PDMI Preprint — 03/2023

Динамика метрик в пространствах с мерой и масштабированная энтропия

А. М. Вершик[1], Г. А. Вепрев[2], П. Б. Затицкий[3]

[1]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия;
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия;
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия.
E-mail: avershik@pdmi.ras.ru

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия;
University of Geneva, Geneva, Switzerland.
E-mail: georgii.veprev@gmail.com

[3] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия;
University of Cincinnati, Cincinnati, OH, USA.
E-mail: pavelz@pdmi.ras.ru

08 матра 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00152)

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Abstract. Настоящий обзор посвящен новому направлению в теории динамических систем и смежным вопросам. Главной темой является динамика метрик на пространствах с мерой. Сама по себе идея систематического совместного рассмотрения мер и метрик не нова, но новый взгляд на нее высказал М. Громов в книге [15], введя так называемые mm-пространства (метрические пространства с мерой); обе компоненты (мера и метрика) равноправны и вводятся одновременно, в отличие от классической точки зрения, при которой сначала фиксируется метрика, а борелевская мера может меняться. Как следствие, признается плодотворность противоположного подхода, при котором мера в пространстве фиксирована, а метрика может меняться. Эта точка зрения была высказана в книге М. Громова [15] и независимо в работах А. Вершика [63, 67], где она интенсивно использовалась в теории преобразований с инвариантной мерой (т. е. в эргодической теории).

Первая глава обзора представляет собой краткое введение в предмет и может считаться конспектом всего обзора. Во второй главе подробно излагается теория "метрических троек" (пространство–мера–метрика), — это понятие уточняет понятие mm-пространства Громова и представляет самостоятельный интерес. Особое внимание уделяется понятию энтропии метрической тройки, которое по существу принадлежит К. Шеннону. Именно такое истолкование энтропии привело к новому понятию *масштабированной энтропии преобразования или группы преобразований, сохраняющих меру*, которое было введено А. Вершиком и развито в работах авторов. Оно подробно рассмотрено в третьей главе. В его численном определении используется метрика, но окончательный результат от метрики не зависит и поэтому оно дает новый класс инвариантов в эргодической теории, расщепляя класс автоморфизмов с нулевой колмогоровской энтропией. В приложении A приводятся детали некоторых доказательств. Последнее приложение B посвящено нерешенным задачам.

Окончательная терминология в обсуждаемой области лишь складывается. Термин М. Громова mm-пространства для пространств с мерой и метрикой не предполагал точного определения согласования структур. С другой стороны, название точно определенного и введенного в [84] термина "допустимая тройка" — недостаточно выразительно. В этой статье мы используем оба термина, имея в виду второй — точное его понимание. В дальнейшем предлагается использовать термин "метрическая тройка", тем более, что эпитет "метрический" в русской литературе применяется как к мерам, так и к метрикам.

Ключевые слова: метрическая тройка, классификация, матричное распределение, метрический инвариант, масштабированная энтропия

Оглавление

Глава 1

Категория метрических пространств с мерой. Исторический очерк и краткое содержание обзора

1.1 Пространства с мерой и метрикой

1.1.1 Меры и метрики — общие соображения

Совместное рассмотрение меры и метрики в одном пространстве имеет давнюю традицию. Однако, разумеется, ей предшествовал долгий период формирования самих понятий метрических (и топологических) пространств, метризации (Ф. Хаусдорф, П. Урысон и др.) и соответствующих понятий пространств с мерой (А. Лебег, Дж. фон Нейман, А. Колмогоров, В. Рохлин и др. — 1900–1940 гг.) В работах 30–50-х гг. (Дж. Окстоби, С. Улам, А. Д. Александров и др.) обе структуры уже рассматривались одновременно, но все же как вполне отдельные. Заметим, что точка зрения некоторых математиков, например, Н. Бурбаки (см. его том "Интегрирование" — 60-е гг.), состояла в том, что пространств с мерой как отдельной структуры вообще не существует, а есть лишь та или иная процедура интегрирования функций. Такая односторонняя позиция привела Н. Бурбаки к игнорированию определённых разделов математики, таких как эргодическая теория, теория сигма-алгебр, вероятностные концепции и т. д. Отсутствие понимания того, например, что теория интегрирования функций едина для любых метрических пространств, сдерживало развитие и теории меры в функциональных пространствах; с другой стороны, многие комбинаторные конструкции теории меры и эргодической теории не были востребованы и применены в классическом анализе из-за существования разделительной стены между ними. Игнорирование самой структуры и категории пространств с мерой является причиной того, что наиболее содержательная и рабочая часть теории меры — геометрия различных конфигураций сигма-подалгебр (измеримых разбиений) остается малоизвестной и недостаточно разработанной.

1.1.2 Метрические тройки и mm-пространства

Новый период начался с работ М. Громова, подытоженных в книге [15]. В ней, в частности (глава $3\frac{1}{2}$), систематически изучались так называемые mm-пространства, т. е. пространства с метрикой и мерой. При этом, важная точка зрения, высказанная М. Громовым и одновременно А. Вершиком в [62, 63], состояла в том, что в противоположность классической схеме, в которой рассматривались различные борелевские меры на фиксированном полном метрическом пространстве, предлагалось изучать различные метрики на фиксированном пространстве с мерой (пространстве Лебега–Рохлина). В [15] этот подход назван "reversed definition of mm spaces". Эта точка зрения последовательно проводилась в работах [53, 54, 55, 56, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93] и изложена в данном обзоре. А именно, построена теория *метрических троек* — (X, μ, ρ) — пространство, мера, метрика. При этом метрическое пространство (X, ρ) предполагалось полным сепарабельным, а пространство с мерой (X, μ) — пространством Лебега–Рохлина (в случае непрерывной меры изоморфным mod 0 в смысле теории меры отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега или счетному произведению двоеточий с мерой Хаара), с естественным согласованием структур этих пространств (см. подробно в разделе 2.1.2). Громов доказал классификационную теорему для таких троек относительно группы сохраняющих меру изометрий, а Вершик придал ей форму, в которой явно описывались инварианты троек, а именно *матричные распределения* — меры на пространстве дистанционных матриц. Подробности см. в [15, 60, 61] и в главе 2 настоящего обзора.

Одно из главных преимуществ нового акцента состояло в возможности рассмотрения *динамики метрик* относительно группы автоморфизмов, сохраняющих меру, и открытии нового источника инвариантов динамических систем с инвариантной мерой, связанных с этой динамикой, таких как *масштабированная энтропия*. Это — основная тема настоящего обзора, краткий перечень результатов которого мы приводим в следующих пунктах первой главы.

Перенос центра тяжести с метрики на меру с одной стороны облегчает изучение пары мера–метрика — уже потому, что общеизвестно, что с точностью до метрического изоморфизма существует единственное такое сепарабельное полное пространство с непрерывной мерой, заданной на полной сигма-алгебре множеств, а именно — единичный отрезок с лебеговой мерой или, эквивалентно, счетное произведение двоеточий с мерой Хаара. Поэтому мы фактически можем себе представлять весь возможный арсенал mm-структур, как некоторое множество метрик на универсальном пространстве с мерой (X, μ). Правда, нам сначала придется признать, что метрика ρ есть лишь класс совпадающих почти всюду измеримых функций двух переменных, удовлетворяющий известным аксиомам почти всюду (т. е. mod 0); такой объект назван *почти метрикой*. Однако, имеет место *теорема исправления* (теорема 2.2), позволяющая всегда выделить множество полной меры, на котором эта почти метрика исправляется до настоящей полуметрики. При этом *единственным требованием согласования метрики с мерой является требование сепарабельности метрики*, по которому сигма-алгебра множеств, порожденная всеми шарами положительного радиуса, является плотной в сигма-алгебре классов измеримых множеств mod 0 (см. теорему 2.4). *Тройки (X, μ, ρ) — пространство, мера, метрика, — обладающие свойством сепарабельности mod 0, называются допустимыми (или просто метрическими тройками)*, они и составляют предмет изучения первой главы обзора. В теоремах 2.17 и 2.18 мы приводим многочисленные эквивалентные формулировки свойства допустимости. Среди прочих, важным критерием допустимости тройки (X, μ, ρ) является конечность при каждом положительном ε так называемой эпсилон-энтропии этой тройки — логарифма количества шаров радиуса ε, которые покрывают все пространство кроме разве что множества меры ε.

Если отождествлять совпадающие почти всюду метрики, то *всегда можно считать, что метрическое пространство является полным* (т. е. по принятой терминологии — польским). Действительно, в случае неполного пространства можно рассмотреть пополнение пространства и продолжить меру на него, разность между пополнением пространства и исходным пространством будет иметь меру нуль.

Для метричесих троек классические теоремы, формулируемые обычно в очень скромных предположениях, обобщаются до очень общих утверждений. Например, развитием известной теоремы Лузина о непрерывности измеримой функции является следующее утверждение: *любые две допустимые метрики являются топологически эквивалентными (т. е. гомеоморфны друг другу) на некотором множестве сколь угодно близкой к единице меры* (см. теоремы 2.5 и 2.6).

1.1.3 Классификация метрических троек (и mm-пространств) и матричные распределения

В параграфе 2.3 намечены доказательства классификационной теоремы о метрических тройках, поэтому здесь мы ограничимся лишь точной формулировкой теоремы о матричных распределениях и их характеризации.

Рассмотрим множество метрических троек (X, μ, ρ), где μ — невырожденная непрерывная мера (т. е. её носитель есть X). Напомним, что предполагается, что метрическое пространство (X, ρ)— полное сепарабельное, а (X, μ) — пространство Лебега с непрерывной мерой.

Классификация mm-пространств относительно сохраняющих меру изометрий дана М. Громовым [15] и А. Вершиком [66]. В формулировке Громова полным инвариантом служит набор согласованных между собой в естественном смысле случайных матриц (при всех натуральных n расстояний между n точками, выбранными случайно и независимо в соответствии с данным распределением). Фактически в доказательстве используется метод моментов и теорема Вейерштрасса. Доказательство Вершика использует понятие матричного распределения метрики — см. ниже (или более общо — измеримой функции нескольких переменных).

Теорема 1.1 (Матричное распределение как инвариант метрической тройки)**.** *Полной системой инвариантов метрической тройки (X, μ, ρ) с невырожденной мерой относительно группы всех почти изометрий, сохраняющих меру, является* ***матричное распределение*** *— $\mathfrak{D}_\infty = \mathfrak{D}_\infty(X, \mu, \rho)$, то есть вероятностная мера на пространстве бесконечных дистанционных матриц, являющаяся по определению образом меры Бернулли (X^∞, μ^∞) при отображении $\{x_i\}_i \mapsto \{\rho(x_i, x_j)\}_{i,j}$.*

Доказательство теоремы основано на индивидуальной эргодической теореме и свойствах пополнения метрических пространств.

В связи с этим доказательством возникает вопрос: как описать матричные распределения как меры на множестве дистанционных матриц? Этот вопрос подробно обсуждается в пункте 2.3.2. Оказывается, эти меры могут быть описаны с помощью специального понятия *простоты меры*. Это понятие, как и связанные рассмотрения, имеют общий характер и применимы не только к классификации метрик, но и к классификации произвольных измеримых функций нескольких переменных (см. [64, 76, 77]). С матричными распределениями связан целый ряд задач теории меры и “learning theory” (которую на русский естественно перевести как “теория узнавания” или “восстановления”), в частности, в этой работе рассматривается задача восстановления метрики и меры в пространствах по рандомизированным тестам, в которых энтропия и спектры играют важную роль.

1.1.4 Спектральная эквивалентность метрических троек

Сформулируем одну важную проблему, имеющую приложения к теории узнавания и спектральной теории графов, возникающую одновременно с определением матричного распределения. Свяжем с матричным распределением допустимой метрики совокупность спектров главных миноров случайных дистанционных матриц. Напомним, что это система перемежающихся случайных наборов вещественных чисел

$$\{\lambda_1^n(\omega) \geq \lambda_2^n(\omega) \geq \cdots \geq \lambda_n^n(\omega)\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Можно рассматривать эту систему как случайную бесконечную треугольную матрицу. *Определяет ли эта случайная матрица исходное матричное распределение и, тем самым, исходную метрику?* Подобный вопрос — в какой мере спектр того или иного оператора, естественно возникающего при рассмотрении геометрического объекта, определяет сам этот объект. Широко известный вопрос Марка Каца "Можно ли услышать форму барабана?" — как раз из этой серии: однозначно ли восстанавливается риманово многообразие по спектру оператора Лапласа? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Другой пример из ранней истории эргодической теории — определяется ли спектром оператора Купмана преобразование, сохраняющее меру, по которому этот оператор построен? Наиболее содержательным отрицательным ответом служит открытие энтропии Шеннона–Колмогорова, являющаяся неспектральным инвариантом преобразования. Наш вопрос в известном смысле соответствует этим двум примерам и ответ также, скорее всего, отрицательный. Но, разумеется, ситуация в нашем случае совершенно иная. Например, ответ на такой же вопрос о мерах на бесконечных симметричных (или эрмитовых) матрицах, инвариантных относительно ортогональной (унитарной) группы, а не симметрической — положителен, потому что спектр есть полный инвариант уже в конечномерном случае. Здесь были бы полезны численные эксперименты. Нам известна только одна вычислительная работа [7], которая была сделана по заказу первого автора, показавшая сильную зависимость набора случайных спектров от размерности сфер S^n. Интересен характер тех метрик, которые однозначно определяются системой спектров; в общем же случае ответ, скорее, отрицательный. Нам представляется плодотворной задача изучения случайных спектров матричного распределения, (см. [80], а также [31]). С другой стороны, имеется большое количество работ об изучении спектров дистанционных матриц конкретных метрических пространств (и матриц инцидентности графов), см., например, [17].

1.1.5 Конус метрических троек и универсальное метрическое пространство Урысона с мерой.

Множество суммируемых допустимых метрик на пространстве с фиксированной мерой образует конус в пространстве функций двух переменных $L^1(X^2, \mu^2)$, мы рассматриваем естественную норму, в которой этот конус является полным нормированным конусом, см. параграф 2.1.4. Естественно изучать те или иные классы метрик как подмножества этого конуса, численные характеристики метрических троек — как функции на этом конусе. В частности, мы рассматриваем эпсилон-энтропию как функцию на этом конусе или на расслоениях над этим конусом.

О свойствах отображения $(X, \mu, \rho) \to \mathfrak{D}_\infty(X, \mu, \rho)$ конуса допустимых метрик в пространство мер на матрицах расстояний подробно рассказано в параграфе 2.3. Здесь уместно сказать о связи рассматриваемых вопросов с пространством Урысона. Универсальное метрическое пространство Урысона $(\mathbb{U}, \rho_U)$ в последние годы стало (после полувекового забвения) популярным объектом исследований. В работах [60, 62] был доказан несколько удивительный факт: в пространстве всех возможных метрик на счетном множестве, снабжённом слабой топологией, всюду плотное G_δ подмножество состоит из метрик, пополнение по которым есть пространство, изоморфное пространству Урысона. По-видимому, эта типичность пространств Урысона сохраняется и в контексте допустимых троек: *совокупность всех (полу)метрических троек (X, μ, ρ), для которых (полу)метрическое пространство (X, ρ) изометрично пространству Урысона, оказывается типичным в слабой топологии конуса допустимых метрик, т. е. всюду плотным G_δ множеством в пространстве всех метрических троек.* Отсюда следует, что и множество троек, в которых дополнительно мера является непрерывной и невырожденной, а метрика урысоновская, также является типичным в пространстве всех метрических троек. Ничего не известно о вероятностных борелевских мерах на пространстве Урысона, нет даже характерных примеров таких мер, однако, несомненно, такие меры будут определены в дальнейших исследованиях.

1.2 Метрические инварианты динамики в эргодической теории

Рассмотрим, как можно использовать допустимые метрики в теории динамических систем. К сожалению, впечатляющая картина успехов эргодической теории во второй половине прошлого века страдала одним недостатком, который в полной мере по-настоящему стал ощущаться недавно, а именно, по тем или иным причинам в эргодических конструкциях редко использовались метрики в фазовом пространстве. Более того, метрику старались исключить даже в тех случаях, когда польза от нее была очевидна. В настоящее время выяснилось, что использование метрики часто позволяет определять новые метрические (от слова “мера”) инварианты динамических систем, а именно, метрика нетривиальным образом используется для некоторой конструкции, а полученный в результате этого ответ от исходной метрики не зависит. Первый пример такого инварианта — масштабированная энтропия – первоначально определённая А. Вершиком и исследованная авторами в дальнейших работах. Ниже кратко объясняется, в чем состоит этот инвариант. Подробно он описан в главе 3 обзора, где собрана серия результатов, доказанных в последние годы и составляющих новое направление в эргодической теории.

1.2.1 Масштабированная энтропия динамических систем

Мы изучаем самую простую из различных возможностей использования метрики. А именно, сопоставим допустимой метрике её обычную эпсилон-энтропию, т. е. росток функции от эпсилон. Усредняя метрику, как принято в теории преобразований с инвариантной мерой, мы получаем последовательность таких ростков эпсилон-энтропий. Основной факт, высказанный в виде гипотезы в [67, 68] и доказанный в [90] с помощью свойств метрических троек, состоит в том, что асимптотика энтропии, если она существует, как класс эквивалентности растущих (по номеру усреднения) последовательностей эпсилон-энтропий не зависит от выбора начальной метрики, и, таким образом, эта асимптотика является новым инвариантом динамической системы (см. параграф 3.1.1). Этот инвариант и был назван *масштабированной энтропией автоморфизма* (см. [67, 68]). В этом определении молчаливо предполагалось, что класс эквивалентности последовательностей эпсилон-энтропий не зависит от эпсилон, если они достаточно малы. Именно так обстоит дело во многих примерах. Например, класс $\{cn\}$ отвечает положительной колмогоровской энтропии, а класс постоянных (по n) последовательностей — дискретному спектру. Как было доказано Ференци–Парк [11] и Затицким [91], любой класс эквивалентности растущих последовательностей между этими двумя монотонными асимптотиками реализуется для некоторого автоморфизма (см. параграф 3.2.2). Но реально до сих пор встречались лишь немногие из них. Подсчет масштабированной энтропии для конкретных автоморфизмов — непростая задача, и выполнен он лишь для некоторых примеров.

1.2.2 Сравнение с классической энтропией

С одной стороны, инвариант — масштабированная энтропия — представляет собой существенное обобщение понятия энтропии и энтропийной теории Шеннона-Колмогорова на случай, когда колмогоровская энтропия равна нулю. Но здесь оказывается важной роль самого понятия энтропии mm-пространства, т. е. энтропии метрического пространства с мерой. А при наличии группы автоморфизмов возникает идея усреднения метрик под действием (например, аменабельной) группы. Имя К. Шеннона здесь упомянуто неслучайно. По-видимому, никто за эти долгие годы не обращал внимания и не занимался расшифровкой Приложении 7 к знаменитой работе Шеннона [50], посвященной основам теории информации и её приложениям. В этом приложении Шеннон в весьма конкретной и не сразу поддающейся обобщению форме предлагает ту же самую, что и высказанную через 60 лет (!) в работах [67, 68], идею о том, что надо изучать асимптотику обычной энтропии *метрического пространства с мерой (т. е. энтропию метрической тройки)* для последовательных усреднений метрики относительно автоморфизма или группы автоморфизмов. Похоже, что ни А. Н. Колмогоров (см. [29]), ни последующие многочисленные его последователи не обратили достаточного внимания на то, что энтропия автоморфизма вычисляется как *асимптотическая энтропия метрического пространства с мерой* (при этом результат не зависит от метрики, см. параграф 3.1.1). Правда, Шеннона, как и позже А. Н. Колмогорова, интересовал лишь случай процессов, передающих информацию (K-процессов). То, что определение остается осмысленным и в случае произвольных автоморфизмов, оставалось незамеченным всеми до самого последнего времени. В наших терминах в качестве метрических троек Шеннон рассматривает конечные фрагменты стационарного процесса, снабженные полуметрикой Хемминга, что не всегда удобно, но эта модель усреднений универсальна. Дальнейшее развитие теории Колмогоровым и его последователями Рохлиным и Синаем несколько скрывало общность идеи Шеннона, что отчасти вполне оправданно, поскольку на тот момент внимание было сконцентрировано на системах с положительной энтропией (гиперболических, хаотических и т. д.). Заметим, что появившиеся вскоре после работ по метрической энтропии статьи о *топологической энтропии*, выглядели бы гораздо более естественно в рамках теории метрических троек.

1.2.3 Стабильность и нестабильность

В работе [53] (см. также параграф 3.3.1 настоящего обзора) сделан важный шаг в изучении масштабированной энтропии, состоящий в том, что ответ на вопрос о существовании единого для всех эпсилон класса эквивалентности роста энтропий при усреднении метрик может быть отрицательным для специально построенных метрических троек: т. е. асимптотика может существенно зависеть от эпсилон. Поэтому в определении класса эквивалентности следует рассматривать функций двух переменных — от n (номера усреднения метрики) и от ε. Окончательное определение масштабированной энтропии включает такой более грубый класс эквивалентности энтропии для данного автоморфизма. См. параграф 3.1.1.

Предположительно, автоморфизмы, для которых асимптотика энтропий усреднений зависит от эпсилон, — типичны. По-видимому, данное здесь определение является наиболее общим из всех возможных определений, связанных с энтропийным ростом автоморфизмов или групп автоморфизмов (в аменабельном случае). Было бы интересно развить теорию масштабированной энтропии и на неаменабельные группы, см. параграф 3.5. Заметим, что близкие обобщения классической энтропийной теории высказывались и ранее, например, энтропия Кириллова–Кушниренко (последовательностная энтропия, см. [34]), медленная энтропия Катка–Тувено (см. [26]), теоретикомерная сложность Ференци (см. [10]), однако теория метрических троек потенциально по всей видимости содержит и неэнтропийные инварианты систем; вопрос лишь в том, как их можно выразить с помощью численных инвариантов метрических троек, например, с помощью матричных распределений.

1.2.4 Дальнейшее использование метрик

Введение масштабированной энтропии является лишь первым шагом в использовании метрик в эргодической теории. Более того, этот шаг мог быть сделан с использованием только одной полуметрики и её усреднений — а именно, усреднений метрики на образующем разбиении в символической модели автоморфизма, т. е. последовательности метрик Хэмминга. Масштабированная энтропия использует лишь самый грубый инвариант метрики — асимптотику количества ε-шаров, почти покрывающих пространство с мерой. Следующий этап должен состоять в том, чтобы изучить с помощью меры более сложные характеристики последовательностей метрических пространств, и выделять те их свойства, которые являются инвариантами автоморфизма или группы автоморфизмов. По-видимому, эта задача до сих пор не изучалась, и можно предположить, что за этим изучением стоит сложная и интересная комбинаторика того, как континуальная динамика аппроксимируется конечными конструкциями. Во всяком случае, на первый взгляд это сильно отличается от обычных теорий аппроксимаций. Более 50 лет остается нерешенным вопрос об инвариантах небернуллиевских K-автоморфизмов, открытых Д. Орнштейном. Можно предположить, что геометрический подход к их анализу с помощью метрик поможет продвинуться в этом вопросе. На это указывает характеристика, предложенная первым автором — вторичная энтропия фильтрации (см. [72]).

1.2.5 Функции нескольких переменных как источник динамических инвариантов

Другая общая идея состоит в том, что привычный прием функционального анализа — замена изучения тех или иных объектов на изучение функций на них — использовался в теории динамических систем в очень ограниченном виде (идея Купмана): динамической системе $\{T_g : g \in G\}$ сопоставляется группа операторов $\{U_g : f \mapsto U_g(f)(\,\cdot\,) = f(g^{-1}\,\cdot\,)\}$, где f принадлежит тому или иному пространству функций одной переменной. В этом суть спектральной теории динамических систем, доставляющей спектральные инварианты системе. Но тот же прием можно использовать для функций нескольких переменных, например, для пространства функций двух переменных, и не произвольных, а, скажем, метрик; и мы открываем, таким образом, совершенно новый путь для построения инвариантов динамических систем. Более подробно, используя теорию допустимых метрических троек, изложенную в главе 2, мы можем сопоставить динамической системе с инвариантной мерой группу операторов в пространстве метрических троек. Так, выше мы фактически вложили группу сохраняющих меру автоморфизмов в группу преобразований метрических троек, и убедились, что некоторые инварианты троек (асимптотика энтропий усреднений) не зависят от метрики и, тем самым, становятся инвариантом исходной группы автоморфизмов пространства с мерой.

С другой стороны, метрика позволяет ввести новые понятия в развитие некоторых классических фактов. Одним из таких понятий является чисто метрическое понятие *“виртуальной непрерывности” измеримой функции нескольких переменных*, позволяющее корректно ограничивать такую функцию на элементы меры нуль некоторого измеримого разбиения. Эта проблема автоматически решается положительно (mod 0) для произвольной измеримой функции одной переменной, в этом состоит теорема Рохлина (см. [44]). Уже для функций двух и более переменных, вообще говоря, не существует ограничения на элементы измеримого разбиения. Ограничение существует для так называемых *виртуально непрерывных функций*, определение которых — чисто метрическое (см. [86] и определение 2.7 в параграфе 2.1.3 настоящего обзора). В частности любая допустимая метрика виртуально непрерывна, и поэтому допускает ограничение, превращая тем самым почти каждый элемент любого измеримого разбиения в mm-пространство. Виртуальная непрерывность не использует никаких локальных свойств функций (вроде гладкости и др.) и позволяет по-новому понять теоремы продолжения функций нескольких переменных и теоремы вложения Соболева (см. [85]).

1.2.6 Общая постановка проблемы метрического изоморфизма с учетом метрики: каталитические инварианты

Рассмотрим проблему изоморфизма автоморфизмов, сохраняющих меру, т. е. проблему сопряженности в группе классов совпадающих mod 0 автоморфизмов, сохраняющих меру. Будем рассматривать её сначала в несколько расширенной постановке, а именно, предполагая, что группа автоморфизмов действует в пространстве Лебега X с непрерывной мерой μ, в котором будут также рассматриваться различные допустимые метрики ρ. Зафиксируем в этом пространстве какой-либо эргодический автоморфизм T и одну из допустимых метрик ρ. Рассмотрим своеобразную статсумму из метрик, точнее, нормированный ряд по степеням $z \in [0, 1)$, и предположим, что он сходится (буквально или обобщенно):

$$\Omega_T(\rho, z) \equiv \Omega_T(z) = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho(T^n x, T^n y), \quad z \in [0, 1).$$

Таким образом, мы рассматриваем функцию от z — $\Omega_T(\,\cdot\,)$, как метрику, являющуюся деформацией метрики ρ (при $z = 0$) под действием автоморфизма T.

Заметим, что при фиксированном z каждое слагаемое есть результат применения оператора $z \cdot U_T \otimes U_T$, действующего на конусе допустимых метрик (на пространстве функций двух переменных). Сумма ряда по n, соответственно, есть оператор

$$(Id - z \cdot U_T \otimes U_T)^{-1}.$$

Рассмотрим функцию $\Omega_T(z)$ в окрестности точки $z = 1$. Удобно положить $z = 1 - \delta$, тогда

$$\Omega_T(\rho, z) = \delta \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \delta)^n \rho(T^n x, T^n y), \quad 1 > \delta \geq 0.$$

Нас будет интересовать поведение деформации $\Omega_T(\,\cdot\,)$ в окрестности точки $\delta = 0$, то есть $z = 1$.

Предположим, что каждому полному сепарабельному метрическому пространству с мерой (X, μ, ρ) соотнесён некий инвариант (относительно изометрий метрического пространства), значения которого представляют собой вещественные функции некоторого аргумента, единого для всех метрических пространств; обозначив его $\varepsilon - \Phi_\rho(\varepsilon)$ (например, функция от эпсилон, равная логарифму числа шаров радиуса эпсилон, покрывающих почти все пространство). Предположим, что имеется деформация метрических пространств $\Omega_T(\rho, z)$, и рассмотрим функции $\Phi_\rho(z, \varepsilon)$ двух вещественных переменных $z \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$. Наконец, введем классы эквивалентности функций двух переменных, зависящие от ε и от параметра деформации z. А именно, сначала образуем классы эквивалентности функций от z при фиксированном ε; если окажется, что такой класс не зависит от ε, то он и берется в качестве инварианта. Если при разных ε классы различаются, то образуются более грубые классы, которые объединяют в один все классы при разных ε. Так или иначе, классы фактически сопоставляются семейству метрик $\Omega_T(\rho, z)$, определяемых статсуммой Ω. Будем говорить, что класс эквивалентности функции двух переменных $\Phi_\rho(z, \varepsilon)$ является *каталитическим инвариантом* автоморфизма T, если этот класс не зависит от начальной метрики $\rho = \rho_0$ и сопоставлен, следовательно, только автоморфизму T [1]. Подробности см. в [74].

В тех случаях, когда класс эквивалентности зависит от начальной метрики, возникает естественное отношение эквивалентности на начальных метриках (класс метрик с одним и тем же инвариантом), и можно говорить, об *относительном каталитическом инварианте при фиксированном классе начальных метрик*. Относительные инварианты также представляют интерес для проблемы классификации, которая уже более подробна, чем обычная проблема метрического изоморфизма.

Главный вопрос состоит в том, какие инварианты метрики (относительно изометрий) можно использовать с такой же продуктивностью, как энтропию метрического пространства с мерой. Этот вопрос остается открытым.

Ещё одна возможность расширения идеи каталитических инвариантов состоит в том, чтобы рассматривать не только инварианты самого метрического пространства, но и инварианты типа *флагов* метрических пространств $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n$ в том же самом смысле, что и выше. Здесь, несомненно, есть перспективы, но они требуют более подробного изучения самих метрических пространств и их инвариантов относительно изометрий X_1.

[1] термин "каталитический" (от слова "катализатор") выбран потому, что определение инварианта автоморфизмов, сохраняющих меру, связано с инвариантом метрик, которые в определение автоморфизмов не входят, однако и смысл инварианта проясняется с помощью метрики, хотя, разумеется, инвариант можно вычислять — достаточно сложно — и без помощи метрики.

Глава 2

Метрические тройки

2.1 Метрические тройки, допустимость

2.1.1 Измеримые полуметрики и почти метрики, теоремы исправления

Классический подход к изучению mm-пространств (X, μ, ρ), то есть пространств X с мерой μ и метрикой ρ, обычно основывается на изучении различных борелевских мер μ на фиксированном метрическом пространстве (X, ρ). Мы же, как было сказано в главе 1, рассматриваем тематику метрических пространств с мерой с относительно новой точки зрения. Она, по-видимому, впервые высказана в работах [62] и [63]. Мы стартуем с фиксированного пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (пространства Лебега–Рохлина, стандартного вероятностного пространства с непрерывной мерой, то есть изоморфного отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега) и изучаем различные метрики ρ на этом пространстве. Условием, связывающим топологическую и измеримую структуры, является *измеримость метрики* ρ, как функции двух переменных, такие метрики мы будем называть *измеримыми*. Кроме того, нам неизбежно приходится рассматривать естественные обобщения метрик — *полуметрики* [1].

В контексте выбранного подхода к изучению метрик (и полуметрик), как измеримых функций на $(X^2, \mu^2) = (X \times X, \mu \times \mu)$, естественным образом возникает понятие почти метрики — функции, для которой определяющие метрику соотношения выполнены не всюду, а лишь почти всюду.

Определение 2.1. Измеримая неотрицательная функция ρ на (X^2, μ^2) называется *почти метрикой* (или метрикой mod 0) на (X, μ), если

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для μ^2-почти всех пар $(x, y) \in X^2$;
2. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для μ^3-почти всех троек $(x, y, z) \in X^3$.

Так, например, предел по мере или почти всюду последовательности измеримых метрик априори может оказаться лишь почти метрикой. Оказывается, что верна следующая теорема об исправлении почти метрик, см. [92].

[1] Полуметрикой мы называем неотрицательную симметричную функцию двух переменных, обнуляющуюся на диагонали и удовлетворяющую неравенству треугольника. В литературе для таких функций также принято использовать термин псевдометрика

Теорема 2.2 (Теорема об исправлении). *Если ρ — почти метрика на (X, μ), то найдется такая полуметрика $\tilde{\rho}$ на (X, μ), что μ^2-почти всюду выполнено равенство $\rho = \tilde{\rho}$.*

Доказательство теоремы об исправлении основано на двух шагах: отождествлении пространства (X, μ) с окружностью $\mathbb{S}$ с мерой Лебега m и применении теоремы Лебега о дифференцировании. Для почти метрики ρ на $(\mathbb{S}, m)$ в качестве ее исправления можно взять функцию

$$\tilde{\rho}(x, y) = \overline{\lim_{T \to 0^+}} \frac{1}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_0^T \rho(x + t, y + s)\, dt\, ds, \quad x, y \in \mathbb{S},$$

которая совпадает с ρ почти всюду и оказывается полуметрикой.

Теорема 2.2 позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением измеримых полуметрик, а не почти метрик. В частности, из этой теоремы следует, что множество измеримых полуметрик замкнуто относительно предельных переходов по мере и почти всюду.

Развитие идей об исправлении применительно к функциям нескольких переменных можно найти в работе [40].

2.1.2 Допустимость. Связь измеримой и метрической структур

В дальнейшем мы будем работать в основном с так называемыми допустимыми полуметриками и метриками. Одно из определений допустимости — сепарабельность на подмножестве полной меры.

Определение 2.3. Измеримая (полу)метрика ρ на пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется *допустимой*, если найдется такое подмножество $X_0 \subset X$, что $\mu(X_0) = 1$ и (полу)метрическое пространство (X_0, ρ) сепарабельно. Тройку (X, μ, ρ) также будем называть *допустимой* (полу)метрической тройкой, или просто *метрической тройкой*.

Связь между структурами измеримого и метрического пространства на X освещается в следующих утверждениях. Допустимая метрика на $(X, \mathcal{A}, \mu)$ порождает борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{B}$, мера μ оказывается борелевской — определена на ней.

Теорема 2.4 (см. [86]). *Если ρ — допустимая метрика на пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$, то мера μ является мерой Радона на метрическом пространстве (X, ρ). Порожденная метрикой ρ борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}$ на X является подалгеброй исходной сигма-алгебры $\mathcal{A}$ и плотна в ней.*

Включение $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ следует из того, что индикаторы открытых шаров радиуса R являются сечениями множества $\{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < R\}$, поэтому лежат в $\mathcal{A}$. В силу сепарабельности (mod 0) любое открытое множество является счетным объединением шаров, поэтому также лежит в $\mathcal{A}$. Плотность $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ следует из свойства максимальности лебеговской сигма-алгебры. Подробности см. в [86].

Следствием радоновости меры является следующий несколько неожиданный факт, демонстрирующий в каком-то смысле свойство универсальности допустимой метрической тройки.

Теорема 2.5 (см. [86]). *Если ρ_1 и ρ_2 — две допустимые метрики на пространстве (X, μ), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое подмножество $X_0 \subset X$, что $\mu(X_0) > 1 - \varepsilon$ и задаваемые метриками ρ_1, ρ_2 топологии на X_0 совпадают.*

Из этой теоремы можно вывести следующую обобщенную теорему Лузина.

Теорема 2.6 (Обобщенная теорема Лузина)**.** *Пусть (X, μ, ρ) — метрическая тройка, а функция f измерима на (X, μ). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое подмножество $X_0 \subset X$, что $\mu(X_0) > 1 - \varepsilon$ и функция f непрерывна на (X_0, ρ).*

Отметим, что в работе [6] изложен обратный подход к доказательству этих результатов — теорема 2.4 о радоновости меры выводится из обобщенной теоремы Лузина.

В заключение параграфа приведем следующее замечание. Допустимой полуметрике ρ на пространстве (X, μ) сопоставим разбиение ξ_ρ на множества нулевого диаметра: точки $x, y \in X$ лежат в одном элементе разбиения ξ_ρ в том и только том случае, если $\rho(x, y) = 0$. Допустимость полуметрики ρ гарантирует, что разбиение ξ_ρ является измеримым. Тем самым, допустимая полуметрика ρ индуцирует допустимую метрику на фактор-пространстве X/ξ_ρ.

2.1.3 Метрики и разбиения

Пусть $\pi\colon (X, \mu) \to (Y, \nu)$ — измеримое отображение, переводящее меру μ в меру ν. Пусть ξ — разбиение на прообразы точек при отображении π. Классический результат В. А. Рохлина (см. [44]) говорит о существовании и единственности (mod 0) условных мер μ_y на элементах $\pi^{-1}(y)$ для ν-почти всех $y \in Y$, таких, что мера μ есть интеграл мер μ_y по мере ν: $\mu = \int_Y \mu_y \, d\nu(y)$. Каждой измеримой функции f на пространстве (X, μ) можно сопоставить систему сужений $f_y = f|_{\pi^{-1}(y)}$ на пространствах $(\pi^{-1}(y), \mu_y)$, $y \in Y$. Для ν-почти всех $y \in Y$ сужение f_y является измеримой функцией. При замене функции f на эквивалентную (совпадающую μ-почти всюду) функцию, для ν-почти всех $y \in Y$ следы f_y заменяются на эквивалентные по мере μ_y. Тем самым, сужения измеримой функции на слои измеримого разбиения корректно определены. Аналогичный вопрос для функции многих переменных был поставлен А. Вершиком: можно ли корректно определить сужения определенной почти всюду функции нескольких переменных на элементы измеримого разбиения? Ответ, вообще говоря, отрицательный. Однако для так называемых виртуально непрерывных функций нескольких переменных можно дать корректное определение сужения на слои измеримого разбиения. Приведем одно из возможных определений виртуально непрерывных функций.

Определение 2.7. Измеримая функция f на (X^2, μ^2) называется *собственно виртуально непрерывной*, если найдутся такие подмножество $X' \subset X$ полной меры и допустимая метрика ρ на (X, μ), что f непрерывна на $X' \times X'$ по метрике $\rho \times \rho$. Измеримая функция f на (X^2, μ^2) называется *виртуально непрерывной*, если она совпадает с некоторой собственно виртуально непрерывной функцией μ^2-почти всюду.

Простым примером не виртуально непрерывной функции является индикатор множества “над диагональю”: функция $\chi_{x>y}$ на X^2, где $X = [0, 1]$.

Теорема 2.8. *Если две собственно виртуально непрерывные функции f и g на (X^2, μ^2) совпадают μ^2-почти всюду, то найдется подмножество $X_0 \subset X$ полной меры, такие что f и g совпадают на квадрате X_0^2.*

Если ξ — разбиение на прообразы точек при измеримом отображении $\pi\colon (X, \mu) \to (Y, \nu)$, и $\{\mu_y\}_{y \in Y}$ — соответствующая система условных мер, то для ν-почти всех $y \in Y$ сужения f и g на $\pi^{-1}(y) \times \pi^{-1}(y)$ совпадают $\mu_y \times \mu_y$ почти всюду.

Приведенная теорема позволяет корректно определить сужение виртуально непрерывной функции как сужение эквивалентной ей собственно виртуально непрерывной функции.

Предложение 2.9. *Допустимая полуметрика ρ на пространстве (X,μ) является собственно виртуально непрерывной функцией.*

Действительно, допустимая полуметрика ρ, рассматриваемая как функция двух переменных, тривиальным образом непрерывна на $X \times X$ по полуметрике $\rho \times \rho$. Поэтому корректно определены сужения ρ на элементы измеримого разбиения ξ. Более того, для ν-почти всех $y \in Y$ сужение полуметрики ρ на слой $\pi^{-1}(y)$ является допустимой полуметрикой на $(\pi^{-1}(y), \mu_y)$.

Подробнее про виртуально непрерывные функции см. в работах [85] и [86]. В них, в частности, обсуждается связь понятия виртуальной непрерывности с такими классическими вопросами анализа как теоремы о следах функций пространств Соболева, ядер ядерных операторов. Виртуальная непрерывность также появляется в теоремах двойственности типа Монжа–Канторовича, см. работы [86], [6] и [5].

2.1.4 Конус суммируемых допустимых полуметрик, m-норма

В дальнейшем мы ограничимся изучением *суммируемых допустимых полуметрик*, то есть допустимых полуметрик ρ с конечным интегралом

$$\int\limits_{X\times X} \rho(x,y)d\mu(x)d\mu(y) < \infty.$$

Для фиксированного пространства с мерой (X,μ) символом $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ обозначим множество всех суммируемых допустимых полуметрик на (X,μ). В пункте 2.2.1 мы покажем, что это множество — выпуклый конус в $L^1(X^2,\mu^2)$. Группа $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ автоморфизмов пространства (X,μ) действует сдвигами на конусе $\mathcal{A}dm(X,\mu)$. Изучаемая в главе 3 динамика метрик — фактически изучение этого действия. Орбиты этого действия состоят из попарно изоморфных метрик. В дальнейшем мы будем обсуждать эти орбиты и усреднения метрик по ним. В частности, мы будем исследовать поведение инвариантов автоморфизмов, которые возникают при изучении этого действия. Каждой метрике ρ из конуса $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ соответствует стабилизатор — группа сохраняющих меру μ изометрий mod 0 пространства (X,ρ).

Конус $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ не замкнут в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$, его замыканием является множество всевозможных (не обязательно допустимых) суммируемых полуметрик. Для работы с допустимыми полуметриками часто удобно работать с другой нормой, которая индуцирована в L^1 конусом всех суммируемых полуметрик, она была введена в работе [84].

Определение 2.10. Для функции $f \in L^1(X^2,\mu^2)$ определим ее (конечную или бесконечную) m-норму следующим образом:

$$\|f\|_m = \inf\Big\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \colon \rho \text{ — полуметрика на } (X,\mu),\ |f| \le \rho\ \mu^2 - \text{п. в.}\Big\}.$$

Символом $\mathbb{M}(X,\mu)$ обозначим подпространство функций в $L^1(X^2,\mu^2)$, имеющих конечную m-норму.

Очевидно, m-норма мажорирует стандартную норму в $L^1(X^2,\mu^2)$, поэтому из сходимости в m-норме следует сходимость в $L^1(X^2,\mu^2)$. Очевидно также включение $\mathcal{A}dm(X,\mu) \subset \mathbb{M}(X,\mu)$. В пункте 2.2.2 мы обсудим свойства конуса допустимых метрик и m-нормы, покажем, что пространство $\mathbb{M}(X,\mu)$ и конус $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ полны в m-норме.

Наряду с конусом $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ мы также будем рассматривать его подмножество — конус $\mathcal{A}dm_+(X,\mu)$, состоящий из суммируемых допустимых метрик. Он является плотным подмножеством в $\mathcal{A}dm(X,\mu)$.

2.2 Эпсилон-энтропия метрической тройки

2.2.1 Эпсилон-энтропия и характеризации допустимости

Одной из простейших функциональных характеристик, описывающих метрическую тройку, является восходящее ещё к Шеннону понятие эпсилон-энтропии (см. главу 1).

Определение 2.11. Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ) и $\varepsilon > 0$. ε-энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки (X, μ, ρ) определяется как $\log k$, где k — минимальное число (или бесконечность), для которого пространство X может быть представлено в виде объединения $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_k$ измеримых множеств, так, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\operatorname{diam}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при всех $j = 1, \ldots, k$. Для $\varepsilon \geq 1$ положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = 0$.

Иногда бывает важно рассматривать "недиагональный" вариант этого понятия с двумя параметрами, ε и δ: при этом условие $\mu(X_0) < \varepsilon$ заменяется на условие $\mu(X_0) < \delta$. В работе [78] такая энтропия названа mm-энтропией.

Свойство допустимости измеримой полуметрики легко описывается в терминах её эпсилон-энтропий.

Лемма 2.12. *Измеримая полуметрика является допустимой тогда и только тогда, когда ее ε-энтропия конечна для любого $\varepsilon > 0$.*

Используя это простое описание, легко понять, что сумма двух допустимых полуметрик снова является допустимой полуметрикой. Действительно, эпсилон-энтропия суммы полуметрик допускает следующую оценку:

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(X, \mu, \rho_1 + \rho_2) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2).$$

Отсюда следует, что множество всех допустимых полуметрик на пространстве (X, μ), как и множество $\mathcal{A}dm(X, \mu)$, образует *выпуклый конус*.

Из определения видно, что для фиксированной метрической тройки (X, μ, ρ) функция $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ является невозрастающей, кусочно-постоянной и непрерывной слева. Пусть $\mathbb{H}_{\varepsilon+}(X, \mu, \rho) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathbb{H}_{\varepsilon+\delta}(X, \mu, \rho)$. Тогда функции $\mathbb{H}_{\varepsilon+}(X, \mu, \rho)$ и $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ являются полунепрерывными снизу и сверху соответственно на конусе $\mathcal{A}dm(X, \mu)$. Более того, справедлива следующая оценка.

Лемма 2.13. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ таковы, что $||\rho_1 - \rho_2||_m < \frac{\delta^2}{4}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{H}_{\varepsilon+\delta}(X, \mu, \rho_1) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2).$$

Другой способ определить энтропию метрической тройки — через аппроксимацию меры дискретными в метрике Канторовича.

Определение 2.14. Пусть (X, μ, ρ) — метрическая тройка с конечным первым моментом (то есть ρ — суммируемая на (X^2, μ^2)), пусть $\varepsilon > 0$. Определим

$$\mathbb{H}^K_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \inf\big\{H(\nu) \colon d_K(\mu, \nu) < \varepsilon\big\},$$

где инфимум берется по всем дискретным мерам ν на пространстве (X, ρ), а d_K — расстояние Канторовича между мерами на метрическом пространстве (X, ρ) (см. работы [25, 65]).

Приведем двусторонние оценки, связывающие приведенные определения ε-энтропий.

Лемма 2.15. *Пусть (X, μ, ρ) — метрическая тройка с конечным первым моментом. Пусть $0 < \delta < \varepsilon$ таковы, что для любого подмножества $A \subset X$, если $\mu(A) < \delta$, то*

$$\int\limits_{A \times X} \rho \, d(\mu \times \mu) < \varepsilon - \delta. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\exp\Big(\mathbb{H}^K_\varepsilon(X, \mu, \rho)\Big) \le \exp\Big(\mathbb{H}_\delta(X, \mu, \rho)\Big) + 1.$$

Лемма 2.16. *Пусть (X, μ, ρ) — метрическая тройка с конечным первым моментом. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка*

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(X, \mu, \rho) \le \frac{1}{\varepsilon}\big(\mathbb{H}^K_{\varepsilon^2}(X, \mu, \rho) + 1\big). \tag{2.2}$$

Доказательства лемм 2.15 и 2.16 мы приводим в приложении A.1.

Следующая теорема из работы [84] дает несколько равносильных переформулировок допустимости полуметрики.

Теорема 2.17 (Эквивалентные условия допустимости)**.** *Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ). Следующие утверждения равносильны:*

1. *полуметрика ρ допустима;*
2. *для любого $\varepsilon > 0$ эпсилон-энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ конечна;*
3. *мера μ может быть аппроксимирована дискретными мерами в метрике Канторовича d_K; иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ эпсилон-энтропия $\mathbb{H}^K_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ конечна;*
4. *для μ–почти всех $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ шар радиуса ε в полуметрике ρ с центром в x имеет положительную меру;*
5. *для любого подмножества $A \subset X$ положительной меры существенный инфимум функции ρ на $A \times A$ равен нулю.*

Равносильность первых трех пунктов теоремы уже обсуждалась выше. Пятый пункт теоремы удобен для использования в качестве критерия недопустимости измеримой полуметрики.

Приведем еще одну характеризацию допустимости полуметрики из работы [84] — в терминах попарных расстояний между случайной последовательностью точек.

Теорема 2.18. *Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ). Пусть $(x_n)_{n=1}^\infty$ — случайная последовательность точек, выбранная независимо по мере μ.*

1. *Если метрика ρ допустима, то для любой положительной константы ε вероятность следующего события стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности:*

   найдется такое множество индексов $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ размера хотя бы εn, что $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$ для любых различных $i, j \in I$. (2.3)

2. *Если метрика ρ не является допустимой, то существует такая положительная константа ε, что вероятность события (2.3) стремится к единице.*

В заключение параграфа приведем еще одну теорему, которая позволяет оценить эпсилон-энтропию метрической тройки через эпсилон-энтропии случайных конечных подпространств.

Теорема 2.19. *Пусть (X, μ, ρ) — метрическая тройка, а $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — случайная по мере μ^{∞} последовательность. Пусть (X_n, μ_n, ρ_n) — (случайная) конечная метрическая тройка, где $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, μ_n — равномерная мера на X_n и $\rho_n(x_i, x_j) = \rho(x_i, x_j)$. Тогда почти наверное:*

1. *справедлива оценка снизу для ε – энтропии ρ:*

$$\overline{\lim_n} \mathbb{H}_{\varepsilon}(X_n, \mu_n, \rho_n) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon}(X, \mu, \rho);$$

2. *справедлива оценка сверху для ε – энтропии ρ:*

$$\underline{\lim_n} \mathbb{H}_{\varepsilon}(X_n, \mu_n, \rho_n) \geq \mathbb{H}_{\varepsilon+}(X, \mu, \rho).$$

Подчеркнем, что теорема 2.19 по сути дает оценку эпсилон-энтропии метрической тройки в терминах ее матричного распределения, см. параграф 2.3.1.

2.2.2 Сходимость в конусе допустимых полуметрик

В данном пункте мы приводим серию результатов из работы [84], описывающих свойства пространства $\mathbb{M}(X, \mu)$ и конуса допустимых полуметрик $\mathcal{A}dm(X, \mu)$, снабженных m-нормой и нормой из $L^1(X^2, \mu^2)$.

Лемма 2.20. *Пространство $\mathbb{M}(X, \mu)$ полно в m-норме.*

Лемма 2.21. *Пусть последовательность суммируемых полуметрик ρ_n на (X, μ) сходится к некоторой функции ρ в m-норме. Если для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеет место оценка $\mathbb{H}_{\varepsilon}(X, \mu, \rho_n) < +\infty$, то функция ρ является допустимой полуметрикой.*

Следствие 2.22. *Предел последовательности допустимых полуметрик в m-норме есть допустимая полуметрика. Конус $\mathcal{A}dm(X, \mu)$ допустимых полуметрик замкнут и полон в m-норме.*

Следующая лемма утверждает, что предел в $L^1(X^2, \mu^2)$ последовательности допустимых полуметрик с равномерно ограниченными ε-энтропиями является допустимой полуметрикой.

Лемма 2.23. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ таково, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество*

$$\{\mathbb{H}_{\varepsilon}(X, \mu, \rho) \colon \rho \in M\}$$

ограничено. Тогда замыкание множества M по норме пространства $L^1(X^2, \mu^2)$ лежит в конусе $\mathcal{A}dm(X, \mu)$.

Теорема 2.24. *Пусть последовательность суммируемых полуметрик ρ_n сходится к допустимой полуметрике ρ в $L^1(X^2, \mu^2)$. Тогда имеет место сходимость ρ_n к ρ в m-норме.*

Следствие 2.25. *На конусе $\mathcal{A}dm(X, \mu)$ задаваемая m-нормой топология совпадает с топологией, задаваемой стандартной нормой в $L^1(X^2, \mu^2)$.*

2.2.3 Компактность и предкомпактность в конусе допустимых полуметрик

Согласно следствию 2.25, множество суммируемых допустимых полуметрик компактно в m-норме тогда и только тогда, когда оно компактно в $L^1(X^2, \mu^2)$. Приведенные в этом пункте теоремы из работы [84] дают критерий предкомпактности семейства допустимых полуметрик в m-норме.

Теорема 2.26. *Множество $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ предкомпактно в $m-$норме тогда и только тогда, когда*:

1. *(равномерная интегрируемость) множество M равномерно интегрируемо на (X^2, μ^2);*
2. *(равномерная допустимость) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $k \geq 0$ и разбиение X на множества X_j, $j = 1, \dots, k$, что для каждой полуметрики $\rho \in M$ найдется такое множество $A \subset X$, что $\mu(A) < \varepsilon$ и $\operatorname{diam}_\rho(X_j \setminus A) < \varepsilon$ для всех $j = 1, \dots, k$.*

Отметим, что, согласно теореме Данфорда–Петтиса, равномерная интегрируемость является критерием предкомпактности в слабой топологии в L^1.

Следствие 2.27. *Если $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ предкомпактно в m-норме, то его замыкание в $L^1(X^2, \mu^2)$ совпадает с замыканием в $m-$норме и лежит в $\mathcal{A}dm(X, \mu)$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ конечен $\sup\{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)\colon \rho \in M\}$.*

Оказывается, что для выпуклых множеств допустимых полуметрик последнее утверждение из следствия 2.27 является также и достаточным условием предкомпактности в m-норме.

Теорема 2.28. *Выпуклое множество $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ предкомпактно в m-норме тогда и только тогда, когда супремум $\sup\{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)\colon \rho \in M\}$ конечен для любого $\varepsilon > 0$.*

Приведенные выше критерии предкомпактности имеют важное приложение в динамике. Они используются для доказательства критерия дискретности спектра сохраняющего меру преобразования, см. теорему 3.15.

2.3 Метрические тройки: классификация, матричное распределение, расстояние между тройками

До сих пор, говоря о метрической тройке, мы имели в виду метрику на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). В этом пункте мы временно отходим от данной парадигмы и говорим о метрических тройках, не фиксируя при этом конкретное стандартное вероятностное пространство с непрерывной мерой.

Две суммируемые метрические тройки (X_1, μ_1, ρ_1) и (X_2, μ_2, ρ_2) являются изоморфными, если существует изоморфизм пространств с мерой (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2), переводящий метрику ρ_1 в метрику ρ_2 (mod 0). В данном разделе речь пойдет в том числе о классификации допустимых метрических троек с точностью до изоморфизма. Возвращаясь к фиксированному пространству (X, μ) и конусу $\mathcal{A}dm_+(X, \mu)$ допустимых метрик на нем, мы тем самым говорим об орбитах под действием группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X, \mu)$. Как было сказано в первой главе, М. Громовым (см. [15]) и независимо А. Вершиком (см. [60]) было доказано, что задача классификации метрических троек является “гладкой” в том смысле, что существует полная система инвариантов, характеризующая допустимую метрическую тройку с точностью до изоморфизма — матричное распределение. Полная система инвариантов оказалась не только проста и наглядна, но стала существенным инструментом изучения метрических пространств.

В пункте 2.3.3 мы приводим два естественных способа количественно измерить различие между неизоморфными метрическими тройками — вводим два расстояния и обсуждаем их свойства.

2.3.1 Классификация метрических пространств с мерой и матричное распределение

В данном пункте мы даем подробное изложение того, о чем кратко сообщалось в пункте 1.1.3 главы 1.

Для фиксированной метрической тройки (X, μ, ρ) и натурального n выберем случайно и независимо n точек $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве X в соответствии с распределением μ. Рассмотрим матрицу расстояний $(\rho(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ между этими точками — случайную матрицу расстояний на n точках. Символом $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_n(X, \mu, \rho)$ обозначим полученное распределение на пространстве M_n квадратных матриц $n \times n$. Мера $\mathfrak{D}_n$ является образом меры μ^n, заданной на X^n, при отображении $F_n \colon X^n \to M_n$,

$$F_n \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\rho(x_i, x_j))_{i,j=1}^n.$$

Определение 2.29. Мера $\mathfrak{D}_n$ называется *матричным распределение размерности* n метрической тройки (X, μ, ρ).

Следующие свойства конечномерных матричных распределений следуют прямо из определения.

Замечание 2.30. Для фиксированной метрической тройки (X, μ, ρ) распределения $\mathfrak{D}_n$ имеют следующие свойства:

1. распределение $\mathfrak{D}_n$ сосредоточено на пространстве матриц расстояний размера $n \times n$, обозначим его символом R_n;
2. распределение $\mathfrak{D}_n$ инвариантно относительно действия группы S_n одновременными подстановками столбцов и строк;
3. распределение $\mathfrak{D}_n$ является проекцией распределения $\mathfrak{D}_{n+1}$ на матрицы $n \times n$, образованные первыми n строками и столбцами.

Символом $\mathfrak{D}_\infty = \mathfrak{D}_\infty(X, \mu, \rho)$ обозначим проективный предел конечномерных распределений $\mathfrak{D}_n$ — распределение на пространстве M_∞ матриц $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Эта мера сосредоточена на пространстве бесконечных матриц расстояний (симметричных матриц с неотрицательными вещественными коэффициентами, удовлетворяющих неравенству треугольника), обозначим его символом R_∞. Более того, мера $\mathfrak{D}_\infty$ является инвариантной относительно действия группы S^∞, одновременно переставляющей столбцы и строки матриц (кратко — диагональной симметрической группы). Мера $\mathfrak{D}_\infty$ является образом меры Бернулли μ^∞, заданной на X^∞, при отображении $F_\infty \colon X^\infty \to M_\infty$,

$$F_\infty \colon (x_j)_{j=1}^\infty \mapsto (\rho(x_i, x_j))_{i,j=1}^\infty. \tag{2.4}$$

Случайная матрица по распределению $\mathfrak{D}_\infty$ — матрица расстояний $(\rho(x_i, x_j))_{i,j=1}^\infty$, где последовательность точек $(x_i)_{i=1}^\infty$ в пространстве X выбрана случайно и независимо в соответствии с распределением μ.

Определение 2.31 (см. [60])**.** Мера $\mathfrak{D}_\infty$ называется *матричным распределением метрической тройки* (X, μ, ρ).

Независимо М. Громовым и А. Вершиком установлена теорема, утверждающая, что матричное распределение полностью определяет метрическую тройку с точностью до автоморфизма.

М. Громов: Совокупность мер $\mathfrak{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, есть полная система инвариантов метрической тройки (X, μ, ρ). Т. е. необходимое и достаточное условие эквивалентности двух троек есть совпадение при всех n соответствующих мер $\mathfrak{D}_n$.

А. Вершик: мера $\mathfrak{D}_\infty$ на пространстве бесконечных дистанционных матриц есть полный инвариант метрической тройки (X, μ, ρ). Иначе говоря, две допустимых невырожденных метрики изоморфны тогда и только тогда, когда их матричные распределения совпадают.

Равносильность двух заключений — очевидна; первое утверждение было доказано М. Громовым и использовало весьма специальные аналитические соображения. После сообщения теоремы А. Вершику, последний дал совершенно иное доказательство, основанное на простейшей эргодической теореме (теореме Бореля об усиленном законе больших чисел для последовательности независимых случайных величин). Анализ обоих доказательств см. в книге [15]. Мы приведем второе доказательство. Оба доказательства получены в конце 90-х годов и опубликованы - первое в [15], второе в [62].

Теорема 2.32 (М. Громов, А. Вершик)**.** *Две метрические тройки* (X_1, μ_1, ρ_1) *и* (X_2, μ_2, ρ_2) *изоморфны тогда и только тогда, когда матричные распределения*

$$\mathfrak{D}_\infty(X_1, \mu_1, \rho_1) \quad \textit{и} \quad \mathfrak{D}_\infty(X_2, \mu_2, \rho_2)$$

этих троек совпадают.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что метрическая тройка (X, μ, ρ) однозначно восстанавливается по своему матричному распределению.

Напомним, что мы можем предполагать, что метрическое пространство (X, ρ) является полным, а мера μ — невырожденной, т. е. её носитель совпадает со всем пространством (нет непустых открытых в смысле метрики множеств меры нуль). Отсюда и из эргодической теоремы следует, что почти всякая по мере μ^∞ последовательность точек всюду плотна в (X, ρ). Следовательно, пространство, являющееся замыканием (точнее пополнением) почти любой последовательности есть всё X. Остается восстановить на пространстве меру. По той же эргодической теореме, мера любого шара и даже пересечения конечного множества шаров с центрами в точках нашей последовательности однозначно восстанавливается как плотность точек этой последовательности, лежащих в таком пересечении. Как известно, алгебра множеств, натянутая на множество всех (или почти всех) шаров произвольного радиуса в сепарабельном метрическом пространстве, всюду плотна в алгебре всех измеримых множеств. Поэтому значение меры на этой алгебре однозначно определяет меру на всем пространстве X. Тем самым, мы восстановили метрическую тройку по её матричному распределению. □

Замечание 2.33. Заключение теоремы 2.32 становится неверным, если заменить допустимые метрики на допустимые полуметрики. Контрпримером может послужить допустимая полуметрика, которая не различает пары точек, и метрика, получаемая из нее факторизацией, отождествляющей точки с нулевым расстоянием.

Также заключение теоремы 2.32 становится неверным, если отказаться от условия допустимости метрик. Метрики, получаемые из описанных выше полуметрик добавлением константы, имеют одинаковое матричное распределение, но не являются изоморфными.

2.3.2 Характеризация матричных распределений

Теорема 2.32 Громова–Вершика исчерпывающе классифицирует метрические тройки с помощью матричных распределений, т. е. вероятностных мер на множестве R_∞ бесконечных дистанционных матриц. Однако пока остается открытым вопрос, обязательный для окончательного завершения классификационных проблем, — какими могут быть представленные инварианты, в данном случае, *какие меры могут быть матричными распределениями mm-пространств*. Выше было отмечено, что они должны быть инвариантными и эргодическими относительно действия диагональной симметрической группы. Но этого условия не достаточно. Отметим, что множество всех инвариантных мер на множестве бесконечных симметричных матриц (не обязательно дистанционных) относительно диагональной группы было найдено Д. Олдосом ([2]), его пересечение с эргодическими мерами на R_∞ значительно шире множества матричных распределений. Рассматриваемая нами задача есть задача классификации метрик как измеримых функций двух переменных относительно одновременного действия на обе переменных группы преобразований, сохраняющих меру. Именно это свойство при определённых условиях выделяет матричные распределения из более широкого запаса мер на бесконечных матрицах. Отметим очевидные свойства метрик $\rho(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ как измеримых функций двух переменных. Измеримая симметрическая функция двух переменных называется *чистой*, если отображение $x \mapsto \rho(x,\,\cdot\,)$ является инъекцией mod 0, т. е. для почти всех пар $x \neq x'$ соответствующие функции одной переменной $f(x,\,\cdot\,)$ и $f(x',\,\cdot\,)$ не являются равными почти всюду. Очевидно, что метрика есть чистая функция (полуметрика — нет). Несложно доказать следующее свойство.

Лемма 2.34. *Следующие два свойства метрической тройки (X, μ, ρ) эквиваленты:*

1. *Группа сохраняющих меру μ изометрий mod 0 пространства (X, ρ) тривиальная (состоит из тождественного преобразования). В этом случае будем говорить, что допустимая метрика* неприводима.

2. *Отображение F_∞ пространства (X^∞, μ^∞) в пространство M_∞ есть изоморфизм на образ, см.* (2.4).

Таким образом, *матричное распределение неприводимой метрики* есть изоморфный образ меры Бернулли. Тем самым, наша задача состоит в том, чтобы описать изоморфные образы мер Бернулли при отображении F_∞. Эти образы как меры на дистанционных матрицах мы назовем *простыми мерами*. Внутреннее описание простых мер связано с более детальным рассмотрением сигма-подалгебр, на которых меры заданы, и мы не будем здесь на этом останавливаться. В работе [77] такое описание дано для близкого случая, а именно для необязательно симметричных функций нескольких переменных. С другой стороны, в работе [73] для мер на нумерациях частично упорядоченных множеств введено понятие, эквивалентное понятию размерности меры на матрицах; простота отвечает размерности один. Уместно упомянуть в связи с теоремой Олдоса, что отсутствие понятие размерности (простоты) затрудняет понимание того, почему инвариантные меры в этой теореме распадаются на два не похожих друг на друга класса; различие состоит в том, на каких сигма-подалгебрах определены меры. Подробный обзор соответствующих понятий и их приложений будет разобран в другой работе.

В заключение параграфа приведем теорему, дающую энтропийное описание матричных распределений метрических троек.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для конечной матрицы расстояний размера $n \times n$ ее ε-энтропией назовем ε-энтропию задаваемого ей метрического пространства на n точках с равномерной мерой.

Будем говорить, что бесконечная матрица расстояний $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ *энтропийно допустима*, если для каждого $\varepsilon > 0$ равномерно по n ограничены ε-энтропии ее угловых миноров $n \times n$ — матриц $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$. Будем говорить, что матрица A *суммируема*, если существует и конечен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Теорема 2.35 (Энтропийная характеристика матричных распределений допустимых метрик)**.** *Матричное распределение $\mathfrak{D}_\infty(X, \mu, \rho)$ суммируемой метрической тройки (X, μ, ρ) есть эргодическая относительно одновременной перестановки строк и столбцов мера на R_∞, сосредоточенная на суммируемых энтропийно допустимых матрицах. Наоборот, любая эргодическая мера D, сосредоточенная на суммируемых энтропийно допустимых матрицах, является матричным распределением некоторой суммируемой метрической тройки (X, μ, ρ).*

Прокомментируем доказательство теоремы. Суммируемость и энтропийная допустимость $\mathfrak{D}_\infty$-почти каждой матрицы следует из закона больших чисел и теоремы 2.19. Обратно, пусть $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ — суммируемая энтропийно допустимая матрица расстояний, почти каждая точка из носителя меры D. Для каждого n пусть (X_n, μ_n, ρ_n) — полуметрическое пространство на n точках, задаваемое матрицей $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, снабженное равномерной мерой. Условие суммируемости и энтропийной допустимости матрицы A позволяет доказать, что последовательность полуметрических троек (X_n, μ_n, ρ_n) является предкомпактной относительно специальной метрики $\mathrm{Dist_m}$, см. определение 2.36 и теорему 2.38 ниже. Пусть допустимая полуметрическая тройка (X, μ, ρ) — предельная точка этой последовательности троек. Матричное распределение $\mathfrak{D}_\infty(X, \mu, \rho)$ является слабым пределом подпоследовательности матричных распределений $\mathfrak{D}_\infty(X_n, \mu_n, \rho_n)$, поэтому оказывается равным исходной мере D в силу ее эргодичности.

2.3.3 Две метрики на метрических тройках

Пусть (X_1, μ_1, ρ_1) и (X_2, μ_2, ρ_2) — две полуметрические тройки. Рассмотрим два способа измерить расстояние между ними, оба в духе расстояния Хаусдорфа–Громова. Первый — реализовать оба пространства с мерой на одном и том же пространстве (X, μ) и минимизировать расстояние между полуметриками в m-норме.

Определение 2.36. Расстоянием $\mathrm{Dist_m}$ между двумя полуметрическими тройками (X_1, μ_1, ρ_1) и (X_2, μ_2, ρ_2) назовем инфимум по всевозможным каплингам (X, μ) пространств (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) (с проекциями $\psi_1\colon X \to X_1$, $\psi_2\colon X \to X_2$) $m-$расстояний между полуметриками $\rho_1 \circ \psi_1$ и $\rho_2 \circ \psi_2$ на пространстве (X, μ):

$$\mathrm{Dist_m}\Big((X_1, \mu_1, \rho_1),(X_2, \mu_2, \rho_2)\Big) = \\ = \inf \Big\{ \|\rho_1 \circ \psi_1 - \rho_2 \circ \psi_2\|_m \colon \psi_{1,2}\colon (X, \mu) \to (X_{1,2}, \mu_{1,2}) \Big\}.$$

Второй естественный способ измерить расстояние между полуметрическими тройками — реализовать изометрически оба полуметрических пространства в одном полуметрическом пространстве (X, ρ) и при этом минимизировать расстояние между мерами, например, по метрике Канторовича d_K.

Определение 2.37. Расстоянием $\mathrm{Dist_K}$ между двумя полуметрическими тройками (X_1, μ_1, ρ_1) и (X_2, μ_2, ρ_2) назовем инфимум по всевозможным изометрическим вложениям пространств

$\phi_1\colon (X_1,\rho_1)\to (X,\rho)$ и $\phi_2\colon (X_2,\rho_2)\to (X,\rho)$ расстояний по Канторовичу на пространстве (X,ρ) между мерами $\phi_1(\mu_1)$ и $\phi_2(\mu_2)$:

$$\mathrm{Dist_K}\Big((X_1,\mu_1,\rho_1),(X_2,\mu_2,\rho_2)\Big) = \\ = \inf\Big\{d_K(\phi_1(\mu_1),\phi_2(\mu_2))\colon \phi_{1,2}\colon (X_{1,2},\rho_{1,2})\to (X,\rho)\Big\}.$$

Следующая теорема утверждает, что полученные этими двумя способами расстояния между полуметрическими тройками эквиваленты.

Теорема 2.38. *Для любых суммируемых полуметрических троек* (X_1,μ_1,ρ_1) *и* (X_2,μ_2,ρ_2) *имеют место неравенства*

$$\mathrm{Dist_K}\Big((X_1,\mu_1,\rho_1),(X_2,\mu_2,\rho_2)\Big) \le \mathrm{Dist_m}\Big((X_1,\mu_1,\rho_1),(X_2,\mu_2,\rho_2)\Big),$$
$$\mathrm{Dist_m}\Big((X_1,\mu_1,\rho_1),(X_2,\mu_2,\rho_2)\Big) \le 2\mathrm{Dist_K}\Big((X_1,\mu_1,\rho_1),(X_2,\mu_2,\rho_2)\Big).$$

Доказательство теоремы 2.38 (как и следующей теоремы 2.40) мы приводим в аппендиксе A.2.

Замечание 2.39. Функции $\mathrm{Dist_K}$ и $\mathrm{Dist_m}$ являются метриками на множестве классов изоморфности допустимых суммируемых метрических троек. В частности, они равны нулю тогда и только тогда, когда две допустимые метрические тройки изоморфны. Сходимость последовательности допустимых метрических троек в любой из этих метрик влечет слабую сходимость матричных распределений.

Множество всех допустимых полуметрических троек является полным пространством относительно расстояния $\mathrm{Dist_K}$ (и $\mathrm{Dist_m}$).

Функции $\mathrm{Dist_K}$ и $\mathrm{Dist_m}$ являются полуметриками на множестве классов изоморфности допустимых суммируемых полуметрических троек. Так, расстояние между допустимой полуметрической тройкой и метрической тройкой, получаемой из нее факторизацией по множествам нулевого диаметра, равно нулю.

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.26, она дает критерий предкомпактности семейства допустимых полуметрических троек в $\mathrm{Dist_m}$−метрике (и $\mathrm{Dist_K}$−метрике).

Теорема 2.40. *Множество* $M=\{(X_i,\mu_i,\rho_i)\colon i\in I\}$ *суммируемых допустимых полуметрических троек предкомпактно в* $\mathrm{Dist_m}$*-метрике (и* $\mathrm{Dist_K}$*-метрике) тогда и только тогда, когда*:

1. *полуметрики* ρ_i *равномерно интегрируемы:*

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{i\in I}\int\limits_{\rho_i>R}\rho_i\,d\mu_i^2=0;$$

2. *для любого* $\varepsilon>0$ *равномерно ограничены эпсилон-энтропии:*

$$\sup_{i\in I}\mathbb{H}_\varepsilon(X_i,\mu_i,\rho_i)<\infty.$$

Теорема 2.40, сформулированная чуть иначе, может быть найдена в работе [14], где также рассматриваются другие способы измерения расстояний между метрическими тройками и их свойства.

В работе [12] исследуется липшицевость отображений, сопоставляющих метрической тройке конечномерное матричное распределение $\mathfrak{D}_n$, $n \geq 1$. Для этого на пространстве квадратных матриц M_n размерности n вводится специальное расстояние, а расстояние между распределениями определяется при помощи метрики Прохорова, метризующей слабую топологию. Сформулируем результат такого же типа для бесконечномерных матричных распределений $\mathfrak{D}_\infty$.

Отметим, что если ρ — суммируемая полуметрика на пространстве (X, μ), то случайная матрица расстояний M почти наверное является суммируемой, то есть обладает конечным средним:

$$\operatorname{av}(M) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \int\limits_{X^2} \rho \, d\mu^2.$$

Для двух суммируемых матриц расстояний A и B определим расстояние между ними следующим образом:

$$\operatorname{mdist}(A, B) = \inf \big\{ \operatorname{av}(D) \colon |A_{i,j} - B_{i,j}| \leq D_{i,j}, \, \forall\, i, j \in \mathbb{N} \big\},$$

где инфимум берется по всевозможным суммируемым матрицам расстояний D, поэлементно мажорирующим разность матриц A и B. Отметим сходство определений полуметрики mdist с m-нормой (см. определение 2.10).

Используя расстояние mdist на пространстве суммируемых матриц расстояний, мы можем определить расстояние Канторовича между матричными распределениями.

Теорема 2.41. *Расстояние Канторовича между матричными распределениями двух метрических троек не превосходит расстояния* $\mathrm{Dist_m}$ *между этими тройками.*

2.3.4 Универсальное метрическое пространство Урысона

Замечательным открытием П. С. Урысона (1898–1924), опубликованным в уже посмертной его статье 1927 года [52] было открытие универсального полного сепарабельного метрического пространства. Пространством Урысона называют теперь единственное с точностью до изометрии полное сепарабельное метрическое пространство $(\mathbb{U}, \rho_U)$, обладающее двумя свойствами: (универсальность) — любое сепарабельное метрическое пространство изометрически вкладывается в $\mathbb{U}$, и (однородность) — для любых двух изометричных компактных подмножеств пространства $\mathbb{U}$ и любой их изометрии существует продолжение этой изометрии до изометрии всего пространства на себя. После долгих лет забвения этого пространства, начиная с 2000-х оно стало предметом изучения многих математиков. Обратим внимание на один из многих результатов. Одним из важных свойств пространства Урысона является его "типичность" в следующем смысле.

Теорема 2.42 ([66])**.** *Рассмотрим множество* M *всех метрик на счетном множестве* N *(например, на натуральном ряде) и снабдим его естественной слабой топологией. Тогда всюду плотное подмножество типа* G_δ *(т. е. "типичное") в* M *состоит из метрик, пополнение по которым множества* N *изометрично пространству Урысона* $(\mathbb{U}, \rho_U)$*.*

Доказательство этого факта уточняет построение Урысона: пространство строится с помощью индуктивного процесса, определяющего дистанционную матрицу (матрицу Урысона) — (см. [66]) Естественно, что определяя на пространстве Урысона некоторую вероятностную борелевскую невырожденную непрерывную меру μ, мы получаем метрическую тройку $(\mathbb{U}, \mu, \rho_U)$. Возникает вопрос о том, какую часть в пространстве всех метрических троек $\mathcal{A}dm_+(X,\mu)$ на пространстве Лебега (X,μ) образуют пространства, изоморфные пространству Урысона.

Рассмотрим слабую топологию на пространстве метрических троек. Для этого отождествим каждую метрическую тройку с ее матричным распределением (вероятностной мерой на пространстве R_∞ матриц расстояний). Топология на матричных распределениях — слабая топология на пространстве мер на R_∞ — тем самым задает слабую топологию на тройках. В соответствии с процитированной выше теоремой 2.42, множество *урысоновых* матриц (задающих метрическое пространство, пополнение которого является пространством Урысона), является всюду плотным G_δ-множеством в R_∞. Поэтому множество вероятностных мер, сосредоточенных на урысоновых матрицах, является всюду плотным G_δ-множеством в пространстве вероятностных мер на R_∞. По-видимому, множество матричных распределений, сосредоточенных на урысоновых матрицах, является всюду плотным G_δ-множеством в множестве матричных распределений метрических троек.

Вопрос о том, какой тип метрических пространств образует типичное множество в пространстве троек относительно нормированной топологии — открыт.

Естественный и очень важный вопрос состоит в том, как определять на пространстве Урысона невырожденные непрерывные меры. Нет ли среди них каких-либо выделенных мер вроде меры Винера в пространстве $C(0,1)$ непрерывных функций на $[0,1]$ (заметим кстати, также универсальном, но не однородном пространстве). Этот вопрос открыт, он связан с другим важным вопросом, нет ли в пространстве $\mathbb{U}$ какой-либо выделенной структуры. Напомним ([8]), что в $\mathbb{U}$ можно ввести структуру абелевой непрерывной (не локально-компактной) группы, но, к сожалению, не единственным образом. Каждой невырожденной мере на $\mathbb{U}$ отвечает матричное распределение, поэтому можно поставить вопрос следующим образом — найти матричные распределения, сосредоточенные на матрицах Урысона. Фактически, эта проблема сводится к построению эргодической меры, сосредоточенной на множестве дистанционных матрицах Урысона и инвариантной относительно бесконечной симметрической группы.

Глава 3

Динамика на допустимых метриках

3.1 Масштабированная энтропия

Мы предполагаем, что читатель знаком с началами классической энтропийной теории (см, например, работы [28, 32, 39, 46]). Как было указано, мы изучаем новый вариант энтропийной теории, основанный на динамике допустимых метрик. Фактически, использование метрики было указано в работе Шенонна, но не получило дальнейшего развития и было забыто. Рассмотрение метрики проявляет новые свойства автоморфизмов и позволяет расширить Колмогоровскую теорию на автоморфизмы с нулевой энтропией. Сходные идеи были высказаны в работах [10, 26], см. также обзор [24]. Мы, следуя определению А. М. Вершика, излагаем теорию масштабированной энтропии, начала которой были сформулированы в работах [67, 68, 69].

3.1.1 Определение масштабированной энтропии. Асимптотические классы

Пусть T – автоморфизм стандартного вероятностного пространства (X, μ). Напомним, что для суммируемой допустимой полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ символом $T^{-1}\rho$ мы обозначаем ее сдвиг под действием T, а символом $T^n_{av}\rho$ — усреднение первых n сдвигов:

$$T^n_{av}\rho(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho(T^i x, T^i y).$$

В этом разделе мы изучаем асимптотическое поведение последовательностей эпсилон-энтропий полуметрических троек $(X, \mu, T^n_{av}\rho)$. Напомним, что эпсилон-энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки есть логарифм минимально возможного количества шаров радиуса ε, покрывающих всё пространство X за исключением множества меры не более ε (см. определение 2.11). Так как нас интересует лишь асимптотика таких функций, мы будем рассматривать их с точностью до асимптотической эквивалентности в следующем смысле.

Для двух последовательностей $h = \{h_n\}$ и $h' = \{h'_n\}$ неотрицательных чисел мы будем писать $h \preceq h'$, если $h_n = O(h'_n)$, и $h_n \asymp h'_n$, если выполнены оба соотношения $h \preceq h'$ и $h' \preceq h$, в этом случае будем говорить, что последовательности h и h' *эквивалентны*.

Определение 3.1. Для двух функций $\Phi, \Psi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ мы будем писать $\Phi \preceq \Psi$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\Phi(\varepsilon, n) \preceq \Psi(\delta, n), \qquad n \to \infty.$$

В этом случае мы будем говорить, что Ψ *асимптотически доминирует* Φ.

Будем называть Φ и Ψ *эквивалентными* и писать $\Phi \asymp \Psi$, если $\Psi \preceq \Phi \preceq \Psi$. Класс эквивалентности данной функции Φ по отношению $\asymp$ будем обозначать символом $[\Phi]$ и будем назвать *асимптотическим классом*. Отношение $\preceq$ естественным образом переносится на классы эквивалентности и задает частичный порядок.

Отметим, что класс эквивалентности функции Φ по существу определяется в два этапа: сначала при фиксированном ε мы рассматриваем класс последовательностей эквивалентных $\Phi(\varepsilon, n)$ при n стремящемся к бесконечности, затем мы объединяем все функции Φ с данной точной верхней гранью таких классов при ε стремящимся к нулю (см. раздел 3.3.2). Поэтому класс $[\Phi]$ можно рассматривать как росток асимптотики функции Φ в точке $(0, +\infty)$.

Для данной полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ будем рассматривать функцию $\Phi_\rho\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, определяемую формулой

$$\Phi_\rho(\varepsilon, n) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho). \tag{3.1}$$

Следующая теорема утверждает, что введенный асимптотический класс функции Φ_ρ не зависит от выбора допустимой метрики ρ, или, более общо, *порождающей полуметрики*. Полуметрика ρ на (X, μ) называется порождающей для T (или T-порождающей), если ее сдвиги под действием T различают точки mod 0, то есть для некоторого подмножества $X_0 \subset X$ полной меры для любых $x, y \in X_0$ найдется такое n, что $T^n\rho(x, y) > 0$. Ясно, что любая метрика является порождающей полуметрикой. Отметим, что определение порождающей полуметрики является прямым аналогом порождающего (образующего) разбиения из классической энтропийной теории (см. [46]). Существование счетных и конечных образующих разбиений изучалось в работах [46, 33]. Следующая теорема, доказанная в работе [90], естественным образом перекликается с теоремой Колмогорова–Синая о независимости энтропии Колмогорова от порождающего разбиения.

Теорема 3.2. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — T-порождающие полуметрики. Тогда классы $[\Phi_{\rho_1}]$ и $[\Phi_{\rho_2}]$ совпадают.*

Доказательство теоремы 3.2 основано на следующей лемме.

Лемма 3.3. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Если ρ_1 — T-порождающая, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho_2) \preceq \mathbb{H}_\delta(X, \mu, T^n_{av}\rho_1), \qquad n \to +\infty.$$

Набросок доказательства леммы 3.3 и ее более сильного аналога, позволяющего уточнить рассматриваемый инвариант, приведен в приложении 3.7.1.

Теорема 3.2 позволяет дать следующее определение масштабированной энтропии динамической системы (X, μ, T).

Определение 3.4. *Масштабированной энтропией* $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ системы (X, μ, T) называется асимптотический класс $[\Phi_\rho]$ для некоторой (а тогда и любой другой) T-порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$.

Подчеркнем, что класс $\mathcal{H}(X,\mu,T)$ сохраняется при изоморфизме, то есть *является метрическим инвариантом динамических систем.* Отметим также, что масштабированная энтропия как функция динамической системы монотонна относительно фактор-отображения:

Замечание 3.5. Если система (X_2,μ_2,T_2) является фактором системы (X_1,μ_1,T_1), тогда $\mathcal{H}(X_2,\mu_2,T_2) \preceq \mathcal{H}(X_1,\mu_1,T_1)$.

Пример вычисления масштабированной энтропии: сдвиг Бернулли

Инвариантное определение масштабированной энтропии с помощью измеримых метрик позволяет во многих случаях установить связь между топологической и метрической динамикой (см., например, [49, 54, 56]). Однако, для явного вычисления масштабированной энтропии конкретных примеров метрических действий часто бывает полезно выбрать порождающее разбиение и соответствующую ему разрезную полуметрику (которая также является порождающей). В этом случае вычисление нашего инварианта сводится к рассмотрению последовательности конечномерных кубов с метрикой Хэмминга и мерой – проекцией некоторой стационарной меры μ на первые n координат. В качестве примера такого вычисления мы рассмотрим классический сдвиг Бернулли на двухсимвольном алфавите.

Теорема 3.6. *Сдвиг на пространстве бинарных последовательностей $X=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ с мерой Бернулли μ с параметром $1/2$ имеет масштабированную энтропию $\mathcal{H}=[n]$.*

Доказательство. В силу независимости масштабированной энтропии от метрики, для вычисления инварианта достаточно рассмотреть разрезную порождающую полуметрику ρ, соответствующую разбиению по нулевой координате. Для двух последовательностей $x,y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ расстояние в полуметрике ρ между x и y равно $|x_0-y_0|$.

Среднее $T^n_{av}\rho$ есть метрика Хэмминга, соответствующая первым n координатам. Следовательно, полуметрическая тройка $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}},\mu,T^n_{av}\rho)$ с точностью до факторизации по множествам диаметра 0 изоморфна бинарному кубу размерности n с равномерной мерой и метрикой Хэмминга.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$. Мера любого шара радиуса ε не превосходит $2^{-c(\varepsilon)n}$ в силу центральной предельной теоремы для схемы Бернулли. Тем самым,

$$c(\varepsilon)n \le \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho) \le n,$$

где оценка сверху тривиальна – логарифм количества элементов в бинарном кубе размерности n. Следовательно, асимптотический класс функции $\Phi_\rho(\varepsilon,n)=\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)$ совпадает с классом функции $(\varepsilon,n)\mapsto n$. Тем самым, $\mathcal{H}=[n]$. □

3.1.2 Определение масштабированной энтропии с помощью метрики Канторовича

Для определения масштабированной энтропии мы могли бы вместо обычной ε–энтропии $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)$ использовать величину $\mathbb{H}^K_\varepsilon(X,\mu,\rho)$, определяемую с помощью аппроксимации меры μ дискретными мерами в метрике Канторовича (см. определение 2.14). Однако, в результате мы получим тот же инвариант: леммы 2.15 и 2.16 показывают, что асимптотическое поведение величин $\mathbb{H}^K_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)$ и $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)$ совпадают. Таким образом, справедливо следующее предложение

Предложение 3.7. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование пространства (X, μ), и пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ – T-порождающая полуметрика. Тогда*

$$\mathbb{H}_\varepsilon^K(X, \mu, T_{av}^n \rho) \in \mathcal{H}(X, \mu, T).$$

Доказательство. Найдем $\varepsilon, \delta > 0$, удовлетворяющие предположению леммы 2.15. Заметим, что неравенство (2.1) с данными ε и δ выполнено для всех усреднений $T_{av}^n \rho$ полуметрики ρ. Применяя леммы 2.15 и 2.16 для полуметрики $T_{av}^n \rho$, мы получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon^K(X, \mu, T_{av}^n \rho) \le 2\mathbb{H}_\delta(X, \mu, T_{av}^n \rho) \le \frac{4}{\delta}(\mathbb{H}_{\delta^2/4}^K(X, \mu, T_{av}^n \rho) + 1).$$

Тем самым, $\mathbb{H}_\varepsilon^K(X, \mu, T_{av}^n \rho) \in [\Phi_\rho] = \mathcal{H}(X, \mu, T)$. □

3.1.3 Определение масштабированной энтропии с помощью статсуммы

Вместо обычного усреднения метрики за n итераций преобразования T мы могли бы рассматривать статсумму Ω_T из пункта 1.2.6 (см. также работу [74]), то есть, взвешенное среднее с экспоненциально убывающими весами. Напомним, что

$$\Omega_T(\rho, z) \equiv \Omega_T(z) = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho(T^n x, T^n y), \quad z \in [0, 1).$$

Далее мы можем рассмотреть энтропийную функцию, заданную аналогично формуле (3.1):

$$\tilde{\Phi}_\rho(\varepsilon, z) = \mathbb{H}_\varepsilon(x, \mu, \Omega_T(\rho, z)).$$

Следуя определению 3.1, можно рассмотреть асимптотический класс $[\tilde{\Phi}_\rho]$. Несложно проверить, следуя доказательству теоремы 3.2, что этот класс так же не зависит от выбора порождающей допустимой полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ и является метрическим инвариантом. Однако, по существу ничего нового мы не получим – класс $[\tilde{\Phi}_\rho]$ полностью определяется масштабированной энтропией $\mathcal{H}(T)$ следующим образом.

Предложение 3.8. *Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ – порождающая полуметрика. Тогда функция $\tilde{\Phi}_\rho(\varepsilon, 1 - \frac{1}{n})$ принадлежит классу $\mathcal{H}(T)$.*

Доказательство предложения 3.8 приведено в приложении А.3.

3.2 Масштабирующая энтропийная последовательность

Прежде чем обсуждать свойства масштабированной энтропии в общем случае, мы сосредоточимся на важном частном случае, когда асимптотика эпсилон-энтропий усреднений в существенном не зависит от эпсилон. В этом случае наш инвариант значительно упрощается и становится классом асимптотически эквивалентных последовательностей, который мы называем *масштабирующей энтропийной последовательностью.* Автоморфизм, обладающий такой последовательностью, мы называем *стабильным.* Сдвиги Бернулли, как и все преобразования положительной энтропии Колмогорова, преобразования с дискретным спектром и множество других (см. раздел 3.2.2) являются стабильными. В первоначальных работах [67, 68, 69] фактически рассматривался именно случай масштабирующей последовательности и предполагалось, что стабильный случай является общим. Как мы увидим в разделе 3.3.1, существуют эргодические автоморфизмы, не являющиеся стабильными. Несмотря на это, масштабирующая энтропийная последовательность играет важную роль в излагаемой теории масштабированной энтропии. Случай стабильного автоморфизма изучался в работах [67, 68, 69, 84, 90, 91, 93].

3.2.1 Определение масштабирующей последовательности. Стабильные классы

Определение 3.9. Будем называть асимптотический класс $\mathcal{H}$ *стабильным*, если он содержит функцию $\Phi(\varepsilon, n)$, не зависящую от ε, то есть, $\Phi(\varepsilon, n) = h_n$. Динамическая система (X, μ, T) называется *стабильной*, если класс $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ стабилен.

Отметим, что для двух функций $\Phi(\varepsilon, n) = h_n$ и $\Phi'(\varepsilon, n) = h'_n$ соотношения $\preceq$ и $\asymp$ выполняются в том и только том случае, когда они выполняются для последовательностей $h = \{h_n\}$ и $h' = \{h'_n\}$.

Определение 3.10. Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — суммируемая допустимая полуметрика на (X, μ). Неубывающая последовательность h, $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, положительных чисел называется *масштабирующей* для (X, μ, T, ρ), если при любом достаточно малом положительном ε выполнено соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) \asymp h_n.$$

Отметим, что имеет смысл говорить не об одной масштабирующей последовательности, а сразу о целом классе. Действительно, если последовательность h является масштабирующей, то последовательность h' тоже является масштабирующей тогда и только тогда, когда $h' \asymp h$. Класс масштабирующих последовательностей обозначим символом $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T, \rho)$.

Ясно, то класс $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T, \rho)$ является сечением асимптотического класса $[\Phi_\rho]$ множеством последовательностей. Тем самым, следующая теорема, доказанная в работе [90], следует из теоремы 3.2 об инвариантности масштабированной энтропии.

Теорема 3.11. *Если $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — T-порождающие полуметрики, то*

$$\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T, \rho_1) = \mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T, \rho_2).$$

Теорема 3.11 позволяет дать следующее определение масштабирующей последовательности динамической системы (X, μ, T).

Определение 3.12. Последовательность $h = \{h_n\}$ называется масштабирующей последовательностью системы (X, μ, T), если $h \in \mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T, \rho)$ для некоторой (а тогда и любой другой) T-порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Класс всех масштабирующих последовательностей системы (X, μ, T) обозначим символом $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T)$.

Подчеркнем, что класс $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T)$ масштабирующих последовательностей является метрическим инвариантом динамических систем. Однако, в отличие от класса $\mathcal{H}$, класс $\mathcal{H}_{seq}$, как мы увидим в разделе 3.3.1, может оказаться пустым.

3.2.2 Возможные значения масштабирующей последовательности

Один из первых естественно возникающих вопросов – какие значения может принимать введенный инвариант, то есть, какие последовательности могут являться масштабирующими последовательностями некоторой динамической системы. Следующие две теоремы, доказанные в работах [91, 93] дают описание всевозможных значений масштабирующей последовательности.

Теорема 3.13. *Если класс $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T)$ масштабирующих последовательностей не пуст, то в нем найдется неубывающая субаддитивная последовательность положительных чисел.*

Теорема 3.14. *Любая субаддитивная неубывающая последовательность положительных чисел является масштабирующей для некоторой эргодической системы (X, μ, T).*

В работе [91] приводится явное построение такого автоморфизма, реализованного с помощью *адического преобразования* на *графе упорядоченных пар* и специальных *центральных мер* на этом графе (см. также работы [81, 82, 83] и пункт 3.4.3 настоящего обзора). Теорема 3.14 дает богатое семейство автоморфизмов с данными энтропийными свойствами и является одним из ключевых результатов в теории масштабированной энтропии и полезным инструментом в приложениях.

Отметим, что теорема 3.14 показывает существенное различие между масштабированной энтропией и функцией сложности топологической символической системы: сложность $p(n)$ либо является ограниченной функцией, либо $p(n) \geq n$, в то время как масштабированная энтропия может иметь любую наперед заданную асимптотику. При этом, неравенство $\mathcal{H} \preceq [\log p(n)]$ выполнено для любой инвариантной меры.

В работах [11, 26] изучались возможные значения родственных инвариантов медленного энтропийного типа. Мы обсуждаем связь этих инвариантов с масштабированной энтропией в пункте 3.7.2.

Символом Subadd обозначим множество классов эквивалентности всевозможных субаддитивных неубывающих последовательностей положительных чисел по отношению $\asymp$. Отношение $\preceq$ переносится на эти классы эквивалентности и задает на Subadd частичный порядок, относительно которого Subadd является верхней полурешеткой.

Наименьший элемент Subadd — класс эквивалентности постоянной последовательности $h_n = 1$, наибольший — линейной $h_n = n$. Следующие две теоремы, доказанные в работах [69, 84, 90] дают описание динамических систем, масштабирующие последовательности которых принимают эти крайние значения.

Теорема 3.15. *Пусть T — автоморфизм пространства (X, μ). Следующие условия равносильны:*

1. *T имеет чисто точечный (дискретный) спектр;*
2. *последовательность $h_n = 1$ является масштабирующей для (X, μ, T);*
3. *существует T-инвариантная допустимая метрика $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$.*

Теорема 3.16. *Последовательность $h_n = n$ является масштабирующей для системы (X, μ, T) тогда и только тогда, когда энтропия Колмогорова положительна: $h(T) > 0$.*

В частности, системы с максимальным и минимальным ростом масштабированной энтропии являются стабильными.

3.3 Свойства масштабированной энтропии

3.3.1 Пример нестабильной системы

Некоторое время вопрос о существовании масштабирующей последовательности для любого эргодического автоморфизма T стандартного вероятностного пространства (X, μ) оставался открытым. Пример такого эргодического автоморфизм T и допустимой метрики ρ

на (X, μ), для которого масштабирующая последовательность в смысле определения 3.10 не существует, был построен в [53]. Причина этого явления заключается в том, что при разных $\varepsilon > 0$ скорость роста $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho)$ по n может существенно различаться: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho)}{\mathbb{H}_\delta(X, \mu, T_{av}^n \rho)} = 0.$$

Построение такого нестабильного автоморфизма требует, однако, конструкции стабильных систем, удовлетворяющих теореме 3.14. Выберем семейство $h^{(k)} = \{h_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, возрастающих субаддитивных последовательностей так, что при каждом k выполнено соотношение

$$h_n^{(k)} = o(h_n^{(k+1)}), \qquad n \to \infty.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем такой эргодический автоморфизм T_k на стандартном вероятностном пространстве (X_k, μ_k), что $h^{(k)} \in \mathcal{H}_{seq}(X_k, \mu_k, T_k)$. Такой автоморфизм существует в силу теоремы 3.14. Следующая теорема, доказанная в работе [53], гарантирует существование нестабильных автоморфизмов.

Теорема 3.17. *Пусть (X, μ, T) — эргодический джойнинг систем (X_k, μ_k, T_k), $k \in \mathbb{N}$. Тогда класс $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T)$ масштабирующих энтропийных последовательностей системы (X, μ, T) пуст.*

Идея, лежащая в основе этой теоремы, заключается в том, что, если бы система (X, μ, T) обладала масштабирующей последовательностью h, то эта последовательность должна была бы быть точной верхней гранью для всех последовательностей $h^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Однако множество Subadd не содержит точную верхнюю грань строго возрастающей последовательности, поэтому класс $\mathcal{H}_{seq}(X, \mu, T)$ пуст. Этот пример раскрывает смысл определения 3.1: асимптотический класс функции Φ можно отождествить с точной верхней гранью классов последовательностей $\Phi(\varepsilon, \cdot\,)$.

3.3.2 Возможные значения масштабированной энтропии. Полурешетка функций

В этом разделе мы изучаем асимптотические классы, которые могут являться масштабированной энтропией некоторой динамической системы. Следующие две теоремы, доказанные в работе [53], дают описание возможных значений масштабированной энтропии.

Теорема 3.18. *Для любой системы (X, μ, T) в классе $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ масштабированной энтропии всегда можно найти функцию $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами:*

1. *$\Phi(\,\cdot\,, n)$ не возрастает при любом $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$\Phi(\varepsilon, \cdot\,)$ не убывает и субаддитивна при любом $\varepsilon > 0$.*

Теорема 3.19. *Для любой функции $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей свойствам 1) и 2) из предыдущей теоремы, найдется такая эргодическая система (X, μ, T), что $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, T)$.*

Доказательства теорем 3.18 и 3.19 существенно используют соответствующие результаты для стабильного случая (теоремы 3.13 и 3.14). Отметим, что аналог теоремы 3.19 для действий аменабельных групп (см. раздел 3.5) неизвестен авторам – вопрос описания множества возможных значений масштабированной энтропии групповых действий остается открытым.

Можно рассмотреть частично упорядоченное множество классов эквивалентности всех функций двух переменных с условиями монотонности 1) и 2) из теоремы 3.18. Это множество является верхней полурешеткой. Полурешетка Subadd субаддитивных неубывающих последовательностей естественным образом вкладывается в эту решетку. В отличие от полурешетки Subadd, рассматриваемая полурешетка функций обладает следующим свойством: любое счетное подмножество имеет точную верхнюю грань. Более того, эта полурешетка функций является минимальной полурешеткой, содержащей Subadd, с данным свойством, так как каждая масштабированная энтропия $[\Phi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)]$ есть точная верхняя грань счетного набора последовательностей $h^m = \{\Phi(\frac{1}{m}, n)\}_n$, $m \in \mathbb{N}$.

Предложение 3.20. *Пусть (X_k, μ_k, T_k) — (конечная или счетная) последовательность систем, а (X, μ, T) — их джойнинг. Тогда $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ есть точная верхняя грань последовательности $\mathcal{H}(X_k, \mu_k, T_k)$.*

3.3.3 Типичная масштабированная энтропия

Группа $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ всех автоморфизмов пространства (X, μ), снабженная слабой топологией, является польским топологическим пространством, что позволяет говорить о типичности автоморфизмов, удовлетворяющих заданным свойствам. Оказывается, что масштабированная энтропия типичного автоморфизма $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ не сравнима с произвольной наперед заданной функцией (кроме тривиальных крайних случаев ограниченного и линейного роста). Следующая теорема была доказана в работе [55].

Теорема 3.21. *Пусть функция $\Phi(\varepsilon, n)$ при каждом n убывает по ε, а при каждом $\varepsilon > 0$ неограниченно возрастает и является сублинейной по n. Тогда множество автоморфизмов, масштабированная энтропия которых не сравнима с Φ, является типичным в $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.*

Замечание 3.22. Теорему 3.21 можно переформулировать в виде двух утверждений: множество автоморфизмов T, удовлетворяющих $\mathcal{H}(T) \prec \Phi$, пренебрежимо, и множество автоморфизмов T, удовлетворяющих $\mathcal{H}(T) \succ \Phi$, также пренебрежимо.

Доказательство теоремы 3.21 использует связь между масштабированной энтропией и последовательностной энтропией Кириллова–Кушниренко (см. работу [34]) и результаты работы [47] о типичности бесконечной энтропии Кириллова–Кушниренко. Мы обсуждаем связь масштабированной энтропии с последовательностной энтропией в разделе 3.7.2. Отметим, что близкие результаты о типичных значениях родственных инвариантов были получены в работах [1, 3].

3.3.4 Масштабированная энтропия и эргодическое разложение

Масштабированная энтропия неэргодической системы может расти быстрее, чем масштабированная энтропия всех эргодических компонент. Действительно, рассмотрим стандартный пример неэргодического преобразования тора (см., например, работу [34]): $(x, y) \mapsto (x, y + x)$, где $x, y \in \mathbb{T}^2$. Эргодические компоненты этого преобразования являются поворотами окружности, то есть имеют ограниченную масштабированную энтропию, а сама система имеет неограниченную масштабированную энтропию $\mathcal{H} = [\log n]$. Однако существует следующая оценка в обратную сторону.

Предложение 3.23. *Пусть (X,μ,T) — динамическая система, и $\mu = \int \mu_\alpha d\nu(\alpha)$ — разложение на эргодические компоненты. Пусть последовательность $h = (h_n)$ такова, что для всех α из некоторого множества положительной меры выполнено*

$$\mathcal{H}(X,\mu_\alpha,T) \succeq h_n.$$

Тогда $\mathcal{H}(X,\mu,T) \succeq h_n$.

Доказательство предложения 3.23 приведено в приложении A.4.

3.4 Примеры вычисления масштабированной энтропии

В этом разделе мы приводим несколько результатов о вычислении масштабированной энтропии конкретных автоморфизмов. Отметим, что нахождение масштабированной энтропии в общем случае может быть трудоемким. Открытые вопросы о вычислении масштабированной энтропии конкретных автоморфизмов, например, автоморфизма Паскаля (см. работу [70]), сформулированы в приложении B.

Мы уже упомянули в пункте 3.2.2, что преобразования положительной энтропии Колмогорова и только они имеют масштабированную энтропию $\mathcal{H} = [n]$, а преобразования с дискретным спектром и только они имеют ограниченную масштабированную энтропию, то есть $\mathcal{H} = [1]$.

3.4.1 Подстановочные динамические системы

Пусть A – алфавит конечного размера $|A| > 1$. Символом A^* обозначим множество всех слов конечной длины над алфавитом A. *Подстановкой* называется произвольное отображение $\xi\colon A \to A^*$. Отображение ξ естественным образом продолжается до отображения $\xi\colon A^* \to A^*$ и, более того, до отображения $\xi\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$, где $A^{\mathbb{N}}$ – пространство односторонних последовательностей элементов множества A, снабженное тихоновской топологией произведения. Мы будем считать, что подстановка ξ такова, что существует бесконечное слово $u \in A^{\mathbb{N}}$, инвариантное относительно ξ: $\xi(u) = u$. Пусть $T\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ – левый сдвиг. Подстановочной динамической системой называется пара (X_ξ, T), где X_ξ есть замыкание орбиты точки u под действием преобразования T. Подстановка называется *примитивной* если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\alpha, \beta \in A$ буква β встречается в слове $\xi^n(\alpha)$. Если подстановка ξ примитивна, то на топологическом компакте X_ξ существует единственная T–инвариантная борелевская вероятностная мера μ^ξ.

Мы говорим, что ξ *является подстановкой постоянной длины*, если существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $|\xi(\alpha)| = q$ для любого $\alpha \in A$. *Высота $h(\xi)$ подстановки* определяется как наибольшее такое натуральное k, взаимно простое с q, что если $u_n = u_0$, то $k|n$. *Столбцовое число* $c(\xi)$ определяется следующим образом:

$$c(\xi) = \min\Big\{\big|\{\, \xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\}\big| \colon k \in \mathbb{N}, i < q^k\Big\}.$$

Подробнее о подстановочных динамических системах см., например, в книге [43]. Масштабированная энтропия подстановочной динамической системы, соответствующей подстановке постоянной длины была вычислена в работе [90].

Теорема 3.24. *Пусть ξ–инъективная примитивная подстановка постоянной длины. Тогда $\mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T) = [\log n]$, если $c(\xi) \neq h(\xi)$, и $\mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T) = [1]$, если $c(\xi) = h(\xi)$.*

Одним из частных случаев подстановочных систем, описываемых теоремой 3.24, является автоморфизм Морса.

Следствие 3.25. *Автоморфизм Морса имеет масштабированную энтропию* $\mathcal{H}(T) = [\log n]$.

Автоморфизм Чакона не является подстановкой постоянной длины, однако он также имеет логарифмическую масштабированную энтропию. Следующая теорема следует из результатов работы [10].

Теорема 3.26. *Автоморфизм Чакона имеет масштабированную энтропию* $\mathcal{H}(T) = [\log n]$.

Связь между подстановками и стационарными адическими преобразованиями изучалась в работе [79]. Там же можно найти примеры адических реализаций постановочных динамических систем, в том числе автоморфизма Чакона.

3.4.2 Орициклические потоки

Еще одним примером классического автоморфизма с логарифмической масштабированной энтропией являются орициклические потоки. Родственные инварианты энтропийного типа для классических потоков изучались в работах [22, 23, 34]. Следующая теорема следует из результатов работы [23].

Теорема 3.27. *Поток орициклов на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны имеет масштабированную энтропию* $\mathcal{H}(T) = [\log n]$.

Отметим, что несмотря на то, что масштабированная энтропия потока орициклов и бернуллиевского автоморфизма существенно отличаются, они имеют одинаковый спектр – счетнократный лебеговский.

Отметим также, что для преобразований с логарифмической масштабированной энтропии имеет смысл вычислять утончение нашего инварианта – экспоненциальную масштабированную энтропию (см. раздел 3.7.1).

3.4.3 Адическое преобразование на графе упорядоченных пар

Адические преобразования (или автоморфизмы Вершика), в том числе адическое преобразование на графе упорядоченных пар, изучались в работах [58, 59, 81, 82, 83, 91, 54]. Приведенная ниже конструкция является ключевой в доказательстве теорем 3.14 и 3.19, она позволяет явно реализовать любую субаддитивную и возрастающую энтропийную масштабирующую последовательность.

Рассмотрим бесконечный градуированный граф $\Gamma = (V, E)$. Множество вершин V графа Γ есть дизъюнктное объединение множеств $V_n = \{0,1\}^{2^n}$, $n \geq 0$. Множество рёбер E определяется одновременно с раскраской $\mathfrak{c}\colon E \to \{0,1\}$ следующим образом. Пусть $v_n \in V_n$ и $v_{n+1} \in V_{n+1}$. Ребро $e = (v_n, v_{n+1})$ принадлежит E, если слово v_n является началом или концом слова v_{n+1} и помечено символом 0 или 1 соответственно.

Борелевская мера на пространстве X всех бесконечных путей в графе Γ называется *центральной*, если при фиксированном хвосте пути все его начала равновероятны.

Определим *адическое преобразование* T на пространстве путей X. Пусть $x = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый бесконечный путь. Найдём наименьшее такое n, что $\mathfrak{c}(e_n) = 0$. Определим путь $T(x) = \{u_i\}$ следующим образом. При $i \geq n+1$ выполнено $u_i = e_i$; $\mathfrak{c}(u_n) = 1$, и $\mathfrak{c}(u_i) = 0$ для всех $i < n$. Относительно любой центральной меры μ преобразование T является автоморфизмом пространства (X, μ).

Зафиксируем некоторую последовательность $\sigma = \{\sigma_n\}$, состоящую из нулей и единиц. Построим соответствующую ей центральную меру μ^σ на пространстве X. Борелевская мера μ на пространстве X однозначно определяется согласованной системой мер μ_n на цилиндрических множествах, соответствующих конечным путям длины n. В терминах μ_n центральность меры μ означает, что для любого n мера μ_n зависит лишь от конца пути. Пусть ν_n – есть проекция меры μ_n на V_n, соответсвующая концу пути. Система мер ν_n однозначно определяет центральную меру μ.

Построим последовательность множеств V_n^σ, где $V_n^\sigma \in V_n$. Положим $V_0^\sigma = V_0$. При $n \geq 1$ определим

$$V_n^\sigma = \begin{cases} \{ab\colon a, b \in V_{n-1}^\sigma\}, & \text{если } \sigma_n = 1; \\ \{aa\colon a \in V_{n-1}^\sigma\}, & \text{если } \sigma_n = 0. \end{cases}$$

Обозначим символом ν_n^σ равномерную меру на множестве $V_n^\sigma \subset V_n$. Построенная по этой системе мера μ^σ определена корректно и является центральной.

Теорема 3.28. *Адическое преобразование на путях графа упорядоченных пар с мерой μ^σ имеет масштабированную энтропию $\mathcal{H}(T) = [2^{\sum_{i=0}^{\log n} \sigma_i}]$.*

3.5 Масштабированная энтропия действия группы

В этом разделе мы приводим первые, предварительные факты и примеры, связанные с обобщением понятия масштабированной энтропии для действия общих дискретных групп. Классическая энтропийная теория полностью переносится на действия аменабельных групп (см. работу [39]). Описанная выше теория масштабированной энтропии переносится со случая одного автоморфизма на действие группы лишь частично. Большая часть результатов, обсуждаемых в этом разделе, имеет дело с аменабельными группами. Однако мы приводим определение масштабированной энтропии действий произвольных счетных групп, инвариантное относительно выбора допустимой порождающей полуметрики. Масштабированная энтропия групповых действий изучалась в работах [91, 93, 54, 56]. Родственные инварианты метрических действий аменабельных групп изучались также в работах [26, 36].

3.5.1 Определение масштабированной энтропии действия группы

Будем считать, что некоторая счетная группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ).

Определение 3.29. *Оснащением* счетной группы G будем называть последовательность $\sigma = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конечных подмножеств группы, для которой $|G_n| \to +\infty$. Символом (G, σ) будем обозначать группу с выбранным оснащением.

Для полуметрики ρ на (X, μ) и подмножества $H \subset G$ символом $H^{av}\rho$ обозначим усреднение полуметрики ρ по сдвигам на элементы $g \in H$:

$$H^{av}\rho(x, y) = \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\rho(gx, gy).$$

Для действия оснащенной группы G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) и полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ по аналогии с формулой (3.1) определим функцию Φ_ρ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$:

$$\Phi_\rho(\varepsilon, n) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_n^{av}\rho).$$

Для групповых действий случаи допустимой метрики и полуметрики различаются. Для усреднений допустимых *метрик* выполнен аналог леммы 3.3, доказанный в работе [91], соответствующее утверждение для полуметрик (теорема 3.35) появится ниже.

Лемма 3.30. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Если ρ_1 — метрика, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\Phi_{\rho_2}(\varepsilon, n) \preceq \Phi_{\rho_1}(\delta, n), \qquad n \to +\infty.$$

Иными словами,

$$\Phi_{\rho_2} \preceq \Phi_{\rho_1}.$$

Следствие 3.31. *Если $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — метрики, то $\Phi_{\rho_1} \asymp \Phi_{\rho_2}$.*

Таким образом, как и ранее, можно определить масштабированную энтропию действия оснащенной группы (G, σ) на (X, μ):

Определение 3.32. *Масштабированной энтропией* действия оснащенной группы (G, σ) на (X, μ) называется класс эквивалентности $[\Phi_\rho]$ для некоторой (а тогда и любой другой) метрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Этот класс обозначим символом $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$.

Подчеркнем, что асимптотический класс $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ является метрическим инвариантом действия группы с оснащением.

Определение 3.33. Будем говорить, что оснащение $\sigma = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является *подходящим*, если для любого $g \in \cup G_n$ и любого $\delta > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для каждого n найдутся такие $g_1, \dots, g_k \in G$, что

$$\Big| g G_n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} G_n g_j \Big| \leq \delta |G_n|.$$

Замечание 3.34. Подходящим является всякое оснащение

- коммутативной группы;
- аменабельной группы последовательностью Фёльнера;
- конечнопорожденной группы последовательностью шаров;
- любой группы последовательностью конечных расширяющихся подгрупп.

Будем говорить, что полуметрика $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ является *порождающей для действия оснащенной группы* (G, σ) (или G-*порождающей*), если ее сдвиги $g^{-1}\rho,\ g \in \cup G_n$, под действием элементов группы G из объединения оснащения σ разделяют точки некоторого подмножества полной меры. В случае аменабельной группы G, оснащенной последовательностью Фёльнера, мы будем называть полуметрику ρ *порождающей*, если все ее сдвиги в совокупности разделяют точки некоторого подмножества полной меры. Следующая теорема была доказана в работе [91].

Теорема 3.35. *Пусть оснащение $\sigma = \{G_n\}$ группы G является подходящим. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Если ρ_1 — G–порождающая полуметрика, то*

$$\Phi_{\rho_2} \preceq \Phi_{\rho_1}.$$

В частности,

$$[\Phi_{\rho_1}] = \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma).$$

3.5.2 Свойства масштабированной энтропии действия группы

Естественный вопрос — зависит ли масштабированная энтропия действия группы от выбора оснащения, или она является инвариантом действия группы? Простое замечание показывает, что малое изменение оснащения не меняет масштабированную энтропию.

Замечание 3.36. Если оснащения $\sigma_1 = \{G_n^{(1)}\}$ и $\sigma_2 = \{G_n^{(2)}\}$ группы G таковы, что

$$|G_n^{(1)} \Delta G_n^{(2)}| = o(|G_n^{(1)}|), \qquad n \to +\infty,$$

то масштабированная энтропия действий группы G с оснащениями σ_1 и σ_2 совпадают:

$$\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma_1) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma_2).$$

Масштабированная энтропия допускает простую верхнюю оценку.

Теорема 3.37. *Пусть группа G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ действует автоморфизмами на пространстве (X, μ). Тогда для $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ при всяком $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое неравенство*

$$\Phi(\varepsilon, n) \preceq |G_n|, \qquad n \to +\infty.$$

Для случая аменабельной группы G с фёльнеровским оснащением σ предыдущая теорема допускает уточнение.

Теорема 3.38. *Пусть аменабельная группа G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ последовательностью Фёльнера действует автоморфизмами на пространстве (X, μ). Для $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ при любом $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое соотношение*

$$\Phi(\varepsilon, n) = o(|G_n|), \qquad n \to +\infty,$$

тогда и только тогда, когда энтропия Колмогорова действвия G на (X, μ) равна нулю.

Для конечно порожденной группы существование компактного свободного действия равносильно тому, что группа является остаточно конечной. Если группа при этом аменабельна, то компактность действия равносильна ограниченности масштабированной энтропии. Следующее обобщение теоремы 3.15 доказано в работе [87].

Теорема 3.39. *Пусть аменабельная группа G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ последовательностью Фёльнера действует автоморфизмами на пространстве (X, μ). Тогда $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma) =$ [1] тогда и только тогда, когда действие группы G на пространстве (X, μ) компактно.*

3.5.3 Типичность масштабированной энтропии действия группы

Для данной счетной группы G множество всех ее сохраняющих меру действий $A(X, \mu, G)$ на пространстве Лебега (X, μ) образует польское топологическое пространство, что позволяет говорить о типичных свойствах действий группы G. Подробное изложение теории типичных групповых действий см. в работе [27]. Следующая теорема, доказанная в [56] обобщает аналогичный результат об отсутствии нетривиальных верхних оценок для типичной масштабированной энтропии автоморфизма на случай произвольной аменабельной группы.

Теорема 3.40. *Пусть G – аменабельная группа и $\sigma = \{F_n\}$ – ее оснащение последовательностью Фёльнера. Пусть $\phi(n) = o(|F_n|)$ – последовательность положительных чисел. Тогда множество таких действий $\alpha \in A(X, \mu, G)$, что $\mathcal{H}(\alpha, \sigma) \not\prec \phi$, содержит плотное G_δ–подмножество.*

Доказательство теоремы 3.40 проходит с некоторыми усложнениями аналогично доказательству теоремы 3.21 и использует результаты работы [47]. Близкие результаты для родственных инвариантов в контексте типичных расширений были получены в работе [36].

Отметим, что прямой аналог теоремы 3.19 о полном описании возможных значений масштабированной энтропии для групповых действий авторам не известен. Однако, из теоремы 3.40 следует слабая версия этой теоремы: для любой последовательности $\phi(n) = o(|F_n|)$ существует эргодическое действие группы G с масштабированной энтропией $\mathcal{H}$, которая растет не медленнее ϕ вдоль некоторой подпоследовательности. Для непериодической группы явные конструкции таких сохраняющих меру действий могут быть получены с помощью операции коиндуцирования действия подгруппы на действие объемлющей группы (см. работу [54]). Отметим, что авторам не известны явные конструкции таких действий для произвольной аменабельной группы.

В отличие от нетривиальных верхних оценок для масштабированной энтропии типичной системы, отсутствие нижних оценок требует определенных условий на группу. В частности, достаточным условием является наличие у группы компактного свободного действия. Тем самым, справедлива следующая теорема, доказанная в работе [56].

Теорема 3.41. *Пусть G – остаточно конечная аменабельная группа и $\sigma = \{F_n\}$ – ее оснащение последовательностью Фёльнера. Пусть $\phi(n)$ – последовательность положительных чисел, возрастающая к бесконечности. Тогда множество таких действий $\alpha \in A(X, \mu, G)$, что $\mathcal{H}(\alpha, \sigma) \not\succsim \phi$, содержит плотное G_δ–подмножество.*

Мы покажем в разделе 3.5.4, что для отсутствия нетривиальных нижних оценок на масштабированную энтропию типичного действия *необходимо накладывать условия на группу G*.

3.5.4 Зазор в росте масштабированной энтропии

Следующая теорема, доказанная в работе [56], показывает, что существуют не остаточно конечные аменабельные группы, для которых заключение теоремы 3.41 не верно.

Теорема 3.42. *Пусть $G = SL(2, \overline{\mathbb{F}}_p)$ – группа всех 2×2-матриц над алгебраическим замыканием конечного поля $\mathbb{F}_p$, $p > 2$. Пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_{q_0} \subset \mathbb{F}_{q_1} \subset \ldots$ – последовательность конечных расширений, исчерпывающих в совокупности $\overline{\mathbb{F}}_p$, и $\sigma = \{SL(2, \mathbb{F}_{q_n})\}$ – оснащение группы G последовательностью возрастающих конечных подгрупп. Тогда для любого свободного действия $\alpha \in A(X, \mu, G)$ выполнено $\mathcal{H}(\alpha, \sigma) \succsim \log q_n$.*

Доказательство теоремы 3.42 основано на теории роста в конченых группах $SL(2, \mathbb{F}_{q_n})$, в частности, на теореме Х. Хельфготта и ее обобщениях (см. работы [16, 42]) и теории представлений этих групп (см. работы [48, 19]).

Определение 3.43. Будем говорить, что аменабельная группа G с фёльнеровским оснащением σ *имеет зазор в росте масштабированной энтропии* если существует такая возрастающая к бесконечности последовательность, что для любого свободного действия α группы G выполнено $\mathcal{H}(\alpha, \sigma) \succsim \phi(n)$.

Предложение 3.44. *Свойство зазора в росте масштабированной энтропии аменабельной группы не зависит от выбора последовательности Фёльнера.*

Тем самым, свойство зазора в росте масштабированной энтропии является групповым свойством аменабельной группы. Авторам не известно, удовлетворяет ли этому свойству группа S_∞ всех конечных перестановок натурального ряда или бесконечные конечно порожденные простые аменабельные группы (см., например, [20]).

3.6 Задача об универсальной системе нулевой энтропии

Универсальные системы в разных контекстах изучались многими авторами во множестве работ, см., например, работы [9, 49, 81, 82, 83, 53, 56]. Мы будем следовать определению, предложенному в работах [9, 49]. Пусть $\mathcal{S}$ – некоторый класс сохраняющих меру действий аменабельной группы G. Топологическая система (X, G) называется *универсальной* для класса $\mathcal{S}$, если для любой инвариантной меры μ на X система (X, μ, G) принадлежит $\mathcal{S}$ и обратно, любая система из класса $\mathcal{S}$ может быть реализована с помощью некоторой инвариантной меры μ на X. В работе [49] Я. Серафина обсуждается восходящий к Б. Вейссу вопрос о существовании универсальной динамической системы для класса $\mathcal{S}$, состоящего из всех действий нулевой метрической энтропии. В работе [49] дан отрицательный ответ для случая $G = \mathbb{Z}$. В своей работе автор указывает, что его подход, основанный на теории символического кодирования и теоретико-мерной сложности, не дал желаемого результата для произвольной аменабельной группы.

Теория масштабированной энтропии позволяет дать отрицательный ответ на вопрос Б. Вейсса для всех аменабельных групп. Следующий результат был получен в работах [54, 56].

Теорема 3.45. *Аменабельная группа G не допускает универсальной системы нулевой энтропии.*

Основную роль в доказательстве этого результата играет специальная серия действий группы, удовлетворяющих определенным условиям на рост масштабированной энтропии.

Определение 3.46. Будем говорить, что группа G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ *допускает действия почти полного роста*, если для любой неотрицательной функции $\phi(n) = o(|G_n|)$ существует такая эргодическая система (X, μ, G), что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнены соотношения:

$$\Phi(\varepsilon, n) \not\precsim \phi(n) \text{ и } \Phi(\varepsilon, n) = o(|G_n|).$$

Существование таких действий является достаточным условием отсутствия универсальной системы нулевой энтропии. Действия почти полного роста для непериодической аменабельной группы с любым фёльнеровским оснащением могут быть построены явно (см. работу [54]), используя автоморфизмы Вершика на графе упорядоченных пар (см. работы [81, 82, 83]) и операцию коиндуцирования с подгруппы $\mathbb{Z}$ на всю группу G. Для произвольной аменабельной группы явные конструкции таких действий авторам не известны. Однако теорема 3.40 гарантирует типичность действий почти полного роста и, следовательно, их существование в общем случае.

Теорема 3.47. *Аменабельная группа G с оснащением $\sigma = \{G_n\}$ последовательностью Фёльнера допускает действия почти полного роста.*

3.7 Экспоненциальная масштабированная энтропия и другие родственные инварианты

В данной главе мы обсудим несколько родственных масштабированной энтропии инвариантов.

3.7.1 Экспоненциальная масштабированная энтропия

Оказывается, что лемма 3.3, играющая ключевую роль в определении масштабированной энтропии, допускает следующее уточнение. Аналогичное асимптотическое соотношение выполнено не только для функции $\Phi_\rho(\varepsilon, n) = \mathbb{H}_\varepsilon(x, \mu, T^n_{av}\rho)$, но и для $\exp(\Phi_\rho(\varepsilon, n))$, то есть для размера минимальной ε–сети полуметрики $T^n_{av}\rho$ на множестве меры $1-\varepsilon$, а не для ее логарифма (см. определение 2.11).

Лемма 3.48. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Если ρ_1 — T-порождающая, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\exp(\Phi_{\rho_2}(\varepsilon, n)) \preceq \exp(\Phi_{\rho_1}(\delta, n)), \qquad n \to +\infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что соотношение (3.2) выполнено для полуметрики $\rho_2 = T^k_{av}\rho_1$.

Лемма 3.49. *Для любого натурального k и положительного ε существует такое натуральное N, что*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}(T^k_{av}\rho_1)) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{av}\rho_1), \quad n > N. \tag{3.3}$$

Доказательство. Действительно,

$$T^n_{av}(T^k_{av}\rho_1)(x, y) \leq T^n_{av}\rho_1(x, y) + \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n+k-1} T^{-i}\rho_1(x, y). \tag{3.4}$$

Последний член в правой части (3.4) ограничен в m-норме величиной $\frac{k}{n}||\rho_1||_m$. Следовательно, в силу леммы 2.13, для достаточно большого n

$$\mathbb{H}_\varepsilon\big(X, \mu, T^n_{av}(T^k_{av}\rho_1)\big) \leq \mathbb{H}_\varepsilon\Big(X, \mu, T^n_{av}\rho_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n+k-1} T^{-i}\rho_1\Big) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/4}\big(X, \mu, T^n_{av}\rho_1\big).$$

□

Отметим, что доказательство леммы 3.49 без изменений переносится на случай аменабельной группы, оснащенной последовательностью Фёльнера.

Лемма 3.49 гарантирует, что соотношение (3.2) выполнено для допустимой метрики

$$\rho_2 = \rho = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^{-i}\rho_1.$$

Далее мы повторяем с некоторыми уточнениями рассуждения работы [90]. Множество $\mathcal{M}$ всех полуметрик $\rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$, удовлетворяющих соотношению (3.2), является замкнутым в m-норме в силу леммы 2.13. Покажем, что множество $\tilde{\mathcal{M}}$ всех полуметрик ω, удовлетворяющих для всех $x, y \in X$ неравенству

$$\omega(x, y) \leq C(\omega)\rho(x, y),$$

плотно в $(\mathcal{A}dm(X, \mu), \|\cdot\|_m)$. Действительно, как показано в [90], любая допустимая суммируемая полуметрика аппроксимируется в m-норме полуметриками, мажорируемыми конечными суммами разрезных. Любая разрезная полуметрика может быть аппроксимирована полуметрикой $d[f](x, y) = |f(x) - f(y)|$ для некоторой функции $f \in L^1(X, \mu)$, липшицевой относительно метрики ρ. Ясно, что $d[f] \in \tilde{\mathcal{M}}$, тем самым $\tilde{\mathcal{M}}$ плотно в $(\mathcal{A}dm(X, \mu), \|\cdot\|_m)$. Однако $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, стало быть, $\mathcal{M} = \mathcal{A}dm(X, \mu)$. □

Лемма 3.48, как и раньше, гарантирует независимость класса $[\exp(\Phi_\rho)]$ от T-порождающей полуметрики ρ и позволяет дать следующее определение.

Определение 3.50. *Экспоненциальной масштабированной энтропией* системы (X, μ, T) назовем класс эквивалентности $[\exp(\Phi_\rho)]$ для некоторой (а тогда и любой другой) T-порождающей $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Обозначим этот класс эквивалентности символом $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, T)$.

Отметим также, что лемма 3.48 справедлива для сохраняющих меру действий аменабельных групп, оснащенных последовательностью Фёльнера. Для действия (X, μ, G) аменабельной группы G с последовательностью Фёльнера $\lambda = \{F_n\}$ определим его *экспоненциальную масштабированную энтропию* $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, G, \lambda)$ как класс функции $\exp(\Phi_\rho(\varepsilon, n)) = \exp(\mathbb{H}_\varepsilon(x, \mu, G_{av}^n \rho))$ для некоторой (а тогда и любой другой) порождающей полуметрики ρ.

Экспоненциальная масштабированная энтропия $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, T)$ *является более тонким инвариантом динамической системы, чем обычная масштабированная энтропия*, рассматриваемая ранее. Так, сдвиг Бернулли с энтропией Колмогорова $h > 0$, имеет экспоненциальную масштабированную энтропию $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, T) = [e^{(1-\varepsilon)nh}]$. Обычная же масштабированная энтропия $\mathcal{H}(X, \mu, T) = [n]$ не позволяет вычислить энтропию Колмогорова. Аналогично, экспоненциальная масштабированная энтропия любого преобразования положительной энтропии h есть класс $[e^{(1-\varepsilon)nh}]$. Для преобразований с бесконечной энтропией $\mathcal{H}_{\exp} = [e^{\frac{n}{\varepsilon}}]$.

Этот пример также показывает, что даже для сдвига Бернулли класс $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, T)$ не содержит функций, не зависящих от ε. С другой стороны, для преобразования с дискретным спектром класс $\mathcal{H}_{\exp}$ состоит из ограниченных функций и содержит $\Phi(\varepsilon, n) = 1$. Естественно предположить, что это единственный возможный случай, когда класс $\mathcal{H}_{\exp}$ является стабильным. "Нестабильность" экспоненциальной масштабированной энтропии усложняет ее вычисление.

Как показывает случай положительной энтропии Колмогорова, экспоненциальная масштабированная энтропия может быть эффективным уточнением масштабированной энтропии в стабильном случае. Однако в общем случае уточнение может быть несущественным или вовсе отсутствовать. Если для нестабильной системы (X, μ, T), для $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, T)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что $\Phi(\varepsilon, n) = o(\Phi(\delta, n))$, то класс $\mathcal{H}_{\exp}$ полностью определяется классом $\mathcal{H}$, так как $[\exp(\Phi(\varepsilon, n))]$ не зависит от выбора представителя Φ в классе $\mathcal{H}$.

Установление свойств масштабированной энтропии в экспоненциальном варианте является более трудной задачей в силу сложности ее вычисления. Естественным обобщением теоремы 3.18 о возрастании и субаддитивности была бы теорема о возрастании и субмультипликативности экспоненциальной масштабированной энтропии. Доказательство монотонности масштабированной энтропии без изменений переносится на экспоненциальный случай.

Теорема 3.51. *Для любой системы (X, μ, T) в классе $\mathcal{H}_{\exp}(X, \mu, T)$ экспоненциальной масштабированной энтропии всегда можно найти функцию $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами:*

1. *$\Phi(\,\cdot\,, n)$ не возрастает при любом $n \in \mathbb{N}$;*
2. *$\Phi(\varepsilon, \cdot\,)$ не убывает при любом $\varepsilon > 0$.*

Отметим, что не всякая возрастающая и мультипликативная по n (и убывающая по ε) функция Φ (точнее, ее асимптотический класс) может быть получена как экспоненциальная масштабированная энтропия некоторого преобразования. Такой функцией является, например, $\Phi(\varepsilon, n) = e^{n+(1-\varepsilon)n^{1/2}}$. Действительно, экспоненциальный рост $\mathcal{H}_{exp}(T)$ влечет положительную энтропию Колмогорова h автоморфизма T, и, следовательно, $\mathcal{H}_{exp}(T)$ есть класс $[e^{(1-\varepsilon)nh}] \neq [\Phi]$. Таким образом, прямой аналог теоремы 3.19 для экспоненциального случая неверен, вопрос о полном описании возможных значений класса $\mathcal{H}_{\mathrm{exp}}$ остается открытым. Однако типичная экспоненциальная масштабированная энтропия обладает теми же свойствами, что и типичная обычная масштабированная энтропия: для любой субэкспоненциальной возрастающей к бесконечности последовательности $\phi(n)$ типичное преобразование имеет класс $\mathcal{H}_{\mathrm{exp}}$, не сравнимый с ϕ.

3.7.2 Связь с другими инвариантами

В обзорной работе [24] обсуждаются несколько схожих с масштабированной энтропией метрических инвариантов, эффективных для автоморфизмов с нулевой энтропией Колмогорова; мы упомянем некоторые из них в контексте их связи с масштабированной энтропией. В основе *энтропийной размерности* (Ференци–Парк, см. [11]) и *медленной энтропии* (Каток–Тувено, см. [26]) лежит та же идея изучения асимптотики эпсилон-энтропии, что и в масштабированной энтропии, однако инвариант определяется путем сравнения растущей последовательности с заданной шкалой растущих последовательностей. *Последовательностная энтропия* (энтропия Кириллова–Кушниренко, см. [34]) основана на идее вычисления энтропий измельчений разбиения под действием некоторой последовательности сдвигов. Термин “масштабированная энтропия” (scaled entropy) также встречается в работе [94], где он используется для родственного, но отличающегося понятия (см. также [95] и пункт 5.3 обзора [24]).

Энтропийная размерность. В работах Ференци, Парк и других авторов введено и изучается следующее понятие, названное энтропийной размерностью.

Пусть $T\colon (X,\mu) \to (X,\mu)$ — сохраняющее меру преобразование. Для конечного измеримого разбиения α пространства (X,μ) и положительного $\varepsilon > 0$ рассмотрим разрезную полуметрику ρ_α, порожденную разбиением α. *Верхняя энтропийная размерность* $\overline{D}(X,\mu,T)$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}
\overline{D}(\alpha,\varepsilon) = \sup\Big\{s \in [0,1]\colon \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho_\alpha)}{n^s} > 0\Big\},\\
\overline{D}(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{D}(\alpha,\varepsilon),\\
\overline{D}(X,\mu,T) = \sup_\alpha \overline{D}(\alpha),
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где супремум берется по конечным измеримым разбиениям α.

Аналогично определяется *нижняя энтропийная размерность* $\underline{D}(X,\mu,T)$:

$$\begin{gathered}
\underline{D}(\alpha,\varepsilon) = \sup\Big\{s \in [0,1]\colon \varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho_\alpha)}{n^s} > 0\Big\},\\
\underline{D}(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{D}(\alpha,\varepsilon),\\
\underline{D}(X,\mu,T) = \sup_\alpha \underline{D}(\alpha).
\end{gathered} \tag{3.6}$$

В случае, если верхняя и нижняя энтропийные размерности совпадают, это число называется *энтропийной размерностью* системы. Имеет место следующий аналог теоремы Колмогорова–Синая: супремумы в формулах (3.5) и (3.6) достигаются на порождающих разбиениях.

Легко видеть, что верхняя и нижняя энтропийные размерности могут быть вычислены, если известна масштабированная энтропия — класс эквивалентности $[\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)]$ для порождающей полуметрики ρ. Обратное, однако, неверно. Энтропийная размерность показывает, где на шкале степенных функций находится масштабированная энтропия. Подробнее о свойствах энтропийной размерности см. в параграфе 5.4 обзора [24] и цитируемых там работах.

Медленная энтропия. В работе Катка и Тувено [26] предложено следующее определение медленной энтропии.

Пусть $\mathbf{a} = \{a_n(t)\}_{n\geq 0, t>0}$ — семейство стремящихся к бесконечности положительных возрастающих последовательностей, возрастающая по t (шкала).

Верхняя медленная энтропия системы (X,μ,T) относительно шкалы $\mathbf{a}$ определяется следующим образом. Для конечного измеримого разбиения α пространства (X,μ) и $\varepsilon > 0$ рассмотрим соответствующую разрезную полуметрику ρ_α и множество

$$\overline{B}(\varepsilon,\alpha) = \Big\{t > 0\colon \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\exp(\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho_\alpha))}{a_n(t)} > 0\Big\} \cup \{0\}.$$

Определим

$$\overline{ent}_{\mathbf{a}}(T,\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \overline{B}(\varepsilon,\alpha),$$

$$\overline{ent}_{\mathbf{a}}(X,\mu,T) = \sup_\alpha \overline{ent}_{\mathbf{a}}(T,\alpha),$$

где супремум берется по конечным измеримым разбиениям α.

Величина $\overline{ent}_{\mathbf{a}}(X,\mu,T)$ называется *верхней медленной энтропией* системы (X,μ,T) относительно шкалы $\mathbf{a}$.

Аналогично определяется *нижняя медленная энтропия* $\underline{ent}_{\mathbf{a}}(X,\mu,T)$ системы:

$$\underline{B}(\varepsilon,\alpha) = \Big\{t > 0\colon \varliminf_{n\to\infty} \frac{\exp(\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho_\alpha))}{a_n(t)} > 0\Big\} \cup \{0\},$$

$$\underline{ent}_{\mathbf{a}}(T,\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \underline{B}(\varepsilon,\alpha),$$

$$\underline{ent}_{\mathbf{a}}(X,\mu,T) = \sup_\alpha \underline{ent}_{\mathbf{a}}(T,\alpha).$$

Медленная энтропия напрямую связана с экспоненциальной масштабированной энтропией. Сравнивая класс $\mathcal{H}_{\exp}$ со шкалой $\mathbf{a}$, можно вычислить значения $\overline{ent}_{\mathbf{a}}$ и $\underline{ent}_{\mathbf{a}}$. Обратно, зная значения медленной энтропии для всех возможных шкал $\mathbf{a}$, можно различить системы с разными классами $\mathcal{H}_{\exp}$. Тем самым, медленная энтропия (точнее, совокупность медленных энтропий относительно всех возможных шкал $\mathbf{a}$) различает те же динамические системы, что и экспоненциальная масштабированная энтропия. При этом, никакого счетного набора шкал $\mathbf{a}$ не достаточно, чтобы восстановить класс $\mathcal{H}_{\exp}$.

Различным свойствам медленной энтропии и примерам ее вычисления посвящен раздел 4 обзорной работы [24].

Последовательностная энтропия. Последовательностная энтропия была предложена в работе Кушниренко [34]. Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Энтропия $h_A(T)$ автоморфизма T на пространстве (X,μ) определяется следующим образом:

$$h_A(T,\alpha) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{j=1}^{k} T^{-a_j}\alpha\Big),$$

$$h_A(T) = \sup_{\alpha} h_A(T, \alpha),$$

где супремум берется по конечным измеримым разбиениям α.

В работе [34] доказано, что автоморфизм T имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда $h_A(T) = 0$ для любой последовательности A. Сравнивая этот результат с теоремой 3.15, мы заключаем, что ограниченность масштабированной энтропии равносильна этому условию.

Оказывается, в некоторой "окрестности" дискретного спектра можно дать двусторонние оценки, связывающие масштабированную энтропию с последовательностной.

Теорема 3.52. *Для любой возрастающей последовательности A целых чисел существует такая неограниченная возрастающая последовательность $h = \{h_n\}_n$, что для любого автоморфизма T пространства (X, μ) соотношение $\mathcal{H}(T, X, \mu) \prec h$ влечет $h_A(T) = 0$.*

Обратно, для любой неограниченной возрастающей последовательности $h = \{h_n\}_n$ существует такая последовательность A, что если для автоморфизма T пространства (X, μ) выполнено соотношение $h_A(T) = 0$, то $\mathcal{H}(T, X, \mu) \prec h$.

Подробнее про свойства последовательностной энтропии см. в разделе 3 обзорной работы [24].

Приложение A

Некоторые доказательства

A.1 Доказательства лемм 2.15 и 2.16

Доказательство леммы 2.15. Пусть $n = \exp\Big(\mathbb{H}_\delta(X,\mu,\rho)\Big)$, пусть $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ — соответствующее разбиение: $\mu(X_0) < \delta$, $\operatorname{diam}_\rho(X_j) < \delta$ при $j = 1,\ldots,n$. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и точки $x_j \in X_j$ для $j = 1,\ldots,n$. Зададим дискретную меру

$$\nu = \sum_{j=0}^{n} \mu(X_j)\delta_{x_j}$$

и транспортный план γ, перевозящий множества X_j в x_j. Очевидно, γ — спаривание мер μ и ν, при этом

$$\int\limits_{X\times X} \rho\,d\gamma = \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{X_j} \rho(x,x_j)\,d\mu(x) \le \int\limits_{X_0} \rho(x,x_0)\,d\mu(x) + \delta.$$

Среднее значение правой части при случайном выборе $x_0 \in X$ по мере μ равно

$$\int\limits_{X_0\times X} \rho\,d(\mu\times\mu) + \delta < \varepsilon$$

в силу условия (2.1). Следовательно, при должном выборе x_0 можно получить неравенство

$$d_K(\mu,\nu) \le \int\limits_{X\times X} \rho\,d\gamma < \varepsilon.$$

Остается заметить, что $H(\nu) \le \log(n+1)$. □

Прежде чем доказывать лемму 2.16, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма A.1. *Пусть $P = (p_j)_{j=1}^N$ — конечный вероятностный вектор, $H(P) = \sum_{j=1}^N p_j \log(1/p_j)$ — его энтропия. Пусть $\delta \in (0,1)$, $F = \exp\left(\frac{H(P)+1}{\delta}\right)$. Тогда найдется такое подмножество $J \subset \{1,\ldots,N\}$, что*

$$|J| \le F, \qquad \sum_{j\in J} p_j \ge 1-\delta.$$

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что числа p_j упорядочены по убыванию: $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_N$. Пусть m — наименьшее число, для которого

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \geq 1 - \delta.$$

Предположим, что утверждение леммы не верно, тогда $m > F$. Следовательно, $1/F > p_m \geq p_{m+1}$. Тогда

$$\delta \geq \sum_{j=m+1}^{N} p_j > \delta - 1/F.$$

Поэтому

$$H(P) > \sum_{j=m+1}^{N} p_j \log(1/p_j) \geq \sum_{j=m+1}^{N} p_j \log(1/p_{m+1}) \geq (\delta - 1/F) \log F \geq \delta \log F - 1,$$

что противоречит определению F. □

Доказательство леммы 2.16. Пусть ν — такая дискретная мера, что $d_K(\mu, \nu) < \varepsilon^2$. Пользуясь леммой A.1 для распределения меры ν и $\delta = \varepsilon$ найдем $m \leq \exp(\frac{H(\nu)+1}{\varepsilon})$ и множество $M = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$, для которого $\nu(M) \geq 1 - \varepsilon$.

Пусть π_1 и π_2 — проекции $X \times X$ на первый и второй сомножитель. Пусть γ — оптимальный транспортный план для мер μ и ν — такая вероятностная мера на $X \times X$, что $\pi_1(\gamma) = \mu$, $\pi_2(\gamma) = \nu$,

$$\int\limits_{X \times X} \rho \, d\gamma = d_K(\mu, \nu) < \varepsilon^2.$$

Рассмотрим множество $A = \big\{(x, y) \in X \times X \colon \rho(x, y) < \varepsilon\big\}$. По неравенству Чебышева $\gamma(A) \geq 1 - \varepsilon$. Заметим, что $\gamma(\pi_2^{-1}(M)) = \nu(M) \geq 1 - \varepsilon$, следовательно,

$$\gamma(A \cap \pi_2^{-1}(M)) \geq 1 - 2\varepsilon,$$

поэтому

$$\mu\Big(\big\{x \in X \colon \rho(x, M) < \varepsilon\big\}\Big) \geq \gamma\Big(\big\{A \cap \pi_2^{-1}(M)\big\}\Big) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(X, \mu, \rho) \leq \log |M| \leq \frac{H(\nu) + 1}{\varepsilon}.$$

Минимизируя правую часть по дискретным мерам ν, удовлетворяющим неравенству $d_K(\mu, \nu) < \varepsilon^2$, мы приходим к неравенству (2.2). □

A.2 Доказательство теорем 2.38 и 2.40

Теорема 2.38 является следствием из приведенной ниже леммы.

Лемма A.2. *1. Пусть ρ_1, ρ_2 — две измеримые полуметрики на (X, μ). Тогда для любого $\delta > 0$ найдется полуметрическое пространство (Y, ρ) и изометрии $\phi_1 \colon (X, \rho_1) \to (Y, \rho)$, $\phi_2 \colon (X, \rho_2) \to (Y, \rho)$, такие, что*

$$d_K\big(\phi_1(\mu_1), \phi_2(\mu_2)\big) \leq \|\rho_1 - \rho_2\|_m + \delta.$$

2. Пусть μ_1 и μ_2 — две вероятностные меры на полуметрическом пространстве (Y,ρ). Тогда найдется вероятностное пространство (X,μ) и такие измеримые отображения $\psi_1,\psi_2\colon X\to Y$, что $\psi_1(\mu)=\mu_1$, $\psi_2(\mu)=\mu_2$, и

$$\big\|\rho\circ\psi_1-\rho\circ\psi_2\big\|_m\le 2d_K(\mu_1,\mu_2).$$

Доказательство. 1. Пусть d — такая полуметрика на (X,μ), что

$$|\rho_1(x,y)-\rho_2(x,y)|\le d(x,y)\qquad \text{п.в.}$$

и $\int_{X^2} d\,d\mu^2\le\|\rho_1-\rho_2\|_m+\delta$. Найдем такую функцию f на (X,μ), что

$$d(x,y)\le f(x)+f(y)\tag{A.1}$$

и

$$\int\limits_X f d\mu\le\int\limits_{X^2} d\,d\mu^2.\tag{A.2}$$

В качестве функции f, удовлетворяющей неравенству (A.1), можно выбрать $f=d(\,\cdot\,,x_0)$ для произвольной $x_0\in X$. Выбирая x_0 таким образом, что интеграл функции $d(\,\cdot\,,x_0)$ минимален, мы получим неравенство (A.2).

Рассмотрим множество $Y=X\times\{1,2\}$ и зададим полуметрику ρ на Y следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho\big((x,i),(y,i)\big)&=\rho_i(x,y),\qquad i=1,2,\quad x,y\in X,\\ \rho\big((x,2),(y,1)\big)&=\operatorname{essinf}_{z\in X}(\rho_2(x,z)+f(z)+\rho_1(z,y)),\qquad x,y\in X.\end{aligned}$$

Определим изометрии $\phi_i\colon(X,\rho_i)\to(Y,\rho)$, $i=1,2$, формулой $\phi_i(x)=(x,i)$, $x\in X$. Расстояние Канторовича d_K между образами мер μ_i при отображениях ϕ_i не превосходит $\int_X fd\mu\le\|\rho_1-\rho_2\|_m+\delta$.

2. Пусть μ мера на $X=Y^2$ — каплинг мер μ_1 и μ_2, реализующий транспортный план Канторовича между этими мерами:

$$\int\limits_{Y^2}\rho\,d\mu=d_K(\mu_1,\mu_2).$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — проекции $X=Y^2$ на первый и второй сомножитель соответственно. Тогда полуметрики $\rho_i=\rho\circ\psi_i$, $i=1,2$, на X задаются формулами

$$\rho_i\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\rho(x_i,y_i).$$

Зададим полуметрику d на X следующим образом:

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\rho(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2),\qquad (x_1,x_2)\ne(y_1,y_2).$$

Тогда $|\rho_1-\rho_2|\le d$, поэтому

$$\big\|\rho_1-\rho_2\big\|_m\le\int\limits_{X^2} d\,d\mu^2=2\int\limits_{Y^2}\rho\,d\mu=2d_K(\mu_1,\mu_2).\qquad\square$$

Доказательство теоремы 2.40. В одну сторону утверждение теоремы доказывается достаточно легко. Предположим, что множество M является предкомпактным. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое конечное подмножество $J \subset I$, что тройки $\{(X_j, \mu_j, \rho_j) \colon i \in J\}$ образуют конечную $\frac{\varepsilon^2}{32}$-сеть в метрике $\mathrm{Dist_m}$. Для каждого $i \in I$ найдем такой $j \in J$, что

$$\mathrm{Dist_m}\Big((X_i, \mu_i, \rho_i), (X_j, \mu_j, \rho_j)\Big) < \frac{\varepsilon^2}{32}.$$

Следовательно, найдется каплинг (X, μ) и проекции $\psi_{i,j} \colon (X, \mu) \to (X_{i,j}, \mu_{i,j})$, такие что

$$\big\|\rho_i \circ \psi_i - \rho_j \circ \psi_j\big\|_m < \frac{\varepsilon^2}{32}. \tag{A.3}$$

Тогда

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_i, \mu_i, \rho_i) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i \circ \psi_i) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, \rho_j \circ \psi_j) = \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X_j, \mu_j, \rho_j).$$

Поэтому

$$\sup_{i \in I} \mathbb{H}_\varepsilon(X_i, \mu_i, \rho_i) \le \max_{j \in J} \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X_j, \mu_j, \rho_j) < \infty;$$

условие 2 доказано.

Докажем равномерную интегрируемость. Для $i \in I$ и соответствующего $j \in J$ пусть d_i — такая полуметрика на (X, μ), что

$$\rho_i \circ \psi_i \le \rho_j \circ \psi_j + d_i, \qquad \int\limits_{X^2} d_i \, d\mu^2 < \frac{\varepsilon^2}{32}. \tag{A.4}$$

Для любого $R > 0$ пусть $L_{i,j,R} = \{\rho_i \circ \psi_i > 2R\}$. Тогда

$$\mu^2(L_{i,j,R}) \le \mu^2(\{\rho_j \circ \psi_j > R\}) + \mu^2(\{d_i > R\}) \le \\ \le \frac{1}{R}\Big(\int\limits_{X^2} \rho_j \circ \psi_j \, d\mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{32}\Big) = \frac{1}{R}\Big(\int\limits_{X_j^2} \rho_j \, d\mu_j^2 + \frac{\varepsilon^2}{32}\Big). \tag{A.5}$$

Пусть $Q(\varepsilon) = \max_{j \in J} \int_{X_j^2} \rho_j \, d\mu_j^2 + \frac{\varepsilon^2}{32}$. Тогда мы получаем

$$\int\limits_{\rho_i > 2R} \rho_i \, d\mu_i^2 = \int\limits_{L_{i,j,R}} \rho_i \circ \psi_i \, d\mu^2 \le \int\limits_{L_{i,j,R}} \rho_j \circ \psi_j \, d\mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{32} \le \tag{A.6}$$

$$\le \sup\Big\{ \int\limits_L \rho_j \, d\mu_j^2 \colon L \subset X_j^2, \mu_j^2(L) \le \frac{Q(\varepsilon)}{R} \Big\} + \frac{\varepsilon^2}{32}. \tag{A.7}$$

Правая часть последнего неравенства стремится к $\frac{\varepsilon^2}{32}$ когда R стремится к бесконечности (для каждого j, поэтому равномерно на конечном множестве J). Поэтому

$$\varlimsup_{R \to \infty} \sup_{i \in I} \int\limits_{\rho_i > 2R} \rho_i \, d\mu_i^2 \le \frac{\varepsilon^2}{32}.$$

Левая часть полученного неравенства не зависит от ε, поэтому она равна нулю. Тем самым условие 1 равномерной интегрируемости доказано.

Доказательство в обратную сторону требует большего количества рассуждений. Предположим, что условия 1 и 2 выполнены. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы хотим найти конечную ε-сеть в множестве M в метрике $\mathrm{Dist_m}$. Воспользовавшись условием равномерной интегрируемости, мы можем выбрать $R > 0$ так, что $\int_{\rho_i > R} \rho_i \, d\mu_i^2 < \varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Тогда

$$\|\rho_i - \min(\rho_i, 2R)\|_m \le \int\limits_{\rho_i > R} \rho_i \, d\mu_i^2 < \varepsilon/2.$$

Поэтому достаточно найти $\varepsilon/2$-сеть в метрике $\mathrm{Dist_m}$ в множестве троек $\{(X_i, \mu_i, \min(\rho_i, 2R))\}_{i\in I}$. Тем самым, в дальнейшем не умаляя общности можно считать, что полуметрики ρ_i равномерно ограничены. В силу однородности, можно считать, что все ρ_i не превосходят 1.

Лемма A.3. *Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано, $\sup_{i\in I} \mathbb{H}_\varepsilon(X_i, \mu_i, \rho_i) < \infty$. Тогда на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) можно найти конечное разбиение $\xi = (A_1, \dots, A_n)$ со следующим свойством: для каждого $i \in I$ найдется гомоморфизм пространств с мерой $\psi_i \colon (X, \mu) \to (X_i, \mu_i)$ и множество $B_i \in X_i$, $\mu(B_i) < 2\varepsilon$, для которых множества $A_k \setminus B_i$, $k = 1, \dots, n$, имеют диаметр меньше ε в полуметрике $\rho_i \circ \psi_i$.*

Доказательство. Пусть N таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X_i, \mu_i, \rho_i) \le \log(N)$ для всех $i \in I$. Для каждого $i \in I$ найдется измеримое конечное разбиение $\xi^i = \{A_1^i, \dots, A_N^i\}$ пространства (X_i, μ_i) и множество $E^i \subset X_i$, $\mu_i(E^i) < \varepsilon$, для которых диаметр множеств $A_j^i \setminus E^i$ в полуметрике ρ_i меньше ε. Пусть $P^i = (\mu_i(A_k^i))_{k=1}^N$ — вероятностный вектор, соответствующий разбиению ξ^i.

Пусть $P = (p_1, \dots, p_N)$ — фиксированный вероятностный вектор длины N. На стандартном вероятностном пространстве (X, μ) выберем разбиение $\xi_P = (A_1, \dots, A_N)$ на N частей с мерами $\mu(A_k) = p_k$. Если вектор $P^i = (\mu(A_k^i))_{k=1}^N$ таков, что $\sum_{k=1}^N |p_k - \mu(A_k^i)| < \varepsilon$, то пространство (X_i, μ_i) можно реализовать на X так, что разбиение ξ^i будет мало отличаться от ξ_P. А именно, можно найти такой гомоморфизм пространств с мерой $\psi_i \colon (X, \mu) \to (X_i, \mu_i)$, что

$$\sum_{k=1}^N \mu(\psi^{-1}(A_k^i) \Delta A_k) < \varepsilon.$$

Тогда найдется такое множество $B_i \subset X$, $\mu(B_i) < 2\varepsilon$, что диаметр множеств $A_k \setminus B_i$ в полуметрике $\rho_i \circ \psi_i$ будет меньше ε.

Множество векторов $\{P^i \colon i \in I\}$ ограничено в пространстве конечной размерности, поэтому в нем можно найти конечную ε-сеть в метрике L^1: пусть это $\{P_1, \dots, P_m\}$. Для каждого элемента P_j этой ε-сети построим соответствующее разбиение ξ_{P_j} на (X, μ). В качестве искомого в лемме разбиения ξ можно взять измельчение разбиений ξ_{P_j}. Лемма доказана. □

Дальнейшее доказательство теоремы следует доказательству соответствующей импликации теоремы 2.26. Используя лемму A.3, далее будем работать с полуметриками $\tilde{\rho}_i = \rho_i \circ \psi_i$ на пространстве (X, μ) и разбиением $\xi = \{A_1, \dots, A_n\}$. Покажем, что в множестве $\{\tilde{\rho}_i \colon i \in I\}$ можно найти конечную 7ε-сеть в m-норме. Для этого покажем, что эти полуметрики аппроксимируются в m-норме ограниченным множеством в конечномерном пространстве полуметрик, постоянных на множествах $A_j \times A_k$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_i \colon i \in I\}$. Найдем множество $B \subset X$, $\mu(B) < 2\varepsilon$, для которого каждое из множеств $A_j \setminus B$ будет иметь диаметр меньше ε в полуметрике $\tilde{\rho}$. Добавив в случае необходимости к множеству B подмножество нулевой меры, мы можем считать что каждое из множеств $A_j \setminus B$ либо пусто, либо имеет положительную меру. Выберем по одной точке

x_j в каждом из множеств A_j так, чтобы функции $\tilde\rho(\,\cdot\,, x_j)$ были бы измеримыми на X, и что если $\mu(A_j \setminus B) > 0$, то $x_j \in A_j \setminus B$. Определим полуметрику $\bar\rho$ на X следующим образом: для $x \neq y$ если $x \in A_k$, $y \in A_j$, положим $\bar\rho(x,y) = \tilde\rho(x_k, x_j)$. Тогда, очевидно, если $x, y \notin B$, то

$$|\tilde\rho(x,y) - \bar\rho(x,y)| < 2\varepsilon.$$

Так как $\bar\rho$ и $\tilde\rho$ ограничены поточечно числом 1, для всех $x, y \in X$ мы имеем оценку

$$|\tilde\rho(x,y) - \bar\rho(x,y)| \le \big(2\varepsilon + \chi_B(x) + \chi_B(y) - \chi_B(x)\chi_B(y)\big)\chi_{\{x\neq y\}}.$$

В правой части последнего неравенства стоит полуметрика, интеграл которой не превосходит $2\varepsilon + 2\mu(B) < 6\varepsilon$, поэтому

$$\|\tilde\rho(x,y) - \bar\rho(x,y)\|_m < 6\varepsilon.$$

Мы доказали, что каждая из полуметрик $\tilde\rho_i, i \in I$, аппроксимируется соответствующей полуметрикой $\bar\rho_i$ с точностью до 6ε в m-норме, причем все полуметрики $\bar\rho_i$ лежат в конечномерном пространстве и равномерно ограничены, то есть образуют предкомпакт. Стало быть, в множестве $\{\tilde\rho_i\}_{i\in I}$ можно найти конечную 7ε сеть в m-норме. Теорема доказана.

□

A.3 Доказательство предложения 3.8

Неравенство в одну сторону доказывается достаточно просто:

$$\Omega_T\big(\rho, 1 - \frac{1}{n}\big) \ge \frac{1}{e} T_{av}^n \rho.$$

Тем самым,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \Omega_T\big(\rho, 1 - \frac{1}{n}\big)) \ge \mathbb{H}_{e\varepsilon}(X, \mu, T_{av}^n \rho).$$

Следовательно, $\tilde\Phi_\rho(\varepsilon, 1 - \frac{1}{n}) \succeq \Phi_\rho$.

Для того, чтобы получить оценку в обратную сторону, найдем для каждого $\varepsilon > 0$ такое $c = c(\varepsilon, \rho)$, что для любого натурального n выполнено

$$\Big\|(1-z)\sum_{k>cn} z^k T^{-k}\rho\Big\|_m < \varepsilon^2/32,$$

где $z = 1 - \frac{1}{n}$. Тогда, в силу леммы 2.13,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\big(X, \mu, \Omega_T(\rho, 1 - \frac{1}{n})\big) \le \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{4}}\big(X, \mu, (1-z)\sum_{k=0}^{cn} z^n T^{-k}\rho\big) \le \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{4c}}(X, \mu, T_{av}^{cn}\rho),$$

где $z = 1 - \frac{1}{n}$. Однако, в силу субаддитивности масштабированной энтропии (см. раздел 3.3.2) функция $\Psi(\varepsilon, n) = \Phi_\rho(\frac{\varepsilon}{4c}, cn)$ эквивалентна функции Φ_ρ. Таким образом, $\tilde\Phi_\rho(\varepsilon, 1 - \frac{1}{n}) \preceq \Phi_\rho$ и, тем самым, функция $\tilde\Phi_\rho(\varepsilon, 1 - \frac{1}{n})$ принадлежит классу $\mathcal{H}(T)$.

A.4 Доказательство предложения 3.23

Пусть E — такое множество положительной меры, что для любого $\alpha \in E$, $\mathcal{H}(X, \mu_\alpha, T)$ растет не медленнее, чем h.

Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность n_j, удовлетворяющая соотношению $\Phi(\varepsilon, n_j) \prec h_{n_j}$ для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, T)$ и любого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим допустимую метрику ρ на X и некоторый номер n_j. Пусть $X_0, X_1, \dots X_k$ — множества, реализующие ε–энтропию тройки $(X, \mu, T_{av}^{n_j}\rho)$. Тогда

$$\varepsilon > \mu(X_0) = \int \mu_\alpha(X_0) d\nu(\alpha).$$

Ясно, что существует такая константа $r > 0$, зависящая только от $\nu(E)$, что на некотором множестве $E_j \subset E$ меры r выполнено неравенство $\mu_\alpha(X_0) < \frac{\varepsilon}{r}$. Для таких α справедливо неравенство

$$\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{r}}(X, \mu_\alpha, T_{av}^{n_j}\rho) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^{n_j}\rho).$$

Ясно, что мера таких α, что $\alpha \in E_j$ выполнено бесконечное число раз, положительна. Выберем такое α и подпоследовательность индексов j_m, для которых $\alpha \in E_{j_m}$. Получим

$$h_{n_{j_m}} \preceq \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{r}}(X, \mu_\alpha, T_{av}^{n_{j_m}}\rho) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^{n_{j_m}}\rho) \prec h_{n_{j_m}}.$$

Противоречие.

Приложение B

Проблемы

Перечислим несколько проблем, связанных с так или иначе затронутыми в обзоре новыми понятиями, не претендуя на полный охват тематики. Некоторые проблемы упомянуты в основном тексте.

1. Теория mm-пространств, классификация метрических троек и задачи о матричных распределениях.

Возможно наиболее важный общий вопрос состоит в следующем: в какой степени матричное распределение, как мера на дистанционных матрицах, позволяет описывать различные свойств mm-пространств (пространств с мерой и метрикой).

С одной стороны, как мы видели, матричное распределение есть полный инвариант с точностью до сохраняющих меру изометрий, но требуется научиться практически использовать его, как средство изучения пространств. В частности, вопрос о том, что можно сказать о случайных спектрах матричных распределений самых естественных mm-пространств пока открыт, хотя он ставился давно, см. пункт 1.1.4. Аналогичный вопрос можно задать для метрических троек: можно ли восстановить метрическую тройку, в частности метрику, по асимптотике случайных спектров последовательных миноров матричного распределения? Скорее всего, ответ отрицательный, но интересно, какие свойства тройки являются "спектральными", т. е. зависят только от спектра. Здесь уместно вспомнить об огромной литературе по спектральной геометрии графов, метрических пространств и т. п. Но поставленная выше задача принципиально иная, так как мы рассматриваем случайные спектры, т. е. стохастические, а не индивидуальные характеристики наборов собственных значений миноров. Эта статистика в корне отличается от статистики случайных гауссовых матриц, т. е. от полукругового и подобных ему законов.

Интересны и пока неизвестны предельные распределения спектров для самых естественных многообразий — сфер, многообразий Штифеля, а также некомпактных многообразий с вероятностной мерой, см. готовящуюся к печати работу [80].

2. Вычисление масштабированной энтропии.

Значительная часть обзора посвящена относительно новому понятию масштабированной энтропии. Однако, мы не умеем её вычислять уже в самых естественных случаях. При этом важно иметь в виду, что неограниченный рост масштабированной энтропии означает наличие непрерывной части в спектре автоморфизма, что на прямую иногда очень трудно оказать. Именно этот вопрос для адических автоморфизмов был поставлен А. Вершиком, в частности, для *автоморфизма Паскаля*, — одного из первых нетривиальных примеров адических преобразований, определённых в конце 70-х гг. А. Вершиком (см. [58, 59, 70]).

Позже выяснилось, что это преобразование использовал для одной задачи о разбиениях С. Какутани, см. [21]. Попытка вычисления масштабированной энтропии для автоморфизма Паскаля была предпринята в [35]. Но неограниченность роста масштабированной энтропии пока не доказана, несмотря на усилия многих математиков. Тем самым не доказано, что автоморфизм Паскаля имеет чисто непрерывный спектр. Уверенность в справедливости этого выражена в названии статьи [70].

С другой стороны, для преобразований Морса, Чакона, т. е. подстановок (которые являются стационарными адическими сдвигами на бесконечных графах, см. [79]) вычисления проделаны, см. подробности в пункте 3.4.1. В качестве обобщения результата для преобразования Морса интересно найти масштабированную энтропию более общих косых произведений над преобразованием с дискретным спектром.

Пока не вычислена масштабированная энтропия для многочисленных адических преобразований на путях графов (Юнга, Фибоначчи и др.). Кроме того, представляет интерес вычисление масштабированной энтропии гауссовских автоморфизмов с простым сингулярным или просто сингулярным спектром (см. [13] и [57]). Как ни странно, техника аппроксимаций (ранги) здесь пока, видимо, не помогает.

3. Описание нестабильного автоморфизма.

Несомненный интерес представляет описание нестабильных автоморфизмов, см. пункт 3.2.1. В частности, интересно дать пример символической модели какого-нибудь нестабильного автоморфизма.

4. Развитие теории масштабированной энтропии для счетных групп.

Теория масштабированной энтропии для действия аменабельных групп, описанная в пункте 3.5, требует дальнейшего развития. Для неаменабельных групп неизвестно практически ничего, кроме самого определения, неизвестно даже, является ли введенный инвариант нетривиальным. В частности, несомненный интересен представляет вопрос о связи приведенного в пункте 3.5 определения масштабированной энтропии с другими определениями энтропии для таких групп.

Важным и интересным нам представляется свойство зазора в росте масштабированной энтропии, описанное в пункте 3.5.4. Интересно было бы понять, для каких аменабельных групп имеет место это явление. В частности, выполнено ли оно для бесконечной симметрической группы?

5. Небернуллиевские автоморфизмы с вполне положительной энтропией.

Для небернуллиевских автоморфизмов с вполне положительной энтропией, которые были открыты Д. Орнштейном в 70-х гг., до сих пор нет обозримых инвариантов. Они должны быть связаны с неэнтропийными асимптотическими инвариантами стационарных метрических компактов. Пока такие инварианты неизвестны.

6. Каталитические и относительные инварианты. Описанная в пункте 1.2.6 (см. также пункт 3.1.3) схема построения каталитических абсолютных или относительных инвариантов пока реализована только в виде масштабированной энтропии. В этом случае инвариант абсолютный (т. е. от метрики не зависит). Других примеров пока нет. Объясняется это тем, что кроме эпсилон-энтропии у нас нет развитой теории инвариантов самих метрических компактов или mm-пространств. В частности, нет инвариантов метрических компактов, снабженных той или иной симметрией (например инвариантных относительно автоморфизма). Нет оснований сомневаться в наличии таких инвариантов. На это указывают упомянутые небернуллиевские системы с положительной колмогоровской энтропией.

Литература

[1] T. Adams. Genericity and rigidity for slow entropy transformations. *New York J. Math.*, 27, 393–416, 2021.

[2] D. J. Aldous. Exchangeability and related topics. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII, 1983, volume 1117 of Lecture Notes in Math., pages 1–198. Springer, Berlin, 1985.

[3] T. Austin, E Glasner, J.-P. Thouvenot, B. Weiss. An ergodic system is dominant exactly when it has positive entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1–15, 2022.

[4] F. Blume. Possible rates of entropy convergence. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17(1), 45–70, 1997.

[5] В. И. Богачев. Задача Канторовича оптимальной транспортировки мер: новые направления исследований. *УМН*, 77:5(467), 3–52, 2022.

[6] В. И. Богачев, А. Н. Калинин, С. Н. Попова. О равенстве значений в задачах Монжа и Канторовича. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 457, 53–73, 2017.

[7] E. Bogomolny, O. Bohigas, C Schmit. Spectral properties of distance matrices. *J. Phys. A*, 36, no. 12, 3595–3616, 2003.

[8] P. J. Cameron, A. M. Vershik. Some isometry groups of the Urysohn space. *Ann. Pure Appl. Logic*, 143, no. 1-3, 70–78, 2006.

[9] T. Downarowicz, J. Serafin. Universal Systems for Entropy Intervals. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 29, 1411–1422, 2017.

[10] S. Ferenczi. Measure-theoretic complexity of ergodic systems. *Israel Journal of Mathematics*, 100, 187–207, 1997.

[11] S. Ferenczi, K. K. Park. Entropy dimensions and a class of constructive examples. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 17, no. 1, 133–141, 2007.

[12] S. Gadgil, M. Krishnapur. Lipschitz correspondence between metric measure spaces and random distance matrices. *International Mathematics Research Notices*, 24, 5623–5644, 2013.

[13] И. В. Гирсанов. О спектрах динамических систем, порождаемых стационарными гауссовскими процессами. *Докл. АН СССР*, 119:5, 851–853, 1958.

[14] A. Greven, P. Pfaffelhuber, A. Winter. Convergence in distribution of random metric measure spaces (Λ-coalescent measure trees). *Probab. Theory Relat. Fields*, 145, 285–322, 2009.

[15] M. Gromov. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Birkhauser, Boston, 1999.

[16] H. A. Helfgott. Growth and generation in $SL2(Z/pZ)$. *Ann. of Math.*, (2), 167(2):601–623, 2008.

[17] L. Hogben, C. Reinhart. Spectra of Variants of Distance Matrices of Graphs and Digraphs: A Survey. *La Matematica*, 1, 186–224, 2022.

[18] M. R. Holmes. The universal separable metric space of Urysohn and isometric embeddings thereof in Banach spaces. *Fund. Math.*, 140 (3), 199–223, 1992.

[19] H. E. Jordan. Group-characters of various types of linear groups. *Amer. J. Math.*, 29, 387–405, 1907.

[20] K. Juschenko, N. Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Ann. of Math*, (2) 178, no. 2, 775–787, 2013.

[21] S. Kakutani. A problem of equidistribution on the unit interval $[0, 1]$. *Lecture Notes in Math.*, 541, Springer-Verlag, Berlin, 369–375, 1976.

[22] A. Kanigowski. Slow entropy for some smooth flows on surfaces. *Israel J. Math.*, 226, no. 2, 535–577, 2018.

[23] A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei. Slow entropy of parabolic flows. *Comm. Math. Phys.*, 370, no. 2, 449–474, 2019.

[24] A. Kanigowski, A. Katok, D. Wei. Survey on entropy-type invariants of sub-exponential growth in dynamical systems. `https://arxiv.org/abs/2004.04655v1`

[25] Л. В. Канторович. О перемещении масс. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 312, ПОМИ, СПб., 11–14, 2004.

[26] A. Katok, J.-P. Thouvenot. Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations. *Annales de Institut Henri Poincare*, 33, 323–338, 1997.

[27] A. Kechris. Global Aspects of Ergodic Group Actions. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 160, 2010.

[28] А. Н. Колмогоров. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. *Докл. АН СССР*, 119:5, 861–864, 1958.

[29] А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации. *Сб. Теория Информации и теория алгоритмов*, М. Наука. стр. 29–58, 1987.

[30] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. *УМН*, 14:2(86), 3–86, 1959.

[31] V. Koltchinskii, E. Giné. Random matrix approximation of spectra of integral operators. *Bernoulli*, 6:1, 113–167, 2000.

[32] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. Москва, Наука, 1980.

[33] W. Krieger. On entropy and generators of measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149, 453–464, 1970.

[34] А. Г. Кушниренко. О метрических инвариантах типа энтропии. *УМН*, 22(5):57–65, 1967.

[35] А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов. Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля. *Зап. науч. семин. ПОМИ*, 378, 58–72, 2010.

[36] A. Lott. Zero entropy actions of amenable groups are not dominant. To appear in *Ergodic Theory Dynam. Systems.* https://arxiv.org/abs/2204.11459

[37] J. Melleray, F. V. Petrov, A. M. Vershik. Linearly rigid metric spaces and the embedding problem. *Fund. Math.*, 199:2, 177–194, 2008.

[38] L. Motto Ros. Can we classify complete metric spaces up to isometry? *Boll Unione Mat Ital*, 10, 369–410, 2017.

[39] D. S. Ornstein, B. Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *Journal d'Analyse Mathématique*, 48, no. 1: 1–141, 1987.

[40] Ф. В. Петров. Исправление непрерывных гиперграфов. *Алгебра и анализ*, 28, 6, 84–90, 2016.

[41] М. С. Пинскер, Л. Б. Софман. (ε, δ)-энтропия вполне эргодических, случайных процессов. *Пробл. передачи информ.*, 22, 4, 3–8, 1986.

[42] L. Pyber, E. Szabó. Growth in finite simple groups of Lie type. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(1):95–146, 2016.

[43] M. Queffélec. Substitution Dynamical Systems. Spectral Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.

[44] В. А. Рохлин. Об основных понятиях теории меры. *Матем. сб.*, 25(67):1, 107–150, 1949.

[45] В. А. Рохлин. Метрическая классификация измеримых функций. *УМН*, 12:2(74), 169–174, 1957.

[46] В. А. Рохлин. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой. *УМН*, 22:5(137), 3–56, 1967.

[47] В. В. Рыжиков. Компактные семейства и типичные энтропийные инварианты сохраняющих меру действий. *Тр. ММО*, 82, 1, МЦНМО, 137–145, 2021.

[48] I. Schur. Unterschungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 132, 1906-07.

[49] J. Serafin. Non-existence of a universal zero-entropy system. *Israel Journal of Mathematics*, 194, 1, 349–358, 2013.

[50] К. Шеннон. Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИИЛ, 1963, 830 с.

[51] K.-T. Sturm. The space of spaces: curvature bounds and gradient flows on the space of metric measure space. https://arxiv.org/abs/1208.0434

[52] P. S. Urysohn. Sur un espace metrique universel. *Bull. Sci. Math.*, 51, 1–38, 1927. Рус. перев. П. С. Урысон. Об универсальном метрическом пространстве. П. С. Урысон, Труды по топологии, Сб., т. 2, ГИТТЛ, М., 1951.

[53] Г. А. Вепрев. Scaling Entropy of Unstable Systems. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 498, 5–17, 2020.

[54] G. Veprev. Non-existence of a universal zero entropy system for non-periodic amenable group actions. To appear in *Israel Journal of Mathematics*. `https://arxiv.org/abs/2010.09806`

[55] Г. А. Вепрев. Масштабированная энтропия типичного преобразования. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 507, 5–14, 2021.

[56] G. Veprev. Non-existence of a universal zero entropy system via generic actions of almost complete growth. `https://arxiv.org/abs/2209.01902`.

[57] А. М. Вершик. О спектральном и метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем. *Докл. АН СССР*, 144:2, 255–257, 1962.

[58] А. М. Вершик. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения. *Докл. АН СССР*, 259:3, 526–529, 1981.

[59] А. М. Вершик. Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории. *Зап. науч. семин. ЛОМИ*, 115, 72–82, 1982.

[60] А. М. Вершик. Универсальное пространство Урысона, метрические тройки Громова и случайные метрики на натуральном ряде. *УМН*, 53:5(323), 57–64, 1998.

[61] А. М. Вершик. Случайное метрическое пространство есть пространство Урысона. *Докл. РАН*, 387:6, 1–4, 2002.

[62] А. М. Вершик. Случайные и универсальные метрические пространства. *Фундаментальная математика сегодня*, МЦНМО, М., 54—88, 2003.

[63] A. M. Vershik. Distance matrices, random metrics and Urysohn space. *The MPIM preprint series*, 2002-8, 2002.

[64] А. М. Вершик. Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы. *Функц. анализ и его прил.*, 36:2, 12–27, 2002.

[65] А. М. Вершик. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 312, 69–85, 2004.

[66] А. М. Вершик. Случайные метрические пространства и универсальность. *УМН*, 59:2(356), 65–104, 2004.

[67] А. М. Вершик. Информация, энтропия, динамика. Математика XX века: взгляд из Петербурга, МЦНМО, 47–76, 2010.

[68] A. M. Vershik. Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants. *Markov Processes and Related Fields*, 16:1, 169–185, 2010.

[69] А. М. Вершик. Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром. *Алгебра и анализ*, 23:1, 111–135, 2011.

[70] А. М. Вершик. Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр. *Функц. анализ и его прил.*, 45:3, 16–33, 2011.

[71] A. M. Vershik. Long History of the Monge-Kantorovich Transportation Problem. *Math Intelligencer*, 35, 1–9, 2013.

[72] А. М. Вершик. Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость. *УМН*, 72:2(434), 67–146, 2017.

[73] А. М. Вершик. Одномерные центральные меры на нумерациях упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.*, 56:4, 17–24, 2022.

[74] А. М. Вершик. Каталитические инварианты групп преобразований с инвариантной мерой и матричные распределения. (Готовится к печати)

[75] А. М. Вершик, А. Д. Горбульский. Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр. *ТВП*, 52:3, 446–467,2007.

[76] A. M. Vershik, U. Haböck. Compactness of the congruence group of measurable functions in several variables. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 334, 57–67, 2006.

[77] A. M. Vershik, U. Haböck. On the classification problem of measurable functions in several variables and on matrix distributions. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 441, 119–143, 2015.

[78] А. М. Вершик, М. А. Лифшиц. mm-энтропия банахова пространства с гауссовской мерой. *Теория вероятн. и ее примен.* 68:3, 2023 (в печати).

[79] A. M. Vershik, A. N. Livshits. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics. *Adv. Sov. Math.*, 9, 185–204, 1992.

[80] А. М. Вершик, Ф. В. Петров. Предельные спектральные меры матричных распределений метрических троек. *Функц. анализ и его прил.*, 2, 2023 (Принята к печати).

[81] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий. Универсальная адическая аппроксимация, инвариантные меры и масштабированная энтропия. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 81:4, 68–107, 2017.

[82] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий. Об универсальном борелевском адическом пространстве. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 468, 24–38, 2018.

[83] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий. Комбинаторные инварианты метрических фильтраций и автоморфизмов; универсальный адический граф. *Функц. анализ и его прил.*, 52:4, 23–37, 2018.

[84] A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces. *Central European Journal of Mathematics*, 11 (3), 379–400, 2013.

[85] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и теоремы вложения. *Функц. анализ и его прил.*, 47:3, 1–11, 2013.

[86] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения. *УМН*, 69:6(420), 81–114, 2014.

[87] T. Yu, G. Zhang, R. Zhang. Discrete spectrum for amenable group actions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 41(12):5871, 2021.

[88] П. Б. Затицкий. О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы. *Функц. анализ и его прил.*, 48:4, 70–74, 2014.

[89] П. Б. Затицкий. Масштабирующая энтропийная последовательность как метрический инвариант динамических систем. Диссертация, ПОМИ, Санкт-Петербург, 2014.

[90] П. Б. Затицкий. Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 432, 128–161, 2015.

[91] П. Б. Затицкий. О возможной скорости роста масштабирующей энтропийной последовательности. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 436, 136–166, 2015.

[92] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров. Об исправлении метрик. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 390, 201–209, 2011.

[93] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров. О субаддитивности масштабирующей энтропийной последовательности. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 436, 167–173, 2015.

[94] Y. Zhao, Y. Pesin. Scaled entropy for dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 158, 2, 447–475, 2015.

[95] Y. Zhao, Y. Pesin. Erratum to: Scaled entropy for dynamical systems. J. *Stat. Phys.*, 162, 6, 1654–1660, 2016.