СТУДЕНЧЕСКИЙ КОНКУРС
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
1998 ГОД

Вниманию студентов Университета предлагается домашний конкурс. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. Среди их участников есть как недавние выпускники мат-меха, так и теперь уже маститые математики. Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач, в основном, исследовательского характера, которые требуют серьезных и неспешных раздумий. Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество образует жюри и награждает победителей.

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов мат-меха, физического и ПМ-ПУ факультетов. Итоги среди первокурсников будут подводиться отдельно.

В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Предполагается провести специальное заседание на факультете, посвященное подведению итогов конкурса и обсуждению решений. Наиболее интересные решения могут быть опубликованы.

Решения можно сдавать до 25 апреля 1998 г. Ирине Евгеньевне Бондарчук (комн. 4518), Константину Петровичу Кохасю (кафедра анализа) или Александру Ивановичу Генералову (кафедра алгебры). Текст решений должен быть аккуратно оформлен и подписан (фамилия, инициалы, курс, группа).

Условия задач имеются в читальном зале и в Интернете:
http://www.pdmi.ras.ru/spbmo/rus/konkurs.html

Текст задач

1. A и B – квадратные матрицы, $AB = BA$. Матрица A – нильпотентна (то есть существует натуральное k, для которого $A^k = 0$). Докажите, что $\det(A+B) = \det B$.

2. а) Известно, что если матрицы A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ коммутируют друг с другом, то $e^{A+B} = e^A e^B$. Приведите пример пары матриц A, $B \in M_2(\mathbb{C})$, который показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

б) Рассмотрим множество

$$X = \left\{(A,B) \in M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \mid AB \neq BA, e^{A+B} = e^A e^B\right\}.$$

Для $(A,B) \in X$ определим $\mu(A,B) = ||A|| + ||B||$, где $||\cdot||$ обозначает эрмитову норму матрицы, т.е. $||C||^2 = \sup\{\lambda \in \mathrm{Sp}(CC^*)\}$. Найдите (по возможности, наиболее точные) оценки сверху и снизу для

$$M = \inf\{\mu(A,B)\,|\,(A,B) \in X\}\,.$$

в) Рассмотрите задачу б) с заменой множества X на

$$X = \left\{(A,B) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})\,|\,AB \neq BA, e^{A+B} = e^A e^B\right\}.$$

г) Обобщите найденные результаты на матрицы произвольного порядка.

3. Напомним, что $GL(2,\mathbb{Z})$ – группа матриц второго порядка с целыми элементами и определителем ± 1. Матрица $M \in GL(2,\mathbb{Z})$ называется *примитивной*, если не существует таких $n \geqslant 2$ и матрицы $K \in GL(2,\mathbb{Z})$, что $M = K^n$. Найдите какое-нибудь общее достаточное условие примитивности и проверьте, будут ли следующие матрицы примитивными: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 33 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Дана последовательность натуральных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и многочлен P степени n с целыми коэффициентами, удовлетворяющий свойству: для всех целых x найдется такой номер j, что $P(x)$ делится на a_j. Докажите, что если $a_k > k^{n+\varepsilon}$, то существует такое j, что для всех $x \in \mathbb{Z}$ $\;P(x)$ делится на a_j.

5. а) Разложите на множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p – нечетное простое) многочлен $\sum\limits_{k=0}^{(p-1)/2} \binom{2k}{k} x^k$.

б) Пусть p – простое, $p \equiv 1 \pmod 6$. Докажите, что многочлен

$$G(x) = \sum_{k=0}^{(p-1)/3} \frac{(3k)!}{(k!)^3} x^k$$

не имеет корней в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

в) Правда ли, что $G(x)$ раскладывается на квадратичные множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

6. Пусть $P_n(x)$ – полиномы Лежандра $\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n\right)$. Докажите тождество:

$$\begin{vmatrix} P_n & P_{n+1} & \dots & P_{n+k} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & \dots & P_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n+k} & \dots & \dots & P_{n+2k} \end{vmatrix} = f(x) \begin{vmatrix} P_n^{(k)} & P_{n+1}^{(k)} & \dots & P_{n+k}^{(k)} \\ P_{n+1}^{(k)} & P_{n+2}^{(k)} & \dots & P_{n+k+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n+k}^{(k)} & \dots & \dots & P_{n+2k}^{(k)} \end{vmatrix},$$

где $f(x) = \mathrm{const}(k,n)\bigl(1-x^2\bigr)^{\frac{k(k+1)}{2}}$.

7. Пусть d, q – натуральные числа, $2 \leqslant d < q$. Для каждого натурального n число

$$f_{d,q}(n) = \#\Big\{(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots) : n = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k d^k,\ 0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant q-1\Big\},$$

равно числу представлений n в избыточной системе счисления с основанием d и "цифрами" от 0 до $q-1$.

а) Найдите рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить $f_{2,3}$, и докажите, что $\min\{\delta > 0 : f_{2,3}(n) = O(n^\delta)\} = \log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

б) Дайте явную формулу для $f_{2,4}$.

8. Пусть n – натуральное число, $n = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j 2^j$ – его двоичное разложение. Положим $s(n) = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j$ и $S(N) = \sum_{n=1}^{N-1} s(n)$. Найдите асимптотику $S(N)$ виде $S(N) = G(N) + R(N)$, где $G(N)$ – главный член, а $R(N)$ – остаток. Докажите, что $R(N)$ равен $O(N)$ и не равен $o(N)$.

9. Как известно (см. задачник Полиа, Сеге), абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ тождественно равен нулю, если он обладает свойством: при всех натуральных k $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{nk} = 0$. Приведите пример такого условно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, $c_n \not\equiv 0$, что при всех натуральных k $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{nk} = 0$.

10. Последовательность a_n вещественных чисел такова, что произведение $P(t) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + t a_n)$ сходится для двух ненулевых значений t. Докажите, что $\sum a_n$ и $\sum a_n^2$ сходятся. Верно ли то же самое для комплексной последовательности a_n?

11. Для каждого $b \geqslant 1$ рассмотрим всевозможные $f \in C[0,1]$, для которых $1 \leqslant f(x) \leqslant b$ при всех x из $[0,1]$. Пусть $F(x) = \int_0^x f$. Найдите $\min\limits_f \int_0^1 \frac{F}{f}$ (как функцию от b).

12. Вычислите интеграл

$$I_n = \int\limits_D \frac{\prod\limits_{i<j} (a_i - a_j)^2 \prod\limits_{i<j} (b_i - b_j)^2}{\prod\limits_{i,j} (a_i + b_j)^2} \, d\lambda_{2n-1},$$

где

$$D = \left\{ (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \;\middle|\; \begin{array}{r} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots a_n \geqslant 0, \\ b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots b_n \geqslant 0, \\ \sum a_i + \sum b_i = 1 \end{array} \right\}$$

(λ_{2n-1} — мера Лебега на гиперплоскости).

13. Найдите асимптотику при $n \to +\infty$ интеграла

$$I_n = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right)^n dt\,.$$

14. Рассмотрим функцию

$$I(p) = \frac{\Gamma(2-p)\Gamma(3p)}{\big(p\Gamma(p)\big)^2}\,, \qquad 0 < p < 1\,.$$

а) Докажите, что $I(p)$ – выпуклая функция.

б) Верно ли, что минимум $I(p)$ достигается при $p = 1/2$?

15. Пусть $I(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\left(xt+\sqrt{|t|}\right)}}{t+i}\,dt$. Докажите, что

а) I – дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus 0$.

б) $I(x) = \mathrm{const} + \sqrt{\pi x} e^{\frac{i}{4}(\frac{1}{x} - \pi)} + O(x)$, $x \to +0$.

16. Пусть j_1, j_2, ... , j_n – перестановка чисел 1, 2, ... , n. Проверьте, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=1}^{n} j_k e^{ikt}\right| dt \leqslant \mathrm{const}\, n^{3/2}\,.$$

Можно ли улучшить эту оценку по порядку при $n \to +\infty$?

17. Пусть $I(a,b) = \int\limits_0^1 e^{i(ax^2+bx)}\,dx$ (a, $b \in \mathbb{R}$). Опишите скорость сходимости этого интеграла к нулю при $|a| + |b| \to +\infty$.

18. Пусть N – вещественное положительное число, а Ω – одна из следующих областей:

1) верхняя полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $I = [0, iN]$;

2) $H \setminus K$, где K – прямоугольник с вершинами -1, 1, $-1 + Ni$, $1 + Ni$;

3) полуплоскость H с разрезами по отрезкам $J_1 = [-1, -1 + Ni]$ и $J_2 = [1, 1 + Ni]$;

4) верхняя полуплоскость H с разрезами I, J_1, J_2.

Рассмотрим конформное отображение f области Ω на H, для которого $f(iy) \sim iy$, $y \to +\infty$. Обозначим через ℓ_I длину образа отрезка I под действием f (для пунктов 1 и 4), через ℓ_J длину образа отрезка J_1 (для пунктов 2, 3, 4). Докажите, что

а) $\ell_I \asymp N$, $N \to +\infty$ для области из п. 1;

б) $\ell_J \asymp N$, $N \to +\infty$ для областей из п. 2, 3;

в) $\ell_J \asymp N$, $\ell_I \asymp \sqrt{N}$, $N \to +\infty$ для области из п. 4;

г) $\ell_J \sim N$, $N \to +\infty$ для областей из п. 3, 4.

д) Найдите асимптотику ℓ_I, $N \to +\infty$ для области из п. 4.

19. а) При каких λ любое решение $x(t)$ дифференциального уравнения $t^2x''+\lambda x = 0$ имеет бесконечно много нулей?

б) Рассмотрим дифференциальное уравнение $t^2x'' + g(x) = 0$, где $\operatorname{sign} x g(x) \geqslant 0$. Для каких функций $a(x)$ из условия $g(x)/x \geqslant a(x)$ следует, что

1) Любое решение имеет бесконечно много нулей;
2) Существует решение, имеющее бесконечно много нулей.

20. Две кошки и мышка бегают по плоскости. Максимальные скорости у всех одинаковы. В каждый момент скорость мышки направлена в сторону, противоположную ближайшей кошке (а если кошки на одинаковом расстоянии от мышки, то в сторону, противоположную любой из них). Кошки бегают так, как сочтут нужным. В каком случае они смогут поймать мышку?

21. На крайней правой клетке доски 1×40 стоит фишка. Два игрока по очереди двигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник? В качестве решения можно предлагать результат вычислений на компьютере (с необходимыми пояснениями).