О Л.В.КАНТОРОВИЧЕ И О ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ.

А. М. Вершик

Я хочу написать о том, что я помню и знаю о деятельности Леонида Витальевича Канторовича, - выдающегося ученого XX века, о его борьбе за признание своих экономико-математических теорий, о начальном этапе истории линейного программирования, о зарождении новой области математической деятельности, связанной с экономическими приложениями, называемой у нас то исследованием операций, то математической экономикой, то экономической кибернетикой и др., о ее месте и связях с современным математическим ландшафтом и, наконец, о нескольких личных впечатлениях об этом замечательном ученом. Мои заметки ни в коем случае не претендуют на сколько-нибудь полное описание затронутых вопросов.

1."Открытие" линейного программирования

Прослушав замечательный подробный двухлетний курс функционального анализа, читавшийся Л.В.Канторовичем (1954-55 уч.г.), я ни разу не услышал во время его лекций ни о его работах по теории двойственности, ни о вычислениях банаховых норм (заметки в ДАН 1938-39 года) ни, тем более, о линейных экстремальных задачах (знаменитой задаче фантреста) и о придуманном им методе разрешающих множителей для решения задач, которые позже стали называть задачами линейного программирования. Все это я узнал чуть позже. Сам по себе курс функционального анализа читался им в ЛГУ много уже несколько лет, позже он лег в основу широко известной книги Л.В. и его основного ученика в этой области Г.П.Акилова "Функциональный анализ в нормированных пространствах". По тем временам это была, без сомнения, едва ли не самая обширная и глубокая монография и одновременно учебник по функциональному анализу в мировой литературе. Позже я имел возможность убедиться в ее популярности и за рубежом. К слову сказать, "ленинградский" функциональный анализ, у истоков которого стояли В.И.Смирнов, Г.М.Фихтенгольц и, как основной мотор, - Л.В. а позже Г.П.Акилов имел свою специфику: влияние математической физики (С.Л.Соболев), комплексного анализа (В.И.Смирнов), теории функций (Г.М.Фихтенгольц, И.П.Натансон,С.М.Лозинский) было сильнее, чем скажем в Москве или на Украине, где были более популярны теория операторов, спектральная теория, мультипликативный функциональный анализ, теория представлений и банахова геометрия. Л.В. также создал еще перед войной специфическое "ленинградское" направление - функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Но главный вклад,сделанный Л.В. в этой области и безоговорочно признанный во всем мире, - это приложения функционального анализа к приближенным методам - подытоженный и его знаменитой статье в "Успехах" - "Функциональный анализ и приближенные методы". Эти работы были отмечены сталинской премией; они дали начало огромному циклу исследований в этом направлении.

В течение многих послевоенных лет основным центром, где обсуждались проблемы функционального анализа был известный семинар на математико- механическом факультете ЛГУ Фихтенгольца-Канторовича, который я регулярно посещал, начиная с 1954 года до его фактического закрытия где-то в середине 50-х гг. В его работе, особенно в последние годы, большую организационную работу вел Глеб Павлович Акилов -в дальнейшем мой первый научный руководитель, оригинальный и независимый человек, ученик, соавтор и коллега Л.В. Как-то на семинаре выступал Г.Ш.Рубинштейн, - фактически тоже ученик Л.В, - с докладом о наилучших приближениях и задаче о пересечении луча с конусом, т.е. по существу о задаче линейного программирования. Но тогда этот доклад воспринимался как просто отдельное сообщение на частную тему, и я не помню, чтобы Л.В., или кто-то другой как-либо комментировал его или говорил о том в каком контексте следует воспринимать эту тему. Но я помню остававшееся впечатление чего-то недосказанного, что известно лишь старшим участником семинара.

По-видимому, соблюдался внутренний запрет, причины которого хорошо известны старшим участникам семинара, неявно наложенный на открытые разговоры об этом цикле работ Л.В. Этот запрет был следствием того, что вскоре после блистательной брошюры Л.В., вышедшей в 1939 году, и после написания им уже во время войны книги по экономике, которая вышла почти через 20 лет, началась травля его идей идеологическими бонзами, грозившая похоронить и направление и самого автора в самом прямом смысле. Только много лет позже стали известны материалы о том, как серьезны были обвинения и угрозы высоких научных и идеологических чиновников. Этот запрет продолжался до 1956г. При этом он касался и экономической, и отчасти даже математической стороны дела. Многие из этих материалов собраны В.Л.Канторовичем недавно. Очень важно, чтобы они стали достоянием широких кругов, интересующихся историй нашей науки. Еще тогда шли неясные разговоры о каких-то прикладных работах Л.В. и В.А.Залгаллера о раскрое, Л.В. и М.К.Гавурина о транспортной задаче и т.п. относящихся уже к послевоенным годам, - но, честно говоря, я относил все это к разряду навязшего тогда в зубах "содружества науки и производства" (пропагандистский штамп тех лет, как правило, прикрывавший поверхностные, а то и просто пустые вещи) и не знал о математической и экономической серьезности темы. В первые годы, именно В.А.Залгаллер, М.К.Гавурин, Г.Ш.Рубинштейн (к ним надо добавить погибшего на фронте студента Юдина и, может быть, других) были ближайшими помощниками Л.В. в прикладной экономической деятельности и занимались теорией этих задач: с М.К.Гавуриным Л.В. написал еще до войны знаменитую работу о транспортной задаче (опубликована только в 1949 г.). С В.А.Залгаллером он занимался оптимальным раскроем, о чем Л.В. и В.А. написали книгу (1951 г.), и В.А. внедрял раскрой на вагоностроительном заводе им.Егорова в Ленинграде. По известным причинам на нережимные предприятии (как, например, на этот завод) те годы было возможно попасть людям с "ущербными анкетами". Это иногда приводило к тому, что профессиональный уровень был там выше среднего. По тем же причинам Г.Ш попал (по протекции Л.В.) даже на Кировский завод, где также пытался внедрить методы оптимизации и просто разумные подходы к задачам локального планирования, замечу, что Г.Ш. кончал университет в то время, когда для него - участника войны и успешного студента -не нашлось возможности поступить в аспирантуру; Г.Ш. учился до войны в Одесском университете у М.Г.Крейна и удачно соединял знания той части работ М.Г,Крейна и украинской школы функционального анализа (L-проблема моментов), которая была близка к тематике Л.В., с хорошим пониманием идей самого Л.В. по линейному программированию. Были попытки внедрить методы также и на фабрике "Скороход", Лианозовском вагонзаводе (б. им.Егорова) Коломенском паровозостроительном и др. Но эта деятельность проходила скорее при сопротивлении тех, кому, казалось бы, она больше всего должна быть полезной. И тогда, и позже существовал набор анекдотических примеров, почему то, или иное вполне обоснованное предложение не находило поддержки. Например, предложения об оптимальном раскрое сырья приходили в противоречие с поощрением, полагавшимся тем, кто сдаст большее количество отходов годного для вторичного сырья и т.п. Впоследствии раскроем много занимались новосибирские ученики Л.В., в частности Е.А.Мухачева и др.

Были ли серьезные причины того, почему эта полезная деятельность проходила с такими сложностями и не была в конце концов востребована в то время? Все немногие работы по этой теме, написанные в те "подпольные" годы, были рассчитаны на инженеров и прикладников и напечатаны не в математических изданиях? и потому доступны для инженеров. Казалось бы, нет лучшего примера "взаимодействия науки и производства", открывающего новые горизонты для научного, основанного на математическом фундаменте локального и глобального планирования экономики. В ранний период (1939-1949гг.) можно было думать, что дело в неготовности людей и условий их работы к восприятию этих идей и методов, а также в тех мертвящих идеологических догмах и глупости партийных контролеров и идеологов. Можно было думать, что будь руководство более просвещенным, оно было бы способно оценить, внедрить и использовать новые идеи. Быть может, так думал и Л.В. Но вся последующая советская история показала, что дело гораздо хуже... И тогда, и даже позже не было до конца понято, что причина неуспеха внедрения большинства новых экономических (и иных) идей не в конкретных обстоятельствах или глупости бюрократов и др. а в том, что вся советская экономическая система, или, как стали говорить позже, - командно-административная система, – органически не приспособлена для восприятия каких бы то ни было нововведений, и никакие серьезные экономические большие или малые реформы, способные придать стабильность, она просто не в состоянии провести - это убедительно показала вся ее история.

Только с середины 1956 года, Л.В. впервые стал активно пропагандировать эту тематику и делать доклады на мат-мехе и других факультетах ЛГУ, в ЛОМИ. Это было открытием новой до того запретной темы. Он рассказывал о содержании его книги 1939 года, о разрешающих множителях, различных задачах и моделях и др. Для подавляющего большинства слушателей и меня, в том числе, эти темы были совсем или почти совсем новыми. Нет сомнений в том, что "рассекречивание" темы было связано с новыми надеждами, появившимися после смерти Сталина, доклада Хрущева и начинавшейся "оттепели". Здесь уместно вспомнить рассказа В.И.Арнольда об А.Н.Колмогорове: на вопрос В.И. почему А.Н. вдруг занялся в 1953-4 гг. классической и сложнейшей задачей о малых знаменателях (это было начало того, что сейчас называют КАМ-теорией), которой ранее никогда не занимался, А.Н. ответил: "Появилась надежда".

Несомненно, надежда появилась и у Л.В., надежда на то, что он, наконец, сможет объяснить и внедрить свои математико-экономические идеи, и преодолеть советский экономический догматизм и обскурантизм. Когда говорят, что в советское время наука (не вся, а скажем, математика) успешно развивалась и достигла высочайшего уровня, - спорить не приходится, но при этом надо вспомнить об этих и многих других подобных историях: идеологический пресс, анкетная селекция и т.д. никогда не давал талантам проявиться полностью или даже вовсе проявиться; несомненные научные достижения советских лет - лишь малая доля того, что могло бы появиться в условиях свободы, а потери от несостоявшихся или запрещенных открытий и идей - невосполнимы.

В этот период (конец 50-начало 60-х гг) Л.В. развил огромную активность. Его многочисленные темпераментные доклады и полемический талант и задор спорщика - зажигали. Помню организованную им интеллектуальную атаку (кажется, в 1959 г.) по поводу тарифов такси. Эта разработка была поручена ему каким-то начальством (по-видимому, как проверка); он организовал команду из полутора-двух десятков математиков, каждому из которых была отведена своя задача. Обстановка была штурмовая: в течение недели после детального анализа вороха данных должны были быть выданы рекомендации о тарифах. Не обошлось без некоторых преувеличений, - Л.В. иногда мог увлекаться и излагать нереалистические проекты, - но задача была выполнена и рекомендации Л.В. по тарифам такси (например, идея начальной платы) были внедрены с 1961 года и использовались в дальнейшем, а прогнозы Л.В. (результаты исследования эластичности спроса) полностью оправдались.

Математики с энтузиазмом слушали доклады и циклы докладов Л.В. Постепенно расширялся круг тех, кто овладевал этими методами в ЛОМИ и на факультете. Первое время в пропаганде идей Л.В. был активен тогдашний декан С.В.Валландер. На мат-мехе была организована серия докладов Л.В. для широкой аудитории. В ЛОМИ (Ленинградское Отделение Математического Института Академии наук) Л.В. много раз выступал на институтском семинаре.

Доклады же Л.В. в экономической аудитории встречались тогда в штыки, - Или, во всяком случае, крайне скептично, - помню уморительные и безграмотные возражения политэкономов во время докладов Л.В. на экономическом факультете. После известного доклада Хрущева идеологические шоры были несколько ослаблены, и защищать трафаретные глупости стало труднее; было видно, что позиции ортодоксов слабеют, и среди политэкономов и идеологов появляются люди, желающие разобраться. Однажды (1957г.) я встретил в неофициальной обстановке проректора ЛГУ по науке востоковеда Г.В.Ефимова, - не из породы либералов, - и к моему удивлению он был очень захвачен моим рассказом об идеях Л.В. и их возможностях, как они тогда представлялись. Наиболее важной для всей экономической теории оказалась,- и именно это встречалось враждебно ортодоксами, - прямая экономическая интерпретация, двойственных задач, сформулированных Л.В. Экономический аналог переменных двойственной задачи (разрешающих множителей) - позже удачно названный Л.В. "объективно обусловленными оценками" (о.о. оценки), - был, грубо говоря, точным математическим эквивалентом понятия цен, и так их и надо было бы называть, если не бояться тогдашних идеологических инвектив. Тонкость названия, данного Л.В. (о.о.оценки) была в том, что, как ни смешно, против слова "объективные" марксисты безоружны. Акцент на двойственных задачах, сделанной Л.В., приводил к существеннейшим экономическим выводам и защищал здравый смысл от стандартных догм, в частности, защищал ренту на природные ресурсы, реальную оценку затрат и т. п. Именно это было его важнейшим вкладом и козырем в спорах, и более всего раздражало оппонентов, приписывавших ему, естественно, ревизию марксовой "трудовой" теории стоимости, тем более, что труд в модель Л.В. также входил и ничем не отличался от, скажем, любого сырья. Сколько усилий потратил Л.В., чтобы защититься от этих пустых нападок! Об этом по материалам его архива можно было бы написать книгу. Даже тогдашнему ректору ЛГУ А.Д.Александрову не удалось издать в университетском издательстве (из осторожности или из-за прямых указаний) новую книгу Л.В. об экономическом расчете.

Вот еще маленький пример того, как боялись чиновники тех лет всего, связанного с этой тематикой: примерно в то же время (1957 г). я с соавтором написал популярную статью о математической экономике для "Ленправды", имея уже предварительную договоренность с одним из членов редколлегии, с которым я был знаком. Но опубликовать ее все же так и не удалось. Почуяв что-то нестандартное, редакция попросила согласований текста этой всего лишь популярной статьи с "инстанциями", отчего я отказался.

Насколько известны были научной общественности работы Л.В. можно судить по следующему факту: как-то конце 1956г. Г.Ш.Рубинштейн написал мне на маленьком листочке, - он и сейчас где-то хранится у меня, - ВСЮ литературу на русском языке по этой тематике, и это было всего 5 или 6 названий, начиная с брошюры Л.В. 1939 г., книги с В.А.Залгаллером об оптимальном раскрое и др.! При этом почти все было опубликовано в малоизвестных и редких изданиях, и ничего (кроме двух-трех ДАНовских заметок Л.В.) в математических журналах. Любопытно, что в известном сборнике "Математика в СССР за 40 лет" (1959) - соответствующий раздел написан Л.В. вместе с М.К.Гавуриным, - этой теме посвящена всего одна страница и приведены названия тех же 5 работ. Несмотря на все это, те годы были годами надежд на то, что в стране возможен прогресс, изменения и недогматическое понимание нового.

Как это часто бывало в СССР, именно военные специалисты первыми могли ознакомиться с переведенными на русский язык и полученными по спецканалам еще неопубликованные у нас книги - по линейному программированию (Вайда) исследованию операций (Кемпбел) и др. Интерес военных к этой проблематике в целом объяснялся скорее не экономическими задачами (типа распределения ресурсов), хотя и они были важны для них, а тем, что это была часть общей теории управления системами, названной тогда странным термином "исследование операций" (operation research). Несомненно, многие научные идеи в те годы получали дополнительную поддержку, если в них почему-либо были заинтересованы военные круги и исследование операций и в частности линейное программирование - один из примеров того.

Никто из военных специалистов (среди них инженеры очень неплохо знавшие математику, некоторые из них были взяты в армию после окончания математических и физических факультетов), конечно, никогда не слышал о работах Л.В, и это неудивительно. Помню, что, приехав в командировку в Москву в НИИ-5 министерства обороны в начале 1957 г., я рассказывал Д.Б.Юдину, Е.Г.Гольштейну, математикам, работавшим в этом институте про разрешающие множители и про работы Л.В. и показал им тот небольшой список литературы. Для них, лишь начинавших знакомиться с американской литературой по линейному программированию - это было откровением. Позже они стали главными писателями по этой теме, и их роль в популяризации этой области весьма велика, Косвенным образом их активность стала возможной именно из-за их тогдашней причастности к военной тематике.

Осенью 1957 я попросил Л.В. приехать с лекцией для специалистов в ВЦ ВМФ, где я тогда работал. Этот большой военно-морской вычислительный центр был создан в 1956 наряду еще с двумя другими - в Москве (сухопутном) и под Москвой в Ногинске (военно-воздушном), – на волне реабилитации кибернетики, и запоздалого уяснения необходимости внедрения в армии первых вычислительных машин и современных математических и кибернетических методов. В нем работало немало серьезных специалистов по автоматическому управлению теории стрельбы и другим военно-научным направлениям. Л.В. прочел с успехом публичную лекцию о решении некоторых экстремальных задач. Одно из ее последствий состояло в том, что военные специалисты, которые до тех пор пользовались зарубежными материалами, полученными по своим каналам, начали верить, что и в этой области работы наших математиков были пионерскими. Любопытно было еще раз убедиться в том, что несмотря на длительное промывание мозгов по поводу приоритета русской и советской науки, (а, скорее всего, именно поэтому) большинство людей, например, многие военные, с которыми я сталкивался, наоборот были неспособны поверить в то, что что-то могло появиться у нас раньше, чем на Западе. Юмор положения как раз в том, что менялся с ними ролями: они, как и подобает идеологически подкованным коммунистам, твердили в каждой лекции о приоритетах, что чаще всего было смешно слушать, поэтому и в данном случае они скептически слушали меня, когда я объяснял им о несомненном приоритете Л.В. Их скепсис был вполне понятен - они слабо верили в расхожие утверждения о советском и русском приоритете. *)

==

*)Нельзя здесь не вспомнить печальную историю И.Милина -известного математика, преподававшего в военном училище в Ленинграде, и выгнанного оттуда вскоре после войны только за то, что во время читавшейся им лекции после обязательного упоминания о приоритете русской математики в каком-то элементарном вопросе, он позволил себе юмористически заметить: "А теперь перейдем к делу".

==

С другой стороны все прекрасно знали, что многие новые и разумные идеи, появлявшиеся в СССР, чаще всего пробиться не могли, или же пробивались, совершив кругосветное путешествие; отчасти именно так было с теорией Л.В. как и со многими другими идеями.

Наступление Л.В., начавшиеся в 1956 году продолжалось до середины шестидесятых, когда его экономические и матэкономические теории были наконец, если не признаны идеологическим и экономическим официозом, то, хотя бы не были запрещены.

Позже пришло даже небезоговорочное признание: в 1965 году - Ленинская премия вместе с В.В.Новожиловым и В.С.Немчиновым). С самого начала Л.В. поддерживали многие маститые математики (А.Н,Колмогоров, С.Л.Соболев) и некоторые экономисты; в дискуссиях, конференциях и пр. Участвовало очень много специалистов и речь, конечно, шла не только о теориях Л.В., но и о многом другом (близких экономических теориях, например В.В.Новожилова, кибернетике, роли математики и машин др.). Запомнилась многолюдная конференция математиков и экономистов в 1960г. в Москве, где выступали и маститые, и молодые ученые, притом за редким исключением, - в поддержку новых идей. В целом, это несомненно была победа разума, но и Л.В. потратил на эту борьбу слишком много сил, отнятых у математики и науки в целом. Фактически, с конца 50-х гг. Он прекратил свои систематические занятия "чистой" математикой, и одна из его последних математических работ была опубликована в "Успехах" в конце 50-х гг.

История борьбы за признание его идей обширна и интересна, как для историка науки, так и для историка советского периода. Она плохо отражена в литературе и, к сожаления, мало кто занимается ею сейчас; в то же время как сам этот опыт, так и сами экономические принципы, пропагандировавшиеся Л.В. необходимы сейчас. Лишь в этом году был выпущен сборник "Очерки истории информатики в России" (Новосибирск, СО РАН), где есть материалы и об этой эпопее.

В 1989 году мы устроили научную конференцию в Ленинграде, посвященную 50- летию выхода его классической брошюры "Математические методы планирования производства". Отчет о ней был опубликован в "Экономико-математических методах". В.Л.Канторович готовясь к ней нашел в архиве массу интересных и неизвестных до того материалов о борьбе Л.В. за свои идеи, и, в частности, письма и решения идеологических бонз по поводу его трудов. Эти материалы должны быть опубликованы и стать известными всем тем, кто интересуются печальной и поучительной историей нашей страны. И тогда, и, тем более, сейчас люди мало знают об этом.

Конечно, присуждение Нобелевской премии поставило Л.В. в совершенно уникальное положение в СССР (единственная наша премия по экономике, да еще одновременно с премией мира А.Д.Сахарову), - это ли не означало полное признание и доверие, однако его положение по-прежнему и до самого конца оставалось скорее положением пленника, а не первого эксперта, как должно было бы быть.

Хотя экономические идеи Л.В. в определенном смысле были созвучны плановой экономике, и нетрудно их интерпретировать в обобщенно марксистском духе, но их неприятие так долго продолжавшееся и так и не наступившее в полной мере, объясняется не в логических, а психологических категориях, - серость, присущая стареющему догматическому режиму, психологически неспособна к интеллектуальному обновлению, как бы ни доходчиво объясняли ей ее же выгоду. Очень упрощенную трактовку взаимоотношений Л.В. и господствующей идеологии дал в небезынтересной статье А.Каценленбоген в статье "Нужны ли в СССР Дон Кихоты? (Л.В.Канторович: ученый и человек, его противоречия", Chalidze Publication 1990). Я не стану обсуждать здесь глубокие и важные проблемы взаимоотношений ученого и общества: а в советские времена эти отношения особенно сложны и не допускают однолинейных и примитивных трактовок. Конечно, всякое конформистское общество отвергает новые, необычно выглядящие идеи, если они не внедряются власть предержащими в обязательном порядке. Это относится даже и к тем случаям, когда выгода от принятия новых реализации новых идей несомненна. "Власть не любит, когда ее защищают недоступными ей средствами", - сказал по близкому поводу один французский советолог. Немудрено, что ученый, желающий продвинуть свои идеи вынужден хотя бы отчасти говорить на конформистском языке. И Л.В. иногда перебарщивал в этом. Только тот, кто знает или помнит те времена и тех людей, переживших леденящий страх конца 30-х гг., может правильно оценить некоторые шаги, выглядящие странными в нормальном человеческом обществе. Невозможно скидывать со счетов атмосферу угрозы жизни для тех, кто посмел хоть немного отклониться от предписанных идеологических установок, а именно в этой атмосфере прошла большая часть жизни этого поколения. Эта угроза вполне могла быть реализована в случае Л.В.

Знаменитая статья Кемпбела в "Slavic review" "Маркс, Канторович, Новожилов" продемонстрировала достаточно полное понимание некоторыми американскими экономистами того, что происходило в СССР с теориями Л.В. и В.В.Новожилова. Эта статья наделала много шуму, она была засекречена и лежала спецхранах публичных библиотек. И авторам (в частности Л.В.) пришлось доказывать, что они не согласны с "буржуазной" трактовкой теорий и событий, данной Кемпбелом. А на самом деле, он довольно точно описал и ничтожество экономического истеблишмента в СССР, и логическую неизбежность тех выводов, к которым пришел Л.В., последовательно развивая свой *строго математический* подход к конкретным экономическим задачам.

Мне не раз в 90-х гг. приходилось рассказывать за границей об эпопее линейного программирования в СССР, и было удивительно трудно объяснить, даже на этом примере, "чудеса" советской системы, отвергавшей достижения своих ученых из-за вздорных идеологических предрассудков. Быть может, лишь ссылка на историю с Лысенко, хорошо известную на Западе, помогала слушателям понять хоть что-то.

Хочу сделать еще одно замечание общего характера. Когда мы вспоминаем историю и биографию советских ученых действительно крупного масштаба, нам грозят две крайности: первая - сделать из них икону, помнить только о научных заслугах и хороших делах и забыть об их компромиссах с властью, об уступках (типа подписания верноподданических писем, участие в "коллективных" кампаниях и пр.); вторая крайность - обвинить их в откровенном прислужничестве тоталитаризму уже по самой сути своей деятельности. Сейчас, когда возможно писать открыто, когда нет цензурного давления на авторов, особенно важно понять, что для многих (не всех) выдающихся ученых того поколения их положение в тогдашнем советском обществе было, если не внутренней трагедией, то во всяком случае источником терзаний. Поэтому ни та, ни другая крайность не позволяет понять всю сложность и объективную трагичность ситуации - положения таланта под прессом тотального контроля. О некоторых поступках можно сожалеть, но дело не только в том, что научные заслуги перевешивают все остальное, - нужно еще помнить о том, что жизнь талантливого советского ученого, посвящена прежде всего его науке и он подчас вынужден ради науки и реализации своих идей идти на компромиссы с властью, которая использует его авторитет для своих сиюминутных целей и чаще всего не понимает пользу даже для себя от деятельности выдающегося ученого в целом, если он не стал полностью ее собственностью или адептом, относится к нему подозрительно или даже враждебно.

Возвращаясь к самому линейному программированию, думаю, что история того, как задача фантреста, рассмотренная Л.В. в 1938 году, привела к теории наилучшего распределения ресурсов, - одна из самых замечательных и поучительных в истории науки XX века; она же может служить апологией математики. Именно такое отношение к работам Л.В. постепенно стало общепринятым среди математиков, его разделяли А,Н.Колмогоров, И,М,Гельфанд, В.И.Арнольд, С.П.Новиков и др. Нельзя не восхищаться естественностью и внутренней стройностью математической работ Л.В. по двойственности линейного программирования и их экономической интерпретацией.

2.О математической экономике как области математики и о некоторых ее связях.

А)Связи линейного программирования с функциональным и выпуклым анализом.

Л.В. был признанным авторитетом уже перед войной во многих математических областях, в особенности, как один из создателей школы в функциональном анализе. Неудивительно, что и линейное программирование в его трактовке было связано с функциональным анализом. Точно также понимал эти задачи и фон Нейман; его основная теорема теории игр, модели экономики и экономического поведения и другие экономико-математические результаты несут явный отпечаток концепций функционального анализа и двойственности.

Мое первоначальное восприятие математической стороны оптимизационной эконометрики, также, как и у большинства тех, кто принадлежал школе Л.В., было функционально-аналитическим. Иначе говоря, схема двойственности, естественным образом рассматривалась в терминах функционального анализа. Нет сомнений, что ничего более приемлемого с концептуальной точки зрения и нет. Выпуклый анализ, сформировавшийся после 50-х гг. на базе оптимизационных задач, постепенно вобрал в себя значительную часть линейного функционального анализа, равно как и классических результатов выпуклой геометрии. Именно так я строил и свой курс теории экстремальных задач, который читал в течение 20 лет в ЛГУ (с 1973 по 1992) - он включал в себя общие (бесконечномерные) теоремы отделимости, теорию двойственности линейных пространств и т.п.

Исторически первыми связями теории Л.В. были связи с теорией наилучшего прибилжения и, в частности, с работами Крейна по L-проблеме моментов. М.Г.Крейн одним из первых обратил внимание на это. Реальные последствия состояли в постепенном осознании того, что методы решения обеих задач - по существу схожи. Первый метод этих задач восходят еще к Фурье, позже в 30-40-х гг.

нашего столетия были выполнены важные работы Моцкиным и украинской школой М.Г.Крейна (в частности С.И.Зуховицким, Е.Я.Ремезом и др). Однако, метод разрешающих множителей и симплекс-метод были новыми для теории наилучшего приближения. Особенно важной с принципиальной точки зрения была сама трактовка задачи чебышевского приближения как полубесконечномерной задачи линейного программирования. Бесконечномерное программирование было также предметом нескольких работ моих учеников на мат-мехе ЛГУ (М.М.Рубинов, В.Темельт), и математиков в Москве (Е.Гольштейн и др).

Теория двойственности линейных пространств с конусом дает естественный язык для задач линейного программирования в пространствах произвольной размерности. Парадоксально, что это уловил Н.Бурбаки, далекий от каких-либо приложений: в своем 5-м томе "Элементов математики", - куда как абстрактный опус!, - если внимательно приглядеться, то в упражнениях можно найти даже теорему об альтернативах для линейных неравенств и ряд фактов близких к теоремам двойственности линейного программирования. Это и естественно. Теорема Хана-Банаха и теоремы линейной отделимости - фундаментальные теоремы классического линейного функционального анализа - есть чистейший выпуклый геометрический анализ. То же относится и к общей теории двойственности линейных пространств.

Классическая теория линейных неравенств Г.Минковского-Г.Вейля в современной форме появилась в работе Г.Вейля 30-х гг чуть раньше работ Л.В. - эта связь особенно прозрачна. Теоремы об альтернативах, леммы Фаркаша и т.д. двойственность Фенхеля-Юнга в теории выпуклых функций и множеств - все это объединилось с теорией линейного программирования уже в 50-х гг. Однако, заслуга Л.В., по-видимому, не сразу узнавшего обо всех этих связях, в том, что он нашел единый подход, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это, одновременно давало и базу для численных методы его решения. Не преувеличивая, можно сказать, что функциональный анализ стал фундаментом всей математической экономики. Огромное число задач выпуклой геометрии и анализа (от теоремы Ляпунова о выпуклости образа до выпуклости в отображении моментов) также связаны с этими идеями и их обобщениями.

Ко всему этому примыкают и многие последующие работы по теории линейным неравенствам (Черников, Фан Цзы и др.), по выпуклой геометрии и др,, авторы которых не всегда знали о предшествующих результатах; нельзя и сейчас сказать, что весь этот цикл работ подытожен в надлежащем виде.

Б)Линейное программирование и дискретная математика.

Однако, линейное программирование имеет серьезные связи с дискретной математикой и комбинаторикой. Более точно, некоторые задачи линейного программирования являются линеаризацией комбинаторных задач - примеры: задача о назначениях и теорема Биркгофа-фон Неймана, теорема Форда-Фулкерсона. Эта сторона теории не была замечена у нас сразу и пришла к нам из западной литературы позже. Основную задачу теории матричных игр с нулевой суммой (а именно теорему о минимаксе), блестяще связал с линейным программированием еще фон Нейман, см. воспоминания Данцига цитированные в статье А.М.Вершика, А.Н.Колмогорова и Я.Г.Синая "Джон фон Нейман" (Фон Нейман "Избранных труды по функциональному анализу, т.1" М. "Наука",1987), где Данциг пишет о поразившем его разговоре с фон Нейманом, в котором тот за час изложил связь теории двойственности и теорем о матричных играх, и наметил метод решения этих задач. Эта связь была освоена не сразу, я помню, что ленинградские специалисты по теории игр первое время не принимали в расчет, что решение матричной игры с нулевой суммой есть задача линейного программирования и, несомненно красивый метод решения матричных игр, принадлежащий Дж.Робинсон, считался чуть ли не единственным численным методом нахождения значения игры. В итоговом доказательстве теоремы фон Неймана о минимаксе (первое доказательство было топологическим и использовало теорему Брауэа) фактически содержалась теория двойственности. Позже эквивалентность игровой задачи и линейного программирования широко использовалась.

Акценты на связь с дискретной математикой и комбинаторикой превалирует в большинстве зарубежных работ первых лет по линейному программированию, в то время как в отечественных работах в первое время более подчеркивалась связь с функциональным и выпуклым анализом, и развивались численные методы.

В связи с линейным и выпуклым программированием на первый план из комбинаторных теорий выступает комбинаторная геометрия выпуклых и целочисленных многогранников и комбинаторика симметрической группы. Важными работами первого периода по комбинаторике многогранников была книга Грюнбаума, и статьи Кли, и др, а в комбинаторике - работы Дж.Рота и Р.Стенли. Одновременно возникли близкие темы в теории особенностей (многогранники Ньютона), алгебраической геометрии (торические многообразия и целочисленные многогранники) и др. А позже открылись обширные связи с симметрической группой, комбинаторной теорией диаграмм Юнга - одной из основных тем "новой комбинаторики", - а также посетами и матроидами. Интересно, что почти одновременно (и независимо) к ряду близких задач комбинаторики пришел И.М.Гельфанд (матроиды, клетки Шуберта, вторичные многогранники), назвавший комбинаторику математикой XX1 века). Сейчас новые комбинаторные задачи являются ключевыми в разнообразных математических проблемах.

Мой интерес к к линейному программированию в первые годы возник совершенно независимо от моих математических пристрастий тех лет и, в частности не только потому, что я учился у Л.В. функциональному анализу и слушал его первые захватывающие рассказы об линейном программировании и его применении в экономике. В тот момент (1956-58 гг). это был скорее практический, чем теоретический интерес. Дело в том, что отказавшись после окончания университета по некоторым причинам от аспирантуры, я работал в военно-морском ВЦ, и заинтересовался задачей многомерного наилучшего приближения как прикладник. Одной из моих задач в этом ВЦ было представление таблиц стрельбы в ЭВМ, и я предложил аппроксимировать их вместо того, чтобы хранить в памяти ЭВМ. Я сформулировал некоторое обобщение задачи о наилучшем приближении, а именно, о кусочно полиномиальном наилучшем приближении (ни о каких сплайнах тогда нам известно не было) для функций нескольких переменных. Позже, когда я уже стал работать в университете в 60-х гг. этой задачей занимались мои первые дипломанты. Еще позже была написана подробная статья с соавторами об этом.

Постепенно мой интерес к задаче о наилучшей аппроксимации превратился в интерес к самому методу, позволяющему ее решить, - одним из них и был метод линейного программирования. Г.П.Акилов посоветовал поговорить по этому поводу с Г.Ш.Рубинштейном. Во время наших бесед Г.Ш. дополнял доклады Л.В. рассказами о близких работах других математиков, - несомненно Г.Ш. был тогда одним из лучших знатоков линейного программирования и всего этого круга идей Л.В. - о работах американцев (симплекс-методе) мы узнали несколько позже. Основным для нас был "метод разрешающих множителей". Он укладывался как частный случай в то, что у нас называлось симплекс-методом, но наше понимание было шире американского, – классический симплекс-метод Данцига есть также частный случай этого, более общего, класса методов. К сожалению, как часто бывает, русская терминология не была достаточно продумана и зафиксирована и слова "симплекс-метод" допускают массу различных толкований,

Школа численных методов линейного программирования в СССР была исключительно сильной, и в этом безусловная заслуга Л.В. и его двух основных помощников первой поколения - В.А.Залгаллера и Г.Ш.Рубинштейна, а позже И.В.Романовского и его группы, В.Л.Булавского, в Москве - Д.Б.Юдина и Е.Г.Гольштейна и др. В последующем с развитием вычислительной и программистской техники численное решение любых задач разумной размерности стало доступным.

В)Метрика Канторовича.

Однажды в весной 1957 г. Г.Ш.Рубинштейн рассказал мне, что он, наконец, понял, как можно использовать теорему Л.В. о задаче Монжа (теперь ее называют задачей Монжа-Канторовича), доказанную им в заметке ДАН 1942 г. - - а именно, как метрику Канторовича, т.е. оптимальное значение целевого функционала в транспортной задаче использовать для введения нормы в пространстве мер и как критерий Л.В. становится теоремой двойственности с пространством функций Липшица. По сути дела, это было важным методическим замечанием, так как сама метрика уже была описана в заметке Л.В. Но именно эта работа Л.В. и Г.Ш. появившаяся в Вестнике ЛГУ, в 1958 г. в выпуске, посвященном Г.М.Фихтенгольцу, содержала общую теорию знаменитой теперь метрики, называемой иногда метрикой Канторовича-Рубинштейна или транспортной. Кстати, в том же номере была опубликована и моя первая работа совместно с моим первым руководителем Г.П.Акиловым, посвященная новому определению распределений Шварца, но в которой также в качестве одного из примеров рассматривалась эта, только что появившаяся метрика. В той же работе Л.В. и Г.Ш.- это обычно вспоминается реже, - был дан критерий оптимальности перевозок в двойственных терминах - функций Липшица или потенциалов. С тех пор я превратился в постоянного пропагандиста этой замечательной метрики, и убедил очень многих математиков наших и зарубежных, в приоритете Л.В. и в важности этой работы. Она переоткрылась огромное число раз и потому имеет очень много названий (метрика Вассерштейна, Орнштейна и т.д., не знавших о работе Л.В.) а сам метод ее введения известен как спаривание (coupling), как метода фиксированных маргинальных мер и т.д. Ее применения обширны и в самой математике, и в статфизике, и в математической статистике, эргодической теории и в других приложениях. О ней написаны книги, которые далеко не исчерпывают всех ее сторон. Весьма близки к ней метрика Леви-Прохорова-Скорохода, популярная в теории вероятностей. Возможность дальнейшего обобщения этой метрики для широкого круга задач оптимизации была понята несколько позже, этому посвящены одна моя работа в "Успехах" 1970 г. и ее развитие в статье с М.М.Рубиновым.

Одновременно я применил эту метрику в 1970 для одной из важных задач теории меры и эргодической теории (в теории убывающих последовательностей измеримых разбиений) - там понадобилась дикая на первый взгляд бесконечная итерация этой метрики ("башня мер"). Приблизительно в то же время Д.Орнштейн переоткрыл и ввел ее в эргодичскую теорию по другому поводу ($\bar{d}$-метрика Орнштейна).

История этой метрики и всего, что относится к ней - прекрасный пример, того, как прикладная (в данном случае - транспортная) задача инициирует введение исключительно полезного чисто математического понятия.

Г)Связи с вариационным исчислением и множителями Лагранжа.

Линейное и выпуклое программирование естественно обобщало теорию множителей Лагранжа на нерегулярные задачи (задачи в многогранных областях или, как бы мы сказали сейчас, - на многообразиях с углами). То, что разрешающие множители были обобщением множителей Лагранжа Л.В. отмечал с самого начала. Неклассические множители появлялись и в других областях, в первую очередь в теории оптимального управления в школе Понтрягина. Эта теория также обобщала условные вариационные задачи на случай нерегулярных ограничений, и потому ее следует сравнивать с задачами (вообще говоря, невыпуклого но в существенных случаях -выпуклого) бесконечномерного программирования. Эта связь прояснилась не сразу. Нужно сказать, что в эстетическом отношении теория Понтрягина уступала теории Л.В., хотя первая по сути более сложна (только из-за изначальной бесконечномерности задач). О связи линейного и выпуклого программирования с оптимальным управлением писалось немало. Однако по ряду причин эта связь не была доведена до достаточно глубокого уровня. В первую очередь это связано с недостаточно инвариантной формой, в которой рассматриваются обычно задачи оптимального управления. Промежуточное положение между классическим вариационным исчислением и оптимальным управлением, ближе к геометрии и теории алгебр Ли занимают неголономные задачи. В них также наличествует неклассичность ограничений, как в выпуклом программировании и оптимальном управлении, но неклассичность другого (гладкого) типа. Я занялся ими в середине 60-х годов, когда стал обдумывать популярные тогда работы по инвариантным формулировкам механики (Арнольд, Годбийон, Марсден и др.). Увидев в неголономной механике - падчерице классической механики - нетривиальную оптимизационную задачу, я понял, как ее поставить в современной форме. В те годы у нас был молодежный образовательный семинар в ЛОМИ - по дифференциальной геометрии, теории представлений, группам Ли и всему остальному (Л.Д.Фаддеев, Б.Б,Венков, я и др.). Как-то раз случайно выяснилось, что и Л.Д. тоже обдумывал неголономную механику и мы решили вместе разобраться во всем полностью. Мы написали сначала краткую в ДАН, а потом и большую статью об инвариантной форме лагранжевой и, в частности, неголономной механики. Эти работы обильно цитируется до сих пор, в ней дан словарь-соответствие между терминами дифференциальной геометрии и понятиями классической механики. Сейчас эта тематика стала модной, она является замечательным промежуточным звеном между классическим и неклассическим вариационным исчислением. В нем множители Лагранжа предстают в еще одной новой форме - как переменные, отвечающие ограничениям и их следствиям (скобкам Ли) всех порядков. И здесь также невозможно не вспомнить о разрешающих множителях Л.В.

Д)Линейные модели и марковские процессы.

Поскольку Л.В. много занимался в 60-х гг. экономическими моделями, не обязательно связанными с оптимизацией, нельзя хотя бы мельком не упомянуть связи теории моделей экономической динамики (Дж.фон Нейман, В.Леонтьев, Л.В. и др) с динамическими системами. Я хочу подчеркнуть здесь только одну недостаточно изученную связь, а именно, что эти линейные экономические модели на прямую связаны с некоторым типом марковских процессов, в которых особую роль играет понятие положительности в множестве состояний. Теоремы магистрального типа и марковские процессы принятия решений самым непосредственным образом связаны с это проблематикой. Сюда же относится теория многозначных отображений и проблемы непрерывного выбора и т.д. По-видимому, эти вопросы сейчас теряют свое прикладное значение, но несомненно интересны с математической точки зрения, как и всякие теории многозначных и положительных отображений. Напомним, что еще до войны Л.В. создал теорию полуупорядоченных пространств (К-пространств), которая вскоре замкнулась в себе и перестала интересовать и его, и тех, кто не занимался ею непосредственно. Но полуупорядоченность в более широком смысле всегда была предметом особого интереса математиков ленинградской, и украинской школ.

Е) Глобализация линейного программирования.

Привлечение идей из топологии и дифференциальной геометрии привели и к другому синтезу - понятию полей многогранников, конусов и т.п. играющих важную роль в оптимальном управлении, Парето-оптимуме (гипотеза Смейла и работы Вана и Вершика-Чернякова) и др. Имеются в виду задачи с гладким параметром, пробегающим многообразие в каждой точке которого есть задача линейного программирования. Поля многогранников или поля задач возникают и в теории гладких динамических систем. Еще одна тема, близкая по средствам, но с иной целью - оценки среднего числа шагов в различных вариантах симплекс- метода (Смейл, Вершик-Спорышев и др.)- здесь использовались идеи интегральной геометрии ("грассманов подход"). Эти оценки были еще одним подтверждением практичности симплекс-метода и метода разрешающих множителей. Сильное впечатление произвели в 80-х гг. работы Хачияна и Кармаркара, дававшие полиномиальную (в некотором смысле) равномерную (по классу задач) оценку сложности метода эллипсоидов для решения задач линейного программирования. Тем не менее, этот метод ни в каком отношении не заменил различные варианты симплекс-метода, Оценки, о которых шла речь выше, дают линейную или квадратичную оценку сложности лишь статистически. В целом проблема о полиномиальности л.п. в подлинном смысле слова до сих пор (2001) еще не решена.

Ж) Линейное программирование и методы вычислений.

Еще одно направление, начатое Л.В. и не получившее должного развития,- линейное программирование как метод приближенного решения задач математической физики (двусторонние оценки линейных функционалов от решений). Работа на эту тему (1962) содержала очень плодотворную идею, и несколько работ на эту тему было выполнено в ЛГУ. Подход Л.В. можно рассматривать также как альтернативный подход к некорректным задачам. Эта задача очень актуальна в математической геофизике и обсуждалась Л.В. с Кейлис-Бороком.

3. Л.В.и подготовка кадров.

Одна из важных инициатив Л.В. того периода - начало подготовки кадров математиков-экономистов. Ряд дипломантов и учеников по этой теме у Л.В. были еще в 50-х, но в сравнении с другими многочисленными его занятиями и темами, учеников в этой области было немного. Всерьез подготовка началась, в 1959 году, когда был организован, так называемый, шестой курс на экономическим факультете ЛГУ 6-й курс для окончивших факультет, где слушатели знакомились с математической экономикой и идеями Л.В., 6-й курс кончали известные в дальнейшем экономисты - А.А.Анчишкин, С.С.Шаталин, И.М.Сыроежин и др. Шестой курс (он существовал один год) стал центром математической переподготовки экономистов в то время. Нелишне напомнить, что большинство видных экономистов 70-90-х гг. так или иначе прошли школу Л.В. или общались с ним, Из наиболее близких ему упомяну лишь имена А.Г.Аганбегяна и В.Л.Макарова. Вскоре в 1959 г. на экономическом факультете была организована кафедра экономической кибернетики. Очень активную роль на первом этапе в организации специализации играл В.В.Новожилов - давний соратник Л.В. по экономическим баталиям с консерваторами и автор своих интереснейших экономических концепций, Из математиков участие в организации и преподавании в первые годы принимали В.А.Залгаллер, несколько позже, Л.М.Абрамов и др. и политэкономы: будущий первый заведующий кафедрой И.В.Котов и тогдашний декан экономического факультета В.А.Воротилов,а также заведующий лабораторией И.М.Сыроежин и др. Нужно сказать, что математическое "вторжение" на экономический факультет имело далеко идущие последствия не только для экономической кибернетики, (так была названа новая кафедра), но и вообще для этого факультета. Математика заняла прочное место на этом факультете и математическое образование стало сравнительно неплохим, математические курсы читались в основном преподавателями мат-меха на том же уровне, что и на мат-мехе. Наезды Л.В. из Новосибирска в Ленинград были хотя и не очень частыми, но очень плодотворными: наиболее важные решения о новой специальности принимались в известной степени от его имени. Несколько позже (уже после отъезда Л.В. в Новосибирск, но при его участии) это же было сделано и на мат-мехе - сначала специальность "исследование операций" была создана в недрах вычислительной кафедры мат-меха (с 1961-62 гг), а позже (с 1970) организована кафедра исследования операций. В ее становлении на факультете основную роль играли М.К.Гавурин и И.В.Романовский, который с 60-х гг. вел свой оптимизационный семинар с уклоном в вычислительные аспекты.

Экономическая кибернетика быстро нашла свою нишу. Необходимость математизации и обновления обветшалой (это, конечно, не признавалось официально) экономической науки, изучения функционирования и оптимизации экономических структур, совершенно естественно требовали подготовки специалистов нового типа. Этим и должны были заняться новые кафедры экономических факультетов.

В то же время как ни странно, место этой специализации в самой математике вызывало определенные сложности. На мат-мехе ЛГУ новая специализация начала создаваться уже в отсутствие Л.В. - после его переезда в Новосибирск и она была одной их первых в стране (почти одновременно с Новосибирским университетом). Сложности состояли в том, что, при всей важности экономико-математических моделей и методов, нельзя сказать, что они образовывали новую область теоретической математики. Математические аспекты теории, созданной Л.В., или Леонтьевым, или фон Нейманом и др. хорошо укладывались в рамки с одной стороны функционального (а, точнее, выпуклого) анализа, теории неравенств и т.д. а с практической точки зрения - в рамки теории численных методов (области, где Л.В. был также одним из корифеев) решения экстремальных задач. Если говорить о теории линейного программирования, то она была эффектным и естественным обобщением классических методов (множители Лагранжа, сопряженные задачи, двойственность и пр.). Так или иначе все это (плюс оптимальное управление) могло быть названо новыми направлениями, новыми областями, но не новой математической наукой, как это было с экономической кибернетикой или более точно, с математической экономикой в рамках экономической науки. Специализация "исследование операций", как было сказано, сначала была на кафедре вычислительной математики с 1962 г. Я хорошо помню один из разговоров Л.В. и тогдашнего декана, на который я был приглашен (я был еще аспирантом). Декан, не вполне представлявший чисто математический вес новой области, убеждал меня в дальнейшем целиком заняться математическими вопросами, связанными с идеями Л.В., на что сам Л.В., поддерживавший мою кандидатуру для кафедры, отвечал, что для меня с точки зрения "чистой математики" это маловато. После длинных тягот в основном ненаучного характера, я все-таки был взят на факультет, но не на кафедру анализа, которую кончал, и где проходил аспирантуру, а на вычислительную кафедру, специально для ведения занятий по новой специализации. В положении кафедры и самой специальности была действительно некоторая неясность, поскольку она не имела своей четко выраженной специфики (скажем, как кафедра алгебры или геометрии или даже вычислительной математики) и вынужденным образом должны была стать междисциплинарной и отчасти прикладной. Ее тематика имела пересечение с тематикой различных кафедр (уравнения -через вариационные задачи, анализа через выпуклый и функциональный анализ, алгебры - через дискретную математику, вычислительной математики и, конечно, матобеспечения). Собственная же ее область не была достаточно обширной чтобы стать предметом теоретической математической специализации. Это определило и сильные, и слабые стороны будущей кафедры и специальности. Замечу в скобках, что сам я был и остаюсь противником разделения математических факультетов на кафедры вообще, - эта старонемецкая традиция не сохранилась к настоящему моменту ни в одной из ведущих математических стран. Сейчас (и давно) она только тормозит необходимые перемены в системе математического образования. Насколько я знаю, нет серьезных исследований того, насколько наше образование на мат-мехе эффективно, но боюсь, что столь долго не подвергающаяся никаким изменениям форма образования хорошей оказаться не может. Опять-таки из-за этого специализация и кафедра не привлекали на мат-мехе особенно сильных студентов. Совершенно другое положение было в теоретической экономике, там новые идеи привлекли самые свежие и здоровые силы, и Л.В. в дальнейшем стал несомненным лидером и учителем целой плеяды наших экономистов. Не будет преувеличением сказать, что все современные экономисты страны прошли непосредственно или через своих учителей школу идей Л.В. Разумеется, это предмет особой и важной темы для исторического исследования. Мне сложно говорить о новосибирском и московском периодах педагогической и научной деятельности Л.В. - это совсем другая эпоха (и даже две эпохи), видимо, не похожие на ленинградский период.

4. Несколько личных воспоминаний

Личность Л.В., его качества педагога и ученого заслуживают отдельного разговора. Здесь я ограничусь несколькими замечаниями.

1.Мои первые встречи, разговоры и общение с ним - поражали меня и моих друзей, прежде всего тем, с какой скоростью он воспринимал сказанное, упреждая собеседника и мгновенно вычисляя, что возникало по ходу разговора. Позже я читал такое же о фон Неймане, который, кстати, переписывался с Л.В. до войны по тематике, связанной с полуупорядоченными пространствами. Самые первые работы Л.В. (с Ливенсоном) по дескриптивной теории множеств, с которых началась его слава, поразили московских специалистов, долго занимавшихся этой темой, техническим умением и глубиной проникновения в суть. Поражала также его разносторонность и точное понимание существенного, о чем бы ни шла речь. Быстрота и глубина его математического мышления находилась на границе возможностей (во всяком случае известных мне).

Помню обсуждение на ленинградском семинаре в Доме Ученых в 60-х гг. серии статей американцев по модной тогда теории автоматов, Л.В. в частности, комментировал статью У.Р.Эшби "Усилитель мыслительных способностей", в которой обосновывалась очевидная идея о необходимости ускорения мыслительной работы, Л.В.: "Конечно, скорость соображения бывает различной у разных людей, но она может отличаться по сравнению с обычным уровнем в три, ну в пять раз, но не в 1000 раз". Пожалуй, коэффициент Л.В. был много больше, чем 5.

2. В то же время лекции он читал в медленном, но весьма неравномерном темпе, очень живо реагируя на вопросы. Каждая лекция начиналась с сакраментального вопроса: "Имеются ли вопросы по предыдущей лекции?" произносимого раскатистым громким голосом. Но иногда во время лекции этот голос иногда опускался почти до шопота. На семинарах он очень часто спал, но при этом каким-то чудом в нужных местах прерывал докладчика, забегая далеко вперед уже сказанного. Его комментарии всегда были полезны и поучительны.

3.Но доклады принципиального характера Л.В. проводил с блеском. Он был исключительно опытным полемистом, находя точные возражения по сути дела. Я хорошо помню ряд его выступлений, о которых упоминал выше. Жаль, что тогда не было видеозаписей.

4.Его отношение к математике менялось по моим наблюдениям. До войны и в первые послевоенные годы его принадлежность к небольшому числу лидеров функционального анализа (другие - И.М.Гельфанд, М.Г.Крейн) была бесспорной. Особенно ясно это стало после его знаменитой статьи "Функциональный анализ и прикладная математика" в "Успехах", за которую он получил очень важную для его дальнейшей устойчивости в смутные времена сталинскую премию. Его известная книга с Г.П.Акиловым подвела итоги деятельности ленинградской школы функционального анализа. Позже, перейдя к занятиям экономикой, он несколько отошел от математики, но он, на мой взгляд, прекрасно понимал, что этот уровень - пройден и пытался внедрить в Ленинграде новые направления. Я хорошо помню его интерес к теории распределений Шварца; я как-то делал по его и Г.П.Акилова просьбе серию докладов на семинаре Фихтенгольца-Канторовича в 1956 г. о различных определениях обобщенных функций, и одним из первых было определение Л.В.Канторовича в ДАНовской заметке 1934 года, - еще до работ Соболева и др.! Позже он неоднократно говорил мне о роли И.М.Гельфанда в математике и возмущался тем, что тот до сих пор не избран членом Академии.

Мне казалось, что Л.В. сожалел о том, что после 50-х гг. он фактически оставил математику, но его выбор между экономикой и математикой, на мой взгляд, был, видимо, предопределен.

5.Но Л.В. мог служить также отличным примером того, кого надо было бы называть "математиком-прикладником". Его чутье в прикладных вопросах и обширнейшие контакты с инженерами, военными, экономистами сделали его необычайно популярным среди тех, кто применял математику. Сам он говорил, что чувствует себя не только математиком, но и инженером. Успешные занятия вычислительной техникой, программированием, инженерными расчетами прекрасно иллюстрируют этот тезис.

6.В профессиональной среде он почти всегда он был окружен всеобщим восхищением и вниманием. Его появление на семинарах, докладах если он был в форме, сразу же оживляло атмосферу, как говорят, броунизировало ее. С этим соглашались по-моему все - и доброжелатели, и недруги. В последние годы, уже отойдя от математики в Москве он дружил и подолгу беседовал с ведущими математиками следующего поколения - В.И.Арнольдом, С.П.Новиковым и др,. Я надеюсь, что они когда-нибудь напишут об их беседах с ним.

Заканчивая этот очерк, хочу заметить, что нам (моему поколению математиков, выросших в Ленинграде) и мне лично невероятно повезло и с учителями, и с тем, что мы стали свидетелями и даже чуть-чуть участниками формирования новых научных направлений и были учениками их основателей. Здесь я выделяю Л.В. Роль Л.В.Канторовича еще не до конца понята и оценена. На первый взгляд его теории были, как он сам говорил (но здесь следует сделать естественную поправку на внутреннюю и внешнюю цензуру), приспособлены к плановой экономике, и т.д. Но это лишь внешняя сторона дела. Главное - учет скрытых параметров (рента), единый подход к ограничениям (труд - всего лишь одно из них) и все, что отсюда вытекает, делают его экономические приложения универсальными и необходимыми сейчас. Вообще, главный итог великого эксперимента Канторовича в том, что он подошел к экономическим проблемам вооруженный самыми современными для тех лет математическими средствами, и творчески применял их. Это не значит, что его выводы будут полностью работать и сегодня, но это, безусловно, значит,– и в этом отношении Л.В. был, возможно, первым, (фон Нейман не занимался экономикой столь глубоко, как Л.В.) – что талант математика может в корне переустроить и преобразовать экономическую мысль. К великому сожалению Л.В.

не дожил до 90-х когда его опыт, чутье и авторитет могли бы быть использованы с куда большим эффектом, чем в советские времена. Не сомневаюсь, что он смог бы предостеречь реформаторов-экономистов, у которых теоретические (да и практические) навыки были на недостаточно высоком уровне (что и заставляло их прислушиваться к сомнительным советам) от серьезных ошибок. Увы, в нужный момент опытного экономиста такого масштаба как Л.В. в стране не оказалось.

Январь 2001, Санкт-Петербург.

Вершик Анатолий Моисеевич, зав. лабораторией Математического Института РАН (ПОМИ), профессор СПбГУ,

E-mail address: vershik@pdmi.ras.ru