Задачи конкурса Санкт-Петербургского Математического Общества 2012-13 учебного года.

1. Рассмотрим в n-мерном пространстве целочисленные вектора $v_1, \ldots, v_{n+1}$, координаты каждого из которых взаимно просты в совокупности. Обозначим через d_i объем параллелепипеда, натянутого на все эти вектора, кроме v_i. Предположим, что $d_1, \ldots, d_{n+1}$ — взаимно простые в совокупности натуральные числа. Докажите, что любые n из них взаимно просты в совокупности.

2. Даны натуральное число N и вещественное положительное p. При каких условиях на p и N множество тригонометрических многочленов $\sum\limits_n a_n e^{inx}$ таких, что $a_n = 0$ при $|n| \leq N$, плотно в $L^p(0, 2\pi)$? (напомним, что топология в L^p определяется нормой либо квазинормой $\|f\| = (\int_0^{2\pi} |f(x)|^p)^{1/p}$).

3. Мальчик Паша нарисовал на клечатой плоскости конечную несамопересекающуюся ломаную длины n, идущую по линиям сетки. После этого он в каждой клетке написал число ее ребер, лежащих на ломаной. И забыл обо всем этом. Коварный мальчик Дима стер ломаную, но, чтобы поиздеваться над Пашей, оставил цифры в клетках. При каких n Паша сможет восстановить ломаную?

4. Рассмотрим кольцо остатков по модулю n. Множество A этого кольца назовем свободным от произведений, если $xy \neq z$ для всех (не обязательно различных) $x, y, z \in A$. Наибольшее количество элементов в свободном от произведений подмножестве обозначим через $f(n)$.

а) Докажите, что $f(n) = (n-1)/2$ для простого нечетного n.

б) Существует ли такое n, что $f(n) > n/2$?

5. Рассмотрим уравнение $1 + t/1! + t^2/2! + \ldots + t^n/n! = 0$ при нечётном n. Докажите, что оно имеет единственый вещественный корень $g(n)$ и найдите

а) предел $\lim g(n)/n$;

б) как можно более точную асимптотику последовательности $g(n)$.

6. Три узника сидят каждый в своей камере. Надзиратель сообщает узникам, что на следующий день запустит один из двух процессов:

(a) Для каждого натурального n в момент времени $1/n$ секунды до полуночи ровно в одной камере включается свет (и сразу гаснет).

(b) Для конечного количества натуральных n происходит то же, что в (a), а для всех остальных в момент времени $1/n$ секунды до полуночи свет включается ровно в двух камерах.

В полночь каждый из узников объявляет, какой процесс запускал наблюдатель. Если хотя бы двое угадали, их всех отпускают.

Можно ли гарантированно этого добиться?

(Узники могут заранее договориться и могут помнить и обрабатывать бесконечно много информации; скорость света бесконечна, и т.д.)

7. Непостоянные комплексные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные критические значения (то есть если $f'(a) = g'(b) = 0$, то $f(a) \neq g(b)$). Докажите, что многочлен $f(x) - g(y)$ неприводим.

8. Пусть G — конечная группа порядка n, имеющая k классов сопряженных элементов. Обозначим через $m := |G : [G, G]|$ индекс коммутатора этой группы.

а) Докажите, что $n + 3m \geq 4k$.

б) Опишите группы, для которых достигается равенство.

9. Рассмотрим два конечных семейства конечных множеств: семейство $\mathcal{A}$ состоит из a-элементных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$; семейство $\mathcal{B}$ из b-элементных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$. При этом $|A_i \cap B_j| = \emptyset$ если и только если $i = j$. Обозначим через $n(a, b)$ наибольшее возможное значение при этих условиях величины $|\cup A_i|$ (таким образом, максимум берется в том числе по m). Докажите, что а) $n(a, b) < \infty$ при всех $a, b \geq 0$; б) $n(a, b - 1) = n(b, a - 1)$ при всех $a, b \geq 1$.

10. На множестве положительных чисел задано некоторое вероятностное распределение X. Из одной и той же точки плоскости начинают прыгать две лягушки, каждая из которых выбирает длину своего прыжка случайно согласно распределению X, а направление случайно и равномерно. (Направление и длина каждого прыжка независимы, так же независимы разные прыжки и поведения лягушек). Первая лягушка сделала n прыжков, а вторая m (где $m, n > 0$ и $m+n > 2$). Докажите, что вероятность того, что первая лягушка дальше от исходной точки, чем вторая, равна $n/(n + m)$.

11. Несколько мальчиков “раскидывают на морского”, кому водить в игре. Для этого каждый из них одновременно с другими “выбрасывает” на пальцах число от 0 до 5. Числа складываются и сумма отсчитывается по кругу, начиная с заранее выбранного мальчика (ему соответствует ноль). Водить будет тот, на ком остановится счёт.

При каком числе мальчиков этот метод является справедливым, то есть вероятность водить одинакова у всех мальчиков?

12. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ имеется система единичных шаров такая, что любая (аффинная) k-мерная плоскость ($k < d$ — данное натуральное число) пересекает хотя бы один из них. Докажите, что $\sum r_i^{k-d} = +\infty$, где r_i — расстояния от начала координат до центров шаров.

13. Пусть $c(n)$ — наибольшее положительное число, для которого верно следующее утверждение. Пусть A — выпуклое подмножество куба $[-1, 1]^n$, содержащее как минимум по одной точке из каждой пары противоположных граней (старшей размерности). Тогда в A найдется точка, каждая координата которой по абсолютной величине не меньше $c(n)$. Найдите $c(n)$ при а) $n \leq 3$; б) $n = 4$; в) произвольном данном n.

14. Пусть ω_1, ω_2 — две окружности на плоскости, причем ω_2 лежит строго внутри ω_1. D — замыкание области между ω_1 и ω_2. Непрерывная функция $F : D \to \mathbb{R}$ называется локально вогнутой, если вогнуто (выпукло вверх) ее сужение на любой отрезок, лежащий в D. Локально вогнутая функция F называется минимальной локально вогнутой в D, если для любой $x \in D$ неравенство $F(x) \leq G(x)$ выполнено для любой локально вогнутой в D функции G, такой что $F = G$ на ω_1. Пусть F — минимальная локально вогнутая функция в D.
а) Докажите, что множество D можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых областей и отрезков, соединяющих точки границы (отдельная точка границы также считается отрезком), так что функция F линейна на каждом элементе

разбиения.
б) Докажите, что в предположениях пункта а) разбиение можно выбрать таким образом, чтобы каждый отрезок разбиения либо не пересекал окружность ω_2, либо касался ее.