СТУДЕНЧЕСКИЙ КОНКУРС РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 2003 ГОДА

Вниманию студентов предлагается домашний конкурс. Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество выделяет 5000 рублей для награждения победителей и образует жюри.

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов. Итоги среди первокурсников будут подводиться отдельно. Допускаются коллективные (не более трёх человек) работы.

В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Условия задач помещены на стенде рядом с кафедрой математического анализа мат-меха, а также на студенческой странице сайта Санкт-Петербургского математического общества:

http://www.mathsoc.spb.ru

Решения можно сдавать до **29 апреля 2003 г.** А. А. Лодкину (кафедра анализа), С. С. Подкорытову (кафедра геометрии) или секретарю декана.

Текст решений должен быть аккуратно оформлен и подписан (фамилия, имя, курс, группа). На тетради должно быть написано: НА СТУДЕНЧЕСКИЙ КОНКУРС.

Работы по проведению конкурса поддержаны грантом ФЦП Интеграция, N Б0029.

Условия задач

1. Конечный набор гиперплоскостей разбивает пространство $\mathbb{R}^d$ на выпуклые многогранные куски. Будем называть два куска *соседними*, если они имеют хотя бы одну общую точку (куски считаем замкнутыми). При *раскраске* разбиения соседние куски должны быть разного цвета (каждый кусок красится одним цветом). Обозначим через $c(d)$ наименьшее число цветов, достаточное для раскраски произвольного разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ конечным набором гиперплоскостей в общем положении. Если такого числа нет, то положим $c(d) = \infty$. (Гиперплоскости находятся *в общем положении*, если любые k из них пересекаются по аффинному подпространству размерности $d - k$ при $k \leqslant d$ и не имеют ни одной общей точки при $k > d$.)

а) Доказать, что $5 \leqslant c(2) \leqslant 6$.
б) Доказать, что $c(d) = \infty$ при $d \geqslant 4$.
в) Верно ли, что $c(3) < \infty$?
г) Найти $c(2)$.

2. Для вещественной квадратной матрицы B порядка d положим

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{|Bx|}{|x|}.$$

Верно ли неравенство

$$\|A_1 A_2 \ldots A_n\| \geqslant \|A^n\|,$$

где каждый сомножитель A_i равен A или A^* (звёздочка обозначает сопряжение, т. е. транспонирование)

а) для $n = 2$,
б) для $n = 3$,
в) для произвольного n?

3. Пусть p — простое число. Доказать, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix},$$

как многочлен от трёх переменных x, y, z, раскладывается над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ в произведение линейных форм $ax + by + cz$.

4. Пусть на отрезке $[0, 1]$ отмечены k точек. Доказать, что на этом отрезке можно отметить n точек так, что среди $n + k + 1$ отрезков, на которые отмеченные точки разбивают отрезок $[0, 1]$, $n + 1$ отрезков будут равны, а оставшиеся k отрезков будут их не больше. (Допускаются отрезки нулевой длины.)

5. Пусть $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 2)$ — квадратичные формы, матрицы которых имеют нулевой след. Доказать, что существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, что $a(x) = b(x) = 0$.

6. Даны три отрезка $a, b, c \subset \mathbb{R}^3$. Пусть

$$K = \operatorname{conv}(b \cup c), \quad L = \operatorname{conv}(c \cup a), \quad M = \operatorname{conv}(a \cup b)$$

(здесь $\operatorname{conv} E$ — выпуклая оболочка множества E). Предположим, что каждое из множеств $L \cap M$, $M \cap K$, $K \cap L$ имеет непустую внутренность. Верно ли, что тогда множество $K \cap L \cap M$ непусто?

7. Доказать, что группы $GL_n(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, попарно неизоморфны.

8. Верно ли, что на любой замкнутой гладкой пространственной кривой найдутся две точки, касательные в которых параллельны?

9. Привести пример таких негомеоморфных пространств X и Y, чтобы пространства $X \times I$ и $Y \times I$, где I — отрезок, были гомеоморфны.

10. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — счётное всюду плотное множество, $E \subset \mathbb{R}^n$ — множество положительной меры. Доказать, что дополнение множества

$$Q = D + E = \{\, x + y \mid x \in D, y \in E \,\}$$

имеет нулевую меру.

11. Выяснить, сходится ли равномерно на всей вещественной оси ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n + \frac{x}{n}).$$

12. Доказать, что кручение замкнутой гладкой кривой, лежащей на замкнутой выпуклой поверхности строго положительной гауссовой кривизны, обращается в нуль хотя бы в одной точке.

13. Пусть s — некоторый d-мерный симплекс. Обозначим через z его центр тяжести (барицентр), через o центр сферы, описанной вокруг s, а через i центр сферы, вписанной в s.

а) Пусть $d = 2$. Предположим, что $o = (0, 0)$, $z = (1, 0)$. Доказать, что тогда точка i лежит в круге радиуса 1 с центром в точке $(2, 0)$ и может оказаться любой его точкой.

б) Найти множество возможных значений тройки расстояний $(|oi|, |iz|, |zo|) \in \mathbb{R}^3$ при данном d.

14. Пусть среди всех конечных слов из нулей и единиц выделены некоторые, называемые допустимыми. Известно, что к любому слову можно добавить по одной цифре в начало и в конец так, что получится допустимое слово. Рассмотрим случайную бесконечную последовательность нулей и единиц (элементы последовательности независимы, нуль и единица равновероятны). Верно ли, что с положительной вероятностью эту последовательность можно разбить на допустимые слова?