2002 г. сентябрь — октябрь *т. 57, вып. 5(347)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА (1912–1999)

4 августа 2002 г. – день девяностолетия со дня рождения выдающегося математика XX в. Александра Даниловича Александрова. Александр Данилович родился в деревне Волыни бывшей Рязанской губернии. Его родители были учителями средней школы. В 1929 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1933 г.

В 1935 г. Александр Данилович защитил кандидатскую, а в 1937 г. – докторскую диссертацию. В 1946 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1964 г. – академиком Академии наук СССР.

С 1952 по 1964 г. А. Д. Александров – ректор Ленинградского университета.

В 1964 г. Александр Данилович переехал в Новосибирск, где до 1986 г. возглавлял один из отделов Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Академии наук СССР, работая одновременно и профессором Новосибирского университета.

С апреля 1986 г. и до своей кончины 27 июля 1999 г. А. Д. Александров работал в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова. Учителями Александра Даниловича были Б. Н. Делоне, выдающийся геометр и алгебраист, и В. А. Фок – один из крупнейших физиков прошлого века.

Первые научные работы А. Д. Александрова посвящены некоторым вопросам теоретической физики и геометрии. В дальнейшем основной его специальностью стала математика, к которой и относятся его основные достижения.

А. Д. Александров – автор около 300 опубликованных статей, многих монографий и учебников. Основным направлением научной деятельности Александра Даниловича была геометрия. В этой области он создал большую научную школу. Среди учеников Александра Даниловича Александрова много достойных ученых, а двое из них – А. В. Погорелов и Ю. Г. Решетняк – состоят в Российской академии наук.

Научные результаты Александра Даниловича охватывали обширный круг вопросов, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и математические основания теории относительности.

В работах А. Д. Александрова получила развитие теория смешанных объемов выпуклых тел. Он доказал ряд фундаментальных теорем о выпуклых многогранниках, стоящих в одном ряду с теоремами Эйлера и Коши. В частности, в связи с решением проблемы Вейля А. Д. Александров разработал новый метод доказательства теорем существования. Результаты этого цикла работ поставили имя Александрова в один ряд с именами Евклида и Коши.

Одно из основных достижений Александра Даниловича Александрова в геометрии – создание теории двумерных многообразий ограниченной кривизны или, что то же самое, внутренней геометрии нерегулярных поверхностей. В связи с этой теорией он разработал удивительный по силе и наглядности метод разрезывания и склеивания, который оказался весьма эффективным в теории изгибания выпуклых поверхностей. Используя этот метод, А. Д. Александров получил решение целого ряда экстремальных задач для многообразий ограниченной кривизны.

Александр Данилович построил теорию метрических пространств с односторонними ограничениями на кривизну. Этот класс пространств представляет собой в настоящее время единственный известный класс метрических пространств, которые можно рассматривать как обобщенные римановы пространства в том смысле, что в них появляется центральное для римановой геометрии понятие кривизны.

В работах А. Д. Александрова по теории двумерных многообразий ограниченной кривизны и теории пространств с односторонними ограничениями на кривизну дано развитие геометрической концепции пространства в продолжение традиции, идущей от Лобачевского, Гаусса, Римана, Пуанкаре и Картана.

Исследования по теории выпуклых тел привели Александра Даниловича к проблематике общей теории аддитивных функций множеств. В частности, он осуществил глубокое исследование слабой сходимости функций множеств. Его результаты в этой области включаются в руководства по функциональному анализу и находят неожиданные применения как в геометрии, так и в теории вероятностей. А. Д. Александров является одним из авторов теории нерегулярных кривых, в которой нашли свое продолжение и развитие идеи классиков геометрии – Жордана, Пеано и др.

Работы А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям имели своим истоком его исследования по теоремам существования и единственности в теории выпуклых тел. По существу, в этих работах возникает понятие обобщенного решения уравнения в частных производных и притом для случая трудных нелинейных задач. Александр Данилович Александров заложил основы геометрической теории уравнений типа Монжа–Ампера. Он развил геометрический подход к принципу максимума в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Его исследования по этим вопросам на много лет опередили аналогичные исследования специалистов по дифференциальным уравнениям. А. Д. Александров решил вопрос о линейности отображений, сохраняющих конусы в пространстве специальной теории относительности. Эта работа переоткрывалась физиками разных стран с опозданием на десятилетия. Она дала начало исследованиям по хроногеометрии.

Вопросы методологии и истории науки, ее преподавание занимали важное место среди интересов Александра Даниловича. Ему принадлежит обширная, неизменно актуальная и острая научная публицистика. Статьи А. Д. Александрова о содержании и роли математики используются в преподавании философии и истории науки. Нашли свое место в практике школьного преподавания и его учебники по курсу геометрии.

В задачу геометрии входит изучение абстрактных наглядных форм: кривых, поверхностей, римановых и других многообразий, наделенных теми или иными дополнительными структурами. В рамках дифференциальной геометрии был разработан мощный аналитический аппарат, приспособленный для исследования и описания главным образом локальных свойств геометрических образов.

К началу прошлого века в теории поверхностей возникло большое число задач, касающихся соотношений между всевозможными величинами, характеризующими строение геометрических образов "в целом", такими, как площадь поверхности, ограниченный ею объем, интегральная кривизна и др. Классические методы дифференциальной геометрии не давали подходов к этим задачам без ограничительных предположений гладкости. Усилиями таких выдающихся математиков, как Штейнер, Гильберт, Минковский, Вейль, Кон-Фоссен, Либман, были получены только отдельные результаты геометрии "в целом". В работах этих геометров содержались постановки многих нерешенных проблем, определивших развитие геометрии "в целом" на многие десятилетия.

Сейчас основные из этих проблем решены. Большая заслуга в этом принадлежит самому А. Д. Александрову и его непосредственным ученикам. Их усилиями геометрия "в целом" обогатилась многими плодотворными идеями и методами. Созданная А. Д. Александровым научная школа заняла ведущее положение в мире в области геометрии "в целом". Во всей современной дифференциальной геометрии в соответствии с прогнозом, сделанным Александром Даниловичем еще в 1948 г. в ходе дискуссии об учебниках по дифференциальной геометрии, на передний план вышли задачи, касающиеся именно строения дифференциально-геометрических объектов "в целом".

А. Д. Александрову принадлежат фундаментальные результаты в теории выпуклых тел. Развивая классические исследования Минковского, Александр Данилович установил новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел. Попутно им были найдены аналогичные алгебраические неравенства, которые спустя сорок лет получили совершенно неожиданное применение к решению известной, поставленной еще в 1926 г. проблемы Ван дер Вардена об оценке перманента. Неравенства Александрова для смешанных объемов в настоящее время нашли интересные обобщения и приложения также в алгебраической геометрии и теории нелинейных эллиптических уравнений, а понятие о смешанных объемах проникло даже в теорию случайных процессов.

Одновременно А. Д. Александров ввел в теорию выпуклых тел аппарат теории меры и функционального анализа, предложив рассматривать функциональное пространство, порожденное опорными функциями, и специальные меры над ним – "поверхностные функции" и родственные "функции кривизны". Он доказал теоремы единственности с точностью до переноса выпуклого тела с заданной функцией кривизны, охватившие как крайние частные случаи известные ранее теоремы Кристоффеля и Минковского. При этом Александр Данилович определил обобщенные дифференциальные уравнения в мерах и соответствующие обобщенные решения.

Достижения Александра Даниловича в теории выпуклых многогранников, полученные в середине прошлого века, и сегодня производят большое впечатление силой и законченностью результатов и красотой применяемых методов. Он предложил общие методы доказательства теорем существования и единственности выпуклых многогранников и поверхностей, удовлетворяющих тем или иным условиям. На их основе А. Д. Александров получил большое число конкретных результатов. Наиболее замечательным из них является принадлежащее ему решение проблемы Вейля, поставленной последним еще в 1918 г. Проблема Вейля состоит в том, чтобы доказать, что всякое двумерное риманово многообразие положительной кривизны, гомеоморфное сфере, изометрично замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Решение, найденное Александром Даниловичем, давало ответ на вопрос в значительно более общей ситуации, чем та, которую требовалось рассмотреть первоначально. Способ решения, указанный Вейлем (не доведенный им до конца), основан на сведении рассматриваемой проблемы к некоторой задаче для дифференциальных уравнений. В противоположность этому примененные А. Д. Александровым методы – чисто геометрические.

А. Д. Александровым был рассмотрен сначала аналог проблемы Вейля для многогранников. В этом случае получается задача о существовании выпуклого многогранника с заранее заданной разверткой, удовлетворяющей некоторым простым необходимым условиям (условия эти состоят в том, что, во-первых, при склеивании многоугольников развертки должно получаться многообразие, гомеоморфное сфере, и, во-вторых, сумма углов при каждой вершине развертки должна быть не больше 2π). На поверхности выпуклого многогранника возникает внутренняя метрика, в которой за расстояние между двумя точками принимается точная нижняя граница длин кривых, соединяющих эти точки.

Таким же образом вводится метрика и на произвольной абстрактно заданной развертке. Разрезая произвольным образом поверхность выпуклого многогранника на многоугольники, мы будем получать из него различные развертки, которые все изометричны друг другу. Для многогранников проблема Вейля превращается в конечномерную задачу. Имеется два множества – множество M_n выпуклых многогранников с n вершинами и множество Q_n разверток, имеющих n вершин и удовлетворяющих указанным выше условиям. Две изометричные развертки при этом рассматриваются как одна и та же развертка. На каждом из этих множеств вводится естественным образом топология, в силу которой M_n и Q_n становятся многообразиями размерности $3n-6$. Более того, M_n и Q_n можно считать даже дифференцируемыми многообразиями. Сопоставляя каждому выпуклому многограннику P его развертку S, получим отображение $\varphi\colon M_n \to Q_n$.

Задача состоит в том, чтобы доказать, что $\varphi(M_n) = Q_n$. Для этого достаточно показать, что справедливы следующие утверждения: (А) $\varphi(M_n)$ есть открытое подмножество в Q_n; (Б) каждая связная компонента пространства Q_n содержит элемент множества $\varphi(M_n)$; (В) $\varphi(M_n)$ замкнуто в Q_n.

Утверждение (В) доказывается сравнительно просто. Оно означает, что если развертка $S_0 \in Q_n$ есть предел разверток S_m, $m = 1, 2, \dots$, каждая из которых реализуется как поверхность некоторого выпуклого многогранника, то и развертка S_0 является в этом же смысле реализуемой. Основная трудность заключается в утверждении (А). Александр Данилович указал два различных его доказательства. Одно основывается на теореме Брауэра об инвариантности области. Предварительно устанавливается, что отображение φ непрерывно и взаимно однозначно. Непрерывность φ очевидна. Взаимная однозначность φ следует из того, что если поверхности двух выпуклых многогранников изометричны, то они могут быть совмещены движением. (Последнее утверждение, доказанное также А. Д. Александровым, представляет собой усиление классической теоремы Коши, согласно которой два выпуклых многогранника, одинаково составленных из соответственно равных граней, конгруэнтны.) Непрерывность и взаимная однозначность φ обеспечивают его топологичность. Теорема Брауэра теперь позволяет заключить, что $\varphi(M_n)$ – открытое подмножество в Q_n. Другое доказательство предложения (А), также указанное А. Д. Александровым, основано на том, что отображение φ дифференцируемо и якобиан его всюду отличен от нуля. Последнее свойство отображения φ геометрически есть не что иное, как некоторая теорема о жесткости выпуклых многогранников. Доказательство утверждения (Б), так же как и того факта, что множество Q_n есть $(3n-6)$-мерное многообразие, составляет емкую в техническом отношении отдельную часть доказательства.

Решение проблемы Вейля для общего случая получается из теоремы А. Д. Александрова для многогранников путем приближения римановых метрик многогранниками и последующим предельным переходом.

План доказательства самого Вейля был доведен до конца Леви в 1938 г. средствами теории аналитических функций, при этом Вейль и Леви рассматривали только задачу о реализации аналитической римановой метрики. Александр Данилович сделал несравненно больше: он отказался не только от аналитичности, но даже от гладкости метрики. На принятом теперь в теории дифференциальных уравнений языке, он ввел и разработал в этой сугубо нелинейной задаче теорию ее обобщенных решений – и это в то время, когда такой подход в самой теории дифференциальных уравнений с частными производными обретал права гражданства еще только в задачах вариационного исчисления.

А. Д. Александров получил нетривиальные обобщения своих результатов по проблеме Вейля для случая пространства Лобачевского и сферического пространства. Позднее важного продвижения в этой теме добился А. В. Погорелов. Он установил теоремы о связи между степенью гладкости выпуклой поверхности и ее внутренней метрики, а также получил обобщение теоремы А. Д. Александрова, касающееся погружения римановой метрики в риманово пространство ограниченной сверху кривизны.

Работы А. Д. Александрова по проблеме Вейля положили начало многочисленным исследованиям по теории изгибаний выпуклых поверхностей, в числе которых следует назвать прежде всего работы самого А. Д. Александрова, а также С. П. Оловянишникова, А. В. Погорелова, и стимулировали другие подходы к теории изгибаний в работах Н. В. Ефимова, И. Н. Векуа и их учеников. Созданный Александром Даниловичем на основе его теорем существования метод разрезывания и склеивания поразительно изменил всю теорию изгибаний. Работы Александра Даниловича по проблеме Вейля послужили источником нового направления современной геометрии, которое можно характеризовать как теорию нерегулярных римановых пространств. Создателем этого направления и автором наиболее значительных из относящихся к нему результатов является Александр Данилович Александров.

Полученное им решение проблемы Вейля основывается на приближении римановой метрики положительной кривизны многогранными метриками положительной кривизны. Естественно возникает вопрос, какие вообще метрики допускают подобного рода приближения. Александр

Данилович дал полный ответ на этот вопрос. Он ввел понятие двумерного многообразия с метрикой положительной кривизны и детально исследовал свойства таких многообразий.

Многочисленные результаты А. Д. Александрова, посвященные этому предмету, собраны в его книге "Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей", вышедшей в 1948 г. Для двумерных многообразий с метрикой положительной кривизны определены такие понятия, как кратчайшая, угол между кривыми, площадь множества. Кроме того, для них определена еще некоторая неотрицательная вполне аддитивная функция множеств, называемая кривизной.

В частном случае, когда данное многообразие риманово (класса C^2), эта функция множества совпадает с интегралом от гауссовой кривизны по площади. В общем случае кривизна может не быть абсолютно непрерывной относительно площади функцией и даже быть сосредоточенной в изолированных точках и на линиях. Например, для поверхности прямого кругового конуса кривизна сосредоточена на множестве, состоящем из его вершины и окружности основания конуса.

Среди прочих результатов, относящихся к геометрии многообразий положительной кривизны, отметим следующую замечательную теорему А. Д. Александрова.

Пусть дан треугольник на выпуклой поверхности, образованный кратчайшими, соединяющими три точки X, Y, Z. Построим плоский треугольник $X'Y'Z'$ с теми же длинами сторон. Оказывается, что углы при вершинах этого плоского треугольника порознь не превосходят соответствующих углов исходного треугольника на выпуклой поверхности.

Этот факт ранее не был известен даже для случая двумерных римановых пространств положительной кривизны. Обобщение данной теоремы (в литературе именуемой обычно теоремой сравнения А. Д. Александрова) на случай римановых пространств положительной кривизны произвольной размерности, полученное В. А. Топоноговым, сыграло важную роль и способствовало тому прогрессу, который достигнут в последние годы при изучении строения таких пространств в целом. Эти результаты послужили образцом и одним из толчков для целого ряда теорем сравнения, полученных в современной римановой геометрии в целом.

После построения теории двумерных многообразий положительной кривизны возникла задача рассмотрения многообразий, у которых кривизна является вполне аддитивной функцией множеств произвольного знака. Теория таких многообразий, получивших наименование двумерных многообразий ограниченной кривизны, была в основном построена А. Д. Александровым еще в начале 50-х годов. Ее полное изложение дано в 1962 г. в монографии "Двумерные многообразия ограниченной кривизны", написанной совместно с В. А. Залгаллером.

Александр Данилович предложил два различных по подходу определения двумерных многообразий ограниченной кривизны. Одно определение – аксиоматическое, другое – конструктивное – основано на приближении многообразий ограниченной кривизны многогранниками. А. Д. Александров доказал эквивалентность этих определений. Мы приведем здесь только второе из них.

Пусть M – двумерное многообразие, наделенное метрикой ρ, причем метрика ρ внутренняя, т.е. для любых двух точек X, $Y \in M$ величина $\rho(X,Y)$ равна точной нижней границе длин спрямляемых кривых, соединяющих эти точки. Для всякой области $G \subset M$ естественно определяется метрика ρ_G, где $\rho_G(X,Y)$ есть точная нижняя граница длин кривых, лежащих в области G и соединяющих точки X и Y. Говорят, что ρ_G есть индуцированная метрика области G.

Кривая в M называется кратчайшей, если ее длина равна расстоянию между ее концами. Для любых двух достаточно близких точек существует соединяющая их кратчайшая. Многообразие M, наделенное внутренней метрикой ρ, называется локально плоским, если каждая его точка X имеет окрестность U, которая (в метрике ρ) изометрична кругу $x^2 + y^2 < \delta^2$ на обычной евклидовой плоскости. Многообразие M называется многогранником, если можно указать такое конечное его подмножество $H = \{A_1, \ldots, A_k\}$, что множество $M \setminus H$ является локально плоским. Точки $A_1, \ldots, A_k$ называются вершинами многогранника. Метрика ρ, заданная на двумерном многообразии M, называется многогранной, если эта метрика внутренняя и многообразие M, наделенное метрикой ρ, является многогранником. Каждой вершине $A \in M$ может быть сопоставлено некоторое число $\theta(A)$, называемое полным углом при вершине. Оно определяется следующим образом.

Некоторая окрестность точки A кратчайшими, исходящими из точки A, может быть разделена на конечное число областей, каждая из которых (в индуцированной метрике) изометрична плоскому треугольнику. Тогда $\theta(A)$ равно сумме углов этих плоских треугольников в точке A.

(Легко устанавливается, что эта сумма не зависит от выбора окрестности и ее разбиения.) Всегда $\theta(A) > 0$. Если $\omega(A) \equiv 2\pi - \theta(A) = 0$, то некоторая окрестность точки A изометрична кругу на плоскости, так что величину $\omega(A)$ можно рассматривать как некоторую меру неевклидовости многогранника в окрестности точки A. В соответствии с этим $\omega(A)$ называется кривизной в вершине A.

Обозначим через $\omega(E)$ сумму кривизн всех тех вершин многогранника M, которые принадлежат множеству $E \subset M$, а через $|\omega|(E)$ – сумму абсолютных величин кривизн этих вершин. Величина $\omega(E)$ называется кривизной, а $|\omega|(E)$ – абсолютной кривизной множества E. Двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ называется двумерным многообразием ограниченной кривизны, если для всякой его точки A можно указать окрестность U и последовательность многогранных метрик ρ_n, $n = 1, 2, \ldots$, в U, сходящуюся равномерно к метрике ρ и такую, что последовательность $|\omega_n|(U)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена (ω_n – кривизна в метрике ρ_n).

Двумерное риманово многообразие, метрика которого определяется линейным элементом $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, где функции E, F и G удовлетворяют требованиям гладкости, необходимым для того, чтобы можно было определить гауссову кривизну в точке (достаточно считать, что $E, F, G \in C^2$), является частным случаем двумерного многообразия ограниченной кривизны. Другой частный случай – многообразия с многогранной метрикой.

Фундаментальные понятия классической двумерной римановой геометрии, такие как длина кривой, кривизна кривой, геодезическая, площадь множества, кривизна многообразия, имеют аналог в общем случае двумерных многообразий ограниченной кривизны. (При этом вместо кривизны кривой в ее точках рассматривается поворот кривой – величина, в регулярном случае равная интегралу кривизны по длине дуги, а вместо кривизны самого многообразия в точке рассматривается функция множеств – аналог интеграла от кривизны по множеству.) А. Д. Александрову принадлежит большое число конкретных результатов теории двумерных многообразий ограниченной кривизны, многие из которых являются новыми и для двумерных римановых многообразий. Им развит аппарат, позволяющий свободно ориентироваться в этой теории. Это функции множеств (кривизны множеств и односторонние повороты участков кривых) и теоремы сравнения. Другим столь же эффективным аппаратом оказался обобщенный изотермический линейный элемент, введенный для таких пространств учеником А. Д. Александрова – Ю. Г. Решетняком. Появилась некоторая неожиданная область приложений многообразий ограниченной кривизны в теории мероморфных функций.

Таким образом, класс двумерных римановых многообразий получил допускающую исследование компактификацию при сохранении структуры многообразия и ограниченности интегральной кривизны. Это позволило А. Д. Александрову и его ученикам дать исчерпывающее решение большого числа экстремальных задач в теории поверхностей. В регулярном случае многие из этих задач просто не имели решений, так как экстремум реализовался на объектах, выходящих из регулярного класса. Примером может служить решенная А. Д. Александровым задача о нахождении поверхности наибольшей площади среди гомеоморфных кругу поверхностей с данным периметром, у которых положительная часть кривизны $\omega^+(S)$ (т.е. верхняя вариация функции множеств ω) не превосходит данного числа $\eta > 0$. В случае $\eta \geqslant 2\pi$ задача не имеет решения, а в случае $\eta < 2\pi$ ее решением является боковая поверхность прямого кругового конуса, у которого полный угол при вершине конуса равен $2\pi - \eta$. (Если разрезать ее по образующей конуса, то полученная поверхность развертывается в плоскость так, что в результате получается круговой сектор с углом, равным $2\pi - \eta$.)

Доказательство этой теоремы в общих чертах таково. Достаточно рассмотреть случай, когда многообразие есть многогранник. Многогранник S с данным периметром и $\omega^+(S) \leqslant \eta < 2\pi$ последовательно преобразуется так, что площадь его возрастает, а кривизна в конечном итоге оказывается сосредоточенной в одной точке. Каждый отдельный шаг преобразования состоит в разрезывании и вклеивании в разрез некоторого многогранника.

Аналогичного рода приемы оказываются полезными и в других вопросах геометрии многообразий ограниченной кривизны. В совокупности они и составляют метод разрезывания и склеивания Александра Даниловича Александрова.

Исследованию двумерных многообразий ограниченной кривизны посвящено большое число работ других авторов, в основном учеников А. Д. Александрова. В частности, вопросы теории многообразий ограниченной кривизны рассматривались Ю.Ф. Борисовым, Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллером, Ю.Г. Решетняком, В.В. Стрельцовым и др. Одна из задач, возникших в теории многообразий ограниченной кривизны, – указание классов двумерных поверхностей, определенных естественными условиями, которые по своей внутренней геометрии были бы многообразиями такого рода. В этом плане некоторые важные результаты получены Александром Даниловичем, который доказал, что если поверхность определяется уравнением $z = f(x,y)$, где функция f есть разность двух выпуклых функций, то она есть двумерное многообразие ограниченной кривизны. (Другие классы поверхностей, обладающих тем же свойством, указаны А.В. Погореловым, Ю.Д. Бураго и другими авторами.) Следует сказать, что в изучении внешней геометрии нерегулярных поверхностей с метрикой ограниченной кривизны по А.Д. Александрову имеется много нерешенных вопросов, и в целом эта область исследования далека от завершения. (Этот круг вопросов породил интересное новое направление в теории погруженных многообразий, развитое С.З. Шефелем.)

Теория многообразий ограниченной кривизны, построенная А.Д. Александровым, является двумерной. Задача построения ее многомерного аналога представляется достаточно трудной. В направлении ее решения наиболее существенное продвижение принадлежит Александру Даниловичу. Частным случаем двумерных многообразий ограниченной кривизны являются многообразия кривизны, ограниченной снизу или сверху некоторым числом K_0. (В регулярном случае это римановы многообразия, у которых гауссова кривизна $K(X)$ либо не превосходит K_0 в каждой точке X, либо для всех X не меньше K_0.) Александр Данилович показал, что такие многообразия могут быть описаны системой аксиом, в которой двумерность многообразия не используется. Это позволяет ввести общее понятие метрического пространства односторонне ограниченной кривизны, топология которого удовлетворяет достаточно слабым (с точки зрения дифференциальных геометров) условиям. Такое пространство может вообще не быть многообразием. А.Д. Александров детально исследовал пространства кривизны, не превосходящей K_0, где $K_0 < \infty$.

Эти работы были продолжены и развиты другими сибирскими геометрами, учениками и последователями А.Д. Александрова. В частности, ими решена задача об аксиоматическом построении классической римановой геометрии; именно, И.Г. Николаев и В.Н. Берестовский доказали следующее. Пространство с внутренней метрикой, являющееся n-мерным многообразием с ограниченной кривизной в смысле Александрова, представляет собой риманово пространство, столь гладкое, что для него справедлива классическая теория кривизны.

В дифференциальной геометрии и теории выпуклых тел хорошо известны теоремы единственности, устанавливающие равенство (в том или ином смысле) геометрических объектов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такого рода результаты были получены в свое время Коши, Лиувиллем и другими выдающимися математиками.

Теоремы единственности, как и теоремы существования, занимают большое место в научном творчестве А.Д. Александрова. Этой теме посвящен цикл его работ, выполненных в 1956–1966 гг. Основным инструментом исследования этого цикла служили теоремы о решениях дифференциальных уравнений эллиптического типа в сочетании с разного рода соображениями геометрического характера. Чтобы дать представление об указанных работах Александра Даниловича, приведем следующую его теорему.

Теорема А. *Пусть S и S_0 – аналитические замкнутые выпуклые поверхности и $k_1 \geqslant k_2$, $k_{01} \geqslant k_{02}$ – их главные кривизны в точках $x \in S$, $x_0 \in S_0$ с параллельными нормалями. Пусть $f(\xi,\eta,\overline{n})$ – такая функция численных параметров ξ, η и единичного вектора $\overline{n}$, что при $\xi > \xi'$ и $\eta > \eta'$ имеет место $f(\xi,\eta,\overline{n}) > f(\xi',\eta',\overline{n})$. Тогда если для всякой $x \in S$ выполняется $f(k_1,k_2,\overline{n}) = f(k_{01},k_{02},\overline{n})$, где $\overline{n}$ – нормаль в точке $\overline{x}$, то поверхности S и S_0 совмещаются параллельным переносом.*

Теорема А в этой формулировке доказана Александром Даниловичем в 1938 г. Естественно было предположить, что требование аналитичности в ней может быть заменено каким-либо более слабым. А.Д. Александров получил также некоторый аналог теоремы А для выпуклых многогранников – доказательство его основывается на идее, близкой к той, на которой основано доказательство теоремы Коши о равенстве многогранников.

Другой естественный вопрос: существует ли какой-либо аналог теоремы А для поверхностей в n-мерном пространстве в случае $n > 3$? Этим вопросам посвящены исследования, выполненные Александром Даниловичем в 1956–1966 гг. Конкретно, в отношении теоремы А сначала А. В. Погорелов показал, что требование аналитичности поверхностей может быть снижено до четырехкратной дифференцируемости. Относительно функции f предполагается, что она принадлежит классу C^1, причем $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial f}{\partial \eta} > 0$ всюду в области определения.

В 1956 г. Александр Данилович доказал, что (при таких же предположениях относительно f) требование аналитичности может быть заменено двукратной дифференцируемостью. Также он показал, что в предположении, что S и S_0 – аналитические поверхности, гомеоморфные сфере, от условия выпуклости S можно вообще отказаться (это установлено в работе 1966 г.). Александр Данилович доказал большое число теорем для выпуклых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве при произвольном $n \geqslant 3$, для поверхностей в общих римановых пространствах и пространствах постоянной кривизны, по своей формулировке аналогичных теореме А. Содержание этих теорем состоит в следующем.

Между точками двух поверхностей тем или иным способом устанавливается соответствие. Тогда если главные кривизны поверхностей в соответствующих точках связаны определенным соотношением, то поверхности равны. (Буквальный перенос теоремы А на многомерный случай, по-видимому, невозможен, хотя некоторое частичное ее обобщение А. Д. Александров получил.)

В качестве приложения теорем единственности Александр Данилович получил общие теоремы о характеристическом свойстве $(n-1)$-мерной сферы. Именно, если на поверхности S, служащей границей тела в E^n, выполняется соотношение $\Phi(k_1,\dots,k_{n-1}) = \mathrm{const}$, где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_{n-1}$ – главные кривизны в точке поверхности, а функция Φ такова, что производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial k_i}$ непрерывны и имеют один знак для любых $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$, то S является сферой. В частности, замкнутая поверхность постоянной средней кривизны в трехмерном пространстве, не имеющая самопересечений, есть сфера. (На языке физики это означает, что не существует мыльного пузыря, который не имел бы форму шара.) К вопросам единственности примыкают проблемы оценок изменения объекта при малом изменении однозначно определяющих его характеристик. И здесь Александру Даниловичу Александрову принадлежат новые методы и результаты. Трудная проблема Кон-Фоссена об оценке изменения формы замкнутой выпуклой поверхности при малом изменении ее внутренней метрики была решена учеником А. Д. Александрова – Ю. А. Волковым.

А. Д. Александров является создателем нового направления в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа – геометрической теории уравнений эллиптического типа.

Мы приведем очень краткий обзор результатов исследований А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям, выполненных в период с 1956 по 1965 г. Это прежде всего теоремы о существовании обобщенных решений первой краевой задачи для уравнений типа Монжа–Ампера, а именно, уравнений вида

$$f(\nabla z, z, x)\,\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = h(x), \tag{1}$$

где f и h – неотрицательные функции. Решение ищется в классе выпуклых функций. Это естественно, ибо только на таких функциях уравнение (1) эллиптично.

Уравнение (1) позволяет по каждой выпуклой функции z построить две функции множеств, обозначаемые через $\omega_f(M,z)$ и $\nu(M)$. При этом

$$\nu(M) = \int_M h(x)\,dx,$$

так что ν определяется функцией h. В регулярном случае (а именно, в случае $z \in C^2$)

$$\omega_f(M,z) = \int_M f\big(\nabla z(x), z(x), x\big)\,\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) dx.$$

В общем случае функция $\omega_f(M,z)$ определяется с помощью понятия нормального отображения, которое вводится так. Предположим, что $z = z(x)$ – выпуклая функция, заданная в замкнутой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Вектор $\zeta(x) = (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ называется обобщенным градиентом функции z в точке x_0, если гиперплоскость $z = \langle \zeta, x - x_0\rangle + z(x_0)$ является опорной для гиперповерхности $S = \{(x,z) \mid z = z(x)\}$. Если функция z дифференцируема в точке x_0, то ее обобщенный градиент в этой точке, разумеется, совпадает с обычным. Сопоставляя каждой точке $x \in \Omega$ все векторы, являющиеся обобщенными градиентами функции z в этой точке, получим некоторое, вообще говоря, многозначное отображение φ области Ω в $\mathbb{R}^n$, которое и называется нормальным отображением. Пусть $E = \varphi(\Omega)$. Для каждой точки $\zeta \in E$ существует точка $(x,z) \in S$ такая, что ζ есть обобщенный градиент в точке x. Полагаем $x = x(\zeta)$, $z = z(\zeta)$. Функция $\omega_f(M,z)$ определяется равенством

$$\omega_f(M,z) = \int_{\varphi(M)} f\bigl(\zeta, z(\zeta), x(\zeta)\bigr)\,d\zeta.$$

Александр Данилович рассматривал следующую задачу: найти выпуклую функцию z, принимающую заданные значения на границе $\partial\Omega$ и такую, что функция множеств $\omega_f(M,z)$ совпадает с заранее заданной функцией множеств $\nu(M)$. Если эта функция окажется принадлежащей классу C^2, то она, очевидно, будет решением уравнения (1). Александр Данилович установил существование обобщенного решения сформулированной задачи при условии, что f и заданные граничные значения искомого решения удовлетворяют некоторым естественным ограничениям. Мы опускаем здесь детали, отсылая читателя к его работе, опубликованной в Вестнике ЛГУ, 1958 г., № 1. В дальнейшем А. В. Погорелов доказал, что обобщенные решения А. Д. Александрова являются гладкими, если $f \equiv 1$, $z|_{\partial\Omega}$ и h – достаточно гладкие положительные функции.

В 50-х годах Александр Данилович разработал метод оценок сверху и снизу для функций, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям или неравенствам 2-го порядка, но не обладающих классической гладкостью (не имеющих производных 2-го порядка в каждой точке, а принадлежащих лишь пространству $W_n^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Приведем лишь одну из этих оценок, далеко не самую общую, но позволившую далеко продвинуться в изучении квазилинейных и даже некоторого класса сугубо нелинейных задач эллиптического типа. Она имеет вид

$$\max_{x\in\Omega} z(x) \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} z(x) + C_1 \operatorname{diam}\Omega\, e^{C_2|b|_{n,\Omega}} |Lz(x)_-|_{n,\Omega}. \tag{2}$$

Здесь

$$Lz(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) z_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) z_{x_i}(x);$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$$

при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$; C_1 и C_2 – постоянные, зависящие только от n; Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $z \in W_n^2(\Omega)$. Полунорма $|\cdot|_{n,\Omega}$ вычисляется по правилу

$$|\nu|_{n,\Omega} = \left(\int_\Omega |\nu(x)|^n \bigl(\operatorname{Det}(a_{ij}(x))\bigr)^{-1}\,dx\right)^{1/n},$$

а $\nu_-(x) = \max\{0, -\nu(x)\}$. Неравенство (2) замечательно во многих отношениях (в том числе – характером зависимости от Ω), и его чисто аналитическое доказательство представляется маловероятным.

Поясним на простейшем примере основную идею метода А. Д. Александрова доказательства неравенства (2). Пусть $z(x)$ – решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f(x) \tag{3}$$

в области G пространства $\mathbb{R}^n$, где функции $a_{ij}(x)$ таковы, что собственные числа квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

лежат в некотором интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, где $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \infty$ для всех x. Предположим, что область G выпукла, известно, что $z(x) = 0$ на границе, и требуется оценить $\min z(x)$. Пусть $\Gamma_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in G,\, y \geqslant z(x)\}$ – надграфик функции z. Пусть, далее, V_z – выпуклая оболочка Γ_z. Множество V_z ограничено снизу поверхностью $y = \widetilde{z}(x)$. При этом $z(x) \geqslant \widetilde{z}(x)$ для всех $x \in G$ и функция $\widetilde{z}(x)$ выпукла. Предположим, что функция $z(x)$ достигает минимума в точке $x_0 \in G$. Построим еще выпуклый конус K в $\mathbb{R}^{n+1}$, образованный отрезками, соединяющими точку $(x_0, z(x_0))$ с граничными точками G. Если $z(x_0)$ велика по абсолютной величине, то конус K оказывается сильно вытянутым и его опорное сферическое изображение будет велико. С другой стороны, ясно, что опорное изображение K содержится в опорном изображении поверхности $z = \widetilde{z}(x)$. Последнее, однако, не может быть слишком большим по следующей причине. При вычислении опорного изображения поверхности $z = \widetilde{z}(x)$ достаточно принимать во внимание только те точки, где $\widetilde{z}(x) = z(x)$. Они являются точками выпуклости функции $z(x)$, и, значит, в них квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} z_{ij}\xi_i\xi_j$, где $z_{ij} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, неотрицательна. В силу неотрицательности этой формы получаем, что в точках, где $\widetilde{z}(x) = z(x)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{ij} \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} z_{ii} \geqslant n\lambda_1 \bigl(\mathrm{Det}(z_{ij})\bigr)^{1/n}. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что опорное изображение поверхности $z = \widetilde{z}(x)$ не превосходит

$$\frac{1}{(n\lambda_1)^n} \int_G (f(x))^n \, dx. \tag{5}$$

Мы видим, таким образом, что конус K не может быть сколь угодно длинным, ибо площадь его нормального изображения не превосходит величину (5). Нетрудно получить и явную оценку высоты конуса K. Это дает оценку для величины

$$|z(x_0)| = |\min_{x \in G} z(x)|.$$

Для того чтобы все сделанные заключения имели силу, достаточно, чтобы функция z принадлежала классу $W_n^2(G)$, т.е. имела обобщенные вторые производные, суммируемые в степени n.

Нет возможности описать в одной статье все то новое и ценное, что было сделано Александром Даниловичем в работах указанного выше цикла. Многое из этого еще ожидает своего потребителя и, несомненно, несет богатые плоды. Примером тому может служить неравенство (2), способствовавшее прогрессу в исследовании нелинейных эллиптических уравнений (О. А. Ладыженская, Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, Н. Н. Уральцева и др.). Его аналоги для параболических операторов, доказанные Н. В. Крыловым, Н. Н. Уральцевой и А. И. Назаровым, стали важным шагом на пути изучения квазилинейных параболических уравнений.

В 70-е годы прошлого века научные интересы Александра Даниловича были связаны главным образом с геометрическими вопросами оснований теории относительности. Начало этим исследованиям было положено в его работе, выполненной еще в 1953 г. (совместно с В. А. Овчинниковой). К теории относительности Александр Данилович регулярно обращался в разные периоды своей жизни. Продолжению и развитию его идей в этой области посвящены работы учеников А. Д. Александрова – Ю. Ф. Борисова, А. К. Гуца, А. В. Кузьминых, А. В. Левичева, Р. И. Пименова и А. В. Шайденко.

Геометрически пространство-время, т.е. совокупность всех событий, происходящих в физическом мире, можно рассматривать как четырехмерное аффинное пространство, в котором введено отношение порядка. Если x и y – две точки этого пространства, то запись $x \prec y$ означает, что событие x предшествует событию y или, иначе, x может воздействовать на y. Для каждой точки x определено множество K_x – совокупность всех событий, следующих за x. В ньютоновской механике K_x – полупространство. В механике теории относительности K_x – прямой круговой конус с вершиной x, и конусы K_x, соответствующие разным точкам x, получаются один из другого параллельными переносами. Взаимно однозначное преобразование пространства $\mathbb{R}^4$, сохраняющее отношение порядка специальной теории относительности, является лоренцевым. В физике этот факт доказывается в предположении гладкости преобразования. Из работы А. Д. Александрова и В. А. Овчинниковой следует, что никакие условия гладкости на самом деле не нужны.

А. Д. Александров ввел общее понятие кинематики. Кинематика в смысле А. Д. Александрова есть топологическое пространство, в котором введено отношение порядка, должным образом согласованное с его топологией. Задача состоит в описании минимальных условий (аксиом), при которых данная кинематика является кинематикой специальной теории относительности.

А. Д. Александрову принадлежит большой вклад и в теорию функций действительной переменной. Это связано с его установкой на исследование нерегулярных геометрических образов, распространение на такие образы некоторых основных концепций дифференциальной геометрии.

Один из результатов Александра Даниловича, относящихся к теории функций действительной переменной, – классическая теорема о двукратной дифференцируемости почти всюду выпуклой функции n переменных. Но наиболее значительным его достижением в этой области являются работы по абстрактной теории функций множеств. Исследование различных вполне аддитивных функций множеств, естественным образом возникающих в теории выпуклых тел, явилось для него стимулом для изучения общих вопросов теории меры в самой абстрактной форме.

Основные результаты А. Д. Александрова в этой области – во-первых, теорема об общем виде линейного функционала в пространстве $C(X)$ ограниченных непрерывных функций в нормальном топологическом пространстве X. Александр Данилович Александров рассматривал пространства несколько более общие, чем традиционно принятые в общей топологии. Согласно теореме Рисса всякий непрерывный линейный функционал в $C([a,b])$ представляется интегралом Стилтьеса. А. А. Марков доказал, что если X – компактное топологическое пространство, то всякий линейный функционал в $C(X)$ представляется интегралом относительно вполне аддитивной функции множеств. Если, однако, пространство X некомпактно, теорема А. А. Маркова неверна. Александр Данилович показал, что если требование полной аддитивности заменить требованием регулярности (эквивалентным ему для случая компактных пространств), то теорема о представимости линейного функционала в X виде интеграла аддитивной функции множеств остается верной и в общем случае. Второе важное достижение А. Д. Александрова в теории функций множеств – построенная им теория слабой сходимости для последовательностей таких функций. Результаты данного цикла работ Александра Даниловича составили содержание его докторской диссертации. Они широко используются в теории вероятностей и функциональном анализе.

Математические работы А. Д. Александрова, при всей их глубине, оригинальности и значительности, не исчерпывают его творчества. Философские вопросы математики и теоретической физики постоянно находились в поле его интересов. Более чем двадцатилетний опыт его размышлений о сущности математики был подытожен в статье "Математика и диалектика" ("Сибирский математический журнал", 1970, № 2). Не случайно преподаватели гуманитарных дисциплин на факультетах точных наук часто рекомендуют студентам читать общенаучные сочинения А. Д. Александрова.

А. Д. Александрову принадлежат также глубокие статьи по философским проблемам теории относительности и квантовой механики. Философские труды и устные выступления Александра Даниловича охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов жизни.

Много сил и энергии А. Д. Александров отдал воспитанию новых кадров. Общеизвестна научная щедрость Александра Даниловича не только как научного лидера, но и как непосредственного руководителя аспирантов и молодых ученых. Он всегда увлекал их, побуждая к творчеству и научному поиску. Идеи, высказанные им на лекциях и семинарах, записанные в его рабочих тетрадях, намеченные в личных разговорах, легли в основу многих работ его учеников.

Александр Данилович со свойственной ему отзывчивостью не мог отстраниться от одной из важнейших проблем реформы школьного образования – создания новых учебников по геометрии для средних школ. Он привлек к участию в этой работе А. Л. Вернера и опытного учителя

В. И. Рыжика. Вместе они написали два пробных учебника по стереометрии, а затем в 1983 г. – учебник по геометрии для 9–10 классов, принятый для школ и классов с углубленным изучением математики. С 1981 г. Александр Данилович начал разрабатывать новую структуру учебного курса планиметрии. Этот курс был опубликован им в серии препринтов. В 1984–1986 гг. вышли написанные по этому курсу совместно с А. Л. Вернером и В. И. Рыжиком пробные учебники для 6–8 классов. Эксперимент по всему циклу этих учебников завершился целой серией учебников как для обычных школ, так и для школ с углубленным изучением математики.

На протяжении 12 лет – с 1952 по 1964 г. – Александр Данилович был ректором Ленинградского государственного университета. Начинал он в трудные послевоенные годы. Сумел мобилизовать оставшиеся в университете силы, привлек хороших ученых из других мест, всячески способствовал росту молодых кадров. В результате его двенадцатилетней деятельности ректора университета появились новые направления и школы, расширилась сеть семинаров. Кадры, выросшие в тот период, и сегодня являются ведущими наряду с новой научной сменой.

Как ректор университета А. Д. Александров активно и эффективно поддерживал университетских биологов в их борьбе с лысенковской лженаукой. Преподавание научной генетики в Ленинградском университете началось уже в пятидесятые годы, тогда как в других университетах генетика была восстановлена в своих правах лишь в 1965 г. Это было очень непросто – достаточно вспомнить окрик Н. С. Хрущева, который квалифицировал отказ А. Д. Александрова выполнить приказ министерства о восстановлении в ЛГУ одного печально известного мракобеса от "мичуринской" биологии как проявление меньшевизма. Александр Данилович не дрогнул, и деятель не был принят на работу в Ленинградский университет. В то же время студенты-биологи, отчисленные из других университетов за попытки нелегально изучать генетику, получали возможность продолжить образование в ЛГУ.

С именем ректора А. Д. Александрова связано также становление таких новых в свое время направлений, как социология и математическая экономика, получивших в стенах ЛГУ его действенную поддержку в период гонений. В октябре 1990 г. за особый вклад в сохранение и развитие генетики и селекции А. Д. Александров, единственный математик среди группы биологов, был удостоен ордена Трудового Красного Знамени. Это необычное награждение стало следствием той высокой оценки благородной деятельности А. Д. Александрова, которую дало большинство ученых нашей страны.

Александр Данилович имел огромный авторитет и у маститых ученых, и у молодежи. "Он руководил университетом не силой приказа, а моральным авторитетом", – отметил В. И. Смирнов в адресе, написанном по случаю ухода Александра Даниловича с поста ректора. "Александр Данилович – совесть факультета", – сказал тогда же Д. К. Фаддеев.

25 лет жизни Александр Данилович провел в Сибири. В 1964 г. по приглашению М. А. Лаврентьева он переехал с семьей в Новосибирск. Здесь Александр Данилович нашел много верных друзей и учеников. Сибири он отдал не только свои душу и сердце, но и здоровье, перенеся клещевой энцефалит. А. Д. Александров создал большую и разветвленную научную школу. Среди его ленинградских учеников многие десятки докторов и кандидатов наук.

И в Новосибирске под влиянием Александра Даниловича выросли новые доктора наук и целая плеяда молодых кандидатов-геометров. Они творчески работают во многих городах Сибири.

Александр Данилович обладал цельным научным мировоззрением, позволявшим ему глубоко анализировать философские и общественные проблемы, а также отвечать на вызовы современности на протяжении всей жизни. В основе системы своих нравственных установок он называл человечность или универсальный гуманизм, научность и ответственность. Идеалам своей юности А. Д. Александров был верен до последних дней.

Заслуги А. Д. Александрова отмечены множеством наград и отличий. Из самых последних он ценил первую Золотую медаль имени Л. Эйлера, присужденную ему Президиумом Российской академии наук в 1992 г.

Александру Даниловичу было свойственно неукротимое стремление добиваться высших результатов в любом деле, за которое он брался, – как в математике, так и в спорте (он был мастером спорта по альпинизму), как в философии, так и в вопросах истории науки (в Ленинградском и Новосибирском университетах он читал курс лекций по истории математики) и во многом другом. Его близкие и друзья, его ученики и товарищи по работе хорошо помнят характерную для

Александра Даниловича преданность истине, его постоянную готовность ринуться на борьбу за ее защиту, готовность поддерживать и защищать истину до конца.

Научные идеи академика А. Д. Александрова будут долго жить в трудах его учеников и последователей. Неповторимое обаяние, сочетание молодости духа и мудрости опыта, яростный темперамент и тонкий ум, самоотверженность и нежность Александра Даниловича стали дорогими воспоминаниями и утешением тех, кто имел счастье быть рядом с ним.

Ю. Ф. Борисов, В. А. Залгаллер, С. С. Кутателадзе,
О. А. Ладыженская, А. В. Погорелов, Ю. Г. Решетняк