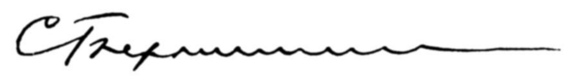
В. С. Виденский
д. ф.-м. н., проф. Российского педагогического университета им. А. И. Герцена (Санкт-Петербург)

АКАДЕМИК СЕРГЕЙ НАТАНОВИЧ БЕРНШТЕЙН

(к 120-летию со дня рождения)



Труды С. Н. Бернштейна относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных, теории вероятностей и конструктивной теории функций, создателем которой он является. Сергей Натанович начал свою творческую жизнь в 23 года с того, что решил одну из знаменитых проблем Гильберта об аналитической природе решений эллиптических уравнений с частными производными. В теории вероятностей С. Н. Бернштейн построил ее первую аксиоматику, основанную на булевых алгебрах. Конструктивную теорию функций С. Н. Бернштейн выделил из анализа в отдельную область математики, осуществив синтез идей Чебышева о наилучшем приближении с идеей Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции, получив при этом огромное число конкретных результатов первостепенной важности.

В 1925 г. Сергей Натанович был избран членом-корреспондентом, а в 1929 г. действительным членом АН СССР. С тех пор он стал деятельным сотрудником Академии наук — руководил отделом в Математическом институте АН им. В. А. Стеклова, активно печатал свои статьи в ДАН и ИАН, серия матем., опубликовав в них в общей сложности 70 работ, а также представлял в эти журналы многочисленные работы русских ученых.

В 1952—1964 годах издательство Академии наук выпустило в свет “Собрание сочинений” С. Н. Бернштейна в четырех томах.

Исполнилось 120 лет со дня рождения Сергея Натановича Бернштейна — одного из величайших математиков двадцатого века. Однако имя его мало известно широкой публике, так как его глубокие труды относятся к тонким вопросам современной математики, которые выходят по большей части за рамки основных курсов и находят место только в некоторых специальных курсах. Впрочем, долгое время целые поколения учились по его превосходной книге “Теория вероятностей”, но она последний раз была издана более чем полвека назад, и теперь редко встретишь человека, который ее видел.

Для молодых людей, недавно начавших заниматься наукой, быть может, интересна творческая биография С. Н. Бернштейна — человека, который брался за труднейшие актуальные проблемы и который решал их, выдвигая оригинальные идеи и создавая новые эффективные методы. Читатель, естественно, хотел бы познакомиться с личностью С. Н. Бернштейна, с его отношением к математике, узнать о его знаменитых учителях и о том, как был организован его повседневный плодотворный труд, а также под влиянием каких обстоятельств — научных и жизненных — он выбирал темы для своих исследований, как руководил научными семинарами и как относился к коллегам и ученикам. За свою долгую жизнь Сергей Натанович встречался со многими прославленными математиками, учился у них, сотрудничал и соперничал с ними.

По древней традиции, говоря о выдающихся мужах, нередко подчеркивают, что они имели довольно невзрачный вид. Этого не скажешь о Сергее Натановиче. Его облик поражал с первого взгляда, производил впечатление неординарности и значительности, на лице лежала печать внутренней сосредоточенности, напряженной духовной жизни, твердой воли, живой и ясной мысли. Его фотографии дают об этом очень смутное представление, а живописные портреты, увы, теперь не в моде. Да и в былые времена не часто крупного ученого писал художник сопоставимого ранга. Декарту повезло, кажется, больше, чем другим. Сохранилось два его портрета кисти Франса Хальса, один в музее Лондона, а другой — Киева. Вы можете при случае увидеть на них вдохновенное лицо великого философа и математика.

Эта статья только отчасти основана на моих воспоминаниях. С Сергеем Натановичем я познакомился в 1946 году, т. е. к моменту, когда он уже сделал большинство своих фундаментальных работ и был давно знаменитым математиком. Кроме того, кое-что слышал о нем от его учеников 20-х годов профессоров Я. Л. Геронимуса, В. Л. Гончарова и Б. А. Рымаренко, а также от известного французского математика С. Мандельбройта, которого в годы гражданской войны судьба забросила в Харьков, где он учился у Сергея Натановича.

Бесспорно главным источником для понимания творчества и научного мировоззрения Сергея Натановича являются его научные труды. Однако, это понимание будет неполным, если не обратиться к его публичным выступлениям и обзорным докладам. В них содержатся также новые проблемы; лишь часть из них решена, другие остаются открытыми. Например, не решена задача о восстановлении функции по данной последовательности ее наилучших приближений.

В 1946/47 учебном году Сергей Натанович последний раз вел занятия на механико-математическом факультете Московского университета. Он читал курс лекций о приближении функций, определенных на всей вещественной прямой, руководил научно-исследовательским семинаром, а по вторникам с двух до четырех дома давал консультации, в частности, обсуждал со слушателями их результаты и представлял заметки к опубликованию в ДАН. Тогда я и стал посещать эти занятия, и мне посчастливилось с тех пор работать под руководством Сергея Натановича 16 лет подряд.

Лекции С. Н. Бернштейна были прекрасны, но не по форме, не благодаря отточенности и отшлифованности, и не потому, что их было легко понимать, пожалуй, наоборот, — довольно трудно. Исключительное достоинство и привлекательность этого курса состояли в свежести материала: излагались совершенно новые результаты, полученные лектором в самое последнее время, иные только что вышли из печати, а другие лишь к ней готовились. Это создавало в аудитории необычайно творческую атмосферу. Однажды кто-то из слушателей попросил во время лекции разъяснить неясное место в доказательстве теоремы. Сергей Натанович попытался, но не удалось, обещал подумать дома. На следующей лекции Сергей Натанович сказал, что в рассуждении оказался пробел, но что он нашел новое доказательство, которое тут же привел, показав, что верна даже более общая теорема.

Слушали лекции и участвовали в семинаре такие известные математики, как А. О. Гельфонд, В. Л. Гончаров, Б. М. Левитан, С. М. Никольский, а также несколько аспирантов и студентов. Как и на лекциях, на семинаре царила творческая обстановка. Большинство сообщений было посвящено новым работам самих докладчиков, но практиковались также подробные рефераты журнальных статей по широкому кругу вопросов конструктивной теории функций. Сергей Натанович был неизменно доброжелателен, безукоризненно вежлив, слушал докладчиков очень внимательно, иногда высказывал какие-нибудь соображения о возможном движении вперед или обобщении и усилении результатов. Несмотря на это, ему не удавалось создать вполне непринужденную обстановку: докладчики несколько смущались и стушевывались в его присутствии, испытывали какую-то скованность и неловкость. Эти ощущения были еще сильнее, когда посетитель попадал в его рабочий кабинет у него дома. Читатель, наверное, бывал в музеях-квартирах знаменитых писателей, художников или артистов. Все же я не сомневаюсь, что такого строгого кабинета, как у Сергея Натановича, он еще не видывал. Большая высокая комната, почти посередине огромный письменный стол, заваленный открытыми книгами и журналами, которые годами не закрывались, старинная настольная лампа с козырьком, перемещающимся по вертикали. За рабочим креслом на стене висит небольшая доска, которой по временам Сергей Натанович пользуется вместо черновиков, впрочем, иной раз стирая досрочно что-нибудь еще полезное. Вдоль всех стен высокие книжные шкафы. В кабинете ни единой лишней вещи, только математическая литература; ни художественной литературы, ни портретов или картин на стенах, ни телефона, ни радиоприемника — это в других комнатах. Здесь все для сосредоточенного занятия математикой, ничто не должно отвлекать. Одно исключение из правила все же было — по кабинету гулял большой пушистый кот, по временам вспрыгивал на стол, но осторожно, ничего не ронял. Казалось, что кот каким-то мистическим образом вовлечен в работу хозяина.

Много лет спустя мне рассказывали, что в конце двадцатых годов С. Н. Бернштейн открыл в Харьковском университете НИИ математики, который располагал приличной библиотекой и небольшим читальным залом. Как-то раз Сергей Натанович зашел туда вечером и увидел, что уже никто не занимался математикой, но два человека играли в шахматы. Он это запретил, говоря, что комната предназначена исключительно для занятий математикой. В другой раз его спросили, можно ли в нерабочее время провести в читальном зале профсоюзное собрание. — Нет-нет, только заниматься математикой. Вероятно, Сергей Натанович считал, что необходимо создать специальную ауру и ничем ее не нарушать, — как у него дома. Однако, мне лично не случалось от него слышать этого в явном виде.

Мы почти ничего не знаем о детских и юношеских годах С. Н. Бернштейна. Он родился в Одессе 5 марта 1880 года в семье доктора медицины, приват-доцента университета. Отца он в живых не застал, тот внезапно умер в конце предыдущего года. В семье было еще трое детей, — две сестры и брат. Мать имела небольшие средства, однако достаточные, чтобы дать детям хорошее воспитание и образование. Из этой семьи вышло много ученых. Одна из сестер Сергея Натановича училась в Париже, стала крупным микробиологом и работала до глубокой старости в институте Пастера. Сыновья брата, племянники Сергея Натановича, жили в Москве, один был доктором технических наук, профессором военной академии, другой — членом-корреспондентом Академии медицинских наук.

По словам Сергея Натановича, математикой он заинтересовался в старших классах гимназии и самостоятельно изучил аналитическую геометрию. В прошлом веке, разумеется, не практиковались никакие математические кружки, и мало кто пытался вызвать у молодых людей интерес к науке. К этим скудным сведениям о школьных годах С. Н. Бернштейна остается только добавить, что, родившись на берегах Черного моря, он любил его и был прекрасным пловцом. Случалось ему не раз заплывать в такую даль, что не видно было земли, и приходилось определять направление к берегу по солнцу.

В 1898 году, в 18 лет, С. Н. Бернштейн отправился учиться в Парижский университет (знаменитую Сорбонну). Курс там был рассчитан на четыре года, но Сергей Натанович закончил обучение на год раньше. Лекции читали такие первоклассные ученые, как Аппель и Гурса, а небесную механику читал сам Пуанкаре. Экзаменов было мало, но объем их по нашим представлениям был совершенно фантастическим. Например, экзамен по математическому анализу охватывал, кроме того, что включают у нас, как правило, в двухгодичный курс анализа, сверх того теорию аналитических функций, а также обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Одновременно С. Н. Бернштейн тщательно изучал современные труды Адамара по теории аналитических функций и Пикара по дифференциальным уравнениям. В московской библиотеке Сергея Натановича сохранилась со студенческих лет, кажется, одна-единственная книга, а именно обзор Адамара “О ряде Тейлора и его аналитическом продолжении”. На ней были отчетливо видны следы настойчивой и упорной работы — она вся рассыпа́лась на отдельные пожелтевшие страницы, каждая из которых была в весьма плачевном состоянии.

Париж издавна — со времен Декарта и Паскаля, — был мировым центром математической мысли. Однако в конце прошлого века там еще не вошли в моду научные семинары, и молодому иностранцу было трудно, почти невозможно примкнуть к кругу французских математиков. После нескольких бесплодных попыток установить с ними контакты и обсудить темы возможных самостоятельных исследований С. Н. Бернштейн, разочарованный неудачей, переехал в Германию, в Геттинген, где работал прославленный семинар Гильберта и куда съезжалась талантливая молодежь со всех концов света слушать блестящие лекции Клейна, Гильберта и Минковского и поскорее начать собственное творчество.

Ровно 100 лет тому назад летом 1900 года на рубеже двух веков на Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт выдвинул свои 23 знаменитые проблемы, которым суждено было во многом определить направление творческих усилий математиков в 20-м веке. В начале доклада Гильберт говорил: “Как вообще каждое человеческое начинание связано с той или иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем”. Далее он сказал, что хотел бы предложить достаточно трудные проблемы, чтобы они казались нам привлекательными, но не настолько трудными, чтобы нас отпугивать. Это понятно, кому же хочется браться за слишком легкие задачи с почти очевидными решениями или, наоборот, за проблемы, которые выглядят как неприступные и безнадежные. Кроме того, Гильберт полагал, что проблему можно считать совершенной лишь тогда, когда ее условие так просто и ясно, что мы готовы ее объяснить первому встречному. Смешно было бы эту метафору понимать буквально.

Итак, в 1902 году С. Н. Бернштейн приехал в Гёттинген в поисках подходящих проблем для начала творческой работы, а также для знакомства с трудами знаменитой гёттингенской школы, которая вела свою родословную от Гаусса, Дирихле и Римана. Сергей Натанович стал участником семинара Гильберта, и вскоре тот обратил внимание на его глубокий интерес и острое понимание обсуждаемых вопросов. Давид Гильберт лично предложил С. Н. Бернштейну испытать свои силы на 19-й проблеме. Эта проблема касалась аналитических решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Напомним, что функция $\mathcal{Z} = f(x,y)$ называется аналитической в области G, если она в окрестности каждой точки (x_0, y_0) из G разлагается в сходящийся степенной ряд по степеням $(x-x_0)^n(y-y_0)^p$. Для простоты рассмотрим линейное уравнение

$$\mathcal{A}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathcal{B}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathcal{C}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{D}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{E}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \mathcal{F}(x,y)u + \mathcal{G}(x,y) = 0.$$

Это уравнение называется эллиптическим в G, если

$$\mathcal{A}(x,y)\mathcal{C}(x,y) - \mathcal{B}^2(x,y) > 0.$$

Например, к эллиптическому типу очевидно относится уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Вопрос Гильберта состоял в следующем. Пусть все коэффициенты эллиптического уравнения являются аналитическими функциями, а функция u имеет частные производные второго порядка. Можно ли утверждать, что решение u тоже аналитическая функция? Отметим, что проблема касалась общего случая, а не только случая линейных уравнений. Д. Гильберт придерживался детерминистских взглядов и считал, что законы природы должны описываться аналитическими функциями. В частной беседе он сказал Сергею Натановичу, что не сомневается в положительном ответе, так как к эллиптическим уравнениям приводят естественно поставленные задачи вариационного исчисления.

С. Н. Бернштейн решил 19-ю проблему в общем виде и дал в целом утвердительный ответ. Для этого ему пришлось создать новый метод, построить специальные ряды, которые автор назвал *нормальными*, так как ввел для них некоторые нормы. Этой превосходной работой С. Н. Бернштейна тема не была исчерпана. Она дала ответ на конкретный вопрос, но, кроме того, сыграла роль первопроходческой и открыла дорогу другим исследователям.

Решению 19-й проблемы С. Н. Бернштейн посвятил, как тогда говорили, мемуар (большую статью) и защитил его в 1904 году в качестве докторской диссертации в Парижском университете перед комиссией из Адамара, Пикара и Пуанкаре. На защите диссертанту полагалось быть во фраке, — одежде уже и тогда старомодной, а потому комичной. К счастью, наряд этот заказывать не приходилось: его давал напрокат университетский швейцар. На этот раз французские математики отнеслись к Сергею Натановичу дружелюбно и явно гордились, что молодой выпускник их университета был первым, кто решил проблему Гильберта. Остальные 22 проблемы еще не были даже атакованы. Диссертация начиналась словами: “Кажется, все математики и физики наших дней согласны, что область приложения математики не имеет других границ, кроме границ самого знания”. Так Сергей Натанович всегда и думал.

В 1905 году С. Н. Бернштейн вернулся в Россию, в Санкт-Петербург. Здесь, как он и предвидел, его ждали большие трудности. Иностранные дипломы не признавались: не было никакого международного соглашения. Можно было получить в Париже докторскую степень, но при этом дома, в России, формально не считаться даже имеющим высшее образование. Экзаменоваться за университет его все же не заставили, а магистерские экзамены сдавать пришлось. Это было трудно, так как программы были далеки от принятых во Франции и Германии. Постоянной работы не было, приходилось искать временные заработки. Не оставил ли Сергей Натанович перед лицом встретившихся препятствий научную работу? Нет, ни в коем случае. Если так реагировать на внешние невзгоды, то математикой не будешь заниматься никогда. За какую задачу приняться, было ясно. К 19-й проблеме примыкает 20-я проблема, по смыслу, разумеется, а не по номеру. Она касается так называемой проблемы Дирихле и тоже об аналитических решениях. С. Н. Бернштейн успешно справился с проблемой, совершенствуя свои методы.

Так как получить работу и подать магистерскую диссертацию в Петербурге не удалось, то в 1908 году С. Н. Бернштейн переехал в Харьков, куда был приглашен профессором теории вероятностей на Высших женских курсах. Лет через сорок Сергей Натанович говорил мне, что это предложение его немало огорчило. Тогда я не вполне правильно понял причины этой досады и подумал, что речь шла только о большой затрате времени на подготовку к лекциям. Но впоследствии мне стало ясно, что в то время Сергей Натанович был склонен к детерминизму, а роль случайных событий тогда еще не особенно ценил. Так или иначе, но это был перст судьбы. Ему предстояло сделать решающий шаг в развитии теории вероятностей, — создать ее аксиоматику и превратить ее в строгую математическую науку. Это было еще далеко впереди, а в тот момент Сергей Натанович своего предназначения не мог сознавать или предчувствовать.

По приезде в Харьков С. Н. Бернштейн защитил магистерскую диссертацию, в которую включил решение двух проблем Гильберта, 19-й и 20-й. Это был уникальный в мире случай, чтобы диссертация на первую научную степень содержала решение двух знаменитых проблем.

Затем С. Н. Бернштейн выполнил еще несколько первоклассных работ по теории уравнений в частных производных, дав при этом новые плодотворные методы исследований, которые и поныне играют важную роль. После этого Сергей Натанович отошел от этой темы и стал заниматься приближением функций. Одновременно над двумя темами Сергей Натанович никогда не работал, — это противоречило его принципу полного погружения в проблему и максимальной сосредоточенности. Сначала я думал, что как раз наоборот, автор трудов в столь разных направлениях математической мысли постоянно занимается вперемежку то одним, то другим, легко переходя от одного к другому. И мне показалось весьма удивительным, когда в перерыве на нашем семинаре по конструктивной теории функций в МГУ Сергей Натанович отклонил просьбу одного постороннего человека побеседовать об уравнениях в частных производных, мотивируя это тем, что теперь он занимается только теорией приближения.

Внимание С. Н. Бернштейна было привлечено проблемой о наилучшем приближении функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими многочленами. По инициативе выдающегося бельгийского математика Валле Пуссена Королевская академия наук Бельгии в 1910 году объявила конкурс на решение этой задачи. Нетрудно объяснить историю вопроса, термины и плодотворную роль проблемы. В середине прошлого столетия П. Л. Чебышев, занимаясь исследованиями шарнирных механизмов, пришел к следующая задаче: приблизить непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию f наилучшим образом многочленом

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

данной степени n. Под отклонением P_n от f П. Л. Чебышев понимал величину

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} \bigl|P_n(x) - f(x)\bigr| =: \bigl\|P_n - f\bigr\|.$$

Приблизить наилучшим образом — это значило выбрать коэффициенты многочлена так, чтобы $\bigl\|P_n - f\bigr\|$ была минимальной. Этот минимум называется наилучшим приближением функции f и обозначается $E_n(f)$. Многочлен, для которого этот минимум достигается, называется многочленом, наименее уклоняющимся от f; обозначим его через $P_n^*(f,x)$. Простых формул для его вычисления нет. Чебышев указал его замечательное характеристическое свойство: график разности

$$f(x) - P_n^*(f,x)$$

похож на синусоиду — в $n+2$ точках отрезка он принимает с последовательно противоположными знаками значения $\pm E_n(f)$.

С другой стороны, лет 30 спустя совершенно иные соображения, а именно исследования по теории аналитических функций, привели Вейерштрасса к следующей фундаментальной теореме: всякая непрерывная на отрезке функция f есть равномерный предел некоторой последовательности многочленов $\bigl\{P_n(f)\bigr\}$ при $n\to\infty$. Ясно, что при любом натуральном n

$$E_n(f) = \bigl\|P_n^*(f) - f\bigr\| \leqslant \bigl\|P_n(f) - f\bigr\|,$$

и значит,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

Это условие является также достаточным, чтобы f была непрерывной. В самом деле, это означает, что f является пределом равномерно сходящейся последовательности многочленов $\bigl\{P_n^*(f)\bigr\}$. Пожалуй, это решительно все, что можно сказать без дальнейшей настойчивой и упорной работы. Естественный вопрос: от каких свойств функции f зависит скорость убывания $E_n(f)$ при $n\to\infty$? Начать надо было с простейших случаев. Выбор удачно пал на функцию $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$; ее график — двухзвенная ломаная, она имеет производную всюду, за исключением точки $x=0$. Кроме того, функция $|x|$ играла важную роль в одном из доказательств фундаментальной теоремы Вейерштрасса, указанном Лебегом. Он заметил, во-первых, что любая непрерывная n-звенная ломаная может быть записана в виде

$$\Lambda_n(x) = kx + b + \sum_{i=1}^{n} A_i\bigl|x - \alpha_i\bigr|,$$

где α_i — абсциссы вершин ломаной. Во-вторых, чтобы приблизить функцию $|x|$ многочленами, он представил ее в виде

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$$

и разложил в ряд Тейлора. Доказательство Лебега оказалось весьма продуктивным, оно содержало скрытые возможности, которые повлекли за собой широкие обобщения, — в тот момент их еще нельзя было предвидеть. Лебег лишь на несколько лет старше С. Н. Бернштейна, он был его коллегой, а не учителем. Сергей Натанович вспоминал о нем с большой теплотой.

В техническом отношении конкурсная тема об оценке $E_n\bigl(|x|\bigr)$ была очень трудной. Теперь, когда решение известно, задача, как обычно, представляется более легкой. Валле Пуссен сначала сам пытался решить вопрос и опубликовал предварительные результаты. С. Н. Бернштейн дал исчерпывающий ответ и доказал, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} nE_n\bigl(|x|\bigr) = \mu, \quad 0.278 < \mu < 0.286.$$

Можно предположить, впрочем без достаточно веских оснований, что Сергей Натанович вычислил этот предел с такой точностью в надежде уловить связь между постоянной μ и классическими константами π или e. Отметим, что обобщение этой задачи и ее связи с наилучшим приближением функции на всей прямой при помощи целых функций привлекали Сергея Натановича всю его жизнь.

Интересно, что это всего-навсего побочный результат общего исследования С. Н. Бернштейна о наилучшем приближении функции в зависимости от ее дифференциальных свойств. Тем самым был заложен фундамент новой области, которую С. Н. Бернштейн назвал впоследствии “конструктивная теория функций”, а мы называем его создателем конструктивной теории функций. Выяснилось, что скорость убывания $E_n(f)$ при $n \to \infty$ полностью определяет класс приближаемых функций. Например, чтобы функция f была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы при всех натуральных n выполнялось неравенство

$$E_n(f) < Aq^n \quad (A > 0,\ 0 < q < 1).$$

Если же мы имеем только

$$E_{n_k}(f) < Aq^{n_k} \quad (A > 0,\ 0 < q < 1)$$

для некоторой бесконечной подпоследовательности, то этими неравенствами определяется некоторый класс функций, который обладает следующим свойством единственности: если функции f и g совпадают на сколь угодно малом интервале, то они совпадают на всем отрезке. Любопытно, что функции такого класса могут быть недифференцируемыми ни в одной точке. Такие классы функций называются квазианалитическими в смысле Бернштейна. Для того же, чтобы f была бесконечно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы при любом $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(f) = 0.$$

С. Н. Бернштейн был удостоен премии Бельгийской академии. Несмотря на это, он с трудом защитил по этой теме в Харьковском университете докторскую диссертацию, так как один из двух оппонентов дал о работе отрицательный отзыв.

В 1912 году Сергей Натанович был приглашен сделать часовой доклад на Международном конгрессе в Кембридже. По уставу этих конгрессов чести сделать часовой доклад можно удостоиться лишь один раз в жизни. С. Н. Бернштейну было 32 года. В этом докладе, который содержал не только результаты, но и программу дальнейших исследований, он, в частности, сказал: "Пример задачи о наилучшем приближении $|x|$, предложенной Валле Пуссеном, дает еще одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий". Эту мысль о роли проблем я не раз слышал от него на семинаре и в частных беседах.

Что касается метода, созданного С. Н. Бернштейном, то он представлял собой глубокий синтез идей Чебышева и Вейерштрасса, а также основывался на получении точных неравенств и их тонкого применения.

Мы уже несколько раз упоминали фундаментальную теорему Вейерштрасса. Важны не только сами теоремы, но и их доказательства. Вместе они существенно влияют на развитие математики. С. Н. Бернштейн, который, как мы видим, вел тогда исследования по теории приближений, уже несколько лет преподавал теорию вероятностей и под ее влиянием изобрел следующую конструкцию многочленов:

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

которые теперь называются многочленами Бернштейна. Многочлены $B_n(f)$ и есть в явном виде последовательность, фигурирующая в теореме Вейерштрасса, для функции f, непрерывной на отрезке $[0,1]$. То, что

$$\lim_{n\to\infty} \big\|B_n(f) - f\big\| = 0,$$

Сергей Натанович очень просто вывел из закона больших чисел, но это легко доказывается и средствами математического анализа.

Тем временем С. Н. Бернштейн уже начал углубляться в размышления над основами теории вероятностей. Хотя ее история насчитывала уже примерно 250 лет, ей были присущи черты экспериментальной науки с размытыми понятиями случайного события и его вероятности, что нередко приводило к ошибочным применениям и математическим парадоксам. Кое-кто сомневался в том, существуют ли в реальном мире случайные события, другие полагали, что шанс наступления случайного события оценивается каждым весьма субъективно. С таким же успехом можно возражать и против геометрии и сомневаться в существовании прямых и окружностей, так как в реальном мире мы имеем дело не с окружностями и прямоугольниками, а с колесами и столами. Теория вероятностей к тому времени была уже очень содержательной наукой, которая включала в себя много важных результатов, а также имела широкие приложения в астрономии, статистической механике и других разделах физики. Но строгая математическая теория имеет дело не непосредственно с явлениями материального мира, а с их идеальными образами, что и дает возможность ее продуктивного применения к широкому кругу вопросов. Таким образом, назрела необходимость подвести под здание теории вероятностей логический фундамент, дать ей аксиоматическое обоснование.

Именно это осуществил С. Н. Бернштейн в 1917 году в мемуаре, опубликованном в "Сообщениях Харьковского математического общества" под названием "Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей". Построение базировалось на булевых алгебрах. Построение аксиоматики теории вероятностей числилось среди проблем Гильберта под номером 6. Однако в упомянутом мемуаре, выполненном во время первой мировой войны, ссылки нет; видимо, в военное время цитата была невозможна. Мне кажется, что С. Н. Бернштейн обратился к этой теме не столько ради решения еще одной проблемы Гильберта, сколько благодаря работе над лекциями и учебником по теории вероятностей, а также под влиянием современных ему успехов статистической физики. В 1929 году Андрей Николаевич Колмогоров дал другое аксиоматическое построение теории вероятностей, более употребительное, связанное с теорией множеств и теорией меры. Вскоре С. Н. Бернштейн применил теорию вероятностей к математической генетике и обоснованию законов Менделя. В этом направлении он был безусловным первопроходцем и получил основополагающие результаты. Кроме того, С. Н. Бернштейну принадлежат в теории вероятностей результаты большой глубины и силы, которые завершали классические направления и прокладывали новые пути.

В 1929 году С. Н. Бернштейн был избран академиком. Академия наук тогда находилась в Ленинграде, по ее уставу там и полагалось жить академикам. Сергей Натанович не торопился переезжать, как видно, опасаясь нарушить налаженный ритм работы. Как раз в это время он успешно занимался теорией ортогональных многочленов и, развивая идеи Чебышева, установил связь между ортогональными многочленами и многочленами, наименее отклоняющимися от нуля, благодаря чему получил знаменитые теперь асимптотические формулы. Это исследование, кстати сказать, не вполне завершено и еще ждет продолжателей. Но с 1930 года в харьковских газетах началась травля С. Н. Бернштейна, которому приклеили модный тогда ярлык буржуазного ученого. Нависла реальная угроза ареста. В 1933 году Сергей Натанович переехал в Ленинград. Это оказалось очень своевременно, так как на Украине в результате насильственной коллективизации вскоре разразился свирепый голод, унесший миллионы жизней.

В Ленинграде Сергей Натанович вполне успешно продолжал творческую деятельность, включился в интересы ленинградских математиков и вошел в их круг. Особенно он подружился с Владимиром Ивановичем Смирновым. Здесь Сергей Натанович прожил до начала войны. После войны С. Н. Бернштейн не вернулся в Ленинград, так как во время блокады умер от голода его единственный сын. Ехать туда, где случилась эта трагедия, не хотелось. В Ленинграде Сергей Натанович трудился с большим подъемом и за 8 лет опубликовал 60 работ.

Еще живя в Харькове, Сергей Натанович из беседы с академиком Алексеем Николаевичем Крыловым, крупным специалистом по прикладной математике и кораблестроению, узнал об одной проблеме, возникшей в связи с применением следующей квадратурной формулы Чебышева:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{1}$$

где значения x_i из отрезка $[0,1]$ надо выбрать так, чтобы формула была верна для любых алгебраических многочленов степени n. В работе П. Л. Чебышева были указаны x_i для случаев $n = 2, \dots, 7$. Дальнейшие вычисления показали, что при $n = 8$ появляются мнимые x_i, а при $n = 9$ найти требуемые x_i на отрезке $[0,1]$ снова возможно. Сергей Натанович пишет, что он сразу же в беседе ответил, что интуитивно ясно, что при достаточно больших n построить формулу (1), верную для всех многочленов степени n, невозможно. Постановка задачи вполне в духе Гильберта: в чем вопрос, можно объяснить прохожему. Задача не выглядит пугающе неприступной. Как известно, квадратурные формулы тесно связаны с теорией ортогональных многочленов, а Сергей Натанович в это время как раз занимался этой теорией, так что задача для него оказалась вполне привлекательной. Предприняв довольно сложные вычисления и связав вопрос с задачей о наилучшем приближении функции $|x|$, Сергей Натанович дал доказательство упомянутого выше мнения и опубликовал его в 1932 году в ИАН. Однако ответ, вероятно, не вполне удовлетворял самого Сергея Натановича, да, возможно, что и А. Н. Крылов иронично замечал, что в корабельном деле n обычно к бесконечности не устремляют. В Ленинграде Сергей Натанович возвращается к этой теме и получает полный и исчерпывающий результат. Пусть задано n — число точек x_i, и пусть M_n означает высшую степень всех многочленов, для которых точна формула (1). Тогда выполняется неравенство

$$M_n < 4\sqrt{n}, \tag{2}$$

откуда выводится, что формула (1) невозможна при $n \geqslant 10$. Вывод неравенства (2) исключительно изящен и оригинален, он базируется на результатах С. Н. Бернштейна из теории ортогональных многочленов. Мне кажется, что в эстетическом отношении это одна из красивейших работ Сергея Натановича. В настоящее время эта тема развивается для кратных интегралов и различных областей, а точки x_i используются для кодирования информации.

В 1923 году С. Н. Бернштейн прочел с большим успехом курс лекций в Парижском университете об экстремальных свойствах полиномов и наилучшем приближении аналитических функций. Эти лекции содержали многочисленные новые результаты Сергея Натановича, значительная часть которых ранее не публиковалась. На лекциях бывали Борель, Адамар, Лебег, Монтель, а также молодые ученики Сергея Натановича Гончаров и Мандельбройт. С. Н. Бернштейну была заказана книга, которую он написал с невероятной скоростью, за 2—3 летних месяца; она вышла в свет в серии монографий под редакцией Бореля в 1926 году достаточно маленьким тиражом. Десять лет спустя С. Н. Бернштейну стало ясно, что есть настоятельная необходимость перевести эту монографию на русский язык, чтобы она стала доступной читателю в СССР. За перевод этой монографии Сергей Натанович взялся лично, но вскоре отвлекся и увлекся и написал по существу другую монографию, которая, впрочем, имеет с первой пересечения. В 1937 году С. Н. Бернштейн издал книгу под названием “Экстремальные свойства полиномов”, часть первая. Была обещана вторая часть, которая должна была содержать материал из французской монографии, не вошедший в первую часть, а также новые вещи. Но, как нередко бывает, вторая часть не была написана.

В начале войны в 1941 году С. Н. Бернштейн вместе с другими академиками был эвакуирован из Ленинграда, куда он больше не вернулся. С 1943 года С. Н. Бернштейн поселился в Москве, где работал в Математическом институте АН им. В. А. Стеклова до конца жизни, а также читал лекции и вел научный семинар по конструктивной теории функций до весны 1947 года в Московском университете.

В 1946 году вышло 4-е издание курса “Теория вероятностей”. В сравнении с предыдущими вариантами книга была существенно переработана. Кроме того, были присоединены “Добавления”, которые содержали новые результаты автора, ранее еще не публиковавшиеся. В 1948 году имела место печально известная сессия ВАСХНИЛ, осуществившая разгром естествознания в СССР. Только чудом можно объяснить, что Сергей Натанович не только избежал преследований, но, кажется, нигде не был даже упомянут. Между тем, С. Н. Бернштейн был одним из первых в мире и несомненно первым в нашей стране, кто применил теорию вероятностей для исследования генетических законов наследственности.

Впоследствии, вероятно, уже после смерти Сталина, издательство сообщило С. Н. Бернштейну, что весь тираж “Теории вероятностей” уже распродан, и предлагало следующее, 5-е издание, но при этом отмечало, что было бы желательно заменить примеры приложения теории вероятностей к биологии применениями в других науках. Страх еще был очень велик, а генетика еще не была реабилитирована и считалась противоречащей диалектическому материализму. Сергей Натанович прекрасно понимал ситуацию и нисколько не обиделся, как полагали некоторые. С. Н. Бернштейн ответил, что занят изданием Собрания своих сочинений и не может отвлечься на переработку курса, но что согласен на его стереотипное переиздание. Однако на это не решились.

В 1950 году, когда Сергею Натановичу минуло 70 лет, математическая общественность Москвы, Московское математическое общество и Академия наук искренне хотели провести торжественное чествование, но Сергей Натанович не согласился. В УМН и Известиях АН, серия матем., были, как обычно в этих случаях, опубликованы статьи, посвященные юбиляру. Но чувствовалось, что этого мало. Кому-то пришла в голову прекрасная мысль издать “Собрание сочинений” Сергея Натановича Бернштейна, что было одновременно данью глубокого уважения и заботой о сохранении богатого научного наследия. Обратились к президенту Академии наук С. И. Вавилову. Кажется, академики А. Н. Колмогоров и И. Г. Петровский нанесли ему визит, чтобы обсудить проблему и выяснить возможности. Президент хорошо лично знал Сергея Натановича и относился к нему с большим пиететом, он с готовностью поддержал эту инициативу, и Академией наук было принято решение издать “Собрание сочинений” С. Н. Бернштейна под его собственной редакцией. Сергей Натанович это издание воспринял как честь, как ответственное поручение Академии наук и как свой долг перед Математикой.

Лучшего и более неожиданного подарка придумать было нельзя. Сергею Натановичу было очень приятно, и он был наилучшим образом готов принять этот подарок. Во-первых, у него хранились в замечательном порядке оттиски всех его работ за всю жизнь. Статьи эти были, естественно, разбросаны по многочисленным журналам мира. По мере того, как скапливались новые оттиски, Сергей Натанович отдавал их в переплет. Обложки были разноцветными. Интересно, что Сергей Натанович помнил по цвету почти безошибочно, где находится та или иная его статья, поскольку он привык ими постоянно пользоваться и делать пометки на полях. Мы видим, что один полный комплект всех сочинений уже существовал.

Во-вторых, у Сергея Натановича был бесценный издательский опыт, — он уже 6 лет трудился в качестве председателя редколлегии “Полного собрания сочинений П. Л. Чебышева” в пяти томах (1944—1951), что он делал с присущей ему ответственностью и добросовестностью. Он руководил всей организационной работой, вел переговоры с президентом Академии наук и с директором издательства, а тома 2, 3 и 5 лично редактировал, тщательно выбирал комментаторов, а затем с каждым подробно обсуждал подготовленные тексты. Сергей Натанович вникал также в технические детали и даже читал корректуры, что, впрочем, не диктовалось необходимостью. Параллельно Сергей Натанович издал отдельный том “Научное наследие П. Л. Чебышева” (1945), в котором были даны обзоры дальнейшего развития идей П. Л. Чебышева. Кстати, сам Сергей Натанович опубликовал здесь прекрасную и глубокую статью “О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей”.

Ничто не предвещало, что работа над изданием трудов С. Н. Бернштейна затянется на целых 14 лет;

подготовка первого тома началась сразу же в марте 1950 года, а последний четвертый том был подписан к печати 12 марта 1964 года. Почему же ушло так много времени? Прежде всего потому, что Сергей Натанович решил воспроизводить не все статьи подряд, но хотел устранить некоторые пересечения, что касалось в первую очередь статей, связанных с диссертациями, а также заметок в ДАН и Comptes rendus, вслед за которыми нередко шли более полные публикации. Кроме того, надо было исправить опечатки и те или иные погрешности, заменив их правильными текстами и сделав по этому поводу оговорки. Работа над комментариями чрезвычайно трудоемка; Сергей Натанович придавал ей большое значение и потратил на нее годы настойчивых усилий. В “Собрание сочинений” Сергей Натанович не включил три свои книги: “Теория вероятностей”, “Leçons sur les propriétés extrémales” и “Экстремальные свойства полиномов”, говоря, что книги можно будет переиздать впоследствии и без его участия, но к сожалению, это еще не сделано.

Сначала издали два тома сочинений по конструктивной теории функций, что для Сергея Натановича было легче, так как последние 10 лет его научные интересы целиком лежали в этой области. Сергей Натанович и раньше неоднократно возвращался к своим прежним работам, чтобы углубить, расширить и обобщить трактуемые в них темы. Теперь при подготовке комментариев он опять включился в круг временно оставленных идей и создал ряд новых замечательных работ о взвешенном приближении на всей вещественной оси.

С 1955 года началась трудная подготовка третьего тома, посвященного дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Трудная потому, что именно на третий том пришлась максимальная работа по согласованию текстов, а также по составлению комментариев, учитывающих развитие идей и методов С. Н. Бернштейна за половину века, прошедшую с момента появления его первых статей.

В том же 1955 году С. Н. Бернштейна избрали действительным иностранным членом Парижской академии наук. До Сергея Натановича это звание в России имели только Петр Великий и П. Л. Чебышев. Кажется любопытным и дает небольшой штрих к характеру Сергея Натановича то, что он никому ни слова не сказал о своем избрании. Я узнал об этом совершенно случайно, когда, просматривая в читальном зале свежие журналы, наткнулся в Comptes rendus на сообщение в разделе о научной жизни Парижской академии, разделе, который, как правило, не читал. Подумал, что, может быть, и сам Сергей Натанович ничего не подозревает. Прихожу, поздравляю, спрашиваю знает ли. Оказывается, уже давно знает. Показывает письмо от двух непременных секретарей Академии, написанное по вековой традиции от руки. Обращаются “Дорогой собрат”, приглашают принимать участие в заседаниях Академии и представлять заметки в Comptes rendus. Новыми правами Сергей Натанович не воспользовался.

В этом журнале Сергей Натанович опубликовал в 1903 году свою первую работу — сообщение о решении девятнадцатой проблемы Гильберта — и с тех пор постоянно сотрудничал в нем вплоть до 1938 года, когда под давлением сталинского гнета он, как и другие советские математики, перестал публиковать работы за границей.

Вскоре секретарь Французского посольства привез Сергею Натановичу домой очень красивую настольную платиновую медаль академика: на лицевой стороне Афина Паллада — богиня мудрости и знания, на оборотной стороне выгравировано Serge Bernstein. Разумеется, эта медаль не нашла, как посторонний отвлекающий предмет, места на письменном столе, а попала в его выдвижной ящик.

Однако, оставим в стороне наше отступление и вернемся к трудовым будням, которые во все времена составляли сущность и радость творческой жизни Сергея Натановича. Он внимательно перечитал все свои статьи, которые относились к уравнениям с частными производными, и принял нелегкое решение, какие из них полностью включить в Собрание сочинений, а какие частично, — в авторские комментарии. Кроме того, Сергей Натанович счел необходимым дать в комментариях разъяснения некоторых мест, изложенных первоначально очень лаконично и представляющих для читателя не всегда преодолимые трудности.

В конце третьего тома помещена очень интересная глубокая и многоплановая статья философско-методологического направления “О роли неравенств и экстремальных проблем в математическом анализе”. В ней, в частности, говорится, что экстремальные неравенства и классы функций, которые характеризуются простыми экстремальными свойствами, служат путеводной нитью, направляющей плодотворное развитие анализа. В других публичных выступлениях Сергея Натановича по совершенно иным проблемам мы встречаем аналогичные словосочетания: “путеводная звезда”, “руководящая нить”, “пробный камень”, “ключ всей теории”, “отправная точка”. Это кажется поучительным и проливает свет на психологию его научного мышления. Видно, Сергей Натанович считал, что нельзя блуждать в потемках и выбирать темы и методы исследований наудачу.

Десять лет спустя после начала издания, весной 1960 года, к 80-летию Сергея Натановича вышел из печати третий том Собрания сочинений и началась кропотливая работа над последним томом по теории вероятностей и математической статистике. После четвертого издания книги “Теория вероятностей” (1946) Сергей Натанович научную работу в этой области прекратил, а между тем она интенсивно развивалась, во многом опираясь на его идеи, методы и результаты. Поэтому он лично не стал писать комментарии, как к предыдущим томам, а попросил сделать это своих младших коллег, которые с готовностью откликнулись.

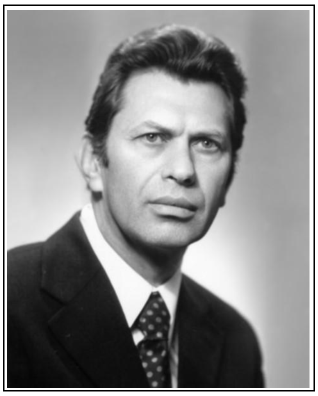
Сергей Натанович тщательно обсудил с ними их тексты и внес кое-какую правку в своем научном литературном стиле. Недавно нам стало известно, что Парижская Академия наук готовит издание этого тома по теории вероятностей на французском языке.

Итак, труды С. Н. Бернштейна, представляющие огромную научную ценность, собраны воедино, и еще не раз известные ученые и молодые люди, вступающие в науку, будут обращаться к его сочинениям, где будут черпать вдохновение, чтобы с новой силой развивать заложенные в этих исследованиях идеи и методы.

Мы видим, что Сергей Натанович потратил колоссальную энергию на Собрание сочинений, и, можно сказать, исчерпал свои силы. Сергей Натанович Бернштейн умер 26 октября 1968 года в Москве, где прожил 25 лет, т. е. больше, чем в любом другом городе, кроме Харькова. Похоронен Сергей Натанович на Новодевичьем кладбище.

Вскоре Президиум Академии наук постановил издать в одном томе “Избранные труды” С. Н. Бернштейна, однако это не было исполнено. Поскольку “Собрание сочинений” уже стало библиографической редкостью, то в настоящее время такое издание становится необходимостью. Не в меньшей мере это относится к трем книгам Сергея Натановича, одна из которых ждет перевода с французского на русский язык.

■ Статья поступила в редакцию 10 июня 2000.



Виденский Виктор Соломонович

доктор физико-математических наук, Почетный профессор Российского педагогического университета им. А. И. Герцена. Автор примерно 100 работ по конструктивной теории функций, в том числе двух небольших монографий. Перевел на русский язык известные книги: Г. Сегё «Ортогональные многочлены», С. Мандельбройт «Примыкающие ряды», Ж. Валирон «Аналитические функции» ■