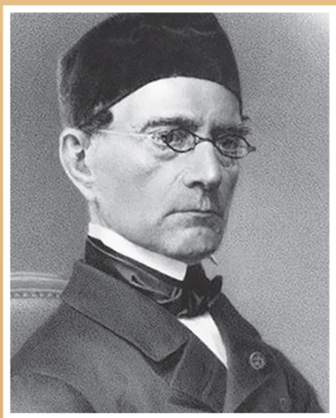
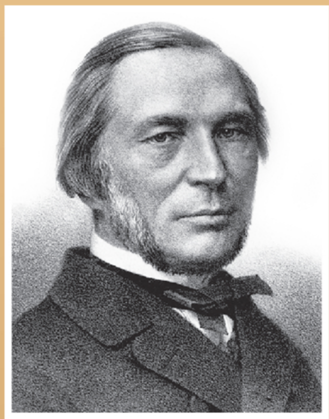
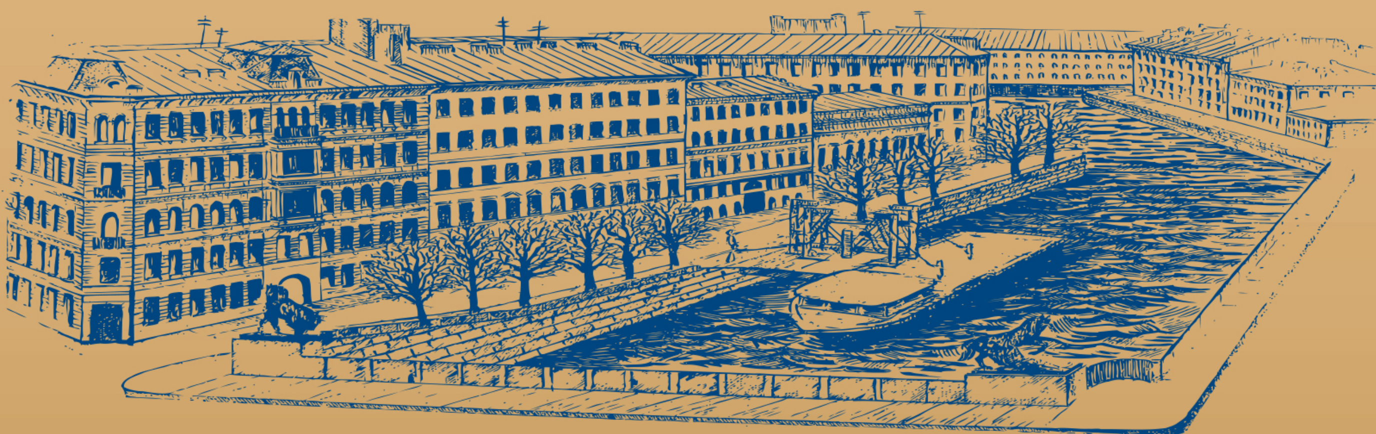
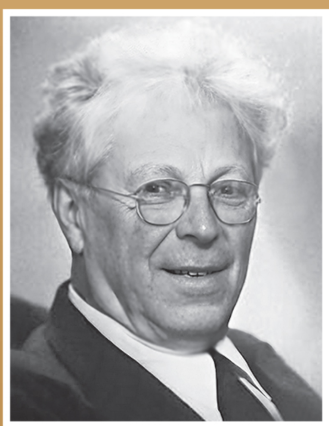
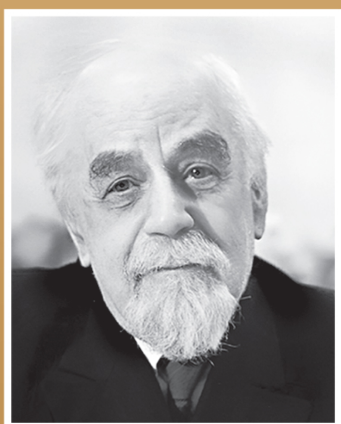
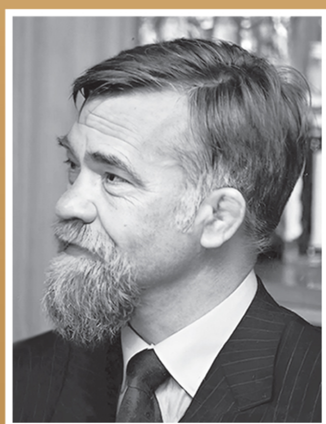
МАТЕМАТИКИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА И ИХ ОТКРЫТИЯ



Ольга Александровна Ладыженская (1922–2004)

О. А. Ладыженская родилась 7 марта 1922 года в городе Кологриве (ныне Костромская область). Способности к математике у нее проявились очень рано. В 1937 году ее отец — учитель математики, бывший офицер — был расстрелян. По этой причине в 1939 г. Ольга не смогла поступить в ЛГУ, несмотря на блестяще сданные экзамены. Ее приняли лишь в Ленинградский педагогический институт им. Покровского. После начала войны Ольга вернулась в Кологрив, где преподавала математику в школе. В 1943 году она поступила на второй курс МГУ. Защитив диплом с отличием в 1947 году (научный руководитель — И. Г. Петровский), она вышла замуж и переехала в Ленинград, где поступила в аспирантуру ЛГУ (научный руководитель — С. Л. Соболев). В 1949 году защитила кандидатскую диссертацию, в 1953 году — докторскую. С 1950 года — преподаватель кафедры высшей математики физфака ЛГУ (с 1955 г. — профессор). С 1954 года Ольга Александровна работала в ЛОМИ, с 1961 по 1998 год — руководитель созданной ею лаборатории математической физики, с 1999 года — главный научный сотрудник ПОМИ. Член-корреспондент АН СССР (1981), академик (1990).

О. А. Ладыженская — автор более 250 научных работ, в том числе 7 монографий и учебника. Ее труды отмечены многочисленными престижными премиями, включая высшую награду РАН — Большую золотую медаль им. Ломоносова. Она была избрана иностранным членом Германской академии «Леопольдина» (1985), Национальной академии деи Линчеи (1989), Американской академии наук и искусств (2001), почетным доктором Боннского университета (2002). В 2020 году Национальный комитет математиков России, Санкт-Петербургский университет и Оргкомитет

Международного конгресса математиков учредили специальную награду (медаль) в честь О. А. Ладыженской. С именем Ольги Александровны связаны пионерские результаты по спектральной теории общих эллиптических операторов, теории дифракции, обоснованию сходимости метода Фурье для гиперболических уравнений. В 60-е годы О. А. в соавторстве со своей ученицей Н. Н. Уральцевой выполнила цикл работ по регулярности решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. В частности, в этих работах было завершено решение 19-й и 20-й проблем Гильберта.

Во второй половине XX века Ладыженская была «законодателем моды» в теории уравнений в частных производных, настоящим математическим стратегом. Важно отметить, что она интересовалась в первую очередь не столько решением, сколько постановкой новых задач. Во многом именно ей мы обязаны такими понятиями, как обобщенные постановки и обобщенные решения.

Фундаментален вклад О. А. Ладыженской в математическую гидродинамику. Она первая доказала глобальную однозначную разрешимость начально-краевой задачи для двумерной системы Навье—Стокса, а также (совместно с А. А. Киселевым) установила ряд теорем об разрешимости трехмерной системы. Ольга Александровна также ввела понятие аттрактора двумерной системы Навье—Стокса и доказала его существование, что легло в основу общей теории глобальной устойчивости для эволюционных уравнений в частных производных.

В течение многих лет Ольга Александровна читала спецкурсы для студентов двух факультетов ЛГУ (матмеха и физфака) одновременно. Обаяние ее личности, умение выделять способных студентов, готовность помочь начинающим позволили ей воспитать блестящих ученых. В их числе Л. Д. Фаддеев, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников, В. С. Буслаев и другие, чьи имена составляют славу петербургской школы уравнений в частных производных и математической физики.

С момента организации В. И. Смирновым городского семинара по математической физике (1947) Ольга Александровна принимала в нем самое активное участие, а в дальнейшем много лет была его руководителем. Почти все специалисты по уравнениям в частных производных и их приложениям, учившиеся в Ленинграде (Петербурге), были или являются участниками этого семинара. Возможность выступить с докладом перед Ольгой Александровной считали для себя честью математики из многих городов Советского Союза. Выступали на семинаре и видные зарубежные ученые, в том числе Р. Курант, Ж. Лере, П. Лакс и другие.

С момента возрождения Санкт-Петербургского математического общества в 1959 году О. А. Ладыженская стала одним из самых активных его членов. Более 40 лет она была членом правления, вице-президентом, а с 1990 по 1998 год — президентом СПбМО. В 1998 году она была избрана почетным членом СПбМО.

Несмотря на свои многочисленные регалии, Ольга Александровна всегда с большим интересом и уважением относилась к собеседникам. С ней можно было спорить и не соглашаться, она не навязывала своих взглядов и не боялась пересмотреть свою точку зрения. Она была человеком глубоко верующим, но никогда не выставляла это напоказ. Ее отношение к людям определялось не словами «ради Бога», но «ради человека». Она была верна девизу «Кто, если не я?», всегда готовая прийти на помощь окружающим, не ожидая их просьб. Эта помощь могла быть разнообразной: деньгами, одеждой, жильем, организацией дежурств у больного, административными хлопотами... Она неоднократно заступалась за студентов с «плохой анкетой», которых подвергали дискриминации при приеме в аспирантуру. В тяжелые девяностые годы Ольга Александровна ходила с карманами, набитыми мелочью, и раздавала ее нищим.

Ольга Александровна была личностью необычной и многогранной. Она интересовалась почти всем на свете, прекрасно разбиралась в литературе, живописи, музыке. Общение с ней высоко ценили известные поэты, писатели, музыканты и художники, среди них И. Бродский, А. Солженицын, Б. Тищенко. Ладыженская была включена Солженицыным в список 257 «свидетелей Архипелага ГУЛАГ».

Отдельно следует упомянуть дружбу Ладыженской с Анной Ахматовой. Несмотря на значительную разницу в возрасте, их отношения были очень близкими: О. А. была в числе 11 человек, которым Ахматова давала читать рукописи «Поэмы без героя» и «Реквиема». Более того, Ольга Александровна убедила Анну Андреевну сделать магнитофонную запись «Реквиема» и более 20 лет тайно хранила пленку. Подчеркнем, что обнаружение такой записи КГБ могло серьезно поставить под угрозу профессиональную карьеру ее хранителя. Сегодня благодаря Ладыженской мы можем слышать бессмертные строки «Реквиема» в исполнении автора. Ольге Александровне посвящено известное стихотворение Ахматовой «В Выборге».

Все знавшие Ольгу Александровну отмечали ее неутомимость — как в математике, так и на экскурсиях и в туристских походах. Для нее было совершенно естественным несколько часов расспрашивать докладчика о тонкостях доказательства. С той же легкостью она могла во время зарубежной поездки посетить за день четыре художественные выставки (и это в весьма почтенном возрасте!). А о ее склонности теряться в горах во время похода ходили легенды.

О. А. Ладыженская и А. А. Ахматова, начало 1960-х годов

Этот портрет Ольги Александровны стоял у А. Д. Александрова на рабочем столе

Наконец, невозможно умолчать о том, что Ольга Александровна была очень красивой женщиной. В поздравительном адресе к ее 60-летию А. Д. Александров написал: «Такое сочетание красоты и таланта в одном человеке кажется нереальным, если бы не Ольга Александровна». Французский математик Ж. Лере после посещения Ленинграда говорил, что видел Эрмитаж, Петергоф и Ладыженскую.

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

Литература

[1] *Friedlander S. et al.* Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004) // Notices AMS. 2004. V. 51, № 11. P. 1320–1331.

[2] *Dumbaugh D. et al.* The ties that bind. Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and the 2022 ICM in St. Petersburg // Notices AMS. 2020. V. 67, № 3. P. 373–381.

[3] *Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I.* The Queen of rhymes and the Queen of formulas (around the poem «In Vyborg»). Universität des Saarlandes. 2019. Preprint № 403. См. `https://www.math.uni-sb.de/preprints/preprint403.pdf`

О. А. Ладыженская и проблема глобальной однозначной разрешимости уравнений Навье—Стокса

Одной из наиболее важных моделей в математической гидродинамике является система уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$, описывающая течения вязкой несжимаемой жидкости. Неизвестными в системе (1) являются векторное поле u и скалярная функция p, играющие роль поля скоростей жидкости и давления соответственно. Один из центральных вопросов, касающихся этой системы, — это вопрос о том, обеспечивает ли данная модель детерминистическое описание динамики жидкости, или, другими словами, однозначно ли определяет задание начальных данных

$$u|_{t=0} = u_0 \tag{2}$$

для системы (1) решение во все последующие моменты времени.

Для ответа на эти и подобные вопросы в XX столетии в теории уравнений в частных производных началась разработка новых подходов, широко использующих методы функционального анализа. Среди ученых, внесших вклад в развитие новых идей, можно назвать Н. М. Гюнтера, С. Л. Соболева, Ж. Лере, Р. Куранта, К. Фридрихса и многих других. В частности, используя концепцию слабых производных, введенных С. Л. Соболевым, Ж. Лере доказал (см. [14]) глобальное существование слабых решений (впоследствии названных решениями Лере—Хопфа) и установил существование сильных решений на конечном промежутке времени. К настоящему времени единственность решений Лере—Хопфа является открытым вопросом. С другой стороны, сильные решения единственны в классе решений Лере—Хопфа, однако их глобальное существование неизвестно.

В 1957 вышла работа [3] «О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости». Можно сказать, что уже в этой работе определилась позиция Ольги Александровны, которой она придерживалась в своих исследованиях уравнений

Навье—Стокса на протяжении всей жизни. Ольга Александровна всегда считала первичным вопрос о единственности решений нестационарных задач (а не об их регулярности) и считала правильной постановку задачи, в которой рассматривается вопрос о нахождении таких функциональных классов, в которых можно одновременно доказать как глобальное существование решений, так и их единственность. Несмотря на то, что для уравнений Навье—Стокса вопрос о единственности решений тесно связан с вопросом об их регулярности (для системы Навье—Стокса имеет место «слабо-сильная» (weak-strong) теорема единственности: из существования гладкого решения вытекает, что всякое слабое решение — решение Лере—Хопфа — обязано с ним совпадать), Ольга Александровна допускала, что решения уравнений, описывающих динамику вязких жидкостей, с течением времени в принципе могут образовывать особенности, но, несмотря на это, математически должны описываться моделями, дающими детерминистическое описание таких течений.

В работе [3] представлены различные варианты функциональных классов, в которых справедлива теорема единственности решений начально-краевых задач для уравнений (1), а также доказано существование решений в этих классах на конечном интервале времени (с оценкой снизу длин соответствующих интервалов). Философии этой работы Ольга Александровна придерживалась всю свою жизнь — искать функциональные классы, в которых имеется глобальная однозначная разрешимость. При этом она полагала, что класс решений Лере—Хопфа недопустимо широк и в нем нет единственности. Этот вопрос все еще открыт, но работа [2] отчасти подтверждает ее правоту.

В 1958 году в работах [4], [5] О. А. Ладыженская доказывает глобальную однозначную разрешимость начально-краевой задачи для двумерных уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \end{cases}$$

в $Q_T := \Omega\times(0,T)$, где Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^2$. Это обобщение результатов Ж. Лере [15] для двумерной задачи Коши, которое она, в отличие от Ж. Лере, выполнила в рамках своей концепции выбора правильного функционального класса. Ее доказательство основано на интерполяционном неравенстве

$$\|u\|^4_{L_4(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

которое в настоящее время называется неравенством Ладыженской.

В дальнейшем Ольга Александровна продолжала поиски случаев, для которых глобальная однозначная разрешимость уравнений Навье—Стокса имеет место. В 1961 году вышло первое издание ее книги [6]. Эта книга, переведенная на английский язык в 1963 году, на долгие годы стала базовым учебником по математической теории уравнений Навье—Стокса для многих поколений математиков всего мира. В 1968 году вышла работа [9], в которой доказывается глобальная однозначная разрешимость задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при осесимметричных начальных данных без угловой компоненты скорости (близкие результаты получены в работе [18], также опубликованной в 1968 году). В работе [8] О. А. доказывает, что теорема единственности для трехмерных уравнений Навье—Стокса имеет место в классе слабых решений с конечной нормой

$$\int\limits_0^T \|u(\cdot,t)\|^l_{L_s(\Omega)}\,dt<+\infty,\qquad \frac{3}{s}+\frac{2}{l}\leqslant 1,\ s\in(3,+\infty],\ l\in[2,+\infty] \tag{3}$$

(отметим, что ранее класс (3) уже появлялся в работах [16] и [17]). В той же работе О. А. Ладыженская также устанавливает гладкость решений, удовлетворяющих условию (3). В то же время для осесимметричных уравнений Навье—Стокса без угловой компоненты скорости Ладыженская в работе [10] строит пример неединственности слабых решений с конечной энергетической нормой. В построенном контрпримере рассматривается начально-краевая задача в осесимметричной области Q_T, заданной в цилиндрических координатах (r,φ,z) соотношением

$$Q_T:=\{t\in(0,T),\ r,z\in(a\sqrt{t},b\sqrt{t})\},\quad 0<a<b.$$

Построенные О. А. Ладыженской неединственные решения принадлежат классу Лере—Хопфа и, более того, удовлетворяют условию (3) с любыми $s>3$, $l\geqslant 2$, удовлетворяющими условию

$$\frac{3}{s}+\frac{2}{l}>1.$$

О. А. Ладыженская отметила, что построенный пример неединственности дает основания полагать, что и в задаче Коши для уравнений Навье—Стокса класс решений Лере—Хопфа, возможно, также является слишком широким для единственности и в энергетическом классе начально-краевая задача для уравнений Навье—Стокса может быть некорректна. Это была весьма смелая по тем временам гипотеза.

С другой стороны, при исследовании трехмерных уравнений Навье—Стокса О. А. Ладыженская считала также неправомерным намеренное сужение функционального класса «физически корректных» решений до класса бесконечно гладких функций. Она всегда подчеркивала (см., например, [11]), что первостепенным вопросом, касающимся уравнений Навье—Стокса, является вопрос о глобальной однозначной разрешимости (т. е., по сути, вопрос о нахождении функционального класса, в котором можно установить как глобальное существование решений, так и их единственность). Она считала, что формулировка «шестой проблемы тысячелетия», предложенная Ч. Фефферманом (см. [1]) и заменяющая проблему детерминистического описания динамики жидкости вопросом об исследовании глобального существования гладких решений, в какой-то степени переводит задачу из философской плоскости в категорию чисто спортивных достижений. Свои взгляды на «шестую проблему тысячелетия» О. А. Ладыженская изложила в статье [11], а также в своем докладе на семинаре 3 мая 2001 года в Принстонском университете.

В связи с этим, параллельно с исследованием уравнений Навье—Стокса, Ольга Александровна искала также и другие нелинейные гидродинамические модели, которые, с одной стороны, допускали бы существование негладких решений, а с другой стороны, для которых была бы справедлива глобальная однозначная разрешимость в энергетическом классе. Такие модели были анонсированы ею в 1966 году в докладе [7] на Математическом конгрессе в Москве и в настоящее время называются «моделями Ладыженской» (в дальнейшем выяснилось, что данный класс включает в себя многие модели, хорошо известные в механике жидкостей и теории турбулентности, в частности, обобщенные ньютоновские жидкости и модель Смагоринского). Доказательство глобальной однозначной разрешимости «модифицированных уравнений Навье—Стокса» (как их называла сама О. А.) опубликовано в работах [12], [13]. В дальнейшем, в 90-е годы XX века, эти уравнения становятся излюбленнной темой Ольги Александровны, и их исследованию она посвящает многочисленные работы.

Г. А. Серёгин, Т. Н. Шилкин

Литература

[1] *Fefferman C. L.* Existence and smoothness of the Navier—Stokes equations // Millennium Prize Problems / Ed.: J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles. Providence, RI: AMS, 2006. P. 57–67.

[2] *Sverak V., Jia H.* Are the incompressible 3d Navier—Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space? // J. Funct. Anal. 2015. V. 268, № 12. P. 3734–3766.

[3] *Киселев А. А., Ладыженская О. А.* О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 5. С. 655–680.

[4] *Ладыженская О. А.* Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье—Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 3. С. 427–429.

[5] *Ladyzhenskaia O. A.* Solution «in the large» of the nonstationary boundary value problem for the Navier—Stokes system with two space variables // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12, № 3. P. 427–433.

[6] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961; Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1970.

[7] *Ладыженская О. А.* О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966 г.). М.: Мир, 1968. С. 560–573.

[8] *Ладыженская О. А.* О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье—Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.

[9] *Ладыженская О. А.* Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 155–177.

[10] *Ладыженская О. А.* Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье—Стокса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, № 1. С. 240–247.

[11] *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье—Стокса, существование и гладкость // Успехи матем. наук. 2003. Т. 58, вып. 2. С. 45–78.

[12] *Ладыженская О. А.* О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 85–104.

[13] *Ладыженская О. А.* О модификациях уравнений Навье—Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 126–154.

[14] *Leray J.* Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace // Acta Math. 1934. V. 63, № 1. P. 193–248.

[15] *Leray J.* Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. T. 12. P. 1–82.

[16] *Prodi G.* Un teorema di unicità per le equazioni di Navier—Stokes // Ann. Mat. Pura Appl. 1959. T. 48. P. 173–182.

[17] *Serrin J.* On the interior regularity of weak solutions of the Navier—Stokes equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. V. 9, № 1. P. 187–195.

[18] *Уховский М. Р., Юдович В. И.* Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство // Приклад. матем. мех. 1968. Т. 32, вып. 1. С. 59–69.