрать так, что функция w является СТ-продолжением функции u .*

Лемма 2. *Для мер μ и \mathcal{M} справедливы соотношения:*

$$\mu = |u|^{2_s^*} + \sum_{j \in J} \alpha_j \delta_{x_j}; \quad \alpha_j \geq 0; \quad (13)$$

$$\mathcal{M} \geq U + \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}; \quad \beta_j \geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}}, \quad (14)$$

где $j \in J$ — не более чем счетный набор индексов, δ_{x_j} — дельта-функции в точках $x_j \in \overline{\Omega}$, а функция U получается из w по формуле (11).

Неравенство (14), равенство (10) и лемма 1 показывают, что выполнено соотношение

$$\int_\Omega 1d\mathcal{M} \geq \|U\|_{L_1(\Omega)} + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}} = \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}},$$

откуда, с учетом (2), получаем оценку на левую часть (12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1d\mathcal{M} + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\geq \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}} \\ &\geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 + \sum_{j \in J} \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда, преобразуя правую часть (12) с учетом (13), получаем

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 + \sum_{j \in J} \alpha_j \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 + \sum_{j \in J} \alpha_j^{\frac{2}{2_s^*}} \right). \quad (16)$$

Эта оценка может быть выполнена только в том случае, если в ее правой части есть ровно одно ненулевое слагаемое, а сама оценка обращается в равенство. Таким образом, у нас есть два варианта.

1 (Компактность). Все α_j равны нулю: будучи частью (16), оценка (15) также вырождается в равенство и $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u] = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}$, поэтому u минимизирует функционал $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[u]$ и, после домножения на подходящую константу, является решением задачи (1) с минимальной энергией.

2 (Концентрация). Есть ровно одно ненулевое слагаемое α_j : можно считать, что $\alpha_0 = 1$ и $u \equiv 0$.

Доказательства следующих утверждений содержатся в §§4–5.

Лемма 3. В случае концентрации выполнено неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \geq \min \left(\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}}, \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}} \right). \quad (17)$$

Замечание 2. Правая часть (17) равна $\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}}$, как показывает (4).

Лемма 4. Пусть $n \geq 3$ и $2s > 1$. Тогда существует функция $\mathcal{V} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, такая что

$$\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[\mathcal{V}] < \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}}.$$

Из леммы 4 следует невозможность неравенства (17), что исключает возможность концентрации и доказывает теорему.

§4. Доказательство лемм 1–3

Доказательство леммы 1. Напомним, что функция w определялась сходимостью $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$, где w_k являются СТ-продолжениями функций u_k . Для самих функций u_k выполнено $u_k \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и, следовательно, $u_k \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$.

Для функции $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ обозначим ее СТ-продолжение через \tilde{w} . Это продолжение может быть разложено в ряд Фурье по собственным функциям задачи Неймана для оператора Лапласа (см. [10, (3.1)–(3.8)]):

$$\tilde{w}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(t)\phi_i(x), \tag{18}$$

$$\text{с } d_i(t) = \langle u, \phi_i \rangle \cdot \mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t), \quad \mathcal{Q}_s(\tau) := \tau^s \frac{2^{1-s}}{\Gamma(s)} \mathcal{K}_s(\tau),$$

где $\mathcal{K}_s(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Для функций \mathcal{K}_s выполнены следующие асимптотики (см., например, [10, (3.7)]):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_s(\tau) &\sim \Gamma(s)2^{s-1}\tau^{-s} \quad \text{при } \tau \rightarrow 0; \\ \mathcal{K}_s(\tau) &\sim \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\tau} (1 + O(\tau^{-1})) \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$\mathcal{Q}_s(\tau) \leq C \cdot \min(1, \tau^{-1}). \tag{19}$$

Поэтому при любом $i \geq 1$ выполнено

$$\|\mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \int_0^1 \mathcal{Q}_s^2(\lambda_i^{1/2}t) dt + C \int_1^{\infty} \lambda_i^{-1}t^{-2} dt \leq C(\lambda_1).$$

Пусть $\delta < 1$. Покажем, что $w_k \rightarrow \tilde{w}$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$. Из представления (18) имеем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{w} - w_k\|_{L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \langle u - u_k, \phi_i \rangle^2 \cdot \|\mathcal{Q}_s(\lambda_i t)\|_{L_2[\delta, \delta^{-1}]}^2 \\ &\leq C(\delta, \lambda_1) \cdot \|u - u_k\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь разложением (6), запишем w_k как сумму ортогональных в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$ слагаемых:

$$w_k = \bar{w}_k + c_k, \quad \bar{w}_k := w_k - (\delta^{-1} - \delta)|\Omega|^{-1} \cdot \int_{\delta}^{\delta^{-1}} \int_{\Omega} w_k dX.$$

Поскольку $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$, то $\bar{w}_k \rightarrow \bar{w}$ в $W_2^1(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$. Отсюда следует сходимость $\bar{w}_k \rightarrow \bar{w}$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$, что влечет

$$w = \tilde{w} + C. \quad \square$$

Доказательство леммы 2. Основано на предельном случае принципа Лионса [6] и проводится аналогично [18, теорема 1.4.2]. Разберем два случая: $u \equiv 0$ и $u \neq 0$.

1. Пусть $u \equiv 0$. Воспользуемся представлением (6): пусть $u_k := \bar{u}_k + c_k$. Поскольку $u_k \rightarrow u \equiv 0$ сильно в $L_2(\Omega)$, из равенства

$$\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\bar{u}_k\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_k^2 \cdot |\Omega|$$

имеем $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ и $c_k \rightarrow 0$. Более того, для $\eta \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ и любого $\epsilon > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1 + \epsilon) \cdot \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} + C(\epsilon) c_k^{2_s^*} \|\eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} \right] \\ &= (1 + \epsilon) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (7) следует, что $\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s \bar{u}_k, \bar{u}_k \rangle = \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u_k, u_k \rangle$, поэтому из (20) при $\eta \equiv 1$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s, \Omega}^{\text{Sp}}[\bar{u}_k] &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s u_k, u_k \rangle + \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2}{(1 + \epsilon)^{-\frac{2}{2_s^*}} \cdot \|u_k\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}^2} \\ &= (1 + \epsilon)^{\frac{2}{2_s^*}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s, \Omega}^{\text{Sp}}[u_k] = (1 + \epsilon)^{\frac{2}{2_s^*}} \cdot \mathcal{S}_{s, \Omega}^{\text{Sp}}. \end{aligned}$$

Поскольку ϵ произвольно, получаем, что последовательность $\{\bar{u}_k\}$ является минимизирующей. Более того, из обратного к (20) неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1 + \epsilon) \cdot \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} + C(\epsilon) c_k^{2_s^*} \|\eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} \right] \\ &= (1 + \epsilon) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}, \end{aligned}$$

следует $\|\bar{u}_k\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} \rightarrow \mu$. СТ-продолжения функций \bar{u}_k имеют вид $\bar{w}_k := w_k - c_k$, и поэтому функции U_k из формулы (11) не меняются при замене u_k на \bar{u}_k .

Из того факта, что $\bar{w}_k \eta$ — допустимое продолжение $\bar{u}_k \eta$, имеем

$$\mathcal{S}_{s, \Omega}^{\text{Sp}} \cdot \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}^2 \leq \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s \bar{u}_k \eta, \bar{u}_k \eta \rangle + \|\bar{u}_k \eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_s \mathcal{E}_{s, \Omega}[\bar{w}_k \eta] + \|\bar{u}_k \eta\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Из сходимости $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}}{C_s} \left(\int_{\Omega} \eta^{2^*}(x) d\mu \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \eta] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \left[t^{1-2s} |\nabla_X \bar{w}_k|^2 \eta^2 \right. \\ &\quad \left. + 2t^{1-2s} \langle \nabla_x \bar{w}_k, \nabla_x \eta \rangle \bar{w}_k \eta + t^{1-2s} |\nabla_x \eta|^2 \bar{w}_k^2 \right] dX. \end{aligned} \tag{21}$$

Предел первого слагаемого в (21) равен

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X \bar{w}_k|^2 \eta^2 dX = C_s^{-1} \cdot \int_{\Omega} \eta^2(x) d\mathcal{M}.$$

Покажем, что предел третьего слагаемого в (21) равен нулю. Воспользуемся представлением (18) для \bar{w}_k (здесь суммирование ведется по $i \geq 1$)

$$\bar{w}_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{ik}(t) \phi_i(x) \quad \text{с} \quad d_{ik}(t) = \langle \bar{u}_k, \phi_i \rangle \cdot \mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2} t).$$

Из оценки (19) и того факта, что $\lambda_i \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_{\Omega} \bar{w}_k^2(X) |\nabla_x \eta|^2 dx \leq C(\lambda_1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \langle \bar{u}_k, \phi_i \rangle^2 \cdot \min(1, t^{-2}),$$

откуда получаем требуемое равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_x \eta|^2 \bar{w}_k^2 dX \leq C \left(\int_0^1 t^{1-2s} dt + \int_1^{\infty} t^{-1-2s} dt \right) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \bar{u}_k^2 dx = 0.$$

Второе слагаемое в (21) оценивается через первое и третье по неравенству Коши–Буняковского–Шварца, поэтому неравенство (21) принимает вид

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \left(\int_{\Omega} \eta^{2^*}(x) d\mu \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \eta] = \int_{\Omega} \eta^2(x) d\mathcal{M}. \tag{22}$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с локальным случаем; для удобства читателя приведем их полностью: аппроксимацией на любом борелевском множестве $E \subset \Omega$ получаем неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \mu(E)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{M}(E). \tag{23}$$

Ввиду конечности меры \mathcal{M} множество ее атомов $A := \{x \in \Omega \mid \mathcal{M}(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетно. Обозначим множество индексов через J , тогда $A = \{x_j\}_{j \in J}$, $\beta_j := \mathcal{M}(\{x_j\})$, и выполнено неравенство $\mathcal{M} \geq \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}$. Поскольку из (23) следует абсолютная непрерывность μ относительно \mathcal{M} , имеем

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\mathcal{M}, \quad \text{где } f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{M}(\mathbb{B}_r(x))} \quad \text{для } \mathcal{M}\text{-п.в. } x \in \Omega.$$

Также в силу (23) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{M}(\mathbb{B}_r(x))} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}^{\frac{2s}{n-2s}}(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}} = 0 \quad \mathcal{M}\text{-п.в. на } \Omega \setminus A.$$

Для окончания доказательства обозначим $\alpha_j := \beta_j f(x_j)$, неравенства между α_j и β_j следуют из (23).

2. Теперь рассмотрим общий случай. Положим $\widehat{u}_k := u_k - u$, тогда [18, теорема 1.4.1] показывает, что $|\widehat{u}_k|^{2s*}$ слабо сходятся к мере $\mu - |u|^{2s*}$ на $\overline{\Omega}$. Представление для μ получается применением п. 1 для функций \widehat{u}_k .

Получим неравенство для меры \mathcal{M} . По функциям \widehat{u}_k строим СТ-продолжения \widehat{w}_k и функции $\widehat{U}_k(x)$ из формулы (11). Из леммы 1 следует, что $\widehat{w}_k = w_k - w$ (продолжение разности равно разности продолжений), поэтому для любой $\eta(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{U_k - \widehat{U}_k}{C_s} \cdot \eta(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} t^{1-2s} (|\nabla_X w_k|^2 - |\nabla_X (w_k - w)|^2) \eta(x) dX \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} t^{1-2s} (2\langle \nabla_X w_k, \nabla_X w \rangle - |\nabla_X w|^2) \eta(x) dX \stackrel{*}{=} \int_{\Omega} \frac{U}{C_s} \cdot \eta(x) dx, \end{aligned}$$

(равенство $(*)$ следует из $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$). Используя п. 1, получаем требуемое

$$\mathcal{M} = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{U}_k \geq U + \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}. \quad \square$$

Доказательство леммы 3. Напомним, что $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность для функционала (2), $|u_k|^{2s*} \rightarrow \delta_{x_0}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$, а $\mathcal{M} = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \cdot \delta_{x_0}$. В частности, это означает, что $u_k \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$,

и мы находимся в условиях доказательства п. 1 леммы 2. Поэтому $\{\bar{u}_k\}$ также является минимизирующей последовательностью для функционала (2). Также, далее будем считать $x_0 = 0$.

Покажем, что и последовательность $\{\bar{u}_k \varphi_\epsilon\}$ минимизирующая. Действительно, $\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\Omega)}^2 \rightarrow 1$, а для числителя функционала (2) из (22) при $\eta = \varphi_\epsilon$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s \bar{u}_k \varphi_\epsilon, \bar{u}_k \varphi_\epsilon \rangle \leq C_s \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\epsilon] = \int_{\Omega} \varphi_\epsilon^2(x) d\mathcal{M} = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}.$$

Поскольку $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$, получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[\bar{u}_k \varphi_\epsilon] \leq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}$, и поэтому

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[\bar{u}_k \varphi_\epsilon] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle (-\Delta)_{\text{Sp}}^s \bar{u}_k \varphi_\epsilon, \bar{u}_k \varphi_\epsilon \rangle}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\Omega)}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\epsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\Omega)}^2}.$$

Разберем два случая: $0 \in \Omega$ и $0 \in \partial\Omega$.

1. Пусть $0 \in \Omega$. Продолжим функцию $\bar{u}_k \varphi_\epsilon$ нулем и обозначим ее КС-продолжение в \mathbb{R}^n через \dot{w}_k . Поскольку $\bar{w}_k \varphi_\epsilon$ является допустимым продолжением $\bar{u}_k \varphi_\epsilon$ в \mathbb{R}^n , имеем

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\epsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\Omega)}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[\bar{w}_k \varphi_\epsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\mathbb{R}^n)}^2} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[\dot{w}_k]}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\mathbb{R}^n)}^2} \geq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}}.$$

2. Пусть $0 \in \partial\Omega$. При малых ϵ множество $\partial\Omega \cap B_\epsilon$ представляет собой график функции. Не умаляя общности, пусть $x_n = F(x')$, где $F \in \mathcal{C}^2$, $F(0) = 0$ и $\nabla_{x'} F(0) = 0$. Определим замену переменной $\Theta^{-1}(x) := (x', x_n - F(x'))$: она распрямляет границу и имеет единичный якобиан. Обратная замена имеет вид $\Theta(x) = (x', x_n + F(x'))$, и выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\epsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\epsilon\|_{L_{2^*}^s(\Omega)}^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} t^{1-2s} |\nabla_X [\bar{w}_k \varphi_\epsilon](\Theta(x), t)|^2 dX \cdot (1 + o_\epsilon(1))}{\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\bar{u}_k \varphi_\epsilon]^{2^*}(\Theta(x)) dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \end{aligned}$$

($o_\epsilon(1)$ в числителе возникает из оценки производных $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ при замене переменных в градиенте). Ввиду того, что функция $\bar{w}_k(\Theta(x), t) \cdot \varphi_\epsilon(\Theta(x))$ является допустимым продолжением функции $\bar{u}_k(\Theta(x)) \cdot \varphi_\epsilon(\Theta(x))$, выполнено неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{\text{Sp}} \geq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}} \cdot (1 + o_\epsilon(1)).$$

Так как ϵ может быть выбрано сколь угодно малым, лемма 3 доказана. \square

§5. Доказательство леммы 4

Предварительно получим оценки на КС-продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ функции $\Phi_{s,a}(x)$. Оно является решением задачи

$$-\operatorname{div}(t^{1-2s}\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \quad \mathcal{W}_{s,a}|_{t=0} = \Phi_{s,a}(x), \quad (24)$$

а также единственным минимайзером функционала $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ в пространстве $\mathfrak{W}_s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Отсюда следует, что продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ является невозрастающей функцией от $|x|$: симметризация Шварца по x не увеличивает $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ (см. [5, теорема 2.31] для симметризации Штейнера; симметризация Шварца может быть получена как предел симметризаций Штейнера), а ее результат является допустимым продолжением $\Phi_{s,a}(x)$. Также отметим, что, в силу симметрии, продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$, ограниченное на $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+$, является СТ-продолжением $\Phi_{s,a}(x)$ в \mathbb{R}_+^n .

Лемма 5. *Для функций $\Phi_{s,a}(x)$ и $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнены равенства*

$$\Phi_{s,a}(ax) = a^{2s-n} \cdot \Phi_{s,1}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_{s,a}(aX) = a^{2s-n} \cdot \mathcal{W}_{s,1}(X), \quad (25)$$

а также оценки (при $|x| > 1$ и $|X| > 1$ соответственно)

$$\Phi_{s,1}(x) \leq C|x|^{2s-n} \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_{s,1}(X) \leq C|X|^{2s-n}. \quad (26)$$

Более того, для градиента $\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнено равенство

$$\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(aX) = a^{2s-n-1} \cdot \nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X), \quad (27)$$

а при $|X| > 1$ и $2s > 1$ имеет место оценка

$$|\nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X)| \leq C|X|^{2s-n-1}. \quad (28)$$

Доказательство. Равенство (25) и оценка (26) для функции $\Phi_{s,a}$ очевидны из ее определения. Для доказательства оценок на продолжение $\mathcal{W}_{s,a}$ выпишем его в явном виде: в [3] было показано, что КС-продолжение функции u может быть получено по формуле

$$w(X) = \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x - \xi, t) \cdot (-\Delta)^s u(\xi) d\xi \quad \text{с} \quad G_s(X) := \frac{C}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}}}.$$

Поскольку функция $\Phi_{s,a}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(-\Delta)^s \Phi_{s,a}(x) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\mathbb{R}^n)}} \cdot \Phi_{s,a}^{2s-1}(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

получаем

$$\mathcal{W}_{s,a}(X) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^{2_s^*-2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x - \xi, t) \cdot \Phi_{s,a}^{2_s^*-1}(\xi) d\xi. \quad (30)$$

Градиент $\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}(X)$ получается из (30) дифференцированием:

$$\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}(X) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^{2_s^*-2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_X G_s(x - \xi, t) \cdot \Phi_{s,a}^{2_s^*-1}(\xi) d\xi.$$

Равенства (25) и (27) для функции $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ следуют из $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^{2_s^*-2} = a^{-2s} \cdot \|\Phi_{s,1}\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^{2_s^*-2}$. Для примера получим равенство (25):

$$\mathcal{W}_{s,a}(aX) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}^{\text{Sp}} \cdot a^{2s}}{\|\Phi_{s,1}\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^{2_s^*-2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C \cdot a^{-(n+2s)} \Phi_{s,1}^{2_s^*-1}(\xi) \cdot a^n}{(|x - \xi|^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}} a^{n-2s}} d\xi = a^{2s-n} \cdot \mathcal{W}_{s,1}(X).$$

Остается получить оценки для $\mathcal{W}_{s,1}(X)$ и $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Они доказываются идентично; получим, например, оценку (28) для $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Поскольку для $|\nabla_X G_s(X)|$ выполнено очевидное неравенство

$$|\nabla_X G_s(X)| \leq \frac{C}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}},$$

имеем

$$|\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)| \leq \left(\int_{|\xi| \leq \frac{|X|}{2}} + \int_{|\xi| > \frac{|X|}{2}} \right) \frac{C d\xi}{(|x - \xi|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} =: A_1 + A_2.$$

Оценка для A_1 следует из цепочки неравенств $\sqrt{|x - \xi|^2 + t^2} \geq |X| - |\xi| \geq \frac{|X|}{2}$:

$$A_1 \leq \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}.$$

Оценка для A_2 следует из неравенств $3|\xi| \geq |x| + |\xi| \geq |x - \xi|$ и $2s > 1$:

$$A_2 \leq \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-2s+1} (1 + |x - \xi|^2)^{2s-\frac{1}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}. \quad \square$$

Доказательство леммы 4. На границе \mathcal{C}^2 -гладкой области Ω всегда найдется такая точка \tilde{x} , что:

- область Ω выпукла в малой окрестности $B_\varepsilon(\tilde{x})$;
- средняя кривизна границы $\partial\Omega$ в точке \tilde{x} (обозначим ее H_0) положительна;

- вся область Ω находится по одну сторону от касательной плоскости к $\partial\Omega$.

(например, в качестве \tilde{x} подходит точка касания сферы наименьшего радиуса, описанной вокруг Ω , и самой Ω). Не умаляя общности можно считать, что $\tilde{x} = 0$, а ось x_n направлена вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$, и, таким образом, $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$. В таких координатах оказывается, что в качестве искомой функции \mathcal{V} можно взять функцию $\Phi_{s,a}(x)$ с малым параметром a .

Из уравнения (24) интегрированием по частям (с учетом (29) и (4)) получаем:

$$0 = C_s \int_0^\infty \int_\Omega \operatorname{div} (t^{1-2s} \nabla_X \mathcal{W}_{s,a}) \mathcal{W}_{s,a} dX = -C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2 dX \\ + \frac{\mathcal{S}_{s, \mathbb{R}_+^n}^{\operatorname{Sp}}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\mathbb{R}_+^n)}^{2_s^*-2}} \cdot \int_\Omega \Phi_{s,a}^{2_s^*} dx + C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dX,$$

откуда, поскольку $\mathcal{W}_{s,a}$ — допустимое продолжение $\Phi_{s,a}$ в Ω , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,\Omega}^{\operatorname{Sp}}[\Phi_{s,a}] &= \frac{\langle (-\Delta)_{\operatorname{Sp}}^s \Phi_{s,a}, \Phi_{s,a} \rangle + \|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2} \\ &\leq \frac{C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2 dX + \|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2} \\ &= \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}_+^n}^{\operatorname{Sp}} \cdot \left(\frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\mathbb{R}_+^n)}} \right)^{2_s^*-2} \\ &\quad + \frac{C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dX}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2} + \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

При интегрировании радиальных функций в окрестности нуля для формы объема выполнено представление (см., например, [14, §2.6])

$$dx = \frac{1}{2} (\omega_{n-1} r^{n-1} - H_0 \cdot \omega_{n-2} r^n + o(r^n)) dr.$$

Оценим каждый член в (31) по отдельности.

1. Для оценки первого члена получим асимптотику $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}$ при малых a :

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)} &= \int_{\Omega} (a^2 + |x|^2)^{-n} dx \\ &= \left(\int_{\Omega \cap B_\varepsilon} + \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \right) (a^2 + |x|^2)^{-n} dx = \int_{\Omega \cap B_\varepsilon} (a^2 + |x|^2)^{-n} dx + C(\varepsilon) \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{\omega_{n-1} r^{n-1}}{2(a^2 + r^2)^n} dr - \int_0^\varepsilon \frac{H_0 \cdot \omega_{n-2} r^n + o(r^n)}{2(a^2 + r^2)^n} dr + C(\varepsilon) \\ &=: B_1 - B_2 + C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Главный член B_1 оценивается как

$$B_1 = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \left(\mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) - \int_{\frac{\varepsilon}{a}}^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1+r^2)^n} \right) = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) - C(\varepsilon).$$

Оценка B_2 получается следующим образом:

$$\begin{aligned} B_2 &= a^{1-n} (1 + o_\varepsilon(1)) \frac{H_0 \omega_{n-2}}{2} \left(\mathcal{B} \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} \right) - \int_{\frac{\varepsilon}{a}}^\infty \frac{r^n dr}{(1+r^2)^n} \right) \\ &= a^{1-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \cdot C_1 (1 + o_\varepsilon(1)) - C(\varepsilon), \quad \text{где } C_1 = \frac{H_0 \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки для B_1 и B_2 , мы получаем оценку нормы $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}$:

$$\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*}(\Omega)}^{2_s^*-2} = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \cdot [1 - C_1 a (1 + o_\varepsilon(1))] + C(\varepsilon), \quad (32)$$

а из нее оценку первого члена в (31)

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)}} &= \left(\frac{a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \cdot [1 - C_1 a (1 + o_\varepsilon(1))] + C(\varepsilon)}{a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} \right)^{\frac{2_s^*}{n}} \\ &= 1 - C_2 a \cdot [1 + o_\varepsilon(1) + C(\varepsilon) o_a(1)] \end{aligned} \quad (33)$$

с константой $C_2 = \frac{2_s^*}{n} \cdot C_1 > 0$.

2. Оценка последнего члена в (31) зависит от n и s . Выполнено равенство

$$\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega \cap B_\varepsilon} + \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \right) (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx = \int_{\Omega \cap B_\varepsilon} (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx + C(\varepsilon).$$

Поскольку $\Omega \cap B_\varepsilon$ содержится в $\mathbb{R}_+^n \cap B_\varepsilon$, первый интеграл оценивается сверху

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^n} (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx &= \frac{\omega_{n-1}}{2} \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{(a^2 + r^2)^{n-2s}} dr \\ &\leq C(\varepsilon) \cdot \begin{cases} a^{4s-n} & \text{при } n > 4s, \\ |\ln(a)| & \text{при } n = 4s, \\ 1 & \text{при } n < 4s, \end{cases} \end{aligned}$$

(заметим, что эта оценка точна по порядку), и, с учетом (32), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2^*}(\Omega)}^2} &= \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{Ca^{2s-n} \cdot [1 - Ca(1 + o_\varepsilon(1))]} \\ &\leq C(\varepsilon) \cdot \begin{cases} a^{2s} & \text{при } n > 4s, \\ a^{n-2s} |\ln(a)| & \text{при } n = 4s, \\ a^{n-2s} & \text{при } n < 4s. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

3. Для оценки среднего члена в (31) разобьем его числитель на две части:

$$\left(\int_{\partial\Omega \cap B_\varepsilon} + \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} \right) \int_0^\infty t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dX =: E_1 + E_2.$$

Поскольку функция $\mathcal{W}_{s,a}$ радиальна по x и убывает с ростом радиуса, а $\Omega \cap B_\varepsilon$ выпукла, получаем, что нормальная производная $\langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle$ отрицательна при $x \in \partial\Omega \cap B_\varepsilon$. Отсюда следует $E_1 \leq 0$.

Замечание 3. Более тонкие вычисления показывают, что $E_1 \asymp a^{1+2s-n}$, что после деления на $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2^*}(\Omega)}^2$ даст вклад порядка a в (31). Отрицательный член такого порядка у нас уже есть, поэтому уточнение оценки $E_1 \leq 0$ избыточно.

Для получения оценки на E_2 воспользуемся оценками (26) и (28):

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \int_0^\infty \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dS_x dt \\
 &\leq \int_0^\infty \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} t^{1-2s} |\nabla_x \mathcal{W}_{s,a}| \cdot |\mathcal{W}_{s,a}| dS_x dt \\
 &\leq C a^{1-2s+n-1+1-2n+4s-1} \\
 &\quad \times \int_{a^{-1}(\partial\Omega \setminus B_\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{t^{1-2s}}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}} (|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}}} dt dS_x \\
 &= C a^{2s-n} \int_{a^{-1}(\partial\Omega \setminus B_\varepsilon)} |x|^{-2n+2s+1} dS_x \\
 &= C \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} |x|^{-2n+2s+1} dS_x \leq C(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Из оценок (33), (34) и (35) следует оценка

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[\Phi_{s,a}] &\leq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}} \cdot (1 - C_2 a [1 + o_\varepsilon(1) + C(\varepsilon) o_a(1)]) + C(\varepsilon) a^{n-2s} \\
 &\quad + C(\varepsilon) a^{2s} (1 + o_a(1)).
 \end{aligned}$$

Поскольку $n \geq 3$ и $2s > 1$, имеем $\min(2s, n - 2s) > 1$, что при достаточно малых ε и a обеспечивает неравенство $\mathcal{I}_{s,\Omega}^{\text{Sp}}[\Phi_{s,a}] < \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{\text{Sp}}$, и лемма 4 доказана. \square

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность А. И. Назарову за ценные обсуждения и критику при решении задачи. Автор также благодарит участников семинара по вариационному исчислению (ПОМИ РАН) и рецензента за полезные замечания, позволившие улучшить текст работы.

Список литературы

- [1] Adimurthi, Mancini G., *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni, Scuola Norm. Sup., Pisa, **1991**, pp. 9–25.
- [2] Aubin T., *Problemes isoperimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. **11** (1976), no. 4, 573–598.

- [3] Caffarelli L., Silvestre L., *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260.
- [4] Cotsiolis A., Tavoularis N. K., *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **295** (2004), no. 1, 225–236.
- [5] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Math., vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [6] Lions P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I, II*, Rev. Mat. Iberoam. **1** (1985), 45–121, 145–201.
- [7] Musina R., Nazarov A. I., *On fractional Laplacians*, Comm. Partial Differential Equations **39** (2014), no. 9, 1780–1790.
- [8] Musina R., Nazarov A. I., *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian*, Nonlin. Anal. **121** (2015), 123–129.
- [9] Musina R., Nazarov A. I., *Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces*, Adv. Calc. Var., <https://doi.org/10.1515/acv-2018-0020>.
- [10] Stinga P. R., Torrea J. L., *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 11, 2092–2122.
- [11] Talenti G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), no. 1, 353–372.
- [12] Ustinov N., *The effect of curvature in fractional Hardy–Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian*, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 7785–7815.
- [13] Wang X. J., *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Differential Equations **93** (1991), no. 2, 283–310.
- [14] Демьянов А. В., Назаров А. И., *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем*, Алгебра и анализ **17** (2005), no. 5, 105–140.
- [15] Ильин В. П., *Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Мат. сб. **54** (1961), №3, 331–380.
- [16] Слободенцкий Л. Н., *Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных*, Уч. зап. ЛГПИ им. А.И. Герцена **197** (1958), 54–112.
- [17] Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [18] Эванс Л. К., *Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными*, Новосибирск, Тамара Рожковская, 2006.

Санкт-Петербургский
Государственный Университет,
Университетский пр. 28,
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ustinnov@yandex.ru

Поступило 27 мая 2020г.