А. М. Райгородский, Д. Д. Черкашин, Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов, *УМН*, 2020, том 75, выпуск 1(451), 95–154

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9905

2020 г. январь — февраль *т. 75, вып. 1 (451)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.17+519.212.2

Валерию Васильевичу Козлову
по случаю его 70-летнего юбилея

Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов

А. М. Райгородский, Д. Д. Черкашин

Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов неявно берут свое начало в теоремах Гильберта об одноцветных аффинных кубах (1892) и ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях (1927). В дальнейшем, с появлением и развитием теории Рамсея, число задач о раскраске явно заданных гиперграфов росло. Однако систематическое изучение экстремальных задач о раскрасках гиперграфов началось с работ П. Эрдёша и А. Хайнала 60-х годов XX в.

Данный обзор посвящен задачам о поиске гиперграфа с минимальным числом ребер, лежащего в некотором классе гиперграфов, их вариациям и приложениям. Центральной задачей такого типа является задача Эрдёша–Хайнала о нахождении минимального числа ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом не менее трех. Основная цель обзора – осветить обширные продвижения в этой области за последние несколько лет.

Библиография: 168 названий.

Ключевые слова: экстремальная комбинаторика, раскраски гиперграфов.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9905

Содержание

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 16-11-10014).

1. Введение

Начнем с базовых определений. Пара множеств $H := (V, E)$ называется *гиперграфом*, если V конечно, а $E \subset 2^V$. При этом V называется множеством вершин, а E – множеством (гипер)ребер; мы будем полагать, что через каждую вершину проходит хотя бы одно ребро. Заметим, что обычный граф является частным примером гиперграфа. Гиперграф называется n*-однородным*, если мощность любого его ребра равна n. Соответственно, обычный граф является 2-однородным гиперграфом. В большинстве разделов все рассматриваемые гиперграфы будут однородными; для краткости мы иногда будем называть их просто n-графами.

Раскраской гиперграфа в r цветов называется отображение $f\colon V \to \{1, \dots, r\}$. Раскраска гиперграфа в r цветов называется *правильной*, если для любого ребра $e \in E$ существует пара вершин $v_1, v_2 \in e$ таких, что $f(v_1) \neq f(v_2)$. Другими словами, существование правильной раскраски гиперграфа в r цветов означает, что его множество вершин можно разбить на r подмножеств, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$, так, что не существует ребра, являющегося подмножеством V_i. Минимальное r, для которого существует правильная r-раскраска H, называется *хроматическим числом* гиперграфа H.

Возникает естественный вопрос, впервые сформулированный П. Эрдёшем и А. Хайналом [67], [68] в 1961 г.: найти наименьшее число ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающем правильной раскраски в два цвета. Они же ввели обозначение $m(n)$ для этой величины.

Попробуем объяснить, почему этот вопрос естественен. В каком-то смысле хроматическое число является показателем нетривиальности гиперграфа. В дальнейшем мы увидим, что это хорошо согласуется с тем фактом, что все примеры, дающие n-однородный гиперграф с большим хроматическим числом и маленьким количеством ребер, строятся с применением вероятностной техники; более того, способ построить явно хоть сколько-нибудь близкий пример появился только в 2013 г. [81]. Также оказывается, что за размер гиперграфа отвечает именно число ребер, а не число вершин; более того, не очень осмысленно рассматривать количество вершин как дополнительный параметр.

Задаче Эрдёша–Хайнала посвящен раздел 2. В многочисленной литературе раскрашиваемость гиперграфа в два цвета часто называется свойством B (property B). Это название дано Э. В. Миллером [126] в честь Ф. Бернштейна, доказавшего [33], что любое счетное семейство бесконечных множеств обладает свойством B. Задаче Эрдёша–Хайнала и ее обобщениям посвящен обзор А. М. Райгородского и Д. А. Шабанова [132].

Наш обзор не будет касаться сложностных аспектов раскрасок гиперграфов. Отметим только, что, в отличие от графов, даже проверка раскрашиваемости 3-однородного гиперграфа в два цвета является NP-полной [59]. Для графов же достаточно подвесить граф за произвольную вершину и проверять, что на уровнях нет ребер, что реализуется за время $O(|V| + |E|)$.

Также наш обзор практически не будет касаться структурной теории гиперграфов. Заинтересованному читателю стоит обратиться к классической книге К. Бержа [28] и более новому обзору А. В. Косточки [105].

Раздел 3 посвящен обобщениям задачи Эрдёша–Хайнала на различные классы гиперграфов. Обобщение на простые (или линейные) гиперграфы рассматривается в п. 3.1. Оказывается, что условие простоты значительно увеличивает порядок роста минимального числа ребер в гиперграфе с данным хроматическим числом. Класс пересекающихся семейств появляется в п. 3.2. Этот пункт примечателен двумя вещами. Во-первых, отсутствует возможность эффективно применять вероятностный метод. Во-вторых, оказывается, что любое большое пересекающееся семейство красится в два цвета. Пункт 3.3 посвящен рассмотрению задачи с заменой условия однородности на условие о минимальном размере ребра. Неожиданно, отсутствие условия однородности существенно увеличивает зазор между лучшими на данный момент верхними и нижними оценками.

Разделы 4, 5 и 6 посвящены модификациям задачи, возникающим при замене требований на раскраску. В разделе 4 рассматриваются списочные (предписанные) раскраски гиперграфов. Оказывается, что списочное хроматическое число любого простого графа растет вместе с его средней вершинной степенью. Раздел 5 рассматривает ситуацию, в некотором смысле противоположную классической, – полноцветная раскраска требует, чтобы каждое ребро содержало все цвета; таким образом, с ростом количества цветов условие усиливается, а не ослабляется. Раздел 6 посвящен обобщениям известной теоремы А. Хайнала и Э. Семереди о справедливых раскрасках графов на случай гиперграфов.

В разделе 7 речь идет об известной задаче о разбросе. В задаче Эрдёша–Хайнала правильной является раскраска с разбросом меньше n. Неожиданно, если речь пойдет о минимальном (по количеству ребер) n-однородном гиперграфе с положительным разбросом, то все оценки на его размер будут зависеть только от теоретико-числовых свойств n.

В разделе 8 собраны явные конструкции и примеры к различным частям обзора. По понятным причинам в этом же разделе рассматриваются малые значения n.

Наконец, раздел 9 посвящен внутриматематическим приложениям методов и теорем из обзора. О внематематических приложениях можно прочесть в книге [40].

Авторы благодарят Федора Петрова за несчетное количество важных замечаний. Мы признательны Маргарите Ахмеджановой, любезно ознакомившей нас с рядом интересных рукописей, принадлежащих перу Дмитрия Шабанова и его учеников. Многие неточности были найдены Алексеем Гордеевым, Маргаритой Ахмеджановой, Анатолием Куликовым, Дмитрием Шабановым и Александром Сидоренко.

2. Задача Эрдёша–Хайнала

Напомним, что задача Эрдёша–Хайнала заключается в нахождении наименьшего числа $m(n)$ такого, что существует n-однородный гиперграф с $m(n)$ ребрами, не допускающий правильной раскраски в два цвета.

2.1. Классические оценки. П. Эрдёш и А. Хайнал в 1961 г. предложили [67] первую верхнюю оценку на $m(n)$, которая достигается на множестве всех n-элементных подмножеств $(2n-1)$-элементного множества:

$$m(n) \leqslant \binom{2n-1}{n} = \bigl(4+o(1)\bigr)^n. \tag{2.1}$$

Уже в 1963 г. П. Эрдёш получил первые нетривиальные оценки величины $m(n)$.

Теорема 2.1.1 (Эрдёш [63], [64], 1963). *Для любого $n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$2^{n-1} \leqslant m(n) \leqslant (1+o(1))\frac{e\ln 2}{4}\, n^2 \cdot 2^n. \tag{2.2}$$

Нижняя оценка была примерно в два раза улучшена В. М. Шмидтом [141] в 1964 г. Примечательно, что обе оценки были получены довольно простым вероятностным методом, в то время как детерминированные методы до сих пор не дают даже близких результатов в асимптотике: лишь в 2013 г. Х. Гебауэр [81] построила явный пример n-однородного гиперграфа с числом ребер $2^{n+O(n^{2/3})}$ и хроматическим числом 3, до этого момента минимальным основанием экспоненты было $\sqrt{7}$. Эти примеры, как и задача для малых значений n, изложены в разделе 8.

Доказательство теоремы 2.1.1. Начнем с доказательства *нижней оценки*. Рассмотрим произвольный n-граф $H = (V, E)$ с $|E| < 2^{n-1}$ и покажем, что он обладает правильной 2-раскраской.

Оказывается, что достаточно покрасить каждую вершину в синий или красный цвет с вероятностью $1/2$, независимо от остальных вершин. В этом случае вероятность того, что ребро e одноцветно, равняется 2^{1-n}, а вероятность существования одноцветного ребра, очевидно, не превосходит суммы по всем ребрам $e \in E$ вероятностей одноцветности e. Поскольку ребер меньше, чем 2^{n-1}, эта сумма строго меньше единицы. Таким образом, с положительной вероятностью случайная раскраска является правильной, что доказывает существование правильной раскраски.

Верхняя оценка не столь тривиальна. Во избежание необходимости округлять в вычислениях будем считать, что n четно. Рассмотрим множество вершин мощности $v = n^2/2$ и равномерно и независимо выберем m случайных ребер; число m определим позже.

Несложный подсчет показывает, что для любой фиксированной раскраски C вероятность того, что случайно выбранное ребро одноцветно, равна

$$p := \frac{\binom{v_1}{n} + \binom{v_2}{n}}{\binom{v}{n}},$$

где v_1 и v_2 – количества вершин первого и второго цвета соответственно. Следовательно, поскольку ребра выбирались независимо, вероятность раскраски C оказаться правильной после выбора m случайных независимых ребер равна $(1-p)^m$. Положим

$$q := \frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}} = 2\,\frac{\binom{n^2/4}{n}}{\binom{n^2/2}{n}} = (1+o(1))\frac{2e}{2^n}\,.$$

Заметим, что $p \geqslant q$ в силу выпуклости последовательности $\left\{\binom{v}{n}\right\}_{v\geqslant 0}$. Поскольку всего раскрасок $2^{n^2/2}$, нам достаточно проверить неравенство

$$2^{n^2/2}(1-q)^m \leqslant e^{\ln 2\cdot n^2/2-qm} < 1, \tag{2.3}$$

а оно выполняется при подходящем m вида

$$m = (1+o(1))\frac{e\ln 2}{4}\, n^2 \cdot 2^n. \tag{2.4}$$

Итак, при выбранном m с положительной вероятностью ни одна из раскрасок не является правильной. Таким образом, мы показали существование гиперграфа с указанным числом ребер и хроматическим числом не менее 3.

Более того, приведенные рассуждения показывают, что случайный гиперграф на m ребрах *почти наверное* не красится в два цвета, если выбрать m в соответствии с (2.4), но с другим выбором $o(1)$.

Такая концентрация вероятности является одной из причин, почему верхняя оценка для фиксированного количества цветов до сих пор не улучшена; даже если рассмотреть некоторые ослабления задачи (например, см. п. 3.3), у нас все равно не появляется других способов доказывать верхние оценки. Совершенно по-другому обстоит дело с нижними оценками.

2.2. Улучшения нижней оценки. В 1973 г. в знаменитой работе [70] П. Эрдёш и Л. Ловас предположили, что

$$\frac{m(n)}{2^n} \to \infty.$$

В 1970-х годах гипотеза была доказана в серии работ Дж. Бека [23], [24] и Дж. Спенсера [160], который привел выкладки Дж. Бека в оптимальный вид. В этих работах доказана следующая оценка:

$$m(n) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \cdot 2^n.$$

Заметим, что нижняя оценка в теореме 2.1.1 доказывалась подстановкой случайной раскраски, которая никак не зависит от гиперграфа. В вышеупомянутых работах эта проблема была решена с помощью *метода перекрашивания*. Вкратце, он заключается в следующем: пусть гиперграф содержит $k\cdot 2^{n-1}$ ребер, тогда при случайной раскраске в среднем k ребер являются одноцветными. Если после этого мы будем случайно перекрашивать вершины из одноцветных ребер, то мы можем добиться успеха уже и при $k > 1$.

В 2000 г. Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан [131] усовершенствовали метод перекрашивания Бека–Спенсера и показали, что $m(n) \geqslant c\sqrt{n/\ln n}\cdot 2^n$. В 2009 г. А. Плухар [130] предложил очень простой и совершенно новый жадный метод, который дает неравенство $m(n) > cn^{1/4}\cdot 2^n$, уступающее, однако, даже оценкам Бека–Спенсера, но замечательное своей простотой. Наконец, в 2015 г. Я. Козик и Д. Д. Черкашин упростили [50] рассуждения Радхакришнана–Сринивасана, опираясь на идеи А. Плухара. Их мы и изложим в следующем пункте.

2.2.1. *Жадный подход.* Аргумент Плухара [130] заключается в следующем. Вместо случайной раскраски рассмотрим случайный порядок вершин (обозначим его π).

Определение 2.2.1. Упорядоченная пара ребер называется 2-*цепью*, если эти ребра пересекаются ровно по одной вершине. 2-цепь (e_1, e_2) называется *упорядоченной* относительно порядка π, если для любых вершин $v_1 \in e_1$, $v_2 \in e_2$ выполняется неравенство $\pi(v_1) \leqslant \pi(v_2)$.

Лемма 2.2.2 (Плухар [130], 2009). *Гиперграф обладает правильной раскраской в два цвета, если и только если существует порядок на вершинах π без упорядоченных 2-цепей.*

Доказательство. Если существует правильная двухцветная раскраска, то любой порядок, в котором все вершины первого цвета идут раньше вершин второго, очевидно, не содержит упорядоченных 2-цепей.

Пусть существует порядок π на вершинах без упорядоченных 2-цепей. Рассматривая вершины по порядку π, красим вершину в минимальный цвет, который не образует одноцветных ребер на уже покрашенных вершинах. Если мы не можем покрасить некоторую вершину v, значит существует ребро $e_2 \ni v$, в котором все оставшиеся вершины уже имеют цвет 2. Рассмотрим π-наименьшую вершину $w \in e_2$. Поскольку мы не могли покрасить w в первый цвет, существует ребро $e_1 \ni w$, в котором все остальные вершины уже покрашены в первый цвет. Противоречие, так как (e_1, e_2) есть π-упорядоченная 2-цепь. Значит, мы можем так покрасить каждую вершину, а по построению раскраска правильная. Лемма доказана.

Замечание 2.2.3. Существует и более простой способ доказать часть “если” (но он не обобщается на большее количество цветов). Покрасим в каждом ребре π-наименьшую вершину в первый цвет, а π-наибольшую во второй цвет. Заметим, что никакая вершина не покрашена в оба цвета, поскольку гиперграф не содержит π-упорядоченных 2-цепей.

Теперь рассмотрим случайный порядок. Вероятность того, что фиксированная 2-цепь является упорядоченной, равна

$$p := \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\,.$$

Заметим, что 2-цепей не больше чем $|E|^2$, а значит, при $p|E|^2 < 1$ гиперграф красится в два цвета с положительной вероятностью. Применяя формулу Стирлинга, получаем следующую теорему.

Теорема 2.2.4 (Плухар [130], 2009). *Существует константа $c > 0$ такая, что для любого n выполняется неравенство*

$$m(n) \geqslant cn^{1/4} \cdot 2^n.$$

В частности, лемма 2.2.2 показывает, что в гиперграфе с хроматическим числом, большим r, должно существовать много r-цепей; иногда это наблюдение называют критерием Ловаса, дальнейшие исследования для $r = 2$ приведены в [73].

Замечание 2.2.5. Применяя подобный жадный подход, можно также получить оценку Каро–Тузы [44] на число независимости. Пусть $H = (V, E)$ – n-граф, тогда

$$\alpha(H) \geqslant \sum_{v \in V} \binom{\deg(v) + 1/(n-1)}{\deg(v)}^{-1},$$

где $\deg(v)$ – степень вершины v.

2.2.2. *Смешанный подход.* Для начала приведем алгоритм Радхакришнана–Сринивасана, дающий оценку

$$m(n) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n. \tag{2.5}$$

На первом шаге мы красим все вершины независимо в каждый из цветов с вероятностью $1/2$. Затем мы выбираем случайный порядок вершин и рассматриваем вершины в соответствии с этим порядком. Пусть рассматриваемая вершина v входит в одноцветное (после первой раскраски) ребро e, при этом никакие вершины ребра e до этого не перекрашивались. Тогда с вероятностью $p := (\ln n)/(2n)$ мы меняем цвет вершины v.

В следующем пункте мы приведем доказательство корректности алгоритма Козика–Черкашина, дающего в случае двух цветов результат (2.5), причем с той же константой c. Этот алгоритм на первом шаге красит каждую вершину независимо с вероятностью $(1-p)/2$ в каждый из цветов (соответственно, с вероятностью p вершина остается бесцветной). На втором шаге оставшиеся вершины красятся в соответствии с алгоритмом Плухара.

Завершим этот пункт предположением Эрдёша о правильном порядке роста величины $m(n)$.

Гипотеза 2.2.6 (Эрдёш [64], 1964).

$$m(n) = (1 + o(1))n \cdot 2^n.$$

2.3. Случай $r > 2$ цветов. Задача о нахождении наименьшего числа ребер в n-однородном гиперграфе без правильной раскраски в r цветов была предложена М. Херцогом и И. Шёнхаймом [93] (обозначим эту величину через $m(n, r)$). Они же привели прямые обобщения теоремы 2.1.1 и некоторые несложные наблюдения. Например, неравенства теоремы 2.1.1 превращаются в неравенства

$$r^{n-1} \leqslant m(n, r) \leqslant \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{e}{2}\, n^2 (\ln r)(r-1) r^{n-1}. \tag{2.6}$$

В этом пункте мы рассмотрим случай фиксированного r и растущего n. В таком случае также не известны никакие верхние оценки, лучшие чем (2.6).

Нижняя оценка, в свою очередь, неоднократно улучшалась уже в XXI в. Начнем с алгоритма А. В. Косточки [104], который дает следующий результат.

Теорема 2.3.1 (Косточка [104], 2004). *Если* $r < \sqrt{\frac{1}{8}\ln\frac{\ln n}{2}}$, *то при* $a = \lfloor \log_2 r \rfloor$ *выполняется неравенство*

$$m(n,r) > e^{-4r^2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{a/(a+1)} r^n.$$

Теперь приведем обобщение алгоритма Плухара.

Теорема 2.3.2 (Плухар [130], Шабанов [148], 2009). *Для любых* $n \geqslant 2, r \geqslant 2$ *выполняется неравенство*

$$m(n,r) \geqslant cn^{1/2-1/(2r)} r^n.$$

Доказательство. Последовательность ребер $a_1, \ldots, a_r$ назовем *r-цепью*, если $|a_i \cap a_j| = 1$ для $|i-j| = 1$ и $a_i \cap a_j = \varnothing$ в противном случае; r-цепь называется *упорядоченной r-цепью*, если из $i < j$ следует, что любая вершина a_i не больше любой вершины a_j (относительно фиксированного линейного порядка на V).

Теорема Плухара [130] утверждает, что существование линейного порядка на V без упорядоченных r-цепей равносильно r-раскрашиваемости гиперграфа $H = (V, E)$ (формулировка и доказательство полностью аналогичны лемме 2.2.2). Рассмотрим случайный порядок на множестве вершин V. Заметим, что вероятность любой r-цепи быть упорядоченной равна

$$\frac{[(n-1)!]^2[(n-2)!]^{r-2}}{((n-1)r+1)!}.$$

С другой стороны, количество r-цепей не превосходит $2|E|^r/r!$ (любое множество из r ребер генерирует не более двух r-цепей). Поэтому неравенство

$$2\frac{|E|^r}{r!}\,\frac{[(n-1)!]^2[(n-2)!]^{r-2}}{((n-1)r+1)!} < 1$$

гарантирует существование правильной r-раскраски H. Технические выкладки завершают доказательство теоремы.

Перейдем к обещанным в предыдущем пункте обобщениям. Прежде всего, обобщение алгоритма Радхакришнана–Сринивасана (Д. А. Шабанов [147]) дает оценку

$$m(n,r) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\, r^{n-1}$$

для всех $n, r \geqslant 2$. Через три года этот результат был немного улучшен.

Теорема 2.3.3 (Шабанов [151], 2012). *Для любых* $n \geqslant 3, r \geqslant 3$ *выполняется неравенство*

$$m(n,r) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}\, r^{n-1}.$$

В общем случае результат Я. Козика и Д. Д. Черкашина выглядит следующим образом.

Теорема 2.3.4 (Козик–Черкашин [50], 2015). *Для любого фиксированного $r \geqslant 2$ верно неравенство*

$$m(n,r) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть (V,E) – n-однородный гиперграф с kr^{n-2} ребрами, k мы выберем позднее. Присвоим каждой вершине вес – случайное вещественное число между 0 и 1 (равномерно и независимо выбранное) и обозначим его буквой w. Положим $p := (2\ln n)/n$ и назовем ребро *коротким*, если веса всех его вершин содержатся в отрезке длины менее $(1-p)/r$. Математическое ожидание количества коротких ребер не превосходит

$$kr^{n-2}n\left(\frac{1-p}{r}\right)^{n-1} \approx \frac{k}{rn}\,,$$

поскольку мы складываем матожидания индикаторов событий $A(e,v)$, заключающихся в том, что ребро e короткое, а вершина $v \in e$ имеет наименьший в e вес, по всем e и v.

Оценим вероятность появления упорядоченной r-цепи без коротких ребер. Пусть ребра $e_1,\dots,e_r$ образуют обсуждаемую r-цепь, причем $e_i \cap e_{i+1} = \{v_i\}$. Тогда, поскольку в цепи нет коротких ребер, каждое $w(v_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ принадлежит интервалу $\left[\dfrac{i-ip}{r}, \dfrac{i+(r-i)p}{r}\right]$ (иначе какое-то из оставшихся ребер цепи не поместится слева или справа). Вероятность, что все w_i попали в требуемые интервалы, равна p^{r-1}, поскольку каждый интервал имеет длину p. Положим $w_0 := 0$, $w_r := 1$ и $w_i = w(v_i)$, тогда все остальные вершины ребра e_i должны попасть в интервал $[w_{i-1}, w_i]$. Вероятность этого равна

$$\prod_{i=0}^{r-1}(w_{i+1}-w_i)^{n-2} \leqslant r^{-r(n-2)},$$

где оценка верна ввиду неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Соответственно, математическое ожидание количества обсуждаемых цепей не превосходит

$$\frac{2|E|^r}{r!}\,p^{r-1}r^{-r(n-2)} = \frac{2}{r!}\,k^r\left(\frac{2\ln n}{n}\right)^{r-1}.$$

Для

$$k < cr\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r}$$

математическое ожидание меньше $1/2$ при подходящей константе $c>0$. Это же условие на k является достаточным для того, чтобы математическое ожидание количества коротких ребер стремилось к нулю с ростом n. Следовательно, с положительной вероятностью алгоритм возвращает правильную раскраску графа. Теорема доказана.

2.4. Случай большого числа цветов. Рассмотрим случай, когда количество цветов r намного больше n. Для графов задача очевидна, так как при любой покраске вершин графа G в $\chi(G)$ цветов между любыми двумя цветами должно быть хотя бы одно ребро; таким образом,

$$m(2,r) \geqslant \binom{r+1}{2}.$$

С другой стороны, полный граф на $r+1$ вершине не красится в r цветов, поэтому $m(2,r) = \binom{r+1}{2}$.

2.4.1. *Верхние оценки.* Аналогично, полный n-однородный гиперграф на $r(n-1)+1$ вершине не красится в r цветов правильным образом. Следовательно,

$$m(n,r) \leqslant \binom{r(n-1)+1}{n}.$$

Заметим, что при больших r этот пример уже лучше основной вероятностной оценки (2.6). Эрдёш высказал гипотезу [66], что для любого n существует $r_0(n)$ такое, что при $r > r_0$ наилучшим примером является полный гиперграф на $r(n-1)+1$ вершине, иными словами,

$$m(n,r) = \binom{r(n-1)+1}{n} \quad \text{при } r > r_0.$$

Эта гипотеза была опровергнута Н. Алоном [10], который использовал числа Турана. *Число Турана* $T(v,b,n)$ – это минимальное число ребер в n-однородном гиперграфе на v вершинах таком, что любое b-элементное подмножество вершин содержит ребро гиперграфа. Из принципа Дирихле следует очевидная оценка

$$m(n,r) \leqslant \min_{b \geqslant n} T\bigl(r(b-1)+1, b, n\bigr).$$

С помощью этого неравенства Н. Алон получил оценки

$$m(n,r) \leqslant \binom{rn}{n} \frac{\ln n}{\ln n - 1} \frac{1}{\lfloor n/\ln n \rfloor}$$

и

$$m(n,r) \leqslant cn^2 (\ln n) \left(\frac{3e}{4}\right)^n r^n.$$

Заметим, что при $n \geqslant 13$ первая из оценок Алона опровергает гипотезу Эрдёша (при $n \geqslant 4$ подстановка других оценок чисел Турана также опровергает гипотезу). Подробнее о числах Турана можно прочесть в обзоре А. Сидоренко [158] (обзор более общей задачи Турана дан в [97]).

Также Алон предположил [10], что для любого n последовательность $a_n := m(n,r)/r^n$ имеет предел. Эту гипотезу доказали Д. Черкашин и Ф. Петров [52]. Мы приведем набросок доказательства в п. 2.4.3.

Используя лучшие оценки на числа Турана из [159] для $b = n^2$ (стоит отметить, что Алон подставлял $b = n + 1$ и $b = 1.5n$), И. Акользин и Д. Шабанов получили [9] наилучшую на сегодняшний день верхнюю оценку

$$m(n, r) \leqslant cn^3 \cdot \ln n \cdot r^n.$$

Напоследок отметим, что гипотеза Эрдёша при $n = 3$ остается открытой, этот случай мы обсудим в п. 2.4.4.

2.4.2. *Нижние оценки.* Н. Алон [10] придумал следующий трюк, использующий так называемый метод малых вариаций (*alterations method*, см. [15; гл. 3]): попробуем покрасить n-граф в $a < r$ цветов случайным образом, а затем перекрасить опасные ребра. Математическое ожидание количества опасных ребер равно

$$|E| \cdot a^{1-n}.$$

Заметим, что у нас осталось $r - a$ неиспользованных цветов и мы можем покрасить в каждый цвет любой набор из не более чем $n - 1$ вершины, так что одноцветных ребер не появится. Таким образом, при

$$|E| < a^{n-1}(r - a)(n - 1)$$

гиперграф правильно красится в r цветов. Подставив $a = \left\lfloor \dfrac{n-1}{n} r \right\rfloor$, получаем

$$m(n, r) \geqslant (n - 1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1}. \tag{2.8}$$

Заметим, что теорема 2.3.2 в нашем случае дает оценку вида $m(n, r) \geqslant c\sqrt{n}\, r^n$. Комбинируя методы Алона и Козика–Черкашина, И. Акользин и Д. Шабанов [9] получили неравенство

$$m(n, r) \geqslant c\, \frac{n}{\ln n}\, r^n.$$

Этот результат потребовал уточнения оценки в теореме 2.3.4 до r^n при больших r, что достигается посредством замены неравенства о средних в доказательстве более аккуратным анализом.

2.4.3. *Регулярность хроматического числа.* В этом пункте мы приведем набросок доказательства гипотезы Алона.

Теорема 2.4.1 (Черкашин–Петров [52], 2018). *Для любого фиксированного n последовательность $a_r := m(n, r)/r^n$ имеет предел.*

Основная идея доказательства – рассматривать обратную функцию, после чего пользоваться неравенствами типа субаддитивности. Пусть $f(N)$ обозначает максимальное хроматическое число n-однородного гиперграфа с N ребрами (доопределим также $f(0) := 1$). Очевидно, что f нестрого возрастает и

$$m(n, r) = \min\{N \mid f(N) > r\}. \tag{2.9}$$

Поэтому $m(n, r) \sim Cr^n$ равносильно $f(N) \sim (N/C)^{1/n}$.

Лемма 2.4.2. *Для любого $N > 0$ и любого натурального p выполняется неравенство*

$$f(N) \leqslant \max_{a_1+a_2+\cdots+a_p \leqslant N/p^{n-1}} \bigl(f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_p)\bigr).$$

Доказательство. Пусть $H=(V,E)$ – n-однородный гиперграф с $E=N$. Покрасим вершины гиперграфа во вспомогательные цвета $\eta(v)\in\{1,2,\ldots,p\}$ случайно и независимо; обозначим $V_i=\eta^{-1}(\{i\})$, пусть H_i – гиперграф, индуцированный гиперграфом H на V_i. Пусть H_i имеет a_i ребер. Математическое ожидание суммы $\sum\limits_i a_i$ равно $|E|/p^{n-1}$ (поскольку каждое ребро $e\in E$ принадлежит каждому H_i с вероятностью $1/p^n$). Поэтому существует вспомогательная раскраска η такая, что $\sum a_i \leqslant \dfrac{N}{p^{n-1}}$. Зафиксируем η и покрасим H_i, используя $f(a_i)$ цветов, причем цвета не пересекаются для разных i. Всего мы использовали $\sum f(a_i)$ цветов, и H раскрашен правильно. Лемма доказана.

Различные задачи и результаты такого типа рассматриваются в обзорной статье [39].

Оставшаяся часть доказательства является чисто аналитической: в ней показывается, что для любой функции $f(N)$, удовлетворяющей лемме 2.4.2, функция $g(N):=f(N)N^{-1/n}$ имеет предел при $N\to\infty$.

Остается открытым вопрос о регулярности $m(n,r)$ по первой переменной: верно ли, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(n+1,r)}{m(n,r)}=r?$$

2.4.4. *Случай 3-графов.* Нас будут интересовать оценки на предел отношения $m(3,r)/r^3$; в предыдущем пункте мы показали, что он существует. Обозначим его буквой L.

Сравним предыдущие методы в этом случае. Прежде всего отметим, что из гипотезы Эрдёша следует, что $L=4/3$, пример полного 3-графа дает оценку $L\leqslant 4/3$.

Перейдем к нижним оценкам. Прежде всего, оценка Алона (2.8) влечет $L\geqslant 8/27=0.296\ldots$. Метод Плухара в этом случае дает оценку $L\geqslant 4/e^3=0.199\ldots$. И. Акользин и Д. Шабанов не привели конкретных вычислений констант, но их метод дает оценку $L\geqslant 0.205\ldots$, что было показано в [49].

Равенство (2.9) показывает равносильность асимптотических верхних оценок на $f(N)$ и нижних оценок на L. В статье [52] доказана следующая лемма.

Лемма 2.4.3. *При $c_n:=\lceil(1-2^{1/n-1})^{-n}\rceil$ и любых $N\geqslant M>0$ выполняется неравенство*

$$f(N)\leqslant N^{1/n}\max_{M\leqslant a<c_nM} f(a)\,a^{-1/n}.$$

Известно, что $f(0)=1$, $f(1)=\cdots=f(6)=2$ (это будет доказано в п. 8.1), $f(7)=\cdots=f(26)=3$ (см. [8]). Используя леммы 2.4.2, 2.4.3 и компьютерные вычисления, мы получаем неравенство

$$m(3,r)\geqslant 0.324\cdots r^3$$

при условии $r>r_0$.

Наконец, заметим, что количество r-цепей в графе можно оценить точнее, чем $|E|^r/r!$.

Утверждение 2.4.4 (Черкашин [49], 2019). *Гиперграф $H = (V, E)$ содержит не более*

$$\frac{|E|}{2}\left(\frac{|E|}{r-1}\right)^{r-1}$$

r-цепей.

Доказательство основано на рассмотрении индуцированных r-путей во вспомогательном графе $G = (E, F)$. Вершинами графа G служат ребра исходного гиперграфа H; пара $(e_1, e_2) \in E \times E$ вершин графа G соединена в G ребром, если $|e_1 \cap e_2| = 1$. Понятно, что количество r-цепей в H оценивается сверху количеством r-путей в G.

Далее применяется оценка Н. Пиппенгера и М. Ч. Голамбика [129] количества таких путей. Это позволяет улучшить оценку Плухара до $L \geqslant 0.54\ldots$.

2.5. Локальная лемма Ловаса. Хорошо известная теорема Брукса утверждает, что если связный граф со степенями не более d не является нечетным циклом или полным графом, то он правильно красится в d цветов.

В процессе решения аналогичной локальной задачи для гиперграфов была придумана локальная лемма Ловаса. Эта лемма широко применяется в самых разных областях математики, от комбинаторики и теории вероятностей до диофантовых приближений и аналитической теории чисел. Это один из немногих общих способов переходить от локальных утверждений к глобальным.

Теорема 2.5.1 (Эрдёш–Ловас [70], 1973). *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – это события в некотором вероятностном пространстве, $J(1), \ldots, J(m)$ – это подмножества множества $\{1, \ldots, m\}$ такие, что $i \notin J(i)$. Пусть даны вещественные числа $0 < x_i < 1, 1 \leqslant i \leqslant m$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(a) *для каждого i событие A_i не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{A_j, j \notin J(i) \sqcup \{i\}\}$;*

(b) *для каждого i выполняется неравенство*

$$\Pr(A_i) \leqslant x_i \prod_{j \in J(i)} (1 - x_j),$$

где $\Pr(A_i)$ – вероятность события A_i. Тогда с положительной вероятностью ни одно из событий A_i не выполняется.

Иногда используется именно такая версия локальной леммы. В случае, когда оценки вероятностей всех событий совпадают, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.5.2 (симметричная версия локальной леммы). *Предположим, что $ep(d+1) \leqslant 1$, каждое событие A_i происходит с вероятностью не больше, чем p, и $|J(i)| \leqslant d$ для всех i. Тогда с положительной вероятностью ни одно из событий A_i не происходит.*

Доказательство. Выберем $x_i = x = 1/(d+1)$. Тогда $(1-x)^d \geqslant 1/e$ – это следует, например, из определения числа e. Следовательно, $p \leqslant x(1-x)^d$, так что выполняются условия локальной леммы.

Из теоремы 2.5.2 немедленно вытекает следующая нетривиальная теорема.

Теорема 2.5.3 (Эрдёш–Ловас [70], 1973). *Если любое ребро в n-однородном гиперграфе пересекает не более $2^{n-3}/n$ других ребер, то граф красится в два цвета правильным образом.*

Следующая версия локальной леммы была получена Я. Козиком [113]. Мы будем использовать ее в п. 3.1. Более частные версии использовались Й. Беком [25] и З. Сабо [162].

Лемма 2.5.4. *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ – независимые случайные величины и $\mathscr{A}$ – множество событий, определяемых этими величинами. Для $A \in \mathscr{A}$ обозначим через* $\operatorname{vbl}(A)$ *минимальное множество переменных, задающих A. Для каждого X_i определим многочлен*

$$w_{X_i}(z) = \sum_{A \in \mathscr{A} : X_i \in \operatorname{vbl}(A)} \Pr(A) z^{|\operatorname{vbl}(A)|}.$$

Предположим, что существует функция $w(z)$ такая, что для любого $z > 1$ и любого X_i выполняется неравенство

$$w(z) > w_{X_i}(z).$$

Тогда если существует такое $\tau \in (0,1)$, что

$$w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leqslant \tau,$$

то с положительной вероятностью не выполняется ни одно из событий $\mathscr{A}$.

Доказательство. Применим лемму 2.5.1 с параметрами

$$J(i) := \{A_j \mid \operatorname{vbl}(A_i) \cap \operatorname{vbl}(A_j) \neq \varnothing\}$$

и $x_i := (1-\tau)^{-|\operatorname{vbl}(A_i)|} \Pr(A_i)$. Осталось только проверить условие:

$$\begin{aligned}
x_i \prod_{A_j \in J(i)} (1 - x_j) &\geqslant x_i \prod_{X \in \operatorname{vbl}(A_i)} \; \prod_{j : X \in \operatorname{vbl}(A_j)} (1 - x_j) \\
&\geqslant x_i \prod_{X \in \operatorname{vbl}(A_i)} \left(1 - \sum_{j : X \in \operatorname{vbl}(A_j)} x_j\right) \\
&\geqslant x_i \prod_{X \in \operatorname{vbl}(A_i)} \left(1 - w_X\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right) \\
&\geqslant x_i \left(1 - w\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right)^{|\operatorname{vbl}(A_i)|} = \Pr(A_i).
\end{aligned}$$

Локальная версия теоремы 2.3.1 получена А. В. Косточкой, М. Кумбхатом и В. Рёдлем [111]. Локальные версии теорем 2.2.4, 2.3.3, 2.3.4, а также оценки Радхакришнана–Сринивасана получены в тех же статьях, что и сами теоремы. Оценка (2.8) не допускает локальной версии.

О дальнейшем развитии комбинаторной локальной теории можно узнать, например, из статьи [31].

2.6. Критические гиперграфы. Гиперграф называется *критическим* (*реберно-критическим*), если удаление любого ребра уменьшает хроматическое число. Следующая теорема оказалась достаточно важной, о чем свидетельствует ее появление в различных областях комбинаторики.

Теорема 2.6.1 (Ловас [119], 1970; Вудалл [168], 1972; Сеймур [143], 1974; Бурштейн [43], 1976). *Критический гиперграф $H=(V,E)$ без вершин нулевой степени и с хроматическим числом более двух удовлетворяет неравенству $|E|\geqslant|V|$.*

Стоит отметить, что довольно часто эта теорема приводится без условия реберной критичности. Такая формулировка, очевидно, ошибочна, поскольку можно взять любой гиперграф с хроматическим числом больше двух и добавить к нему достаточно большое ребро.

Подробнее о критических гиперграфах можно прочесть в обзоре А. В. Косточки [105].

3. Другие классы гиперграфов

3.1. Простые (линейные) и b-простые гиперграфы. Гиперграф называется *простым* (а иногда *линейным*), если любые два его ребра пересекаются не более чем по одной вершине. По аналогии с величиной $m(n,r)$ определим величину $s(n,r)$ как минимальное число ребер в простом n-графе, не имеющем правильной r-раскраски; соответственно, локальную версию (относительно *реберной* степени) обозначим через $d(n,r)$.

3.1.1. *Нижние оценки.* Прежде всего покажем, что из локальной версии нижней оценки для простого гиперграфа следует значительно более сильная оценка на число ребер; это рассуждение принадлежит П. Эрдёшу и Л. Ловасу [70]. Рассмотрим n-однородный простой гиперграф $H=(V,E)$, не допускающий правильной раскраски в r цветов. Теперь удалим из каждого ребра вершину максимальной степени, таким образом мы получим простой $(n-1)$-граф $H_1=(V_1,E_1)$ (он называется *купированием* графа H). Ясно, что он по-прежнему не красится в r цветов. Следовательно, $d(H_1)>d(n-1,r)$, т. е. найдется вершина $v\in V_1$ степени не менее $d(n-1,r)/n$. Но каждое из ребер $e_1,\dots,e_t\in E_1$ $(t>d(n-1,r)/n)$, содержащих v, было получено удалением вершины $v_i\in V$ $(i=1,\dots,t)$ большей степени, причем из-за простоты H все эти вершины различны. Заметим, что, сложив степени вершин v_i, мы посчитаем каждое из ребер не более n раз, что немедленно влечет неравенство

$$s(n,r)\geqslant\frac{[d(n-1,r)]^2}{n^3}\,.$$

Все наилучшие асимптотические нижние оценки величины $s(n,r)$ при фиксированном r получаются как его следствие; в связи с этим в данном разделе мы будем оценивать только величину $d(n,r)$.

А. В. Косточка [105] показал, как улучшить рассуждение с купированием. Выше мы видели, что в простом n-графе $H = (V,E)$ с хроматическим числом, большим r, найдется хотя бы $d(n-1,r)/n$ вершин степени не менее $d(n-1,r)/n$. Упорядочим вершины H по убыванию степеней; будем удалять вершины по порядку; удаляя вершину, мы также удаляем все содержащие ее ребра. Из простоты графа следует, что вместе с вершиной v_i мы удаляем не менее $\deg(v_i) - (i-1)$ ребер. Значит, за первые $\lfloor d(n-1,r)/n \rfloor$ шагов мы удалим не менее

$$\left\lfloor \frac{d(n-1,r)}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d(n-1,r)}{n} - 1 \right\rfloor + \cdots + 1 \geqslant c \left\lfloor \frac{d(n-1,r)}{n} \right\rfloor^2$$

ребер, что дает оценку

$$s(n,r) \geqslant c\, \frac{\lfloor d(n-1,r) \rfloor^2}{n^2}\,.$$

В работах З. Сабо [162], А. В. Косточки и М. Кумбхата [106], Д. А. Шабанова [152], Я. Козика [113], А. Купавского и Д. А. Шабанова [115] были получены нижние оценки вида $d(n,r) \geqslant cn^{1-\varepsilon(n)} r^{n-1}$ с различными функциями $\varepsilon(n)$, стремящимися к нулю. Наконец, Я. Козик и Д. А. Шабанов получили оценку без $\varepsilon(n)$.

Теорема 3.1.1 (Козик–Шабанов [114], 2016). *Для любых $r \geqslant 2$, $n \geqslant 3$ выполняется неравенство*

$$d(n,r) \geqslant cnr^{n-1}.$$

Приведем набросок доказательства этой теоремы. Алгоритм раскраски удивительно прост. Зафиксируем параметр $p \in [0,1]$ и некоторый циклический порядок на r цветах. Рассмотрим случайную (равномерную и независимую) раскраску вершин в r цветов и присвоим каждой вершине вес – случайно (равномерно и независимо) выбранное число из отрезка $[0,1]$. До тех пор, пока существуют одноцветные ребра, мы перекрашиваем самую легкую вершину, которая не перекрашивалась до этого, в следующий по порядку цвет, если ее вес меньше p (вершина с таким весом называется *свободной*).

Поскольку каждая вершина перекрашивается не более одного раза, алгоритм заканчивает работу.

Теперь приведем краткую схему доказательства того, что вероятность правильной раскраски на выходе работы алгоритма положительна. Назовем ребро *вырожденным*, если в нем хотя бы $n/2$ свободных вершин, и *опасным* – если после первоначальной раскраски и выбора весов у него есть возможность оказаться одноцветным (т. е. все несвободные вершины имеют цвет i, в то время как свободные имеют цвет i или $i-1$).

Если при этом алгоритм не работает, то при этих порядке и предраскраске существует структура подгипердерева с определенными свойствами (формулировки свойств довольно громоздки, а доказательства практически тавтологичны). Подстановка $p := (5\ln n)/n$ и применение локальной леммы Ловаса в форме леммы 2.5.4 завершают доказательство.

3.1.2. *b-простые гиперграфы и верхние оценки.* Прежде всего из общей теоремы 3.1.4 следует оценка

$$s(n,r) \leqslant 1600n^4r^{2(n+1)}.$$

Оказывается, что дальнейшие верхние оценки в основном можно доказать сразу в большей общности.

Гиперграф называется *b-простым*, если любые два его ребра пересекаются не более чем по b вершинам. Иногда [128], [133], [109] b-простой n-граф называется *частичной $(n, b+1)$-системой Штейнера*. Случай $b = 1$ рассматривался в предыдущем пункте, сейчас мы рассмотрим случай произвольного b. Величины $s(n,r,b)$, $d(n,r,b)$ определяются аналогично величинам $s(n,r)$, $d(n,r)$.

Нижние оценки Косточки–Кумбхата [106] допускают обобщение на b-простые гиперграфы. Обобщение теоремы 3.1.1 на b-простые гиперграфы было получено М. Б. Ахмеджановой и Д. А. Шабановым.

Теорема 3.1.2 (Ахмеджанова–Шабанов [5], 2017, [6], 2019). *Для любых $b \geqslant 1$, $r \geqslant 2$, $n \geqslant n_0(b)$ выполняется неравенство*

$$d(n,r,b) \geqslant \frac{1}{16e^4}\, nr^{n-b}.$$

А. В. Косточка и М. Кумбхат [106] в 2009 г. получили верхнюю оценку величины $s(n,r,b)$, которая через год была улучшена А. В. Косточкой и В. Рёдлем.

Теорема 3.1.3 (Косточка–Рёдль [110], 2010). *Для любых $r \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ и достаточно большого n выполняется неравенство*

$$s(n,r,b) \leqslant (4e^r)^b (n \ln r)^{1+1/b} r^{n+n/b}.$$

3.1.3. *Гиперграфы с большим обхватом. Циклом длины s* в гиперграфе $H = (V,E)$ называется последовательность

$$(A_0, v_0, \ldots, A_{s-1}, v_{s-1}, A_s),$$

где $A_0, \ldots, A_{s-1}$ – различные ребра H, ребро A_s совпадает с A_0, а $v_0, \ldots, v_{s-1}$ – различные вершины H, причем $v_i \in A_i \cap A_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, s-1$. *Обхватом* гиперграфа H называется длина $g(H)$ его минимального цикла. Заметим, что простыми гиперграфами при таком определении оказываются гиперграфы с $g(H) > 2$.

П. Эрдёш и Л. Ловас широко обобщили известную теорему Эрдёша [62] о существовании графов с произвольно большими хроматическим числом и обхватом.

Теорема 3.1.4 (Эрдёш–Ловас [70], 1973). *Для любых натуральных чисел $s \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $r \geqslant 2$ определим величины*

$$v := 4 \cdot 20^{s-1} n^{3s-2} r^{sn-n+s}, \quad m := 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{s(n+1)}, \quad d := 20n^2r^{n-1}.$$

Тогда существует n-однородный гиперграф H на v вершинах с не более чем m ребрами и степенями вершин не более d такой, что $g(H) > s$, $\chi(H) > r$.

Пусть $\Delta(n,r,g)$ обозначает минимальное d, для которого существует n-однородный гиперграф с хроматическим числом более r, обхватом g и максимальной вершинной степенью d. Из теоремы 3.1.4 для $g \geqslant 3$ следует оценка

$$\Delta(n,r,g) \leqslant 20n^2r^{n+1}.$$

Это неравенство было улучшено А. В. Косточкой и В. Рёдлем.

Теорема 3.1.5 (Косточка–Рёдль [110], 2010). *Для всех $n,r \geqslant 2$ и $g \geqslant 3$ выполняется неравенство*

$$\Delta(n,r,g) \leqslant nr^{n-1}\ln r.$$

Кратко опишем известные результаты для графов. Дж. Х. Ким [100] доказал, что $\Delta(2,r,5) > (r+o(r))\ln r$ для достаточно больших r. С другой стороны, А. В. Косточка и Н. П. Мазурова [107], а также Б. Боллобаш [38] показали, что $\Delta(2,r,g) \leqslant 2r\ln r$ для всех g. В. А. Ташкинов [163] доказал, что $\Delta(2,3,g) \leqslant 6$ для всех g.

М. Аджтай, Я. Комлош, Я. Пинц, Дж. Спенсер и Э. Семереди [4] доказали, что n-однородный гиперграф $H=(V,E)$ с обхватом хотя бы 5 и максимальной степенью вершины d содержит независимое множество размера не менее

$$|V|\left(\frac{\ln d}{d}\right)^{1/(n-1)}.$$

Спенсер предположил, что достаточно требовать от гиперграфа только простоту, что было доказано Р. А. Дюком, Х. Лефманном и В. Рёдлем [60]. Д. Мубаи и А. Фриз усилили теорему, показав, что не просто найдется независимое множество указанного размера (скажем, α), а гиперграф допускает раскраску в $O(|V|/\alpha)$ цветов.

Теорема 3.1.6 (Мубаи–Фриз [80], 2013). *Пусть H – n-однородный простой гиперграф с максимальной степенью вершины d. Тогда*

$$\chi(H) \leqslant \left(\frac{d}{\ln d}\right)^{1/(n-1)}.$$

В качестве немедленного следствия получаем, что любой n-однородный гиперграф со степенями вершин не более

$$c(n)r^{n-1}\ln r$$

красится в r цветов.

3.1.4. *Случай большого числа цветов.* В этом пункте речь пойдет об оценках в ситуации, когда r намного больше, чем n. Используя случайные дизайны, Д. А. Грейбл, В. Рёдль и К. Т. Фелпс [84] улучшили оценку Эрдёша–Ловаса. Они показали, что для бесконечно многих r, подчиняющихся условию $r > r_0(n)$, выполняется неравенство

$$s(n,r) \leqslant c\cdot 4^n n^2 r^{2n-2}\ln^2 r.$$

А. В. Косточка, Д. Мубаи, В. Рёдль и П. Тетали [108] получили следующие оценки для класса b-простых гиперграфов: при фиксированных n и b

$$c(n,b)(r^{n-1}\ln r)^{1+1/b} \leqslant s(n,r,b) \leqslant C(n,b)(r^{n-1}\ln r)^{1+1/b}; \tag{3.1}$$

более того, при фиксированном b константа $C(n,b)$ полиномиальна по n.

Для четных r в той же статье [108] была получена оценка

$$s(n,r,b) \geqslant \frac{n-b}{n}\,\frac{1}{(2^{n-1}ne)^{b/(b-1)}}\,r^{(n-1)(b+1)/b}.$$

В случае простых гиперграфов последняя оценка была усилена.

Теорема 3.1.7 (Шабанов [152], 2012). *Для $n \geqslant 3$ и четного $r \geqslant 4$ выполняется неравенство*

$$s(n,r,b) \geqslant c\,\frac{n}{n^2\cdot 2^{2n}}\,r^{2n-2}.$$

3.1.5. *F-свободные гиперграфы.* Пусть $\mathscr{F}$ – фиксированное семейство n-графов. Определим величину $m(r,\mathscr{F})$ как минимальное количество ребер в n-графе, не содержащем никакого n-графа $F \in \mathscr{F}$ в качестве подграфа и имеющем хроматическое число не менее $r+1$. Очевидно, что класс b-простых n-графов получается запрещением $(n-b-1)$-го n-графа. Пользуясь этим, Т. Бохман, А. Фриз и Д. Мубаи [37] усилили нижнюю оценку (3.1) величины $s(n,r,b)$.

Уже для графов и весьма простых семейств F задача является достаточно сложной. Дж. Гимбел и К. Томассен [82] показали, что минимальное количество ребер в графе без треугольников и с хроматическим числом r имеет порядок роста $r^3\log^2 r$. В то же время асимптотики при запрете полного графа на четырех вершинах или цикла на четырех вершинах не известны. Т. Бохман, А. Фриз и Д. Мубаи показали, что случаи графов и гиперграфов существенно различаются.

Теорема 3.1.8 (Бохман–Фриз–Мубаи [37], 2010). *Пусть $k > n \geqslant 3$. Тогда минимальное количество ребер в K_k^n-свободном гиперграфе с хроматическим числом r имеет порядок роста*

$$r^{n+o(1)},$$

где K_k^n – полный n-граф на k вершинах. С другой стороны, для любого $s \geqslant 3$ существует $\varepsilon(s) > 0$ такое, что минимальное количество ребер в K_s-свободном графе с хроматическим числом r имеет порядок роста не меньше $r^{2+\varepsilon}$.

Гипотеза 3.1.9 (Бохман–Фриз–Мубаи [37], 2010). *Существует простой 3-граф H, для которого минимальное количество ребер в H-свободном гиперграфе с хроматическим числом r имеет порядок роста*

$$r^{3+o(1)}.$$

В той же статье была поставлена задача об описании класса таких 3-графов H, для которых минимальное количество ребер в H-свободном гиперграфе с хроматическим числом r растет как $r^{3+o(1)}$.

Т. Бохман, А. Фриз и Д. Мубаи [37] показали, что n-граф с хроматическим числом не менее $2(n-1)(t-1)+2$ содержит копию любого n-дерева с t ребрами. Они же предположили, что утверждение далеко от оптимального, что и доказал П.-Ш. Лох.

Теорема 3.1.10 (Лох [118], 2009). *Пусть $H=(V,E)$ – n-однородный гиперграф с хроматическим числом, большим r. Тогда H содержит копию любого n-однородного гипердерева с r ребрами.*

Затем А. Дьярфас и Й. Лехел [87] показали, что эта теорема является прямым следствием жадного подхода Плухара.

3.1.6. *Системы Штейнера.* *Система Штейнера* с параметрами (v,n,l) – это n-граф на v вершинах, любые l вершин которого содержатся (как подмножество) ровно в одном ребре.

В работах Д. А. Грейбла, К. Т. Фелпса и В. Рёдля [84] и К. Т. Фелпса и В. Рёдля [128] была найдена асимптотика (с точностью до мультипликативной константы) минимального числа независимости $(n,k,2)$- и $(n,k,3)$-систем Штейнера при фиксированном k и n, стремящемся к бесконечности. Из этого с помощью неравенства $\chi(H)\geqslant|V(H)|/\alpha(H)$, где $H=(V,E)$, следуют и оценки соответствующих хроматических чисел.

Хроматические числа систем Штейнера изучались и в случае малых параметров. Например, П. Хорак [96] показал, что любая $(25,3,2)$-система Штейнера имеет хроматическое число 3 или 4; в статье [55] коллектив авторов изучал различные свойства вершинных и реберных раскрасок $(19,3,2)$-систем.

3.2. Пересекающиеся (гиперграфы-клики) и накрест-пересекающиеся семейства. В этом пункте будет продемонстрировано, что при отсутствии возможности применения вероятностного метода зазор между верхними и нижними оценками ощутимо растет.

Определение 3.2.1. Пересекающееся семейство – это гиперграф $H=(V,E)$ такой, что $e\cap f\neq\varnothing$ для любых $e,f\in E$.

Пересекающиеся семейства появились в комбинаторике в статье П. Эрдёша, Ч. Ко и Р. Радо [69], в которой находится максимальное количество элементов в n-однородном пересекающемся семействе на данном множестве вершин.

Определение 3.2.2. *Накрест-пересекающееся семейство* – это гиперграф $H=(V,E)$, снабженный (не обязательно непересекающимся) покрытием $E=A\cup B$ непустыми множествами ребер A и B таким, что любое $a\in A$ пересекает любое $b\in B$. Допуская небольшие нарушения обозначений, мы будем писать как $H=(V,E)$, так и $H=(V,A,B)$.

Накрест-пересекающиеся семейства появились при изучении максимальных и почти максимальных пересекающихся семейств (обозначения появились в [125]). Теорема Хилтона–Милнера [95] использует это понятие для определения максимального числа ребер в n-однородном пересекающемся семействе с пустым пересечением на данном множестве вершин. Теорема Франкла [75] уточняет теорему Хилтона–Милнера в случае, когда максимальная степень вершины ограничена. Недавно общий подход к упомянутым проблемам был предложен А. Купавским и Д. Захаровым [116] (читатель может также использовать эту работу как обзор). Еще больший спектр связанных задач освещен в обзоре [79].

П. Эрдёш и Л. Ловас [70] перенесли классические задачи о раскрасках гиперграфов на подкласс пересекающихся семейств (“гиперграфы-клики” в их терминологии). К сожалению, на данный момент не известны вероятностные методы, позволяющие эффективно построить пересекающееся семейство; например, построить вероятностную верхнюю оценку в случае специфических классов гиперграфов значительно труднее, чем в общем случае.

Несколько проще оказывается решать эти же самые задачи для накрест-пересекающихся семейств, как показал Д. Д. Черкашин в [47].

3.2.1. *Хроматическое число.* Приведем очевидное следствие алгоритма Плухара (это утверждение несложно получить и напрямую).

Следствие 3.2.3. *Пусть $H = (V, E)$ – пересекающееся семейство. Тогда:*

(i) *для произвольной вершины $v \in V$ существует правильная раскраска H в три цвета такая, что один из цветов состоит только из вершины v;*

(ii) *если любые два ребра пересекаются хотя бы по двум вершинам, то H правильно красится в два цвета.*

Ниже мы увидим, что пересекающиеся семейства в некотором смысле разбиваются на “простые”, т. е. красящиеся в два цвета, и “сложные”, т. е. с хроматическим числом три.

С накрест-пересекающимися семействами дела обстоят более интересно. Сначала заметим, что формально накрест-пересекающееся семейство может иметь произвольно большое хроматическое число. Возьмем произвольное натуральное $r > 1$. Рассмотрим гиперграф $H_0 = (V_0, E_0)$ с хроматическим числом r. Положим $A := E_0$, $B := \{V_0\}$. Очевидно, что $H := (V_0, A, B)$ – накрест-пересекающееся семейство с хроматическим числом r. Однако при естественных условиях (которые, очевидно, выполняются для n-однородных гиперграфов) хроматическое число накрест-пересекающегося семейства ограничено.

Утверждение 3.2.4. *Пусть $H = (V, A, B)$ – накрест-пересекающееся семейство. Предположим, что A и B оба содержат минимальные элементы E, т. е. найдутся $a \in A$, $b \in B$, не содержащие подребер H. Тогда $\chi(H) \leqslant 4$.*

Доказательство. Покрасим $a \cap b$ в цвет 1, $a \setminus b$ в цвет 2, $b \setminus a$ в цвет 3, а все остальные вершины в цвет 4. Нетрудно видеть, что раскраска правильная, поскольку a и b не содержат подребер. Утверждение доказано.

Оказывается, что если не найдется такой пары ребер $e_1, e_2 \in E$, что $e_1 \subset e_2$, и любое ребро имеет размер хотя бы 3, то накрест-пересекающееся семейство может иметь хроматическое число только 2 или 3. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 3.2.5 (Черкашин [47], 2018). *Пусть $H = (V, A, B)$ – накрест-пересекающееся семейство без пары ребер $e_1, e_2 \in A \cup B$ такой, что $e_1 \subset e_2$ (т. е. (V, E) – система Шпернера). Тогда $\chi(H) \leqslant 3$ либо $V = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_l\}$, $B = \{\{v_1, \dots, v_m\}, \{u_1, \dots, u_l\}\}$, $A = \{\{v_i, u_j\}$ для всех $i, j\}$ (по модулю A-B-симметрии), где $m, l \geqslant 2$.*

Мы докажем такое следствие.

Следствие 3.2.6. *Пусть H удовлетворяет условию теоремы 3.2.5 и выполнено неравенство* $\min(|A|, |B|) \geqslant 3$. *Тогда* $\chi(H) \leqslant 3$.

Доказательство. Рассмотрим пару $a \in A$, $b \in B$, которая реализует минимум $|a \cup b|$. Выберем произвольные вершины $v_a \in a \setminus b$ и $v_b \in b \setminus a$. Покрасим v_a и v_b в цвет 1, $a \cup b \setminus \{v_a, v_b\}$ в цвет 2, а оставшиеся вершины в цвет 3.

Покажем, что эта раскраска правильная. Поскольку любое ребро имеет размер не менее 3, у нас нет ребер цвета 1. Любое ребро пересекает a или b, т. е. нет и ребер цвета 3. Предположим, что есть ребро e цвета 2. Не умаляя общности, считаем, что $e \in A$. Тогда $e \subset |a \cup b \setminus \{v_a\}|$, а значит, $|e \cup b| < |a \cup b|$, противоречие. Следствие доказано.

3.2.2. *Максимальное число ребер.* Для таких классов гиперграфов неожиданно оказывается интересной и задача, в некотором смысле противоположная по постановке большинству задач из этого обзора: найти *максимальное* количество ребер в “нетривиальном” гиперграфе. Для пересекающихся семейств существует два классических способа формализовать понятие “нетривиальный”, связанных с раскрасками гиперграфов. Первый из них – считать нетривиальным гиперграф, для которого $\chi(H) \geqslant 3$ (соответствующий максимум обозначим через $M(n)$). Второй способ подразумевает, что H нетривиальный тогда и только тогда, когда $\tau(H) = n$ (соответствующий максимум обозначим через $r(n)$), где $\tau(H)$ определено ниже.

Определение 3.2.7. Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф. Назовем *покрывающим числом* $\tau(H)$ (также используются термины *трансверсальное число* и *блокирующее число*) гиперграфа H размер наименьшего множества $A \subset V$ такого, что любое $e \in E$ пересекает A.

Хотя этот способ не связан с раскрасками напрямую, оказывается, что, во-первых, $M(n) \leqslant r(n)$ (поскольку для n-графа H из оценки $\tau(H) < n$ следует, что $\chi(H) = 2$), а во-вторых, мы не знаем, являются ли эти величины различными. Поэтому в дальнейшем мы будем придерживаться авторских обозначений.

П. Эрдёш и Л. Ловас дали первые оценки на $M(n)$.

Теорема 3.2.8 (Эрдёш–Ловас [70], 1973). *Справедливы неравенства*

$$\lfloor (e-1)n! \rfloor \leqslant M(n) \leqslant n^n.$$

Верхняя оценка в теореме 3.2.8 следует из приводимой ниже леммы 3.2.12. Уточнения верхней оценки можно найти в [46], [51], [17]). Наилучшая на данный момент верхняя оценка принадлежит П. Франклу: $r(n) \leqslant n^n e^{-n^{1/4}/6}$ (см. [76]).

Нижняя оценка в теореме 3.2.8 реализуется примером 3.2.13. Л. Ловас предположил [120], что нижняя оценка точна. Эта гипотеза была опровергнута П. Франклом, К. Отой и Н. Токушиге [78]. Они привели явный пример n-однородного гиперграфа H с $\tau(H) = n$ и с количеством ребер не менее

$$c\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \tag{3.2}$$

Немного удивительно, что можно доказать очень похожее утверждение и для накрест-пересекающихся семейств. Введем понятие "нетривиальности" для накрест-пересекающихся семейств.

Определение 3.2.9. Накрест-пересекающееся семейство $H = (V, A, B)$ назовем *критическим*, если

(a) для любого ребра $a \in A$ и любой вершины $v \in a$ найдется $b \in B$ такое, что $a \cap b = \{v\}$;

(b) для любого ребра $b \in B$ и любой вершины $v \in b$ найдется $a \in A$ такое, что $a \cap b = \{v\}$.

Заметим, что если n-однородное пересекающееся семейство $H = (V, E)$ имеет $\tau(H) = n$, то (V, E, E) является критическим накрест-пересекающимся семейством.

Теорема 3.2.10 (Черкашин [47], 2018). *Пусть $H = (V, A, B)$ – критическое накрест-пересекающееся семейство. Обозначим*

$$n := \max_{e \in A \cup B} |e|.$$

Тогда

$$\max(|A|, |B|) \leqslant n^n.$$

Доказательство. Нам необходимо следующее определение.

Определение 3.2.11. Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф, а W – подмножество V. Положим

$$H_W := (V \setminus W, \{e \setminus W \mid e \in E\}).$$

Гиперграф H называется цветком с k лепестками и ядром W, если $\tau(H_W) \geqslant k$.

Лемма 3.2.12 (Харстад–Юхна–Пудлак [89], 1995). *Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф и $n := \max_{e \in E} |e|$. Если $|E| > (k-1)^n$, то H содержит цветок с k лепестками.*

Доказательство. Индукция по n. *База* $n = 1$ очевидна.

Переход. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$, и докажем его для n. Если $\tau(H) \geqslant k$, то H сам является цветком с k лепестками (и пустым ядром). В противном случае некое множество размера $k - 1$ пересекает все ребра H, и, следовательно, не менее $|E|/(k-1)$ ребер проходит через некую вершину x. Гиперграф $H_{\{x\}} = (V_{\{x\}}, E_{\{x\}})$ имеет

$$|E_{\{x\}}| \geqslant \frac{|E|}{k-1} > (k-1)^{n-1}$$

ребер, каждое размером не более $n - 1$. По предположению индукции $H_{\{x\}}$ содержит цветок с k лепестками и ядром Y. Возвращая x в множества цветка, получаем цветок в H с тем же количеством лепестков и ядром $Y \cup \{x\}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим противное: не умаляя общности, будем считать, что $|A| \geqslant n^n + 1$. Тогда по лемме 3.2.12 гиперграф содержит цветок с $n+1$ лепестком. Это значит, что каждое множество $b \in B$ пересекает ядро цветка, т. е. H не является критическим семейством. Противоречие. Теорема доказана.

Для накрест-пересекающихся семейств приводимый в следующем пункте пример 3.2.15 показывает, что оценка из теоремы 3.2.10 точна.

3.2.3. *Примеры.* Понятно, что набор $\binom{[v]}{n}$ при $v \leqslant 2n-1$ является пересекающимся семейством (при $v = 2n-1$ даже с хроматическим числом 3). Теперь приведем пример, реализующий нижнюю оценку в теореме 3.2.8.

Пример 3.2.13. Построим серию примеров $H_n = (V_n, E_n)$ индукцией по n.

База: возьмем полный граф на трех вершинах в качестве H_2.

Переход. Рассмотрим гиперграф $H_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ и n-элементное множество T, не пересекающее V_{n-1}. Положим

$$V_n := V_{n-1} \cup T \quad \text{и} \quad E_n := \{T\} \cup \{e \cup \{t\} \mid e \in E_{n-1},\ t \in T\}.$$

Ясно, что H_n есть n-однородное пересекающееся семейство с хроматическим числом 3. Кроме того,

$$|E_n| = n|E_{n-1}| + 1 = n\lfloor (e-1)(n-1)! \rfloor + 1 = \lfloor (e-1)n! \rfloor.$$

Напомним, что пример с бóльшим количеством ребер был построен П. Франклом, К. Отой и Н. Токушиге [78]. Мы приведем его только в четном случае.

Пример 3.2.14. Пусть $k = 2a+2$, $a \geqslant 1$. Множество вершин состоит из выделенной вершины x и $2a+1$ непересекающегося $(a+2)$-элементного множества A_i, $i = 0, 1, \ldots, 2a$, ни одно из которых не содержит x. Множество ребер состоит из $2a+2$ типов: для $i = 0, 1, \ldots, 2a$ определим

$$E_i := \{e \colon |e| = k,\ A_i \subset e,\ |e \cap A_j| = 1,\ j = i+1, \ldots, i+a \pmod{2a+1}\},$$

а также выделенный тип

$$F := \{e \colon |e| = k,\ x \in e,\ |e \cap A_i| = 1,\ i = 0, 1, \ldots, 2a\}.$$

Данное множество является пересекающимся и имеет размер

$$(a+2)^{k-1} + (k-1)(a+2)^a = (1+o(1))e\left(\frac{k}{2}\right)^{k-1}.$$

Уже при $k = 4$ существуют примеры на 42 ребра [78], [122], которые опровергают гипотезу Ловаса, поскольку в примере 3.2.13 речь шла о 41 ребре.

Пример 3.2.15. Рассмотрим произвольное $n > 2$. Пусть

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}, \quad A := \bigl\{\{v_{i1}, \ldots, v_{in}\} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\bigr\},$$
$$B := \bigl\{\{v_{1i_1}, v_{2i_2}, \ldots, v_{ni_n}\} \mid 1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_n \leqslant n\bigr\}.$$

Заметим, что $|A| = n$, $|B| = n^n$. Очевидно, что $H := (V, A, B)$ – накрест-пересекающееся семейство и $\chi(H) = 3$.

3.2.4. *Открытые вопросы.* Приведем несколько нерешенных задач, не заключающихся в непосредственном улучшении оценок различных определенных величин.

I. *Нижняя оценка количества ребер в пересекающемся семействе с хроматическим числом три.* Довольно естественно предположить, что данное ограничение является весьма сильным. При этом предположении интересно было бы найти более сильную нижнюю оценку, чем оценка на $m(n)$, т. е. чем оценка для произвольного гиперграфа. Из результатов работы П. Остергарда [127] (а именно, из единственности 4-графа, на котором достигается $m(4) = 23$) следует, что минимальное число ребер в 4-однородной клике с хроматическим числом три больше $m(4)$. К сожалению, никаких других результатов в этом направлении пока нет.

II. *Множество мощностей попарных пересечений ребер.* Для гиперграфа $H = (V, E)$ рассмотрим множество попарных пересечений ребер:

$$Q(H) := \{|e_1 \cap e_2| \colon e_1, e_2 \in E\}.$$

Из алгоритма Плухара (критерия Ловаса) следует, что $Q(H)$ содержит единицу при $\chi(H) > 2$.

П. Эрдёш и Л. Ловас [70], используя теорему М. Деза [58], показали, что для n-однородного пересекающегося семейства H с $\chi(H) = 3$ при достаточно большом n имеет место оценка $3 \leqslant |Q(H)|$. С другой стороны, не известно ни одного примера с $|Q(H)| < (n-1)/2$ (эта оценка достигается на “возведенной в степень” плоскости Фано, см. раздел 8). В то же время для накрест-пересекающихся семейств существует простой пример с $|Q(H)| = 4$ (см. [47]).

Также из леммы 3.2.12 и оценки $m(n) > 2^{n-1}$ следует, что максимальное пересечение ребер в пересекающемся семействе с $\chi \geqslant 3$ не может быть меньше, чем $n/\log_2 n$. Однако во всех примерах нетривиальных пересекающихся семейств существуют пары ребер, пересекающиеся по хотя бы $n-2$ элементам.

III. Задачи о пересекающихся и накрест-пересекающихся семействах, не связанные с раскрасками, приведены в [79].

3.3. Неоднородные гиперграфы. Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф. Определим величину $q(H)$ следующим образом:

$$q(H) := \sum_{e \in E} 2^{-|e|},$$

где $|e|$ обозначает размер ребра. В качестве естественного обобщения задачи Эрдёша–Хайнала нас интересует минимальное значение $q(H)$ по всем гиперграфам, которые не красятся в два цвета и у которых все ребра содержат не менее n вершин. Обозначим этот минимум через $q(n)$. Теорема 2.1.1 немедленно влечет оценку $q(n) \leqslant m(n) \cdot 2^{-n}$. К сожалению, мы не можем написать никакой верхней оценки лучше.

Перейдем к нижней оценке на $q(n)$. Ясно, что рассуждения, аналогичные теореме 2.1.1, дают $q(n) \geqslant 1/2$, однако даже доказательство неравенства $q(n) \geqslant 1$ – нетривиальная задача. Дж. Бек в 1978 г. [24] доказал неравенство $q(n) \geqslant \log^* n$, где $\log^*$ – итерированный логарифм. Стоит отметить, что в 2008 г. Л. Лу анонсировал [121] значительное продвижение, но его работа содержит принципиальную ошибку и верна только для *простых* гиперграфов (подробнее об этом см. ниже в этом пункте). Наконец, совсем недавно Л. Дураж, Г. Гутовски и Я. Козик доказали даже более сильный результат.

Теорема 3.3.1 (Дураж–Гутовски–Козик [61], 2018). *Существует такая константа $C > 0$, что*

$$q(n) > C \ln n. \tag{3.3}$$

Мы приведем здесь алгоритм без соответствующего обсчета. На *первом шаге* покрасим каждую вершину независимо и равновероятно. Далее присвоим вершине вес – равномерно выбранное вещественное число между 0 и 1.

На *втором шаге* мы рассматриваем вершины в порядке увеличения их веса. Пусть мы находимся в вершине v. Если существует ребро e, одноцветное после первого шага, такое, что v – его самая тяжелая вершина и ни одна его вершина с меньшим весом не перекрашивалась, то мы перекрашиваем v. Заметим, что в любом одноцветном после первого шага ребре мы перекрасили хотя бы одну вершину (т. е. в итоговой раскраске одноцветные ребра появляются после перекраски всех вершин одного из цветов).

Неоднородные простые гиперграфы. Напомним, что в 2008 г. Л. Лу [121] анонсировал оценку

$$q(n) \geqslant c \,\frac{\ln n}{\ln \ln n}\,.$$

К сожалению, предложенное доказательство работает только для простых гиперграфов. Это было отмечено Д. А. Шабановым, который значительно усилил эти оценки.

Определим $q_g(n)$ как соответствующий минимум, взятый по n-графам с обхватом не менее g.

Теорема 3.3.2 (Шабанов [153], 2014). *При всех $n \geqslant 3$ выполняется неравенство*

$$q_4(n) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}.$$

Еще через год Д. А. Шабанов усилил свой же результат.

Теорема 3.3.3 (Шабанов [154], 2015). *При всех $n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$q_3(n) \geqslant c\sqrt{n}\,, \quad q_4(n) \geqslant cn.$$

Отметим, что эти теоремы доказаны сразу для раскрасок в r цветов.

4. Списочные (предписанные) раскраски графов и гиперграфов

4.1. Списочные раскраски. Для каждой вершины v определим список цветов $L(v)$, в которые можно красить v. *Списочное* (*предписанное*) *хроматическое число* $\mathrm{ch}(H)$ гиперграфа H – это минимальное число k, для которого при любых списках $L(v)$ длины не менее k найдется правильная раскраска гиперграфа. Списочные раскраски графов и гиперграфов появились в работах В. Г. Визинга [167] и П. Эрдёша, А. Л. Рубина и Г. Тейлора [71].

Очевидно, что $\mathrm{ch}(H) \geqslant \chi(H)$, поскольку можно считать все списки равными $\{1, \ldots, \mathrm{ch}(H)\}$. При этом хроматическое и списочное хроматическое числа различаются, например, для графа $K_{3,3}$, для которого $\mathrm{ch}(K_{3,3}) = 3$ (равенство достигается на списках $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ в каждой из долей).

А. В. Косточка [104], [105] обобщил задачу Эрдёша–Хайнала на списочные раскраски. Он предложил отыскать величину $m_l(n, r)$, равную минимальному количеству ребер в гиперграфе H, удовлетворяющем $\mathrm{ch}(H) > r$. Понятно, что

$$m_l(n, r) \leqslant m(n, r).$$

Никакие *верхние* оценки, не следующие непосредственно из этого неравенства, не известны. В частности, как и в п. 3.3, в случае $r = 2$ не удается доказать верхнюю оценку, которая была бы лучше полученной в теореме 2.1.1.

Перейдем к *нижним* оценкам для $m_l(n, r)$. Прежде всего,

$$m_l(2, r) = m(2, r) = \binom{r+1}{2},$$

поскольку степень каждой вершины должна быть не меньше r (и, следовательно, вершин должно быть не меньше $r + 1$).

Далее, повторив доказательство нижней оценки в теореме 2.1.1, мы получаем неравенство

$$m_l(n, r) \geqslant r^{n-1}.$$

В работе А. В. Косточки [104] отмечено, что доказательство оценки Радхакришнана–Сринивасана работает и для списочных раскрасок, а вот методы Алона и Косточки – нет. А. М. Райгородский и Д. А. Шабанов [132] отметили, что оценки Плухара и Шабанова также не могут быть напрямую перенесены на списочные раскраски.

Теорема 4.1.1 (Розовская–Шабанов [135], 2010). *Для всех $n \geqslant 3$, $r \geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$m_l(n, r) \geqslant (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\, r^{n-1}.$$

Доказательство. Мы проведем доказательство другим способом, без уточнения константы (т. е. с константой c вместо $\sqrt{3} - 1$). Рассмотрим 1-скелет единичного симплекса Δ с $\left|\bigcup L(v)\right|$ вершинами и с индуцированной метрикой; зафиксируем биекцию f между цветами и вершинами симплекса. Вершина v равномерно отображается на 1-скелет подсимплекса, натянутого на $f(L(v))$.

Зафиксируем параметр $p \in [0, 1]$ и на каждом ребре симплекса отметим отрезок длины p, равноудаленный от вершин. Вершина v называется *свободной*, если она попала в объединение отмеченных отрезков. Если вершина v не свободная, то мы красим v в цвет, соответствующий ближайшей к v вершине симплекса Δ. Свободные вершины позже будут докрашиваться в цвет, соответствующий одному из концов ребра симплекса, содержащего v.

Таким образом, в данный момент покрашены все вершины, не попавшие в отмеченные отрезки. Математическое ожидание количества полностью покрашенных одноцветных ребер в этот момент не превосходит

$$|E|r\left(\frac{1-p}{r}\right)^{n}. \tag{4.1}$$

Далее, рассмотрим множество ребер, которые могут стать одноцветными после покраски свободных вершин. Все покрашенные вершины такого ребра e одноцветны (скажем, имеют цвет $q(e)$), а все свободные лежат на ребрах, содержащих $f(q)$. Тогда мы пытаемся покрасить его наиболее удаленную от $f(q)$ вершину (назовем ее v; с вероятностью 1 она единственна) в цвет, соответствующий второй вершине ребра симплекса, на котором лежит v.

Если полученная раскраска внутренне непротиворечива, т. е. никакая вершина не должна быть покрашена в два цвета, то получившаяся раскраска является правильной. Заметим, что внутренняя противоречивость означает существование пары ребер e_1, e_2, красящей v в цвета q_1 и q_2 (т. е. 2-цепи). Тогда все вершины ребра e_1 лежат не ближе, чем v, к $f(q_1)$, все вершины ребра e_2 лежат не ближе, чем v, к $f(q_2)$. Вероятность такого события равна

$$\int_{(1-p)/2}^{(1+p)/2}\left(\frac{2a}{r}\right)^{n-1}\left(\frac{2-2a}{r}\right)^{n-1}da < pr^{2-2n},$$

что вместе с (4.1) полностью аналогично вероятностям в доказательстве теоремы 2.3.4 при $r=2$. Значит, подстановка $p := (2\ln n)/n$ завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.3.3 переносится на списочные раскраски и дает наилучший на данный момент результат

$$m_l(n,r) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{n}\,r^{n-1}.$$

Перейдем к случаю, когда количество цветов значительно превосходит размер ребра. Следующее неопубликованное рассуждение принадлежит Б. Судакову.

Теорема 4.1.2. *Для всех $n \geqslant 2$ и $r \geqslant r_0(n)$ выполняется неравенство*

$$m_l(n,r) \geqslant Cr^{n}.$$

Доказательство. Нам потребуется несколько модифицировать метод Алона. Рассмотрим n-граф $H=(V,E)$ с $|E| = cr^n$ и набор списков $\{L(v)\}$, $v \in V$. Положим

$$\mathscr{L} := \bigcup_{v\in V(H)} L(v).$$

Рассмотрим случайное разбиение цветов на два класса: с вероятностью $(n-1)/n$ (независимо друг от друга) каждый из цветов попадает в класс $\mathscr{L}_1$ и с вероятностью $1/n$ – в класс $\mathscr{L}_2$. Заметим, что $|V(H)| \leqslant Cnr^{n+1}$ и $|\mathscr{L}| \geqslant r$. Следовательно, по центральной предельной теореме можно считать, что почти наверное для каждого $v \in V(H)$ размер множества $L(v)\cap\mathscr{L}_1$ равен $(1+o(1))(n-1)r/n$.

Перейдем к раскраске. На первом шаге покрасим случайно (равномерно и независимо) каждую вершину в цвет из списка $\mathscr{L}_1$. На втором шаге рассмотрим одноцветные ребра по очереди и перекрасим по одной произвольной вершине в каждом одноцветном ребре в произвольный цвет из $L(v) \cap \mathscr{L}_2$ так, чтобы не возникало новых одноцветных ребер, если это возможно.

Покажем, что с положительной вероятностью мы получим правильную раскраску. Математическое ожидание количества одноцветных ребер после первого шага не превосходит

$$|E|(1+o(1))\frac{(n-1)r}{n}\left((1+o(1))\frac{(n-1)r}{n}\right)^{-n} \leqslant c|E|r^{1-n}.$$

Таким образом, при правильной константе C в утверждении теоремы на втором шаге перекрашивается не более $r/3$ вершин. Пусть какую-то вершину v перекрасить нельзя. Это значит, что для любого цвета из $L(v) \cap \mathscr{L}_2$ уже существует $n-1$ вершина этого цвета, т. е. до этого мы перекрасили не менее $(n-1)|L(v) \cap \mathscr{L}_2|$ вершин, что почти наверное больше, чем $r/3$. Теорема доказана.

В статье [52] теорема 2.4.1 также обобщается на списочные раскраски (т. е. показывается, что последовательность $m_l(n,r)/r^n$ имеет предел при фиксированном n).

Напоследок отметим, что интересно было бы установить множество пар n и r, на котором выполняется неравенство

$$m_l(n,r) < m(n,r),$$

и, в частности, понять, существует ли хотя бы одна такая пара.

4.2. Списочные раскраски произвольных гиперграфов. Оказывается, что при некоторых естественных условиях списочное хроматическое число любого n-графа растет вместе с его средней степенью – это показали Н. Алон и А. В. Косточка в [14]. Для обычных графов это было доказано Н. Алоном [12]). Приведем наилучшие на сегодняшний день количественные версии этого утверждения. Здесь и далее мы считаем n константой, а среднюю степень n-графа растущей.

Теорема 4.2.1 (Сакстон–Томасон [138], 2015, [139], 2016). *Пусть n – фиксированное число, H – n-граф со средней вершинной степенью d. Предположим, что через любые $j \geqslant 2$ вершин проходит не более $d^{(n-j)/(n-1)+o(1)}$ ребер. Тогда*

$$\mathrm{ch}(H) \geqslant (1+o_d(1))\frac{1}{(n-1)^2}\log_n d.$$

Если H является d-регулярным, то верно и более сильное неравенство

$$\mathrm{ch}(H) \geqslant (1+o_d(1))\frac{1}{n-1}\log_n d.$$

С точностью до константы теорема точна, поскольку П. Хаксель и Дж. Верстрат [90] показали, что

$$\mathrm{ch}(K_{n\times m}) = (1+o(1))\log_n m,$$

где $K_{n\times m}$ обозначает полный n-дольный n-граф с долями размера m. Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы 9.4.3.

Ниже, в п. 4.3, мы разберем схему доказательства на следующем, наиболее простом, примере.

Теорема 4.2.2 (Сакстон–Томасон [137], [140], 2012). *Пусть G – простой d-регулярный n-граф. Тогда*

$$\mathrm{ch}(G) \geqslant \left(\frac{1}{(2n-1)\ln n} + o(1)\right)\ln d.$$

4.3. Контейнеры. Поскольку правильная раскраска гиперграфа является разбиением вершин на независимые множества, изучение множества $\mathscr{I}(H)$ независимых множеств гиперграфа H является тесно связанной задачей.

4.3.1. *Метод контейнеров для графов.* Метод контейнеров для графов появился в работах Д. Клейтмана и К. Винстона [101], [102]. Опишем этот метод вкратце. Рассмотрим граф $G=(V,E)$.

Ясно, что

$$2^{\alpha(G)} \leqslant i(G) \leqslant \sum_{m=0}^{\alpha(G)} \binom{|V(G)|}{m},$$

где $i(G)=|\mathscr{I}(G)|$. Понятно, что если $\alpha(G)$ не очень близко к $|V(G)|$, то верхняя и нижняя оценки сильно различаются. Для улучшения верхней оценки в этом случае и был придуман метод контейнеров. Он основан на довольно естественной идее поставить в соответствие каждому независимому множеству некоторый набор вершин, который его почти определяет. Ясно, что если у нас уже есть некоторый набор вершин, то мы не можем брать в независимое множество их соседей. Предлагается для данного нам множества выбирать такие вершины жадно. Далее мы приводим формальный алгоритм и леммы Клейтмана–Винстона.

Зафиксируем некоторый порядок π на вершинах графа G. Для каждого множества $A\subset V(G)$ определим внутренний порядок на вершинах из A следующим образом: вершина v_i имеет максимальную степень в графе, индуцированном на $A\setminus\{v_1,\dots,v_{i-1}\}$ (если в какой-то момент есть несколько способов выбрать вершину v_i, мы выбираем наименьшую относительно π). Переходим к алгоритму: он принимает на вход независимое множество I и число $q<|I|$. Положим $A=V(G)$, $S=\varnothing$ и проделаем следующие шаги для $s=1,\dots,q$:

1) рассмотрим внутренний порядок $(v_1,\dots,v_{|A|})$ на вершинах A;

2) рассмотрим минимальный индекс j_s такой, что v_{j_s} принадлежит I;

3) переместим v_{j_s} из A в S;

4) удалим $v_1,\dots,v_{j_{s-1}}$ из A;

5) удалим из A всех соседей вершины v_{j_s}.

Алгоритм возвращает последовательность $(j_1,\dots,j_q)$ и $A\cap I$.

Заметим, что множества A и S однозначно восстанавливаются по $(j_1,\dots,j_q)$, поскольку мы можем повторить работу алгоритма. С другой стороны,

$$I = S(j_1,\dots,j_q)\cup(A(j_1,\dots,j_q)\cap I).$$

Лемма 4.3.1. *Пусть G – граф на n вершинах, q – натуральное число, а вещественные числа R и $\beta \in [0,1]$ удовлетворяют соотношению*

$$R > e^{\beta q} n. \tag{4.2}$$

Предположим, что для любого множества $U \subset V(G)$ такого, что $|U| > R$, выполняется неравенство

$$e[G(U)] > \beta \binom{|U|}{2}.$$

Тогда для любого целого $m > q$ выполняется неравенство

$$i(G,m) \leqslant \binom{n}{q}\binom{R}{m-q},$$

где $i(G,m)$ – количество независимых множеств размера m в графе G.

Доказательство. Поскольку мы на шаге s удаляем из A хотя бы j_s вершин, выполняется неравенство

$$j_1 + \dots + j_q \leqslant |V(G)| - |A(j_1,\dots,j_q)|.$$

Далее,

$$i(G,m) \leqslant \sum_{(j_s)} i(G[A(j_1,\dots,j_q)], m-q) \leqslant \sum_{(j_s)} \binom{|A(j_1,\dots,j_q)|}{m-q}$$

для любого $m > q$.

Заметим, что у нас есть ровно $\binom{n}{q}$ последовательностей $(j_1,\dots,j_q)$, удовлетворяющих условию $j_1 + \dots + j_q \leqslant n$ и таких, что $j_s \geqslant 1$ для каждого s. Соответственно, в сумме не более $\binom{n}{q}$ слагаемых. Таким образом, нам достаточно показать, что для каждой последовательности $(j_1,\dots,j_q)$, которую выдает алгоритм, множество $A(j_1,\dots,j_q)$ содержит не более R элементов. Предположим противное: пусть для некоторого выхода $(j_1,\dots,j_q)$ при любом $1 \leqslant s \leqslant q$ множество $A \setminus \{v_1,\dots,v_{j_{s-1}}\}$ содержит более R элементов. Тогда подграф $G[A(j_1,\dots,j_s)]$ имеет реберную плотность не меньше β. Значит, каждая итерация уменьшает $|A|$ хотя бы в $(1-\beta)^{-1}$ раз, и мы получаем

$$|A(j_1,\dots,j_q)| \leqslant (1-\beta)^q n \leqslant e^{\beta q} n \leqslant R,$$

противоречие. Лемма доказана.

Примеры применения метода в различных комбинаторных и аддитивно-комбинаторных задачах можно найти в замечательном обзоре [136].

4.3.2. *Контейнеры для гиперграфов.* Метод контейнеров для гиперграфов независимо появился в статьях Д. Сакстона, Э. Томасона и Й. Балога, Р. Морриса, В. Самотижа как далеко идущее (и технически непростое) обобщение метода для графов.

Дадим неформальное определение контейнеров. Пусть $H = (V, E)$ – некоторый n-граф. Семейство подмножеств $\mathscr{C} \subset 2^{V(H)}$ называется *контейнером*, если выполняются следующие условия:

(a) любое независимое множество I содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$;

(b) существует константа q такая, что “мощность” любого контейнера $C \in \mathscr{C}$ хотя бы в q раз меньше “мощности” $V(H)$;

(c) $|\mathscr{C}| \leqslant 2^{\alpha|V(H)|}$ для некоторого α.

Под “мощностью” в различных формулировках подразумевается количество элементов, сумма степеней элементов или количество ребер, целиком содержащихся в множестве.

На настоящий момент существует множество теорем о существовании контейнеров при некоторых, обычно довольно общих, условиях на H. Наиболее общие теоремы представлены в фундаментальных статьях [138], [21]. Улучшение (и упрощение) вероятностного алгоритма из [138] опубликовано в [139]. Версии теорем для простых гиперграфов изложены в [140]. Короткое доказательство по индукции можно найти в [32]. Широкие применения метода контейнеров к задачам из различных областей комбинаторики описаны в обзоре [22].

4.3.3. *Списочные раскраски произвольных простых гиперграфов.* В этом пункте мы приведем набросок вывода теоремы 4.2.2 из теоремы о контейнерах в форме приводимой ниже теоремы 4.3.2. Пусть $H = (V, E)$, $C \subset V$ и $E[C]$ обозначает множество ребер H, содержащихся в C.

Теорема 4.3.2 (Сакстон–Томасон [140], [137]). *Пусть $H = (V, E)$ – простой d-регулярный n-граф, $0 < \delta < 1$. Тогда существует семейство подмножеств $\mathscr{C} \subset 2^{V(H)}$ такое, что*

(a) *любое независимое множество I содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$;*

(b) $|E[C]| \leqslant \delta |E(H)|$ *для любого* $C \in \mathscr{C}$;

(c) $|\mathscr{C}| \leqslant 2^{\alpha|V(H)|}$, *где* $\alpha = d^{-1/(2n-1)}$.

Пусть $\mathscr{C} \subset 2^{V(H)}$. Раскраска называется *$\mathscr{C}$-совместимой*, если для любого цвета множество всех вершин, покрашенных в этот цвет, содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$.

Теорема 4.3.3 (Сакстон–Томасон [137]). *Зафиксируем $c > 0$, и пусть $k_0(c) < k < |V(H)|$. Если семейство $\mathscr{C} \subset 2^{V(H)}$ удовлетворяет условиям*

(a) $|\mathscr{C}| \leqslant 2^{|V(H)|/k}$,

(b) $|C| \leqslant (1 - c)|V(H)|$ *для любого* $C \in \mathscr{C}$,

то существует набор списков размера

$$(1 + o(1)) \frac{\ln k}{-\ln c},$$

не допускающий $\mathscr{C}$-совместимой раскраски.

Положим
$$l := \left\lfloor (1-\varepsilon\,\frac{\ln k}{-\ln c} \right\rfloor \quad \text{и} \quad t := \left\lfloor \frac{2l^2}{c} \right\rfloor, \quad \varepsilon > 0.$$
Оказывается, что для достаточно малого ε случайный (равномерный и независимый) выбор l-элементных подмножеств из t-элементного множества в качестве списков с положительной вероятностью удовлетворяет условиям теоремы.

Рассмотрим множество $\mathscr{C}$ из теоремы 4.3.2. Покажем, что неравенство $|E[C]| \leqslant \delta|E(H)|$ влечет неравенство $|C| \leqslant (1-1/n+\delta/n)|V(H)|$. В самом деле, для суммы степеней вершин в множестве C можно написать оценку
$$d|C| \leqslant n|E[C]| + (n-1)(|E(H)| - |E[C]|),$$
поскольку каждое ребро из $E(H) \setminus E[C]$ пересекает C не более чем по $n-1$ вершине. Если выполнено неравенство $|E[C]| \leqslant \delta|E(H)|$, то отсюда получаем
$$d|C| \leqslant (n-1+\delta)|E(H)|,$$
что равносильно требуемому неравенству $|C| \leqslant (1-1/n+\delta/n)|V(H)|$ ввиду d-регулярности H.

Таким образом, можно применить теорему 4.3.3 к семейству $\mathscr{C}$ и получить списки, не допускающие $\mathscr{C}$-совместимой, а значит, по первому свойству контейнеров, и правильной раскраски. В этом случае получаем $k = d^{1/(2n-1)}$, $c = (1-\delta)/n$ и
$$\chi(H) \geqslant (1+o(1))\frac{\ln k}{-\ln c} = \left(\frac{1}{(2n-1)\ln n} + o(1)\right)\ln d.$$

5. Полноцветные раскраски

Раскраска вершин гиперграфа в r цветов называется *полноцветной*, если каждое ребро содержит вершины всех цветов. Это определение и аналог теоремы 2.5.3 появились в статье П. Эрдёша и Л. Ловаса [70]. А. В. Косточка [103] поставил вопрос о нахождении минимального числа ребер $p(n,r)$ в n-однородном гиперграфе, не обладающем полноцветной r-раскраской (ясно, что $m(n,2) = p(n,2)$). Косточка также привел оценки
$$\frac{1}{r}e^{cn/r} \leqslant p(n,r) \leqslant re^{Cn/r}, \tag{5.1}$$
где $c < 1$ и $C \geqslant 4$ – положительные константы. Этот результат следует из теоремы 9.4.1 и оценок Алона [11] на списочные хроматические числа графов. Впоследствии и верхняя, и нижняя оценки неоднократно улучшались.

А. В. Косточка и Д. Р. Вудалл получили достаточное условие для существования полноцветной n-раскраски в терминах отношения Холла.

Теорема 5.0.1 (Косточка–Вудалл [112], 2001). *Пусть $H = (V,E)$ – n-однородный граф при $n \neq 3, 5$. Если для любого непустого подмножества ребер F*

выполняются неравенства

$$\Bigl|\bigcup_{f\in F} f\Bigr| \geqslant \begin{cases} \dfrac{(n^2-2n+2)|F|+n-1}{n}, & n\neq 3,5,\\[2mm] \dfrac{(n^2-2n+2)|F|+n}{n}, & n=3,5,\end{cases}$$

то H допускает полноцветную n-раскраску.

В той же работе [112] было высказано предположение, что случай $n\in\{3,5\}$ не нуждается в усилении посылки.

5.1. Верхние оценки. По принципу Дирихле любая r-цветная вершинная раскраска содержит цвет размером не более $\lfloor (1/r)|V|\rfloor$. Дополнение к этому цвету имеет размер хотя бы

$$|V| - \left\lfloor \frac{1}{r}\,|V|\right\rfloor = \left\lceil \frac{r-1}{r}\,|V|\right\rceil.$$

Следовательно, $p(n,r)\leqslant p'(n,r)$. По духу этот аргумент похож на стандартную оценку хроматического числа графа через число вершин и число независимости.

В работах [149], [150] Д. А. Шабанов дал следующие верхние оценки:

$$p(n,r)\leqslant c\,\frac{n^2\ln r}{r^2}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n,\quad \text{если } 3\leqslant r=O(\sqrt{n}\,) \text{ и } n>n_0; \tag{5.2}$$

$$p(n,r)\leqslant c\,\frac{n^{3/2}\ln r}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n,\quad \text{если } r=O(n^{2/3}) \text{ и } n_0<n=O(r^2); \tag{5.3}$$

$$p(n,r)\leqslant c\max\left(\frac{n^2}{r},n^{3/2}\right)\ln r\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\quad \text{для всех } n,r\geqslant 2. \tag{5.4}$$

Ясно, что (5.2)–(5.4) дают оценки вида (5.1) с $C=1$ при условии $r\leqslant cn/\ln n$.

Приведем идею, которая применяется в доказательстве большинства верхних оценок. Определим величину $p'(n,r)$ как минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе $H=(V,E)$ таком, что любое подмножество вершин $V'\subset V$ размера $|V'|\geqslant \left\lceil \frac{r-1}{r}\,|V|\right\rceil$ содержит в себе ребро. На самом деле, $p'(n,r)$ совпадает с

$$\min_{|V|} T\left(|V|, \frac{r-1}{r}\,|V|, n\right)$$

(напомним, что $T(a,b,c)$ обозначает число Турана, см. п. 2.4.1).

Доказательство Эрдёша верхней оценки в теореме 2.1.1 обобщается следующим образом.

Теорема 5.1.1 (Черкашин [48], 2018). *Для всех $n\geqslant 2$, $r\geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$p(n,r)\leqslant c\,\frac{n^2\ln r}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

5.2. Нижние оценки. Заметим, что стандартные вероятностные аргументы дают оценку

$$p(n,r) \geqslant \frac{1}{r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n$$

(т. е. нижнюю оценку в (5.1), где $c = 1$). Она была существенно улучшена Д. А. Шабановым в [149]:

$$p(n,r) \geqslant c\,\frac{1}{r^2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \quad \text{для} \quad n, r \geqslant 2, \quad r < n.$$

Затем А. П. Розовская и Д. А. Шабанов [135] показали, что

$$p(n,r) \geqslant c\,\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \quad \text{для} \quad n, r \geqslant 2, \quad r \leqslant \frac{n}{2\ln n}\,.$$

Для доказательства следующей теоремы используется так называемый метод малых вариаций (см. [15; гл. 3] и п. 2.4.2). Результат этой теоремы является наилучшим из известных при $r \geqslant c\sqrt{n}$.

Теорема 5.2.1 (Черкашин [48], 2018). *Для $n \geqslant r \geqslant 2$ выполняется оценка*

$$p(n,r) \geqslant e^{-1}\,\frac{r-1}{n-1}\,e^{(n-1)/(r-1)}.$$

Доказательство. Рассмотрим равномерную и независимую случайную раскраску множества вершин в $a > r$ цветов. Математическое ожидание числа пар (e, q) таких, что ребро $e \in E$ не содержит цвета q, равно $|E|a\left(\frac{a-1}{a}\right)^n$. Поэтому если $|E|a\left(\frac{a-1}{a}\right)^n < a - r$, то с положительной вероятностью существуют r цветов, содержащихся в каждом ребре. Подставляя $a = \frac{n-1}{n-r}\,r$, получаем существование полноцветной раскраски при

$$|E| \leqslant \frac{r-1}{n-1}\left(\frac{nr-r}{nr-n}\right)^n \leqslant e^{-1}\,\frac{r-1}{n-1}\,e^{(n-1)/(r-1)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.2.1 не допускает локальной версии. Мы докажем несколько более слабую оценку, основанную на геометрическом переосмыслении идей А. Плухара [130], которую можно комбинировать с локальной леммой Ловаса. Рассмотрим $(r-1)$-мерный единичный симплекс с мерой, непрерывно и равномерно распределенной по 1-скелету (ребра симплекса), и индуцированную метрику на этом скелете; зафиксируем биекцию f между цветами и вершинами симплекса.

Построим случайное отображение из вершин H на 1-скелет, в соответствии с равномерной мерой и независимо. Мы пытаемся покрасить гиперграф следующим образом: для каждого ребра e и каждого цвета i мы красим в цвет i вершину ребра e, ближайшую к вершине симплекса $f(i)$ (с вероятностью 1 такая вершина единственна). Если этот метод внутренне непротиворечив (т. е.

каждая вершина покрашена не более одного раза), то очевидно, что раскраска полноцветна. Далее оценивается вероятность внутреннего противоречия; при ограничении сверху на число ребер эта вероятность меньше 1, что доказывает следующую теорему.

Теорема 5.2.2 (Черкашин [48], 2018). *Для* $n \geqslant r \geqslant 2$ *таких, что* $r \leqslant cn/\ln n$, *выполняется оценка*

$$p(n,r) \geqslant c \max\left(\frac{n^{1/4}}{r\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{r}{r-1}\right)^n.$$

5.3. Случай малого n/r**.** Рассмотрим случай, когда отношение n/r мало (т. е. $r > cn/\ln n$); $n/r = \mathrm{const}$ – хороший модельный пример. Лучшей из уже упомянутых верхних оценок в случае $n/r = O(\ln n)$ является оценка $re^{cn/r}$ (см. (5.1)), где $c \geqslant 4$ – константа. Используя следующую теорему, мы доказываем оценку, зависящую только от n/r.

Утверждение 5.3.1 (Черкашин [48], 2018). *Для всех натуральных* m, n, r *выполняется неравенство*

$$p(mn, mr) \leqslant p'(n,r).$$

В качестве следствия теоремы 5.3.1 и очевидного неравенства

$$\max(p(n,r), p(n+1,r+1)) \leqslant p(n+1,r)$$

мы получаем оценку, которая является наилучшей в случае, когда n/r мало.

Следствие 5.3.2. *Для любого натурального* $k \leqslant r$ *выполняется неравенство*

$$p(n,r) \leqslant p'\left(\left\lceil\frac{n}{r-k+1}\right\rceil k, k\right).$$

В частности, если $n < r^2$, *то можно взять* $k := \alpha n/r$ *и получить*

$$p(n,r) \leqslant c\left(\frac{n}{r}\right)^2 \ln\frac{n}{r} \cdot e^{n/r}.$$

Теорема 5.2.1 дает нетривиальную нижнюю оценку даже в случае малого n/r, но вместе с этим стоит отметить существование элементарного жадного алгоритма.

Утверждение 5.3.3. *Следующее неравенство выполняется для всех натуральных* $n \geqslant r$:

$$p(n,r) \geqslant \left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor.$$

Доказательство утверждения 5.3.3. Рассмотрим гиперграф $H = (V,E)$ такой, что $|E| \leqslant \lfloor n/r \rfloor$. Выберем произвольное ребро $e \in E$ и покрасим любые r его вершин в разные цвета. Теперь удалим из H ребро e и все покрашенные вершины. Оставшийся гиперграф имеет $|E|-1$ ребро, а размер каждого ребра не менее $n-r$. Поэтому мы можем повторить эту операцию $\lfloor n/r \rfloor$ раз, и утверждение доказано.

6. Справедливые раскраски

Вершинная раскраска называется *справедливой*, если мощности цветов различаются не более чем на 1. П. Эрдёш высказал следующую гипотезу, которую затем доказали А. Хайнал и Э. Семереди.

Теорема 6.0.1 (Хайнал–Семереди [88]). *Пусть G – граф, все степени которого не превосходят d. Тогда его можно справедливо покрасить в $d+1$ цвет.*

Значительно более простое доказательство принадлежит Х. А. Кирстаду и А. В. Косточке [99]. Также они сформулировали похожую теорему в терминах реберной степени.

Теорема 6.0.2 (Кирстад–Косточка [98], 2008). *Пусть граф G таков, что для любого ребра xy выполняется неравенство $d(x)+d(y) \leqslant 2r+1$. Тогда существует справедливая $(r+1)$-раскраска G.*

Задача была обобщена на n-графы в статьях [29], [161].

В статье [155] была доказана следующая теорема.

Теорема 6.0.3 (Шабанов [155], 2015). *Пусть $H=(V,E)$ – n-граф и $|V| \geqslant n^2 \cdot 2^n$. Тогда если*

$$d(H) \leqslant \frac{1}{64}\,\frac{2^n}{\sqrt{n \ln n}}\,,$$

где $d(H)$ – максимальная степень вершины H, то H допускает справедливую 2-раскраску.

Недавно эта теорема была значительно усилена.

Теорема 6.0.4 (Ахмеджанова–Шабанов [7], 2019). *При достаточно большом n и любом $r \leqslant \sqrt[5]{\ln n}$ для произвольного n-графа $H=(V,E)$, удовлетворяющего условиям*

$$|E| \leqslant 0.01\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1} \quad \text{и} \quad |V| \,\vdots\, r,$$

существует справедливая r-раскраска.

Справедливые раскраски простых гиперграфов. Д. А. Шабанов также рассмотрел задачу в классах простых и b-простых гиперграфов. Приведем следствие из основной теоремы работы [155].

Теорема 6.0.5 (Шабанов [155], 2015). *Пусть $H=(V,E)$ – простой n-граф. Тогда если*

$$d(H) \leqslant c\,\frac{2^n}{\sqrt{n \ln n}}\,,$$

где $d(H)$ – максимальная степень вершины H, то H допускает справедливую 2-раскраску.

Случай неоднородных простых гиперграфов. И. Р. Ширгазина в работах [156], [157] доказала, что если $H=(V,E)$ – простой гиперграф с минимальной мощностью ребра n, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{e\in E} r^{1-|e|} \leqslant c\sqrt{k} \quad \text{и} \quad |V| \,\vdots\, r,$$

то H обладает справедливой r-раскраской.

7. Разброс

Назовем *разбросом 2-раскраски* в красный и синий цвета вершин гиперграфа максимум по всем ребрам модуля разности между количествами вершин красного и синего цвета в ребре. Назовем также *разбросом гиперграфа* наименьший разброс по всем раскраскам гиперграфа. Задачам о разбросе посвящены книги [124], [45].

7.1. Матрицы Адамара. Матрица Адамара H – это квадратная матрица порядка n с элементами из $\{1, -1\}$, столбцы которой попарно ортогональны. Иными словами,

$$H \cdot H^{\mathrm{T}} = nE_n,$$

где E_n – единичная матрица порядка n, а H^{T} – транспонированная матрица H.

Существует большое количество явных конструкций матриц Адамара. Несложно показать, что для существования матрицы Адамара n должно быть равно двум или делиться на четыре. Знаменитая гипотеза Адамара утверждает, что такие матрицы существует для всех n, кратных четырем. Подробности можно посмотреть в фундаментальном обзоре [54].

Теорема 7.1.1. *Пусть существует матрица Адамара порядка n. Тогда найдется семейство из n множеств на n вершинах с разбросом не меньше $\sqrt{n}/2$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу Адамара $H = \{h_{ij}\}$ порядка n такую, что ее первая строка и первый столбец состоят только из единиц (любую матрицу Адамара можно привести к такому виду, домножая строки и столбцы на -1).

Заметим, что матрица $(H + J)/2$ состоит из нулей и единиц; носители столбцов и являются искомым семейством. Поставим в соответствие раскраске вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = \pm 1$ (красный цвет соответствует единицам, синий – минус единицам). Тогда

$$Hv = v_1 c_1 + \dots + v_n c_n,$$

где c_i обозначает i-й столбец матрицы H. Положим $Hv = (L_1, \dots, L_n)$, и пусть $|c|$ обозначает евклидову норму. Тогда

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 = |Hv|^2 = v_1^2 |c_1|^2 + \dots + v_n^2 |c_n|^2 = n + \dots + n = n^2,$$

поскольку все c_i попарно ортогональны. Также отметим, что

$$L_1 + \dots + L_n = \sum_{i,j=1}^{n} v_j h_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} = n v_1 = \pm n.$$

Пусть J – квадратная матрица из всех единиц порядка n. Положим $\lambda = v_1 + \dots + v_n$, тогда λ – четное число и $Jv = (\lambda, \dots, \lambda)$. Имеем

$$\frac{H + J}{2} v = \left(\frac{L_1 + \lambda}{2}, \dots, \frac{L_n + \lambda}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (L_i + \lambda)^2 &= \sum_{i=1}^{n} L_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} L_i + n\lambda^2 = n^2 \pm 2n\lambda + n\lambda^2 \\ &= n^2 - n + n(x \pm 1)^2 \geqslant n^2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Следовательно, для некоторого i

$$\left|\frac{L_i+\lambda}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\,.$$

7.2. Локальная постановка. Дж. Бек и Т. Фиала [26] оценили разброс сверху через максимальную степень вершины гиперграфа H, обозначаемую далее $\deg(H)$.

Теорема 7.2.1 (Бек–Фиала [26], 1981). *Пусть H – гиперграф такой, что $\deg(H)=t$. Тогда*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant 2t-1. \tag{7.2}$$

Дж. Бек и Т. Фиала также предположили, что теорема 7.2.1 может быть существенно усилена.

Гипотеза 7.2.2. *Существует такая константа C, что для любого гиперграфа H с $\deg(H)=t$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant C\sqrt{t}\,. \tag{7.3}$$

Однако, несмотря на широкую известность гипотезы, наилучший результат $2t-\log^* t$ (здесь $\log^* t$ – итерированный логарифм) получен в 2016 г. Б. Бухом [42] (промежуточные оценки получены в работах [27], [92]).

7.3. Однородные гиперграфы с положительным разбросом. Пусть $f(n)$ – наименьшее количество ребер в n-однородном гиперграфе с положительным разбросом. Весьма неожиданно, но все имеющиеся оценки на $f(n)$ зависят только от минимального не-делителя числа n (в дальнейшем $\operatorname{snd}(n)$).

Очевидно, что если $2\nmid n$, то $f(n)=1$; если же $2\mid n$, но $4\nmid n$, то $f(n)=3$. П. Эрдёш и В. Шош интересовались тем, является ли $f(n)$ неограниченной функцией. Н. Алон, Д. Клейтман, К. Померанец, М. Сакс и П. Сеймур [13] доказали следующую теорему, показав, в частности, что $f(n)$ неограничена.

Теорема 7.3.1 (Алон–Клейтман–Померанец–Сакс–Сеймур [13], 1987). *Пусть n – такое натуральное число, что $4\mid n$. Тогда*

$$c_1\,\frac{\ln\operatorname{snd}(n/2)}{\ln\ln\operatorname{snd}(n/2)} \leqslant f(n) \leqslant c_2\,\frac{\log^3\operatorname{snd}(n/2)}{\ln\ln\operatorname{snd}(n/2)}\,, \tag{7.4}$$

где $\operatorname{snd}(x)$ означает наименьшее натуральное число, не делящее x.

Для доказательства верхней оценки авторы ввели ряд понятий. Пусть $\mathscr{M}$ обозначает множество матриц M с элементами в $\{0,1\}$ таких, что уравнение $Mx=e$ имеет ровно одно неотрицательное решение (здесь e означает вектор из единиц). Это решение обозначается x^M. Пусть $z(M)$ – наименьшее натуральное число такое, что вектор $z(M)x^M$ – целочисленный; положим $y^M=z(M)x^M$. Для каждого натурального n определим $t(n)$ как наименьшее r такое, что существует матрица $M\in\mathscr{M}$ с r строками такая, что $z(M)=n$ (очевидно, что $t(n)\leqslant n+1$, так как $z(J_{n+1}-I_{n+1})=n$, где J_{n+1} – это $(n+1)\times(n+1)$-матрица из единиц, а I_{n+1} – это единичная матрица размера $(n+1)\times(n+1)$). Верхняя оценка в (7.4) следует из доказанного в [13] неравенства $f(n) \leqslant t(m)$ для таких m, что $\lfloor n/m \rfloor$ нечетно.

Затем Н. Алон и В. Ву [16] показали, что

$$t(m) \leqslant (2+o(1))\frac{\ln m}{\ln\ln m}$$

для бесконечного количества значений m. Однако они отметили, что справедливость неравенства $t(m) \leqslant c\ln m$ для произвольного m не очевидна. Это упущение было устранено Ф. Петровым и Д. Черкашиным.

Теорема 7.3.2 (Петров–Черкашин [53], 2019). *Пусть n – положительное натуральное число. Тогда*

$$f(n) \leqslant c\ln \operatorname{snd}(n) \tag{7.5}$$

для некоторой константы $c>0$.

Следствие 7.3.3. *Пусть n – положительное натуральное число. Тогда*

$$f(n) \leqslant c\ln\ln n$$

для некоторой константы $c>0$.

Основная идея доказательства – найти матрицу с определителем $\operatorname{snd}(n)$ и маленькими элементами, удовлетворяющую некоторым техническим условиям. Завершим этот пункт несколькими гипотезами.

Гипотеза 7.3.4 (Алон–Клейтман–Померанец–Сакс–Сеймур [13]). *При некоторой функции g справедливо представление*

$$f(n) = g(\operatorname{snd}(n)).$$

Гипотеза 7.3.5 (Алон–Клейтман–Померанец–Сакс–Сеймур [13]). *При некоторой функции Θ справедливо представление*

$$f(n) = \Theta\left(\frac{\ln \operatorname{snd}(n)}{\ln\ln \operatorname{snd}(n)}\right).$$

7.4. Разброс однородных гиперграфов. Рассмотрим n-однородный гиперграф H и всевозможные раскраски его вершин в два цвета. Ясно, что существование раскраски, в которой каждое ребро содержит хотя бы k вершин каждого цвета, равносильно существованию раскраски с разбросом не более $n-2k$. В связи с этим естественным образом определяется величина $m_k(n)$, равная наименьшему количеству ребер в n-однородном гиперграфе, для любой 2-раскраски вершин которого найдется ребро, содержащее не более $k-1$ вершины одного из цветов.

Впервые величина $m_k(n)$ введена А. М. Райгородским (очень похожая задача с тем же обозначением рассматривалась в [117]). Рассуждая аналогично теореме 2.1.1, можно получить оценку

$$m_k(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}}.$$

В статьях [144]–[146] Д. А. Шабанов адаптировал различные алгоритмы и получил, что при $k \leqslant c \ln n$ выполняется неравенство

$$m_k(n) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \frac{(4e)^{k/2}}{\sqrt{k}} \, \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{k-1}} \, .$$

В работе [134] А. П. Розовская, применив обобщение метода Плухара, показала, что при $k \leqslant c\sqrt{n}$ выполняется неравенство

$$m_k(n) \geqslant cn^{1/4} \, \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{k-1}} \, .$$

В статьях [144], [145] Д. Шабанов получил соответствующий теореме 2.1.1 результат при $k < cn/\ln n$:

$$m_k(n) \leqslant cn^2 \, \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}} \, .$$

Наконец, Ю. Демидович доказал следующую теорему.

Теорема 7.4.1 (Демидович [57], 2019). *Для любых $n \geqslant 30$, $k \geqslant 2$ таких, что*

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \, ,$$

выполняется неравенство

$$m_k(n) \geqslant \sqrt{\frac{n}{k \ln n}} \, \frac{2^{n-1}}{\binom{n}{k-1}} \, .$$

8. Явные конструкции и малые значения переменных

8.1. Малые параметры. Напомним, что $m(2,r) = \dbinom{r+1}{2}$, в частности, $m(2) = 3$.

8.1.1. *Плоскость Фано.* Покажем, что $m(3) = 7$ и единственным примером является плоскость Фано (проективная плоскость над $\mathbb{F}_2$).

Определим операцию *стягивания вершин.* Пусть v_1, v_2 – вершины гиперграфа $H = (V, E)$, тогда результатом стягивания v_1 и v_2 является гиперграф $H_{v_1 v_2}$, у которого v_1 и v_2 заменены на одну вершину v, а ребра нового гиперграфа получаются из ребер старого заменой в них v_1 и (или) v_2 на v.

Рассмотрим n-однородный гиперграф H_0, который не красится в два цвета. До тех пор, пока существует пара вершин, не содержащаяся ни в одном ребре, стягиваем эту пару. При такой операции однородность не меняется, граф по-прежнему не красится в два цвета, а число ребер не увеличивается. В конце концов мы получим n-однородный гиперграф $H = (V, E)$, который не красится в два цвета, такой, что через каждую пару его вершин проходит ребро. А значит,

$$|E| \geqslant \left\lceil \frac{|V|}{n} \left\lceil \frac{|V|-1}{n-1} \right\rceil \right\rceil . \tag{8.1}$$

С другой стороны, если вершин мало, то нам значительно выгоднее красить в равное количество цветов. Случайно выбранная балансная раскраска дает оценку

$$m(n) \geqslant \left\lceil \binom{v}{\lceil v/2 \rceil} \left(\binom{v-n}{\lceil v/2 \rceil - n} + \binom{v-n}{\lfloor v/2 \rfloor - n} \right)^{-1} \right\rceil. \tag{8.2}$$

Теперь рассмотрим произвольный гиперграф H_0, реализующий $m(3)$. Будем стягивать его, пока не получим нестягиваемый гиперграф $H = (V, E)$. Если $|V| \leqslant 6$, то оценка (8.2) утверждает, что $m(3) \geqslant 10$, что неверно, поскольку у нас уже есть пример на 7 ребер. В случае $|V| \geqslant 7$ оценка (8.1) дает $|E| \geqslant 7$, причем равенство достигается, только если $|V| = 7$ и через любые две вершины проходит ровно одно ребро. Но это в точности определяет конечную проективную плоскость, поскольку

(i) через любые две точки проходит одна прямая;

(ii) любые две прямые пересекаются ровно по одной точке (это так, поскольку по пункту (i) они пересекаются не более чем по одной точке; если же они не пересекаются, то оставшаяся прямая проходит через оставшуюся точку x_7, но степень x_7 равна 3 – противоречие);

(iii) найдутся четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой (это следует из (ii), ведь в дополнении любой прямой не может лежать прямая).

Хорошо известно (и несложно установить перебором), что проективная плоскость порядка 2 единственна. Осталось заметить, что применение операции, обратной к стягиванию, к плоскости Фано немедленно уменьшает хроматическое число.

Задача Эрдёша–Хайнала в случае произвольного n и линейного по n числа вершин рассматривалась в [65].

Полный 3-граф на семи вершинах реализует оценку $m(3,3) \leqslant 35$. Неравенство $m(3,3) \geqslant 27$ было установлено И. А. Акользиным [8]. Примечательно, что это же неравенство послужило отправной точкой для статьи [108], но было исключено из финальной версии.

8.1.2. *$m(4)$ и бо́льшие значения n.* П. Сеймур [142] и Б. Тофт [165] независимо показали, что $m(4) \leqslant 23$. Их пример является гиперграфом на 11 вершинах со следующими ребрами:

$$\begin{gathered}
\{1,2,9,10\}, \quad \{3,4,9,10\}, \quad \{5,6,9,10\}, \quad \{7,8,9,10\}, \\
\{1,2,9,11\}, \quad \{3,4,9,11\}, \quad \{5,6,9,11\}, \quad \{7,8,9,11\}, \\
\{1,2,10,11\}, \quad \{3,4,10,11\}, \quad \{5,6,10,11\}, \quad \{7,8,10,11\}, \\
\{1,3,5,8\}, \quad \{1,3,6,7\}, \quad \{1,4,5,7\}, \quad \{1,4,6,7\}, \quad \{1,4,6,8\}, \\
\{2,3,5,7\}, \quad \{2,3,6,7\}, \quad \{2,3,6,8\}, \quad \{2,4,5,7\}, \quad \{2,4,5,8\}, \quad \{2,4,6,8\}.
\end{gathered}$$

Тофт получил данный пример как частный случай конструкции, дающей соотношение (8.5). П. Остергард [127] с помощью компьютерного перебора показал, что $m(4) = 23$, причем пример на 11 вершинах единственен.

Для $m(5)$ диапазон уже достаточно велик – наилучшими оценками являются $29 \leqslant m(5) \leqslant 51$, нижняя доказывается в [3], верхнюю дает конструкция (8.4).

8.2. Рекуррентные соотношения. Следующее утверждение суммирует различные полученные рекуррентные соотношения. Другие соотношения можно найти в [3], [123]. Все они получаются предъявлением явных конструкций.

Утверждение 8.2.1 (Аббот–Мозер–Хансон–Тофт [2], [1], [165]). *Для любых натуральных $a, b, n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$m(ab) \leqslant m(a)[m(b)]^a; \tag{8.3}$$

$$m(n) \leqslant m(n-2)n + 2^{n-1}, \qquad \text{если } n \text{ – нечетное}; \tag{8.4}$$

$$m(n) \leqslant m(n-2)n + 2^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}, \quad \text{если } n \text{ – четное}; \tag{8.5}$$

$$m(n) \leqslant (2n-1)(m(n-2)+1). \tag{8.6}$$

Докажем неравенство (8.3). Пусть H_a и H_b – гиперграфы, на которых достигаются величины $m(a)$ и $m(b)$; построим по ним гиперграф H, дающий необходимую оценку. Заменим каждую вершину гиперграфа H_a на копию гиперграфа H_b; таким образом,

$$V(H) := \bigsqcup_{v \in V(H_a)} V(H_b^v).$$

Теперь из каждого ребра H_a сделаем ребро H, всеми способами заменив вершину H_a на ребро из соответствующей копии H_b:

$$E(H) := \left\{ \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant a} e_{v_i} \mid (v_1, \dots, v_a) \in E(H_a),\ e_{v_i} \in E(H_b^{v_i}) \right\}.$$

Ясно, что $|E(H) = m(a)[m(b)]^a$. Поскольку H_b не красился в два цвета, при любой 2-раскраске H в каждой копии H_b есть одноцветное ребро. Поскольку H_a не красился в два цвета, можно собрать из этих ребер одноцветное ребро H, т. е. H не красится в два цвета, что и требовалось.

8.3. Асимптотические явные конструкции. Прежде всего, отметим, что все n-элементные подмножества $(2n-1)$-элементного множества образуют гиперграф с хроматическим числом 3 и $\binom{2n-1}{n} = (4 + o(1))^n$ ребрами.

Подстановка различных явных конструкций в рекуррентные соотношения позволяет получать гиперграфы с количеством ребер не менее $(2.65 \dots + o(1))^n$; это количество достигается на многократном применении (8.3) к плоскостям Фано (отметим, что получившийся гиперграф является пересекающимся множеством).

В 2013 г. Х. Гебауэр построила гиперграф с $2^{n+O(n^{2/3})}$ ребрами без правильной раскраски в два цвета (и аналогичный пример с $(r + o(1))^n$ ребрами для r цветов). Приведем сразу последний. Для простоты далее мы будем игнорировать проблемы с делимостью.

Теорема 8.3.1 (Гебауэр [81], 2013). *Для любого r существует явная конструкция n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ без правильной r-раскраски такого, что*

$$|E(H)| = (r + o(1))^n.$$

Доказательство. Положим

$$V := \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant rt\} = [k] \times [rt]$$

для некоторого натурального t и $k = r^t n/t$. Определим множество ребер следующим образом:

$$E := \bigcup_{\substack{A \subset [rt] \\ |A| = t}} \ \bigcup_{\substack{0 \leqslant i_\alpha < k \\ \alpha \in A}} \ \bigcup_{\substack{B \subset [k] \\ |B| = n/t}} \{((\beta + i_\alpha) \mod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A,\ \beta \in B\}.$$

Заметим, что

$$|E| \leqslant \binom{rt}{t} k^t \binom{k}{n/t} \leqslant (rt)^t \left(\frac{r^t n}{t}\right)^t (er^t)^{n/t} (rn)^t r^{t^2} e^{n/t} r^n.$$

Положим

$$t := \left(\frac{n}{\ln r}\right)^{1/3}.$$

Заметим, что $(rn)^t \leqslant n^{2t} = e^{2t \ln n} = e^{o(n)}$. Кроме того, $r^{t^2} = r^{o(n)}$ и $e^{n/t} = e^{o(n)}$. В итоге получаем $|E(H)| = (r + o(1))^n$.

А теперь покажем, что H не допускает правильной раскраски. Предположим противное и рассмотрим правильную раскраску. Назовем цвет q *главным* в линии $[k] \times \{i\}$, если он содержит в ней хотя бы $\lfloor k/r \rfloor$ вершин. По принципу Дирихле любая линия $[k] \times \{i\}$ содержит хотя бы один главный цвет. Аналогично получаем такое множество линий $A \subset [rt]$, что у них есть общий главный цвет q и $|A| \geqslant t$. Далее, для любого фиксированного β относительное количество таких $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A\}$ содержится в q, не меньше $(1/r)^t$. По линейности математического ожидания существует такой выбор $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что хотя бы $k(1/r)^t = n/t$ индексов $\beta \in B$ дают q-свободные множества $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A\}$. Таким образом, для любой раскраски найдется ребро цвета q, что дает противоречие. Теорема доказана.

Этот же пример переносится на случай полноцветных раскрасок.

Теорема 8.3.2 (Черкашин [48], 2018). *Пусть $r = o(\sqrt{n/\ln n})$. Тогда существует явная конструкция n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ без полноцветной r-раскраски такого, что*

$$|E(H)| = \left(\frac{r}{r-1} + o(1)\right)^n.$$

Доказательство. Построим гиперграф $H_1 = (V_1, E_1)$ следующим образом. Зафиксируем число $t \mid n$ и положим

$$k := \left\lceil \left(\frac{r}{r-1}\right)^t \right\rceil \frac{n}{t}.$$

Тогда $V := \{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant rt\} = [k] \times [rt]$. Определим множество ребер следующим образом:

$$E := \bigcup_{\substack{A \subset [rt] \\ |A|=t}} \ \bigcup_{\substack{0 \leqslant i_\alpha < k \\ \alpha \in A}} \ \bigcup_{\substack{B \subset [k] \\ |B|=n/t}} \{((\beta + i_\alpha) \bmod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A,\ \beta \in B\}.$$

Заметим, что

$$|E| \leqslant \binom{rt}{t} k^t \binom{k}{n/t} \leqslant (rt)^t \biggl(\biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^t \frac{n}{t}\biggr)^t \biggl(e\biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^t\biggr)^{n/t}$$
$$\leqslant (rn)^t \biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^{t^2} e^{n/t} \biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^n.$$

Положим $t := \sqrt{n/\ln n}$. Поскольку $r = o(\sqrt{n/\ln n}\,)$, можно видеть, что $(rn)^t \leqslant n^{2t} = e^{2t\ln n} = e^{o(n/r)}$. Кроме того,

$$\biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^{t^2} = \biggl(\frac{r}{r-1}\biggr)^{o(n)} \quad \text{и} \quad e^{n/t} = e^{o(n/r)}.$$

В итоге получаем $|E(H)| = (r/(r-1) + o(1))^n$.

А теперь покажем, что H не допускает полноцветной раскраски. Предположим противное и рассмотрим полноцветную раскраску. Назовем цвет q *минорным* в линии $[k] \times \{i\}$, если он содержит в ней не более $\lfloor k/r \rfloor$ вершин. По принципу Дирихле любая линия $[k] \times \{i\}$ содержит хотя бы один минорный цвет. Аналогично получаем такое множество линий $A \subset [rt]$, что у них есть общий минорный цвет q и $|A| \geqslant t$. Далее, для любого фиксированного β относительное количество таких $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A\}$ не содержат q, не меньше $((r-1)/r)^t$. По линейности математического ожидания существует такой выбор $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что хотя бы $k((r-1)/r)^t = n/t$ индексов $\beta \in B$ дают q-свободные множества $\{((\beta + i_\alpha) \bmod k,\ \alpha) \mid \alpha \in A\}$. Таким образом, найдется ребро без цвета q, что дает противоречие. Теорема доказана.

9. Приложения

9.1. Одноцветные кубы Гильберта. Исторически первым результатом о раскрасках гиперграфов является теорема Гильберта [94] об одноцветных аффинных кубах. Аффинным кубом для множества $A \subset \mathbb{Z}$ и числа x называется множество чисел

$$HC(A,x) := \{x + \Sigma(B) \mid B \subset A\},$$

где $\Sigma(B)$ обозначает сумму элементов множества B. Размерностью куба называется $|A|$. Отметим, что иногда гиперкубы рассматриваются и для мультимножеств A.

Теорема Гильберта утверждает, что для любых n и r существует N такое, что при любой раскраске множества $[N]$ в r цветов в нем найдется одноцветный аффинный n-куб. Обозначим минимальное такое N через $h(n,r)$. Доказательство Гильберта дает оценку

$$h(n,r) \leqslant r^{((3+\sqrt{5}\,)/2)^n}.$$

Асимптотика величины $h(2, r)$ была установлена Т. Брауном, П. Эрдёшем, Ф. Р. К. Чанг и Р. Л. Грэхемом [41]:

$$h(2, r) = (1 + o(1))r^2.$$

Д. Конлон, Я. Фокс и Б. Судаков [56] улучшили результат Н. Хедьвари [91] и показали, что

$$h(n, r) \geqslant r^{cn^2}.$$

Д. С. Гундерсон, В. Рёдль и А. Сидоренко в работах [86], [85] получили оценку

$$h(n, r) \geqslant r^{(2^{n-1}/n)(1-o(1))}.$$

Наконец, совсем недавно Й. Балог, Дж. Шакан, М. Лавров и А. З. Вагнер [20] показали, что для любой константы $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$h(n, r) \geqslant \min(W(c(\varepsilon)k^2, 2), 2^{k^{2.5-\varepsilon}}),$$

где W – функция ван дер Вардена, определенная в следующем пункте.

9.2. Функция ван дер Вардена. Известная теорема ван дер Вардена [166] гласит, что если достаточно длинный отрезок $[N]$ натурального ряда раскрашен в r цветов, то найдется одноцветная арифметическая прогрессия наперед заданной длины. Если обозначить длину искомой прогрессии через n, то функция $W(n, r)$ обозначает минимальное N, для которого теорема верна.

Задачу о нахождении величины $W(n, r)$ можно переформулировать следующим образом: найти минимальное N, для которого гиперграф $H(N, n) = ([N], \mathrm{AP}(N, n))$ не красится в r цветов, где $\mathrm{AP}(N, n)$ обозначает множество арифметических прогрессий из чисел от 1 до N длины n.

Заметим, что гиперграф является “почти” простым в том смысле, что большинство пар ребер пересекаются не более чем по одной вершине. Модификации методов, применяющихся для раскраски простых гиперграфов, дают лучшие нижние оценки, не зависящие от теоретико-числовых свойств n (лучшие оценки в случае простого $n - 1$ даны в [30], [34]). Эти модификации приведены почти во всех статьях, цитируемых в п. 3.1. Соответственно, наилучшую на данный момент нижнюю оценку дает модификация доказательства теоремы 3.1.1.

Теорема 9.2.1 (Козик–Шабанов [114], 2016). *Для любых $r \geqslant 2$, $n \geqslant 3$ выполняется неравенство*

$$W(n, r) \geqslant cr^{n-1}.$$

В то же время наилучшая известная верхняя оценка для произвольного n – башенного типа.

Теорема 9.2.2 (Говерс [83], 2001). *Для любых $r \geqslant 2$, $n \geqslant 3$ выполняется неравенство*

$$W(n, r) \leqslant 2^{2^{r^{2^{2^{n+9}}}}}.$$

В случае $n = 3$ Т. Ф. Блумом [35] недавно доказано, что

$$W(3, r) \leqslant 2^{cr(\ln r)^4}.$$

Упомянем также, что Р. Л. Грэхем оценивает в 1000 USD доказательство или опровержение неравенства

$$W(n, 2) < 2^{n^2}.$$

9.3. Явные оценки в теореме Фолкмана. Для множества чисел A определим множество его частичных сумм следующим образом:

$$S_A := \{\Sigma(B) \mid B \subset A,\ B \neq \varnothing\},$$

где $\Sigma(B)$ – сумма элементов множества B. Рассмотрим гиперграф $H(N, k)$, вершинами которого являются числа от 1 до N, а ребрами – множества S_A для всех $A \subset [N]$ размера k таких, что $S_A \subset [N]$ (т. е. сумма чисел в A не превосходит N). Ясно, что размер ребра не превосходит $2^k - 1$. Определим $F(k)$ как минимальное N, для которого гиперграф $H(N, k)$ не красится в два цвета; знаменитая теорема Фолкмана утверждает, что такое $F(k)$ существует для любого k.

П. Эрдёш и Дж. Спенсер [72] заметили, что размер ребра не может быть меньше $k(k+1)/2$ (эта оценка достигается на $A = \{1, \ldots, k\}$) и что не более $(kN)^{\ln u} u^{2k}$ ребер имеют размер не более u. Далее, случайно покрасив (равномерно и независимо) вершины в два цвета и оценив вероятность успеха, они получили оценку

$$F(k) \geqslant 2^{ck^2/\ln k}.$$

Совсем недавно группа авторов значительно улучшила этот результат.

Теорема 9.3.1 (Балог–Эберхард–Нараянан–Треглоун–Вагнер [19], 2017). *Имеет место оценка*

$$F(k) \geqslant 2^{2^{k-1}k^{-1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим класс 2-раскрасок, в которых цвета чисел n и $2n$ различны для любого n. Такие раскраски однозначно задаются произвольной раскраской нечетных чисел. Ключевое наблюдение заключается в том, что ребро не максимального размера не может быть одноцветным в подобной раскраске. В самом деле, пусть для множества A какие-то два представителя $S(A)$ равны. Тогда

$$\Sigma(B) = \Sigma(C)$$

для B, $C \subset A$, что равносильно

$$\Sigma(B \setminus C) = \Sigma(C \setminus B).$$

Но тогда

$$2\Sigma(B \setminus C) = \Sigma(B \setminus C \cup C \setminus B),$$

что дает разноцветные элементы в $S(A)$.

Заметим, что если $|S(A)| = 2^k - 1$, то в $S(A)$ ровно 2^{k-1} нечетных элементов. Тогда вероятность того, что $S(A)$ одноцветно в случайной (равномерной и независимой) 2-раскраске нечетных чисел, равна $2^{1-2^{k-1}}$. Значит, математическое ожидание одноцветных ребер в $H(N,k)$ не превосходит

$$\binom{N}{k} \cdot 2^{1-2^{k-1}},$$

что меньше единицы при $N < 2^{2^{k-1}k^{-1}}$. Таким образом, правильная 2-раскраска существует с положительной вероятностью и теорема доказана.

Можно попытаться улучшить оценку, заменив простейший метод случайной раскраски на более прогрессивный, однако это лишь незначительно улучшит оценку, в то время как наилучшая на данный момент верхняя оценка также является башенной [164]:

$$F(k) \leqslant 2^{2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}$$

с общей высотой башни $4k-3$.

9.4. Теоремы типа Эрдёша–Рубина–Тейлора. Пусть $N(n,r)$ обозначает минимальное количество вершин в n-дольном графе со списочным хроматическим числом, большим r.

Теорема 9.4.1 (Эрдёш–Рубин–Тейлор [71], 1979). *Для любого r выполняются неравенства*

$$m(r) \leqslant N(2,r) \leqslant 2m(r).$$

А. В. Косточка привел два обобщения теоремы 9.4.1 (напомним, что $p(n,2) = m(n,2) = m(n)$ по определению). Мы приведем доказательство одного из них.

Теорема 9.4.2 (Косточка [103], 2002). *Для всех $r, n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$p(r,n) \leqslant N(n,r) \leqslant np(r,n).$$

Доказательство. Пусть $H = (V,E)$ – r-граф, не имеющий полноцветной n-раскраски, с множеством ребер $E = \{e_1,\ldots,e_{p(r,n)}\}$. Рассмотрим полный n-дольный граф $G = (W,A)$ с долями $W_1,\ldots,W_n$, где $W_i = \{w_{i,1},\ldots,w_{i,|E|}\}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Мы построим множество списков, содержащихся в V. Напомним, что каждое e_i – это r-подмножество V. Для любых $i = 1,\ldots,n$ и $j = 1,\ldots,|E|$ определим $L(w_{i,j}) := e_j$.

Предположим, что f – правильная раскраска G, соответствующая этим спискам. Поскольку G – полный n-дольный граф, каждый цвет используется не более чем в одной доле. Тогда f задает n-раскраску g_f вершин V: $g_f(v)$ красится в цвет i такой, что v равна $f(w_{i,j})$ для некоторого j или 1, если таких $w_{i,j}$ не нашлось. Поскольку для каждого j вершины $\{w_{1,j},w_{2,j},\ldots,w_{n,j}\}$ имеют разные цвета в f, раскраска g_f является полноцветной n-раскраской H, противоречие. Таким образом, $N(n,r) \leqslant np(r,n)$.

Теперь рассмотрим полный n-дольный граф $G = (W, A)$ с долями $W_1, \dots, W_n$ и $|W| < p(r, n)$. Пусть L – произвольный набор r-списков для W. Определим $H = (V, E)$ как гиперграф с

$$V := \bigcup_{w \in W} L(w) \quad \text{и} \quad E := \{L(w) \mid w \in W\}.$$

Поскольку $|E| = |W| < p(r, n)$, существует полноцветная n-раскраска g гиперграфа H. Определим раскраску f_g вершин W следующим образом: если $w \in W_i$, выберем в ребре $L(w)$ гиперграфа H любую вершину v, для которой $g(v) = i$, и положим $f_g(w) = v$. Тогда вершины в различных долях не могут иметь один и тот же цвет, и f – правильная раскраска G, согласованная со списками. Мы доказали неравенство $N(n, r) \geqslant p(r, n)$. Теорема доказана.

Пусть $Q(n, r)$ обозначает минимальное число ребер в n-однородном n-дольном гиперграфе со списочным хроматическим числом, большим r.

Теорема 9.4.3 (Косточка [103], 2002). *Для всех $r, n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$m(r, n) \leqslant Q(n, r) \leqslant nm(r, n).$$

9.5. Раскраски обобщенных кнезеровских графов. Пусть $K(n, k, s)$ обозначает *обобщенный кнезеровский граф*, т. е. граф с множеством вершин $\binom{[n]}{k}$ и ребрами, соединяющими пары вершин с пересечением меньше s, где $[n] = \{1, \dots, n\}$. Обыкновенные графы Кнезера получаются при $s = 1$.

Знаменитая теорема Ловаса (положительное решение открытой в течение тридцати лет гипотезы Кнезера) утверждает, что $\chi[K(n, k, 1)] = n - 2k + 2$ при $n \geqslant 2k$. При фиксированных k и s хроматические числа обобщенных кнезеровских графов изучались П. Франклом и З. Фюреди [74], [77]. Нас будет интересовать случай k, близкого к половине n, и малого s.

Теорема 9.5.1 (Бобу–Куприянов [36], 2016). *При всех $s < n/2$ выполняются неравенства*

$$s + 2 \leqslant \chi\left[K\left(n, \frac{n}{2}, s\right)\right] \leqslant 2\binom{2s-1}{s}.$$

При $s \leqslant s'\sqrt{n}$ для некоторой константы $c = c(s')$ выполняется неравенство

$$\chi\left[K\left(n, \frac{n}{2}, s\right)\right] \leqslant cn.$$

Нижняя оценка немедленно следует из упомянутой выше теоремы Ловаса. Первая из верхних оценок является частным случаем следующей леммы, где

$$H = \left([2s-1], \binom{[2s-1]}{s}\right),$$

т. е. H является полным s-графом на $2s - 1$ вершине.

Лемма 9.5.2 (Балог–Черкашин–Киселев [18], 2019). *Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф с разбросом хотя бы s и с $|V| \leqslant n$. Тогда*

$$\chi\left[K\left(n, \frac{n}{2} - t, s\right)\right] \leqslant 2|E|.$$

Доказательство. Вложим граф H в $[n]$. Для любого гиперребра $e \in E$ определим цвета 1_e и 2_e следующим образом:

$$1_e := \left\{A \in V\left(K\left(n, \frac{n}{2} - t, s\right)\right) \;\middle|\; A \cap e| \geqslant \frac{|e| + s}{2}\right\};$$
$$2_e := \left\{A \in V\left(K\left(n, \frac{n}{2} - t, s\right)\right) \;\middle|\; A \cap \overline{e}| \geqslant \frac{|\overline{e}| + s}{2}\right\}.$$

Заметим, что эти цвета образуют независимые множества в нашем графе, поскольку вершины одного цвета пересекаются по хотя бы s точкам.

Можно рассматривать любое подмножество $A \subset [n]$ размера $n/2$ как раскраску вершин H в два цвета следующим образом: вершины из $V(H) \cap A$ считаются синими, а вершины $V(H) \setminus A$ – красными. По условию на разброс H существует гиперребро $e \in E$ такое, что

$$\big|\, |A \cap e| - |\overline{A} \cap e| \,\big| \geqslant s.$$

Поскольку $|A \cap e| + |\overline{A} \cap e| = |e|$, имеем

$$|A \cap e| \geqslant \frac{|e| + s}{2} \quad \text{или} \quad |A \cap e| \leqslant \frac{|e| - s}{2}\,.$$

Значит, $A \in 1_e$ или $A \in 2_e$ соответственно, так как $|A \cap \overline{e}| \geqslant (|\overline{e}| + s)/2$ равносильно $|A \cap e| \leqslant (|e| - s)/2$. Таким образом, все вершины покрашены в один из $2|E|$ цветов. Лемма доказана.

Из теоремы 7.1.1 и леммы 9.5.2 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.5.3 (Балог–Черкашин–Киселев [18], 2019). *Пусть $n \geqslant m > 4s^2$ и существует матрица Адамара порядка m. Тогда*

$$\chi\left[K\left(n, \frac{n}{2}\,, s\right)\right] \leqslant 2m.$$

9.6. Евклидова теория Рамсея. Н. Алон и А. В. Косточка применили результаты о росте списочного хроматического числа гиперграфа вместе с его степенью для получения следующего результата рамсеевского типа.

Теорема 9.6.1 (Алон–Косточка [14], 2011). *Для любого конечного подмножества X евклидовой плоскости и для любого натурального s существуют списки цветов размера s над каждой точкой плоскости такие, что при любой раскраске точек в цвета из соответствующих списков найдется одноцветная изометричная копия X.*

Доказательство. Положим $n = |X|$. Покажем, что для любого d существует d-регулярный простой n-граф, чье множество вершин является конечным подмножеством $\mathbb{R}^2$, а каждое ребро является изометричной копией X.

Рассмотрим произвольные n точек $\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}\} =: X_0 \subset \mathbb{R}^2$, образующие копию X. Выберем $d-1$ поворот множества X_0 общего положения, обозначим полученные точки $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$, $2 \leqslant i \leqslant d$. Теперь построим искомый гиперграф $H = (V, E)$:

$$V := \{v_{1j_1} + v_{2j_2} + \dots + v_{dj_d} \mid 1 \leqslant j_t \leqslant n \text{ для всех } t\};$$

ребро задается фиксированием всех слагаемых, кроме одного:

$$E := \bigl\{\{v_{1j_1} + v_{2j_2} + \dots + v_{dj_d} \mid 1 \leqslant j_t \leqslant n\} \bigm| 1 \leqslant t \leqslant d, \\ 1 \leqslant v_{1j_1}, \dots, v_{t-1,j_{t-1}}, v_{t+1,j_{t+1}}, \dots, v_{dj_d} \leqslant n\bigr\}.$$

Мы рассматривали повороты общего положения, поэтому $|V| = n^d$, $|E| = dn^{d-1}$ и все ребра имеют размер n. Также H является d-регулярным и простым по построению. Теорема 4.2.2 утверждает, что $\mathrm{ch}(H) > s$ при условии $d > d_0(s)$, что завершает доказательство.

Список литературы

[1] H. L. Abbott, D. Hanson, "On a combinatorial problem of Erdős", *Canad. Math. Bull.*, **12**:6 (1969), 823–829.

[2] H. L. Abbott, L. Moser, "On a combinatorial problem of Erdős and Hajnal", *Canad. Math. Bull.*, **7**:2 (1964), 177–181.

[3] S. Aglave, V. A. Amarnath, S. Shannigrahi, S. Singh, "Improved bounds for uniform hypergraphs without property B", *Australas. J. Combin.*, **76**:1 (2020), 73–86.

[4] M. Ajtai, J. Komlós, J. Pintz, J. Spencer, E. Szemerédi, "Extremal uncrowded hypergraphs", *J. Combin. Theory Ser. A*, **32**:3 (1982), 321–335.

[5] M. Akhmejanova, D. Shabanov, "Colorings of b-simple hypergraphs", *The European conference on combinatorics, graph theory and applications, EuroComb* 2017 (Vienna, 2017), Electron. Notes Discrete Math., **61**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2017, 29–35.

[6] M. Akhmejanova, D. Shabanov, "Coloring hypergraphs with bounded cardinalities of edge intersections", *Discrete Math.*, Publ. online 2019, 111692, 11 pp.

[7] M. B. Akhmejanova, D. A. Shabanov, "Equitable colorings of hypergraphs with few edges", *Discrete Appl. Math.*, Publ. online 2019, 1–11.

[8] И. А. Акользин, "О раскрасках 3-однородных гиперграфов в три цвета", *Геометрия и механика*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз., **150**, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 26–39.

[9] I. Akolzin, D. Shabanov, "Colorings of hypergraphs with large number of colors", *Discrete Math.*, **339**:12 (2016), 3020–3031.

[10] N. Alon, "Hypergraphs with high chromatic number", *Graphs Combin.*, **1** (1985), 387–389.

[11] N. Alon, "Choice numbers of graphs: a probabilistic approach", *Combin. Probab. Comput.*, **1**:2 (1992), 107–114.

[12] N. Alon, “Restricted colorings of graphs”, *Surveys in combinatorics*, 1993 (Keele), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **187**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 1–33.

[13] N. Alon, D. J. Kleitman, C. Pomerance, M. Saks, P. Seymour, “The smallest n-uniform hypergraph with positive discrepancy”, *Combinatorica*, **7**:2 (1987), 151–160.

[14] N. Alon, A. Kostochka, “Hypergraph list coloring and Euclidean Ramsey theory”, *Random Structures Algorithms*, **39**:3 (2011), 377–390.

[15] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 4th ed., Wiley Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016, xiv+375 pp.

[16] N. Alon, V. H. Vũ, “Anti-Hadamard matrices, coin weighing, threshold gates, and indecomposable hypergraphs”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **79**:1 (1997), 133–160.

[17] A. Arman, T. Retter, “An upper bound for the size of a k-uniform intersecting family with covering number k”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **147** (2017), 18–26.

[18] J. Balogh, D. Cherkashin, S. Kiselev, “Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs”, *European J. Combin.*, **79** (2019), 228–236.

[19] J. Balogh, S. Eberhard, B. Narayanan, A. Treglown, A. Z. Wagner, “An improved lower bound for Folkman’s theorem”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **49**:4 (2017), 745–747.

[20] J. Balogh, M. Lavrov, G. Shakan, A. Z. Wagner, “Monochromatic Hilbert cubes and arithmetic progressions”, *Electron. J. Combin.*, **26**:2 (2019), 2.22, 15 pp.

[21] J. Balogh, R. Morris, W. Samotij, “Independent sets in hypergraphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **28**:3 (2015), 669–709.

[22] J. Balogh, R. Morris, W. Samotij, “The method of hypergraph containers”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* – 2018, v. IV (Rio de Janeiro), World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, 3059–3092.

[23] J. Beck, “On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász”, *Discrete Math.*, **17**:2 (1977), 127–131.

[24] J. Beck, “On 3-chromatic hypergraphs”, *Discrete Math.*, **24**:2 (1978), 127–137.

[25] J. Beck, “A remark concerning arithmetic progressions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **29**:3 (1980), 376–379.

[26] J. Beck, T. Fiala, “‘Integer-making’ theorems”, *Discrete Appl. Math.*, **3**:1 (1981), 1–8.

[27] D. Bednarchak, M. Helm, “A note on the Beck–Fiala theorem”, *Combinatorica*, **17**:1 (1997), 147–149.

[28] C. Berge, *Hypergraphs. Combinatorics of finite sets*, North-Holland Math. Library, **45**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, x+255 pp.

[29] C. Berge, F. Sterboul, “Equipartite colorings in graphs and hypergraphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **22**:2 (1977), 97–113.

[30] E. R. Berlekamp, “A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions”, *Canad. Math. Bull.*, **11**:3 (1968), 409–414.

[31] A. Bernshteyn, “Measurable versions of the Lovász Local Lemma and measurable graph colorings”, *Adv. Math.*, **353** (2019), 153–223.

[32] A. Bernshteyn, M. Delcourt, H. Towsner, A. Tserunyan, “A short nonalgorithmic proof of the containers theorem for hypergraphs”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **147**:4 (2019), 1739–1749.

[33] F. Bernstein, “Zur Theorie der trigonometrischen Reihe”, *J. Reine Angew. Math.*, **1907**:132 (1907), 270–278.

[34] T. Blankenship, J. Cummings, V. Taranchuk, “A new lower bound for van der Waerden numbers”, *European J. Combin.*, **69** (2018), 163–168.

[35] T. F. Bloom, “A quantitative improvement for Roth’s theorem on arithmetic progressions”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **93**:3 (2016), 643–663.

[36] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, “О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским”, *Пробл. передачи информ.*, **52**:4 (2016), 64–83; англ. пер.: A. V. Bobu, A. E. Kupriyanov, “On chromatic numbers of close-to-Kneser distance graphs”, *Problems Inform. Transmission*, **52**:4 (2016), 373–390.

[37] T. Bohman, A. Frieze, D. Mubayi, “Coloring H-free hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **36**:1 (2010), 11–25.

[38] B. Bollobás, “Chromatic number, girth and maximal degree”, *Discrete Math.*, **24**:3 (1978), 311–314.

[39] B. Bollobás, A. D. Scott, “Problems and results on judicious partitions”, *Random Structures Algorithms*, **21**:3-4 (2002), 414–430.

[40] A. Bretto, *Hypergraph theory. An introduction*, Math. Eng., Springer, Cham, 2013, xiv+119 pp.

[41] T. C. Brown, P. Erdös, F. R. K. Chung, R. L. Graham, “Quantitative forms of a theorem of Hilbert”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **38**:2 (1985), 210–216.

[42] B. Bukh, “An improvement of the Beck–Fiala theorem”, *Combin. Probab. Comput.*, **25**:3 (2016), 380–398.

[43] М. И. Бурштейн, “Критические гиперграфы с минимальным числом ребер”, *Сообщ. АН ГССР*, **83**:2 (1976), 285–288.

[44] Y. Caro, Z. Tuza, “Improved lower bounds on k-independence”, *J. Graph Theory*, **15**:1 (1991), 99–107.

[45] W. Chen, A. Srivastav, G. Travaglini (eds.), *A panorama of discrepancy theory*, Lecture Notes in Math., **2107**, Springer, Cham, 2014, xvi+695 pp.

[46] D. Cherkashin, “On hypergraph cliques with chromatic number 3”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:3 (2011), 3–11.

[47] D. Cherkashin, “Coloring cross-intersecting families”, *Electron. J. Combin.*, **25**:1 (2018), 1.47, 9 pp.

[48] D. Cherkashin, “A note on panchromatic colorings”, *Discrete Math.*, **341**:3 (2018), 652–657.

[49] Д. Д. Черкашин, “Задача Эрдёша–Хайнала для 3-графов”, *Комбинаторика и теория графов. XI*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **488**, ПОМИ, СПб., 2019, 168–176; D. Cherkashin, *On the Erdős–Hajnal problem in the case of* 3*-graphs*, 2019, 6 pp., arXiv: 1905.02893.

[50] D. D. Cherkashin, J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

[51] D. D. Cherkashin, A. B. Kulikov, A. M. Raigorodskii, “On hypergraph cliques with chromatic number 3 and a given number of vertices”, *Труды МФТИ*, **4**:1 (2012), 151–156.

[52] D. Cherkashin, F. Petrov, *Regular behaviour of the maximal hypergraph chromatic number*, 2019 (v1 – 2018), 8 pp., arXiv: 1808.01482.

[53] D. Cherkashin, F. Petrov, “On small n-uniform hypergraphs with positive discrepancy”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **139** (2019), 353–359.

[54] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds.), *Handbook of combinatorial designs*, 2nd ed., Discrete Math. Appl. (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, xxii+984 pp.

[55] C. J. Colbourn, A. D. Forbes, M. J. Grannell, T. S. Griggs, P. Kaski, P. R. J. Östergård, D. A. Pike, O. Pottonen, “Properties of the Steiner triple systems of order 19”, *Electron. J. Combin.*, **17**:1 (2010), 98, 30 pp.

[56] D. Conlon, J. Fox, B. Sudakov, “Short proofs of some extremal results”, *Combin. Probab. Comput.*, **23**:1 (2014), 8–28.

[57] Yu. A. Demidovich, *On some generalizations of the property B-problem of an n-uniform hypergraph*, 2019, 28 pp., arXiv: 1903.11708.

[58] M. Deza, “Solution d'un problème de Erdős–Lovász”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **16**:2 (1974), 166–167.

[59] I. Dinur, O. Regev, C. Smyth, “The hardness of 3-uniform hypergraph coloring”, *Combinatorica*, **25**:5 (2005), 519–535.

[60] R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, “On uncrowded hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **6**:2-3 (1995), 209–212.

[61] L. Duraj, G. Gutowski, J. Kozik, “A note on two-colorability of nonuniform hypergraphs”, 45*th international colloquium on automata*, *languages*, *and programming*, LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform., **107**, Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2018, 13 pp.

[62] P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.

[63] P. Erdős, “On a combinatorial problem”, *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10.

[64] P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 445–447.

[65] P. Erdős, “On a combinatorial problem. III”, *Canad. Math. Bull.*, **12**:4 (1969), 413–416.

[66] P. Erdős, “Some old and new problems in various branches of combinatorics”, *Proceedings of the* 10*th southeastern conference on combinatorics*, *graph theory and computing* (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, FL, 1979), Congress. Numer., **XXIII–XXIV**, Utilitas Math., Winnipeg, MB, 1979, 19–37.

[67] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12** (1961), 87–123.

[68] P. Erdős, A. Hajnal, “On chromatic number of graphs and set-systems”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 61–99.

[69] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, “Intersection theorems for systems of finite sets”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **12** (1961), 313–320.

[70] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and finite sets*, v. 2 (Keszthely, 1973), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.

[71] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, “Choosability in graphs”, *Proceedings of the west coast conference on combinatorics*, *graph theory and computing* (Humboldt State Univ., Arcata, CA, 1979), Congress. Numer., **26**, Utilitas Math., Winnipeg, MB, 1980, 125–157.

[72] P. Erdős, J. H. Spencer, “Monochromatic sumsets”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **50**:1 (1989), 162–163.

[73] A. Ferber, A. Shapira, *A quantitative Lovász criterion for Property B*, 2019, 4 pp., arXiv: 1903.04968.

[74] P. Frankl, “On the chromatic number of the general Kneser-graph”, *J. Graph Theory*, **9**:2 (1985), 217–220.

[75] P. Frankl, “Erdős–Ko–Rado theorem with conditions on the maximal degree”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **46**:2 (1987), 252–263.

[76] P. Frankl, “A near-exponential improvement of a bound of Erdős and Lovász on maximal intersecting families”, *Combin. Probab. Comput.*, **28**:5 (2019), 733–739.

[77] P. Frankl, Z. Füredi, “Extremal problems concerning Kneser graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **40**:3 (1986), 270–284.

[78] P. Frankl, K. Ota, N. Tokushige, "Covers in uniform intersecting families and a counterexample to a conjecture of Lovász", *J. Combin. Theory Ser. A*, **74**:1 (1996), 33–42.

[79] P. Frankl, N. Tokushige, "Invitation to intersection problems for finite sets", *J. Combin. Theory Ser. A*, **144** (2016), 157–211.

[80] A. Frieze, D. Mubayi, "Coloring simple hypergraphs", *J. Combin. Theory Ser. B*, **103**:6 (2013), 767–794.

[81] H. Gebauer, "On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges", *J. Combin. Theory Ser. A*, **120**:7 (2013), 1483–1490.

[82] J. Gimbel, C. Thomassen, "Coloring triangle-free graphs with fixed size", *Discrete Math.*, **219**:1-3 (2000), 275–277.

[83] W. T. Gowers, "A new proof of Szemerédi's theorem", *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.

[84] D. A. Grable, K. T. Phelps, V. Rödl, "The minimum independence number for designs", *Combinatorica*, **15**:2 (1995), 175–185.

[85] D. S. Gunderson, V. Rödl, "Extremal problems for affine cubes of integers", *Combin. Probab. Comput.*, **7**:1 (1998), 65–79.

[86] D. S. Gunderson, V. Rödl, A. Sidorenko, "Extremal problems for sets forming Boolean algebras and complete partite hypergraphs", *J. Combin. Theory Ser. A*, **88**:2 (1999), 342–367.

[87] A. Gyárfás, J. Lehel, "Trees in greedy colorings of hypergraphs", *Discrete Math.*, **311**:2-3 (2011), 208–209.

[88] A. Hajnal, E. Szemerédi, "Proof of a conjecture of P. Erdős", *Combinatorial theory and its applications*, v. 2 (Balatonfüred, 1969), North-Holland, Amsterdam, 1970, 601–623.

[89] J. Håstad, S. Jukna, P. Pudlák, "Top-down lower bounds for depth-three circuits", *Comput. Complexity*, **5**:2 (1995), 99–112.

[90] P. Haxell, J. Verstraete, "List coloring hypergraphs", *Electron. J. Combin.*, **17**:1 (2010), 129, 12 pp.

[91] N. Hegyvári, "On the dimension of the Hilbert cubes", *J. Number Theory*, **77**:2 (1999), 326–330.

[92] M. Helm, "On the Beck–Fiala theorem", *Discrete Math.*, **207**:1-3 (1999), 73–87.

[93] M. Herzog, J. Schönheim, "The B_r property and chromatic numbers of generalized graphs", *J. Combin. Theory Ser. B*, **12**:1 (1972), 41–49.

[94] D. Hilbert, "Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten", *J. Reine Angew. Math.*, **1892**:110 (1892), 104–129.

[95] A. J. W. Hilton, E. C. Milner, "Some intersection theorems for systems of finite sets", *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **18**:1 (1967), 369–384.

[96] P. Horak, "On the chromatic number of Steiner triple systems of order 25", *Discrete Math.*, **299**:1-3 (2005), 120–128.

[97] P. Keevash, "Hypergraph Turán problems", *Surveys in combinatorics* 2011 (Exeter, UK), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **392**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, 83–139.

[98] H. A. Kierstead, A. V. Kostochka, "An Ore-type theorem on equitable coloring", *J. Combin. Theory Ser. B*, **98**:1 (2008), 226–234.

[99] H. A. Kierstead, A. V. Kostochka, "A short proof of the Hajnal–Szemerédi theorem on equitable colouring", *Combin. Probab. Comput.*, **17**:2 (2008), 265–270.

[100] J. H. Kim, "On Brooks' theorem for sparse graphs", *Combin. Probab. Comput.*, **4**:2 (1995), 97–132.

[101] D. J. Kleitman, K. J. Winston, "The asymptotic number of lattices", *Combinatorical mathematics, optimal designs and their applications*, Ann. Discrete Math., **6**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980, 243–249.

[102] D. J. Kleitman, K. J. Winston, "On the number of graphs without 4-cycles", *Discrete Math.*, **41**:2 (1982), 167–172.

[103] A. Kostochka, "On a theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs", *Electron. J. Combin.*, **9**:1 (2002), 9, 4 pp.

[104] A. Kostochka, "Coloring uniform hypergraphs with few colors", *Random Structures Algorithms*, **24**:1 (2004), 1–10.

[105] A. Kostochka, "Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey", *More sets, graphs and numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer, Berlin, 2006, 175–197.

[106] A. V. Kostochka, M. Kumbhat, "Coloring uniform hypergraphs with few edges", *Random Structures Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

[107] А. В. Косточка, Н. П. Мазурова, "Одна оценка в теории раскраски графов", Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач, **30**, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1977, 23–29.

[108] A. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, "On the chromatic number of set systems", *Random Structures Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.

[109] A. V. Kostochka, V. Rödl, "Partial Steiner systems and matchings in hypergraphs", *Random Structures Algorithms*, **13**:3-4 (1998), 335–347.

[110] A. V. Kostochka, V. Rödl, "Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number", *Random Structures Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.

[111] A. V. Kostochka, V. Rödl, M. Kumbhat, "Coloring uniform hypergraphs with small edge degrees", *Fete of combinatorics and computer science*, Bolyai Soc. Math. Stud., **20**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010, 213–238.

[112] A. V. Kostochka, D. R. Woodall, "Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs", *Combinatorica*, **21**:4 (2001), 515–541.

[113] J. Kozik, "Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs", *Random Structures Algorithms*, **48**:1 (2016), 125–146.

[114] J. Kozik, D. Shabanov, "Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications", *J. Combin. Theory Ser. B*, **116** (2016), 312–332.

[115] A. Kupavskii, D. Shabanov, "Colourings of uniform hypergraphs with large girth and applications", *Combin. Probab. Comput.*, **27**:2 (2018), 245–273.

[116] A. Kupavskii, D. Zakharov, "Regular bipartite graphs and intersecting families", *J. Combin. Theory Ser. A*, **155** (2018), 180–189.

[117] H. Levinson, R. Silverman, "Generalizations of property B", *2nd international conference on combinatorial mathematics* (New York, 1978), Ann. New York Acad. Sci., **319**, no. 1, 1979, 349–353.

[118] P.-S. Loh, "A note on embedding hypertrees", *Electron. J. Combin.*, **16**:1 (2009), 18, 4 pp.

[119] L. Lovász, "A generalization of Kónig's theorem", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **21**:3-4 (1970), 443–446.

[120] L. Lovász, "On minimax theorems of combinatorics", *Mat. Lapok*, **26**:3-4 (1975), 209–264.

[121] L. Lu, *On a problem of Erdős and Lovász on coloring non-uniform hypergraphs*, 2008, 15 pp., `www.people.math.sc.edu/lu/papers/propertyB.pdf`.

[122] K. Majumder, S. Mukherjee, "A note on a series of families constructed over the cyclic graph", *J. Combin. Theory Ser. A*, **157** (2018), 41–48.

[123] J. Mathews, M. K. Panda, S. Shannigrahi, “On the construction of non-2-colorable uniform hypergraphs”, *Discrete Appl. Math.*, **180** (2015), 181–187.

[124] J. Matoušek, *Geometric discrepancy. An illustrated guide*, Algorithms Combin., **18**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xii+288 pp.

[125] M. Matsumoto, N. Tokushige, “The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **52**:1 (1989), 90–97.

[126] E. W. Miller, “On a property of families of sets”, *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, **30** (1937), 31–38.

[127] P. R. J. Östergård, “On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property *B*”, *Discrete Appl. Math.*, **163**, Part 2 (2014), 199–204.

[128] K. T. Phelps, V. Rödl, “Steiner triple systems with minimum independence number”, *Ars Combin.*, **21** (1986), 167–172.

[129] N. Pippenger, M. C. Golumbic, “The inducibility of graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **19**:3 (1975), 189–203.

[130] A. Pluhár, “Greedy colorings of uniform hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **35**:2 (2009), 216–221.

[131] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[132] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, “Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *УМН*, **66**:5(401) (2011), 109–182; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, D. A. Shabanov, “The Erdős–Hajnal problem of hypergraph colouring, its generalizations, and related problems”, *Russian Math. Surveys*, **66**:5 (2011), 933–1002.

[133] V. Rödl, E. Šinajová, “Note on independent sets in Steiner systems”, *Random Structures Algorithms*, **5**:1 (1994), 183–190.

[134] А. П. Розовская, “О двухцветных раскрасках общего вида для равномерных гиперграфов”, *Докл. РАН*, **429**:3 (2009), 309–311; англ. пер.: A. P. Rozovskaya, “On general two-colorings of uniform hypergraphs”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 837–839.

[135] А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, “О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета”, *Дискрет. матем.*, **22**:3 (2010), 94–109; англ. пер.: A. P. Rozovskaya, D. A. Shabanov, “On proper colourings of hypergraphs using prescribed colours”, *Discrete Math. Appl.*, **20**:4 (2010), 391–409.

[136] W. Samotij, “Counting independent sets in graphs”, *European J. Combin.*, **48** (2015), 5–18.

[137] D. Saxton, A. Thomason, “List colourings of regular hypergraphs”, *Combin. Probab. Comput.*, **21**:1-2 (2012), 315–322.

[138] D. Saxton, A. Thomason, “Hypergraph containers”, *Invent. Math.*, **201**:3 (2015), 925–992.

[139] D. Saxton, A. Thomason, “Online containers for hypergraphs, with applications to linear equations”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **121** (2016), 248–283.

[140] D. Saxton, A. Thomason, “Simple containers for simple hypergraphs”, *Combin. Probab. Comput.*, **25**:3 (2016), 448–459.

[141] W. M. Schmidt, “Ein kombinatorisches Problem von P. Erdős und A. Hajnal”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3 (1964), 373–374.

[142] P. D. Seymour, “A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **8**:4 (1974), 681–682.

[143] P. D. Seymour, “On the two-colouring of hypergraphs”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **25**:1 (1974), 303–311.

[144] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдёша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169; англ. пер.: “On one combinatorial problem of Erdős”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 359–362.

[145] Д. А. Шабанов, "Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222; англ. пер.: D. A. Shabanov, "Extremal problems for colourings of uniform hypergraphs", *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1253–1290.

[146] Д. А. Шабанов, "Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов", *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 139–160; англ. пер.: D. A. Shabanov, "Randomized algorithms for colourings of hypergraphs", *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1089–1110.

[147] Д. А. Шабанов, "О хроматическом числе конечных систем подмножеств", *Матем. заметки*, **85**:6 (2009), 951–954; англ. пер.: D. A. Shabanov, "On the chromatic number of finite systems of subsets", *Math. Notes*, **85**:6 (2009), 902–905.

[148] Д. А. Шабанов, "Об улучшении нижней оценки в комбинаторной задаче Эрдёша–Хайнала", *Докл. РАН*, **426**:2 (2009), 177–178; англ. пер.: D. A. Shabanov, "Improvement of the lower bound in the Erdős–Hajnal combinatorial problem", *Dokl. Math.*, **79**:3 (2009), 349–350.

[149] Д. А. Шабанов, "О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов", *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 137–160; англ. пер.: D. A. Shabanov, "The existence of panchromatic colourings for uniform hypergraphs", *Sb. Math.*, **201**:4 (2010), 607–630.

[150] D. A. Shabanov, "On a generalization of Rubin's theorem", *J. Graph Theory*, **67**:3 (2011), 226–234.

[151] D. A. Shabanov, "On r-chromatic hypergraphs", *Discrete Math.*, **312**:2 (2012), 441–458.

[152] D. A. Shabanov, "Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász", *Random Structures Algorithms*, **40**:2 (2012), 227–253.

[153] D. A. Shabanov, "Coloring non-uniform hypergraphs without short cycles", *Graphs Combin.*, **30**:5 (2014), 1249–1260.

[154] D. A. Shabanov, "Around Erdős–Lovász problem on colorings of non-uniform hypergraphs", *Discrete Math.*, **338**:11 (2015), 1976–1981.

[155] D. A. Shabanov, "Equitable two-colorings of uniform hypergraphs", *European J. Combin.*, **43** (2015), 185–203.

[156] I. Shirgazina, "Equitable colorings of non-uniform simple hypergraphs", *The eight European conference on combinatorics, graph theory and applications, EuroComb* 2015 (Bergen, 2015), Electron. Notes Discrete Math., **49**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2015, 699–703.

[157] И. Р. Ширгазина, "Справедливые раскраски неоднородных гиперграфов", *Матем. заметки*, **99**:3 (2016), 441–456; англ. пер.: I. R. Shirgazina, "Equitable colorings of nonuniform hypergraphs", *Math. Notes*, **99**:3 (2016), 444–456.

[158] A. Sidorenko, "What we know and what we do not know about Turán numbers", *Graphs Combin.*, **11**:2 (1995), 179–199.

[159] A. Sidorenko, "Upper bounds for Turán numbers", *J. Combin. Theory Ser. A*, **77**:1 (1997), 134–147.

[160] J. Spencer, "Coloring n-sets red and blue", *J. Combin. Theory Ser. A*, **30**:1 (1981), 112–113.

[161] F. Sterboul, "An extremal problem in hypergraph coloring", *J. Combin. Theory Ser. B*, **22**:2 (1977), 159–164.

[162] Z. Szabó, "An application of Lovász' local lemma – a new lower bound for the van der Waerden number", *Random Structures Algorithms*, **1**:3 (1990), 343–360.

[163] В. А. Ташкинов, "О нижней границе для хроматического числа графов с заданными максимальной степенью вершин и обхватом", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **1** (2004), 99–109.

[164] A. D. Taylor, "Bounds for the disjoint unions theorem", *J. Combin. Theory Ser. A*, **30**:3 (1981), 339–344.

[165] B. Toft, "On color-critical hypergraphs", *Infinite and finite sets*, v. III (Keszthely, 1973), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1975, 1445–1457.

[166] B. L. van der Waerden, "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212–216.

[167] В. Г. Визинг, "Раскраска вершин графа в предписанные цвета", Методы дискретного анализа в теории кодов и схем, **29**, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 3–10.

[168] D. R. Woodall, "Property B and the four-color problem", *Combinatorics* (Math. Inst., Oxford, 1972), Inst. Math. Appl., Southend-on-Sea, 1972, 322–340.

Андрей Михайлович Райгородский
(Andrei M. Raigorodskii)
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет);
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Кавказский математический центр,
Адыгейский государственный университет;
Бурятский государственный университет,
Институт математики и информатики
E-mail: mraigor@yandex.ru

Поступила в редакцию
24.07.2019

Данила Дмитриевич Черкашин
(Danila D. Cherkashin)
Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербургский государственный университет;
Лаборатория продвинутой комбинаторики
и сетевых приложений,
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет);
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
(Санкт-Петербургский филиал)
E-mail: matelk@mail.ru