Студенческий конкурс решения задач 2001–2002 гг.

Вниманию студентов университета предлагается домашний конкурс. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. Среди их участников есть как недавние, так и очень давние выпускники мат-меха. Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач, в основном, исследовательского характера, которые не решаются одним приемом, а требуют серьезных и неспешных раздумий. Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество образует жюри и выделяет денежные призы для награждения победителей.

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов. Итоги среди первокурсников будут подводиться отдельно. Допускаются коллективные (не более трех человек) работы.

В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Предполагается провести специальное заседание на факультете, посвященное подведению итогов конкурса и обсуждению решений. Наиболее интересные решения могут быть опубликованы.

Условия задач размещены на стенде рядом с кафедрой математического анализа. Они также доступны на странице С.-Петербургского математического общества

http://www.mathsoc.spb.ru/

и по адресу

http://logic.pdmi.ras.ru/~vsemir/konkurs2001

Решения можно сдавать до **20 февраля 2002 г.** К. П. Кохасю (кафедра анализа), М. А. Всемирнову, А. И. Генералову (кафедра алгебры). Решения также можно оставить в канцелярии ПОМИ РАН (наб. р. Фонтанки, 27) на имя М. А. Всемирнова (с пометкой “студенческий конкурс”). Текст решений должен быть аккуратно оформлен и подписан (фамилия, инициалы, курс, группа).

Условия задач

Задача 1. *Периодическое рациональное отображение.*

Рациональное отображение плоскости в себя, заданное формулой $f(x,y) = (1/y, x(1+y))$, имеет период 5, т. е. его пятая итерация тождественна. Существует ли (нетождественное) рациональное преобразование плоскости с целыми коэффициентами, имеющее период 7?

Задача 2. *Корни комплексного многочлена и его производной.*

Пусть P — многочлен с комплексными коэффициентами степени n и $A = (a_1, \ldots, a_n)^\intercal$ — вектор-столбец, состоящий из его корней (в произвольном порядке). Построим новый вектор $B = (b_1, \ldots, b_{n-1}, \beta)^\intercal$, где b_1, ..., b_{n-1} — корни производной P' а $\beta = \sum a_i/n = \sum b_j/(n-1)$. Известно, что для любого многочлена корни производной лежат в выпуклой оболочке корней самого многочлена. Поэтому существует такая стохастическая матрица M (т.е. матрица из вещественных неотрицательных чисел с суммами по строкам, равными 1), что ее последняя строка есть $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ и $B = MA$. Докажите, что матрицу M можно выбрать дважды-стохастической, т. е. с суммами по столбцам, также равными 1:

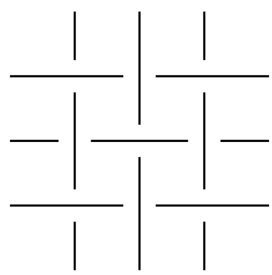
(А) для $n = 3$;

(Б) для $n = 4$;

(В) для произвольного n.

Задача 3. *Плоская проекция набора скрещивающихся прямых.*

Дана матрица P размера $m \times n$, состоящая из нулей и единиц. Найти необходимые и/или достаточные условия, при которых существует набор прямых a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n в пространстве $\mathbb{R}^3$, проекции которых на плоскость xy суть соответственно прямые $x = 1$, ..., $x = m$, $y = 1$, ..., $y = n$, причем над точкой (i, j) прямая a_i выше прямой b_j, если $P_{ij} = 1$, и ниже, если $P_{ij} = 0$. На рисунке приведена геометрическая иллюстрация для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Задача 4. *Разложимые косые функции.*

Функция трех переменных $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ называется *кососимметрической*, если она удовлетворяет тождеству $F(x,y,z) = -F(y,x,z) = -F(x,z,y)$. Оператор альтернирования $\mathrm{Alt}(F)(x,y,z) = F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) - F(y,x,z) - F(z,y,x) - F(x,z,y)$ превращает любую функцию в кососимметрическую.

Кососимметрическая функция называется *вполне разложимой*, если она получается альтернированием функции вида $f(x)g(y)h(z)$ для некоторых функций одной переменной f, g, h.

Кососимметрическая функция называется *частично разложимой*, если она получается альтернированием функции вида $f(x,y)g(z)$ для некоторой функции двух переменных f и некоторой функции одной переменной g.

(А) Докажите, что аналитическая функция F вполне разложима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству

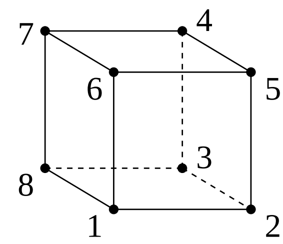
$$F(x_1,x_2,x_5)F(x_3,x_4,x_5)-F(x_1,x_3,x_5)F(x_2,x_4,x_5)+F(x_1,x_4,x_5)F(x_2,x_3,x_5)=0.$$

(Б) Приведите пример неаналитической функции, которая удовлетворяет этому тождеству, но не является вполне разложимой.

(В) Сформулируйте и докажите аналогичный критерий *частичной* разложимости кососимметрических функций.

Задача 5. *Вполне унимодальные псевдо-булевы функции.*

Псевдо-булева функция (ПБФ) n переменных — это нумерация вершин n-мерного куба, т.е. взаимно-однозначное отображение $\{0,1\}^n \to \{1,2,\ldots,2^n\}$. Назовем ПБФ *вполне унимодальной*, если она имеет единственный локальный минимум на каждой двумерной грани куба. (Например, функция, принимающая в последовательных вершинах квадрата значения 1234, этим свойством обладает, а функция 1324 — нет: для нее 1 и 2 являются двумя локальными минимумами). На рисунке приведен пример вполне унимодальной ПБФ размерности 3:



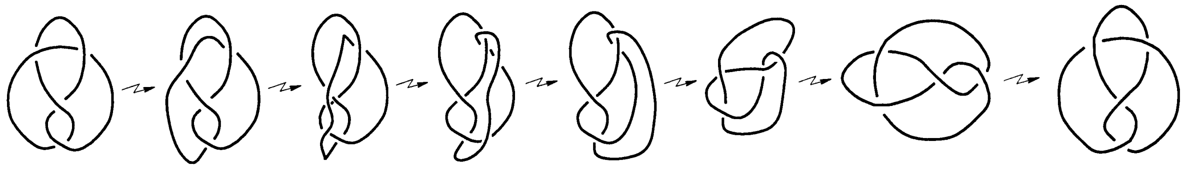
(А) Найдите число вполне унимодальных псевдобулевых функций b_n для малых значений размерности (скажем, $n=3,4,5$).

(Б) Найдите асимптотику (или какие-то — верхние/нижние — асимптотические оценки) для числа b_n при $n\to\infty$.

В обоих случаях разрешается вести подсчет с учетом или без учета симметрии куба; если симметрии учитываются, то используемую группу следует явно описать.

Задача 6. *Петля в пространстве узлов.*

На рисунке показана непрерывная деформация узла “восьмерка” K в его зеркальное отражение K', т.е. непрерывное отображение $f:[0,1]\times S^1\to\mathbb{R}^3$, которое при крайних значениях первого аргумента (0 и 1) дает соответственно узлы K и K'.



Взяв зеркальные образы всех узлов, участвующих в этой деформации, мы получим отображение $\bar{f} : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$, осуществляющее деформацию K' в K. Объединение f и f' дает замкнутый путь в пространстве узлов $g : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$. Верно ли, что этот путь можно стянуть в точку: существует ли непрерывное отображение $G : D^2 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$, ограничение которого на границу S^1 диска D^2 совпадает с g?

Задача 7. *Многочлены над конечными полями.*

(А) Разложите на множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — нечетное простое) многочлен $\sum\limits_{k=0}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} x^k$.

(Б) Пусть p — простое, $p \equiv 1 \pmod 6$. Докажите, что многочлен

$$G(x) = \sum_{k=0}^{(p-1)/3} \frac{(3k)!}{(k!)^3} x^k$$

не имеет корней в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(В) Верно ли, что $G(x)$ раскладывается на квадратичные множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 8. *Отношение гамма-функций.*

Рассмотрим функцию

$$I(p) = \frac{\Gamma(2-p)\Gamma(3p)}{(p\Gamma(p))^2}, \qquad 0 < p < 1 \,.$$

(А) Докажите, что $I(p)$ – выпуклая функция.

(Б) Верно ли, что минимум $I(p)$ достигается при $p = 1/2$?

Задача 9. *Примитивные матрицы.*

Напомним, что $GL(2,\mathbb{Z})$ – группа матриц второго порядка с целыми элементами и определителем ± 1. Матрица $M \in GL(2,\mathbb{Z})$ называется *примитивной*, если не существует $n \geq 2$ и матрицы $K \in GL(2,\mathbb{Z})$ таких, что $M = K^n$.

(А) Проверьте, будут ли следующие матрицы примитивными:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 33 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Б) Найдите какие-либо достаточные и/или необходимые условия примитивности.

Задача 10. *Минимизация функционала.*
Для каждого $b \geq 1$ через C_b обозначим множество всех функций $f \in C[0,1]$, для которых $1 \leq f(x) \leq b$ при всех x из $[0,1]$. Пусть

$$G(b) = \inf_{f \in C_b} \int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}\,dx.$$

(А) Для каждого $b \geq 1$ найдите оценки сверху и/или снизу для $G(b)$.

(Б) Найдите точное значение $G(b)$.