СТУДЕНЧЕСКИЙ КОНКУРС РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1993 ГОД

Вниманию студентов Университета предлагается домашний конкурс. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. Среди их участников есть как недавние, так и очень давние выпускники мат-меха. Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач в основном исследовательского характера, которые не решаются одним приемом, а требуют серьезных и неспешных раздумий. Конкурс этого года, как и два предыдущих, проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество образует жюри (председатель — А.М.Вершик, секретарь — А.А.Лодкин) и выделяет суммы для награждения победителей (оно не может в данный момент сообщить размер сумм, так как занято подсчетом нулей в них).

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов мат-меха, физического и ПМ-ПУ факультетов. Итоги среди первокурсников будут подводиться отдельно.

В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Предполагается провести специальное заседание на факультете, посвященное подведению итогов конкурса и обсуждению решений. Наиболее интересные решения могут быть опубликованы.

Решения можно подавать до 15 апреля Андрею Александровичу Лодкину, Константину Петровичу Кохасю (кафедра анализа) или Светлане Ивановне Борисовой (комн. 4518).

Текст решений должен быть аккуратно оформлен и подписан (фамилия, инициалы, курс, группа).

Условия задач имеются в читальном зале.

Текст задач

1*. Пусть $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел,

$$\sum_{k\neq l}\frac{1}{(y_k-y_l)^3}=0\,,\quad \sum_{k\neq l}\frac{1}{(y_k-y_l)^2}=1,\quad \forall l\in\mathbb{Z}.$$

Докажите, что $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — арифметическая прогрессия, бесконечная в обе стороны.

2. Найти все простые p, для которых первые p простых чисел дают различные остатки по модулю p.

3. По набору из n чисел $\{x_1,\ldots,x_n\}$ строится неупорядоченный набор его k-сумм ($k\le n$), то есть сумм вида

$$x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}\,,$$

где $1\le i_1<\ldots<i_k\le n$. При каких n и k по набору k-сумм однозначно восстанавливается исходный набор?

а) Докажите, что при $k=2$ восстановление однозначно $\iff$ n не есть степень двойки.

б) Докажите, что при $k=3$ восстановление однозначно $\iff$ $n\notin\{3,6,27,486\}$.

в) Докажите, что при $k=4$ восстановление однозначно при $n\notin\{4,8,12\}$, причем для $n=4$, $n=8$ однозначности нет. Исследуйте случай $n=12$.

г) Получите какие-либо общие результаты. Например, конечно ли при $k>2$ множество всех таких n, что однозначности восстановления нет, и т.п.

4 Пусть p — простое число и ζ — первообразный корень p-й степени из единицы. Докажите, что любой минор любого порядка от 1 до p матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \ldots & \zeta^{p-1}\\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \ldots & \zeta^{2(p-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \zeta^{(p-1)} & \zeta^{(p-1)2} & \ldots & \zeta^{(p-1)^2}\end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

5. Пусть A и B — квадратные матрицы (над полем $\mathbb{C}$). Докажите эквивалентность следующих утверждений:

1) существует матрица $P\neq 0$ того же порядка, удовлетворяющая условию $AP=PB$;
2) матрицы A и B имеют общее собственное число.

6. Пусть целое число p, $0 \le p \le n$, и линейное подпространство V в пространстве вещественных $n \times n$-матриц удовлетворяют условию: ранг любой матрицы из V ограничен сверху числом p. Докажите, что размерность V не превосходит np.

7. Пусть Γ — граф с N вершинами. $V_k(\Gamma)$ — количество циклов длины k в графе Γ (возможно самопересекающихся, дважды проходящих по одним и тем же ребрам и т.п.).

a) Докажите, что если $V_k(\Gamma') = V_k(\Gamma'')$ при $1 \le k \le N$, то $V_k(\Gamma') = V_k(\Gamma'')$ для всех k.

b) Верно ли, что в условиях пункта a) $\Gamma' = \Gamma''$?

c) Сколько (по порядку величины) может быть неизоморфных графов с N вершинами и одним и тем же набором V_k?

d) А что еще Вы можете сказать по этому поводу?

8. Пусть $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — вещественная последовательность, $p_n \ge 1$,

$$x_n = \sqrt[p_1]{1 + \sqrt[p_2]{1 + \ldots + \sqrt[p_n]{1}}}.$$

Как связана сходимость последовательности (x_n) с поведением последовательности (p_n)? Можете ли Вы предложить необходимые, или достаточные, или необходимые и достаточные условия?

9. Пусть

$$I_n(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t}\, dt,$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Найдите $M_n = \max_{\|\omega\|=1} I_n(\omega)$ при $n = 3, 4$. Можете ли что-нибудь сказать об остальных числах M_n? Верно ли, что эта последовательность ограничена?

10. Оцените сверху меру сечений n-мерного единичного куба гиперплоскостями, проходящими через его центр.

11. Вычислите интеграл

$$I_n = \int\limits_D \frac{\prod\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2 \prod\limits_{i<j}(b_i - b_j)^2}{\prod\limits_{i,j}(a_i + b_j)^2}\, d\lambda_{2n-1},$$

где

$$D = \left\{ (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \;\middle|\; \begin{array}{r} a_1 \ge a_2 \ge \ldots a_n \ge 0, \\ b_1 \ge b_2 \ge \ldots b_n \ge 0, \\ \sum a_i + \sum b_i = 1 \end{array} \right\}$$

(λ_{2n-1} — мера Лебега на гиперплоскости).

12. Пусть F — линейный функционал, заданный на пространстве E вещественных функций в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию:

$$F(fg) = F(f)g(0) + f(0)F(g).$$

a) Докажите, что функционал F имеет вид

$$F(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \qquad (*)$$

для некоторых $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ в случаях:
a1)$E = C^\infty, \quad n = 1$;
a2)$E = C^\infty, \quad n$ любое.

b) Верно ли, что функционал F имеет вид (*) в случае, когда $E = C^1, \quad n = 1$?

13. Пусть $M(x)$ - многочлен, $\int_0^1 M(x)\,dx = 0$, $M(0) = M(1)$; пусть $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, где $a_n = 2^{n!}$. Докажите,что существует такое натуральное число p, не превосходящее степени M, что для всех $x \in [0,1]$

$$\sup_{n \in [a_j, a_{j+1})} \sum_{k=0}^{n-1} M(\{x + k\alpha\}) \quad \asymp \quad a_j^{j-p-1} \ (j \to \infty).$$

14. Пусть $p(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k t}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ — экспоненциальный полином. Пусть известно, что на отрезке $[0,1]$ $|p(t)| \le 1$ всюду, за исключением множества меры $\mu \ll 1$. Оцените $\max_{[0,1]} |p|$ как можно лучше (в оценку должны войти только μ и N !)

15. Пусть функция f измерима на $\mathbb{R}$ и почти всюду конечна, $1 \le p \le \infty$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
1) $\exists C_1 : \forall h \ \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \le C_1$;
2) $\exists C_2 : \ f - C_2 \in L^p$.

16. Существует ли такое непрерывное отображение $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \ge \sqrt{|x - y|} \quad \text{для всех} \quad x, y \in [0,1]?$$

17. Докажите, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(n, \varepsilon)$, что если ломаная с вершинами $x_1, \dots, x_N$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $|x_i - x_{i+1}| \le 1$ для всех i, то хотя бы для одной вершины x_k ее расстояние до выпуклой оболочки множества $\{x_i \mid i \ne k\}$ меньше ε.

18. Какими могут быть углы $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

1) Для данного числа n в эвклидовом пространстве (достаточно большой размерности) существует система из n прямых $l_1, \dots, l_n$, причем

a) l_i и l_j ортогональны, если $|i-j| \geq 2$;
b) угол между прямыми l_i и l_{i+1} равен α, $i = 1, \ldots, n-1$.

2) Для любого натурального n можно найти систему прямых с условиями a) и b.
3) Для любого натурального n можно указать такую систему подпространств $L_1, \ldots, L_n$ данной размерности (например, два), что ортогональные проекторы $P_1, \ldots, P_n$ (P_i — проектор на L_i) подчинены соотношениям

a) $P_iP_j = P_jP_i$, $|i-j| \geq 2$;
$P_i \neq P_j$, $i \neq j$;
b) $P_iP_{i+1}P_i - P_{i+1}P_iP_{i+1} = \cos^2\alpha\,(P_i - P_{i+1})$.

19. a) *(Задача о преследовании)* Пусть K — объединение ребер и вершин додекаэдра, стандартным образом вложенного в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что существует семь таких непрерывных отображений $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, ..., 7$, что для любого непрерывного отображения $g\colon [0,1] \to K$ по крайней мере одно из уравнений $f_i(t) = g(t)$ имеет решение на $[0,1]$. Существует ли набор из шести отображений f_i, обладающий аналогичным свойством?

b) То же для икосаэдра.

20. Найдите все функции $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y). \end{cases}$$

21. Докажите, что уравнение

$$y' = \frac{xy-1}{y}$$

имеет единственное решение $\varphi(x)$, обладающее свойствами:

$$\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \infty), \quad \text{и} \quad \varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

22. Дана такая функция $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x+2y) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(y-2x) \geq 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(y-x) - \dfrac{\partial v}{\partial y}(3x+y) \geq 0 \end{cases}$$

Докажите, что $v \equiv \text{const}$.

23. Докажите, что дифференциальное уравнение

$$y' = y^{2n+1} + p_1(x)y + p_0(x),$$

где $n \in N$, а p_1, p_0 — непрерывные ω-периодические функции, причем $\int_0^\omega p_1(x)\,dx \geq 0$, имеет ровно одно периодическое решение.

24. Для двух гладких векторных полей $f(x)$ и $g(x)$ в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ определим их "произведение" $[f,g] = g_x f - f_x g$ (f_x и g_x — матрицы Якоби). Назовем траекторию $x(\cdot)$ некоторого векторного поля ε-горизонтальной, если существует такой вектор c, что $|x(t) - c| < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$, и ε-вертикальной, если мера максимального промежутка ее существования меньше ε. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют аналитические векторные поля f и g в $\mathbb{R}^n$, все траектории которых ε-горизонтальны, в то время как все траектории векторного поля

a) $f + g$

или

b) $[f, g]$

или

c) полей $f + g$ и $[f, g]$ (при $n \geq 2$)

ε-вертикальны.

Докажите, что при $n = 1$ пары векторных полей, удовлетворяющей условию c), не существует ни для одного $\varepsilon > 0$.

25. На отрезке $\Delta_0 = [0,1]$ случайным образом (с равномерным распределением) выбирается точка a. Затем в качестве промежутка Δ_1 с вероятностью p выбирается отрезок $[0,a]$, а с вероятностью $1-p$ — отрезок $[a,1]$. После этого таким же образом на отрезке Δ_1 строится отрезок Δ_2, и так до бесконечности. Процесс приводит к точке $x \in [0,1]$, общей для всех Δ_n. Найдите распределение случайной величины x.

26. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — независимые равномерно распределенные в $[0,1]$ случайные величины, $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ — та же последовательность, упорядоченная по возрастанию. Каково условное распределение $\alpha_{i-1}^* \mid \alpha_i^* = t$?

27. На решетке $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ определяется случайное блуждание с начальной точкой $(1,1)$ и вероятностями перехода

$$P((n,m),(n+1,m)) = \frac{n}{n+m},$$
$$P((n,m),(n,m+1)) = \frac{m}{n+m}.$$

Докажите, что корректно определен угол, под которым точка уходит на бесконечность, и найдите распределение этого угла. Дайте n-мерное обобщение этого результата.