Задачи студенческого конкурса Санкт-Петербургского Математического Общества. 2010 год.

Вниманию петербургских студентов-математиков предлагается домашний конкурс. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. Большинство участников представляло мат-мех СПбГУ, на предыдущем конкурсе один из победителей был с физ-фака.

Победители конкурса получают премии Матобщества.

Студенты из других городов или стран могут присылать свои решения по электронной почте (см. ниже) на русском или английском языке. Жюри обещает проверить их и сообщить результаты проверки участникам. Большое количество способных студентов в мире и скромные финансовые возможности Общества не позволяют, к сожалению, обещать премии иногородним участникам.

Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач, в основном, исследовательского характера, которые не решаются одним приемом, а требуют серьезных и неспешных раздумий.

Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Образовано жюри в составе Д. В. Карпов, А. И. Назаров, Ф. В. Петров (председатель).

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов. Итоги среди первокурсников будут подводиться отдельно, если только они не победят всех, как случалось. Допускаются коллективные (не более трех человек) работы.

В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Условия задач размещены на мат-мехе СПбГУ и на студенческой странице сайта Санкт-Петербургского математического общества

Срок подачи работ **15 мая 2010 г.**

Текст решений должен быть аккуратно оформлен и подписан (фамилия, имя, отчество, университет, факультет, курс, группа).

Решения можно (этот способ рекомендуется!) набрать в TeXe и послать .tex, .dvi или .pdf файл по адресу fedyapetrov@gmail.com; сдать Татьяне Олеговне Евдокимовой (мат-мех, кафедра анализа, комн. 4518) или оставить на вахте в ПОМИ РАН (наб. р. Фонтанки, 27) на имя Ф. В. Петрова с пометкой *студенческий конкурс*.

Условия задач

1. Плоскость разбита на параболы (каждая точка плоскости принадлежит ровной одной параболе). Обязательно ли все их оси сонаправлены?

2. а) Существует ли такое бесконечномерное сепарабельное банахово пространство X, что любое банахово пространство Y, изоморфное X, линейно изометрично X?

   б) А не сепарабельное?

3. Рассмотрим утверждение $P(k, n)$: если в некотором поле -1 есть сумма k квадратов, то -1 есть сумма конечного количества n-ых степеней.

   а) Докажите $P(1, n)$ при всяком n.

   б) Докажите $P(k, 4)$ при всяком k.

   в) Верно ли утверждение $P(k, n)$ при всех k, n?

4. Функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f(x) = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})$ для всякого $x \in [0, 1]$. Обязательно ли $f(x) = c(1 - 2x)$ при некотором вещественном c, если

   а) $f \in C^2[0, 1]$; б) $f \in C^1[0, 1]$; в) $f \in C[0, 1]$?

5. Простое число $p > 3$ и целые a, b таковы, что $a^2 + ab + b^2$ делится на p. Докажите, что $(a + b)^p - a^p - b^p$ делится а) на p^2; б) на p^3.

6. Докажите, что произвольное (не обязательно счетное) объединение невырожденных замкнутых а) отрезков на прямой; б) треугольников на плоскости измеримо по Лебегу.

7. Докажите, что при всяком натуральном n на плоскости можно выбрать многоугольники F, F_1, F_2, ..., F_n, получающиеся друг из друга параллельными переносами, так, что никакие два из них не имеют общих внутренних точек, но F и F_i имеют общие (граничные) точки при всяком $i = 1, 2, \dots, n$.

8. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ сферу $\mathbb{S}^{d-1}$ и точку P. Назовем характеристикой вписанного в сферу симплекса T

   а) произведение объема T на сумму квадратов расстояний от P до вершин T;

   б) произведение объема T на сумму квадратов попарных расстояний между вершинами T.

   Докажите, что если вписанный в сферу многогранник разбит на вписанные в нее симплексы, то сумма их характеристик не зависит от способа разбиения α) при $d = 2$; β) при $d = 3$; γ) при произвольном d (таким образом, в задаче 6 вопросов, соответствующих элементам множества $\{a, b\} \times \{\alpha, \beta, \gamma\}$).

9. Рассмотрим топологическое пространство $\mathbb{R}^\infty$ всех вещественных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ с топологией прямого произведения. Назовем две последовательности x, y эквивалентными, если $x = \lambda y$ при некотором $\lambda > 0$. Пространство ненулевых классов эквивалентности, наделенное фактортопологией, назовем S (это бесконечномерный аналог сферы). Докажите, что пространство S

   а) хаусдорфово, но

   б) любая непрерывная функция $S \to \mathbb{R}$ постоянна.

10. Для данного $q > 1$ положим

$$F(t) = \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{x dx}{\sqrt{1 + tx - |x|^q}},$$

где x_1 и x_2 — корни знаменателя. Легко видеть, что $x_{1,2}(0) = \mp 1$ и $F(0) = 0$.

а) Вычислите $F'(0)$.

б) Найдите все значения параметра q, для которых $F'(0) = 0$.

11. Для положительного рационального числа x обозначим через $\ell(x)$ высоту цепной дроби числа x (иными словами, $\ell(x)$ есть количество шагов в алгоритме Евклида для числителя и знаменателя дроби, задающей x.) Так, $\ell(17/5) = 3$, так как $17/5 = 3 + 1/(2 + 1/2)$ Докажите а) при $r = 2$; б) при любом положительном рациональном r, что для некоторых положительных констант $c_1(r)$, $c_2(r)$ имеет место неравенство $c_1(r) \cdot \ell(x) \leqslant \ell(rx) \leqslant c_2(r) \cdot \ell(x)$.

    Постарайтесь получить как можно лучшие оценки на $c_1(r)$, $c_2(r)$ в терминах r.

12. В графе G (неориентированном, без петель и кратных ребер) $3n$ вершин. Вершины G можно разбить на три множества по n вершин так, что в каждом из множеств любые две вершины смежны. Однако среди любых $n + 1$ вершин графа G найдутся две несмежные. Обозначим через $f(n)$ наименьшее количество цветов, в которое заведомо можно покрасить правильным образом вершины такого графа. (Напомним, что раскраска называется правильной, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.)

    а) Докажите, что $f(5) = 8$.

    б) Докажите, что $f(n) \leqslant 8n/5$ при всех n.