Санкт-Петербургское математическое общество объявляет традиционный заочный студенческий конкурс по решению задач. Предлагаемые задачи различны по трудности — от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Принять участие в конкурсе может один студент или группа (обычно до трех человек) студентов любого петербургского ВУЗа. Итоги среди первокурсников проводятся отдельно. Решения, присланные иногородними участниками, будут проверены, для лучших из них предусмотрен специальный приз.

Присылать решения можно до 10 мая 2015 года по электронной почте на адрес spbmathcontest@gmail.com или передавать Ф. В. Петрову тем или иным способом (например, оставляя на вахте ПОМИ). Разрешается (и приветствуется) посылать решения по мере их появления, в этом случае будет предоставлена возможность исправить ошибки.

Просим участников не злоупотреблять при решении задач поиском в интернете. В случае возникновения интереса мы можем рассмотреть вопрос о проведении конкурса по поиску математических фактов в интернете, а это конкурс по решению задач.

Задачи конкурса Санкт-Петербургского Математического Общества весеннего семестра 2014-15 учебного года.

1. а) Докажите, что в сепарабельном гильбертовом пространстве H найдется такая полная система векторов, что любая ее бесконечная подсистема тоже полная (система векторов называется полной, если она не содержится ни в одном замкнутом линейном подпространстве, отличном от самого пространства).

б) Верно ли то же в любом сепарабельном банаховом пространстве?

2. Хромой король может ходить в трех направлениях: вверх, вправо, и влево-вниз. Множество клеток некоторой прямоугольной доски разбито на непересекающиеся множества, каждое из которых есть замкнутая несамопересекающаяся траектория хромого короля. Докажите, что среди этих траекторий тех, которые обходятся хромым королем по часовой стрелке, столько же, сколько обходящихся против часовой стрелки.

3. В эллипс с фокусами F_1 и F_2 вписаны две окружности, имеющие общую хорду PQ (окружность называется вписанной в эллипс, если ее центр лежит на большой оси и она касается эллипса в двух симметричных относительно большой оси точках). Докажите, что биссектрисы угла между окружностями в точке P суть биссектрисы угла между прямыми PF_1, PF_2.

4. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана векторная норма $\|\cdot\|$. Определим “число π” этой нормы как половину длины единичной окружности (как кривой в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$ с метрикой, определяемой нормой). Докажите, что для двойственной нормы $\|x\|^* = \sup\{(x,y) : \|y\| \le 1\}$ “число π” принимает то же значение, что для исходной.

5. Пусть локально суммируемая функция F на пространстве $\mathbb{R}^d$ позитивно однородна (т.е. $F(\lambda x) = |\lambda| F(x))$ и субгармонична (среднее по шару не меньше значения в центре шара).Обязательно ли функция F почти всюду неотрицательна, если а) $d = 2$; б) $d > 2$?

6. На последовательных сторонах квадрата выбраны точки A, B, C, D. Разделим квадрат на n^2 равных квадратов и закрасим те из них, которые имеют общие точки с четырехугольником $ABCD$. Докажите, что можно выбрать n закрашенных квадратов так, что вектора, соединяющие их центры, не параллельны сторонам квадрата (иными словами, стоящие в них ладьи не бьют друг друга).

7. В метрическом пространстве каждое открытое множество есть счетное объединение открытых шаров. Следует ли из этого, что пространство сепарабельно?

8. Пусть V — евклидово пространство с базисом $v_1, \dots, v_n$, а $v_1^*, \dots, v_n^*$ — двойственный базис, то есть $(v_i^*, v_j) = \delta_{i,j}$. Докажите, что любой ненулевой вектор в V может быть единственным образом записан в виде $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$, где c_i — неотрицательные числа, а $u_i \in \{v_i, -v_i^*\}$.

9. Докажите, что существует бесконечно много троек (x, y, z) натуральных чисел таких, что каждое из шести чисел $xy + z$, $yz + x$, $zx + y$, $xy + x + y$, $yz + y + z$, $zx + z + x$ — квадрат натурального числа.

10. Дано четное натуральное число n и нечетное простое число p. Двое поочередно выбирают целые числа: первый выбирает a_1, потом второй выбирает a_2, и так далее, пока второй

не выберет a_n. Первый игрок выигрывает, если многочлен $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ имеет корень в поле остатков по модулю p. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

11. Дано натуральное число n. В симметрической группе S_{4n} зафиксируем инволюцию без неподвижных точек π_0 (то есть перестановку, имеющую $2n$ циклов длины 2). Выберем случайно один из $(4n-1)!$ длинных циклов (то есть циклов длины $4n$) C согласно равномерному распределению. Найдите вероятность того, что произведение $\pi_0 C$ — тоже длинный цикл.

12. Пусть x, y — два положительных числа, $s_k = \sqrt[k]{\frac{x^k+y^k}{2}}$ — их среднее степенное. Докажите, что при любом натуральном k имеет место неравенство $s_k \cdot s_{k+2} \leq s_{k+1}^2$.

13. N волейбольных команд играют однокруговой турнир. В каждом матче вероятности побед соперников равны по $1/2$, результаты разных матчей независимы в совокупности. Пусть победитель турнира одержал побед на X больше, чем потерпел поражений, $\mathbb{E}(X)$ — математическое ожидание случайной величины X. Докажите, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{\sqrt{N \cdot \ln N}}$$

и найдите его.

14. На плоскости, но не на одной прямой, сидят n жуков $B_1, \ldots, B_n$. В некоторый момент они начинают преследовать друг друга по циклу: жук B_i ползет с единичной скоростью в направлении жука B_{i+1} (считаем $B_{n+1} = B_1$). Это происходит, пока какие-то два жука не встретятся.

а) Докажите, что встреча произойдет за конечное время.

б) Найдите наименьшее время, за которое это гарантированно произойдет, если $n = 2015$ и периметр замкнутой ломаной $B_1 \ldots B_n B_1$ равен 1.

в) Докажите, что если $n = 3$, то встретятся они все вместе одновременно.

г) Обязательно ли при $n = 4$ жуки встретятся одновременно?