А. Н. Лившиц

Динамические системы, эргодическая теория, формальные языки

Под редакцией А. А. Лодкина

Санкт-Петербург
2014

УДК 517, 519.1, 519.2

Лившиц А. Н. Динамические системы, эргодическая теория, формальные языки. Под ред. А. А. Лодкина (СПбГУ). С предисловием А. М. Вершика.
− СПб: ООО «Р-КОПИ», 2014 – 288 с.

ISBN 978-5-9905649-6

Книга включает основные математические работы замечательного петербургского математика А. Н. Лившица (1950−2008), внесшего крупный вклад в теорию динамических систем. Она может быть полезной специалистам по динамическим системам, эргодической теории, символической динамике и теории кодирования.

Livshits, A. N. Dynamical systems, ergodic theory, and formal languages. A. A. Lodkin, ed. With preface by A. M. Vershik. − St.Petersburg, R-COPY, 2014 − 288 pp..

The book is a collection of the principal works of an outstanding St. Petersburg mathematician Alexander Livshits (1950–2008).

© А.А.Лодкин
ISBN 978-5-9905649-6
© ООО «Р-КОПИ»

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора 7
Биографическая справка 9
Об Александре Нахимовиче Лившице (*А.М.Вершик*) 11
Список математических трудов А. Н. Лившица 17

Работы А. Н. Лившица

Периодические траектории автоморфизмов тора и аппроксимация инвариантных мер 20
Некоторые свойства гомологий *У*-систем 24
Когомологии динамических систем 33
Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных *У*-систем (*с Я. Г. Синаем*) 64
Образующие автоморфизмов с конечной энтропией 68
К проблеме изоморфизма схем Бернулли 74
О спектрах адических преобразований марковских компактов 86
Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований 90
Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса подстановок 98
О построении марковских компактов 107
Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics (*с А.М.Вершиком*) 121
Некоторые примеры адических преобразований и автоморфизмов подстановки 144
Об одной стационарной последовательности случайных величин 166
Об одной слабоперемешивающей подстановке 190
On a class of stationary sequences of random variables 203

Некоторые свойства подстановочных динамических систем 214
О предельных распределениях и асимптотике экстремальных значений для некоторых последовательностей случайных величин 230
On a certain sequence of matrices 249
О суммах координатных случайных величин для одного класса подстановочных динамических систем 255
О некоторых свойствах декодируемости допустимых слов примитивных подстановок 262
Some applications of computer to investigation of substitutional dynamical systems 273
The decoding of sequences generated by morphisms related to primitive substitutions 280

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящий сборник составлен из математических работ замечательного математика Александра Нахимовича Лившица.

Первая из них [1] была им написана еще на втором курсе университета (см. очерк его научного руководителя А.М.Вершика в этом сборнике). Статья [7] отражает содержание его дипломной работы 1972 г. «Некоторые применения теории кодирования в эргодической теории». В ней рассматриваются так называемые S-коды и их применения к построению изоморфизмов схем Бернулли, обобщающих знаменитые примеры Л. Д. Мешалкина.

Мировую известность А. Н. Лившицу принесли работы [2], [4], по материалам которых им была написана кандидатская диссертация «Когомологии динамических систем и изоморфизм автоморфизмов Бернулли» (защищена в 1975 году). Ссылки на эти работы продолжают появляться до сих пор.

На работах, опубликованных в 1987 – 1995 гг., основана докторская диссертация А. Н. Лившица «Применения адического представления при изучении метрических, спектральных и топологических свойств динамических систем» (1995 г.) В ней эти работы, подвергнутые обобщению и дальнейшему осмыслению, рассмотрены с единой точки зрения. Возможно, после некоторого редактирования и комментирования, диссертацию следует опубликовать отдельно.

Из работ этого периода наибольшей популярностью среди математиков пользовалась написанная с А. М. Вершиком статья [14], а также статьи [8], [9], [10].

При отборе материала перед нами стоял выбор: ограничиться главными, самыми известными статьями этого цикла, посвященного интересным аспектам символической динамики, или поместить в сборник все работы на эту тему. Первый вариант был бы целесообразен в случае публикации докторской диссертации, но это потребовало бы огромной редакционной работы и отсрочило бы выпуск сборника на

неопределенный срок. Поэтому мы решили пойти по второму пути и опубликовать практически все, главным образом, в целях замкнутости книги, так как в статьях содержится много перекрестных ссылок. Читателю, желающему подробно разобрать доказательства и лучше понять взаимосвязь статей, можно порекомендовать ознакомиться с диссертацией А. Н. Лившица, имеющейся на его персональной странице портала Санкт-Петербургского математического общества `http://www.mathsoc.spb.ru/pers/livshits`.

Практически все работы автора, входящие в эту книгу, опубликованы. Статьи [10] и [12], опубликованные только в английском переводе, заменены исходными русскими текстами. Статья [24] публикуется впервые.

При подготовке настоящего сборника тексты статей подверглись незначительной обработке: устранены замеченные опечатки, отредактированы некоторые принципиальные определения и формулировки теорем, а также ряд громоздких оборотов и обозначений. При редактировании зачастую были использованы более удачные формулировки самого автора, обнаруженные в последующих публикациях и рукописях, в том числе в обеих диссертациях. Целью этих поправок было облегчить читателю чтение и понимание. Доказательства опубликованы практически в оригинальном виде.

Выход этого сборника стал возможен благодаря инициативе, настойчивости и материальной поддержке Софьи Львовны Лившиц, матери Александра Нахимовича. Она также сыграла роль одного из корректоров. Очень жаль, что ей не довелось увидеть сборник при жизни. Большую помощь в подготовке компьютерного набора оказали Е. В. Новикова и В. Н. Симонова.

А. А. Лодкин

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Александр Нахимович Лившиц (1950 – 2008) родился в Ленинграде. Его отец был Заслуженным деятелем науки и техники РСФСР, профессором, доктором наук, мать — инженером.

Впервые в городских математических олимпиадах Александр Нахимович участвовал в 6 – 7 классах средней школы, тогда он получил диплом I степени за 8-й класс. После 8-го класса перешел в 9 класс математической школы № 239. Участвовал в международных математических олимпиадах, в том числе в Югославии, где был награжден дипломом I степени и специальным призом. Школу окончил с золотой медалью. Затем окончил с отличием Ленинградский государственный университет (математико-механический факультет) и был оставлен в аспирантуре. Его научным руководителем был А.М.Вершик. Защита кандидатской диссертации на тему *Когомологии динамических систем и изоморфизм автоморфизмов Бернулли* состоялась в декабре 1975 года.

С 1976 по 1991 год А.Н. работал в нематематических учреждениях, продолжая публиковаться в математических журналах. Участвовал в математических конференциях, в частности, был одним из основных докладчиков на конференции по эргодической теории в Шклярской Порембе (Польша) в июне 1989 г. С 1991 по 1994 год находился в докторантуре Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН.

В этот период выступал на семинаре ПОМИ по теории представлений и динамическим системам А.М.Вершика, на семинарах лаборатории статистических методов ПОМИ, на семинаре по математической логике ПОМИ, в VI Сибирской школе *Алгебра и анализ*, на Колмогоровском семестре Института Эйлера по теории вероятностей и математической статистике, на семинарах МГУ по теории динамических систем под руководством Я.Г.Синая, Д.В.Аносова, А.М.Степина и Р.И.Григорчука, на международном совещании по математическим

методам и средствам компьютерного моделирования.

28 сентября 1995 года успешно защитил докторскую диссертацию *Применения адического представления при изучении метрических, спектральных и топологических свойств динамических систем* в ПОМИ РАН. В последние годы Александр Нахимович сотрудничал с лабораторией алгоритмических методов и теории представлений ПОМИ, преподавал математику в Санкт-Петербургском электротехническом институте (ЛЭТИ). В октябре 2008 года после короткой тяжелой болезни ушел из жизни.

Александр Нахимович был разносторонним человеком. Помимо математики, интересовался физикой и биологией, неплохо программировал. Любил спорт — в студенческие годы участвовал в спортивных соревнованиях по бегу и спортивной ходьбе, позже стал энтузиастом зимнего купания. Его интересовала разнообразная литература, он обладал большой коллекцией пластинок с музыкальными записями разных жанров, часто посещал филармонию, пробовал силы в рисовании и живописи.

ОБ АЛЕКСАНДРЕ НАХИМОВИЧЕ ЛИВШИЦЕ

А. М. Вершик

В 1967 г. я организовал семинар по динамическим системам, который мыслился дополнительным к эргодическому семинару В.А.Рохлина, организованному им в 1960 г. сразу после переезда в Ленинград. Вначале тематика моего семинара включала гладкую динамику, гиперболические системы, системы на группах. Эти темы, становившиеся все более популярными, не были представлены на рохлинском семинаре, где рассматривалась в основном метрическая (эргодическая) проблематика. Я рассчитывал в основном на молодых людей — студентов и аспирантов; эргодический семинар В. А. с самого начала был «взрослым», и именно с него началась ленинградская школа по эргодической теории. Но к концу 60-х годов он уже был не столь популярным, ряд солидных участников перестали ходить на заседания, да и сам В. А. практически оставил эту тематику. У меня уже был небольшой опыт организации молодежных семинаров до этого: в 1965-66 гг. я вел семинар по теории меры в линейных пространствах и смежным вопросам. На первые заседания нового семинара собиралось много тогда еще молодых людей, среди которых были М. Громов, С. Юзвинский, Р. Белинская, В. Эйдлин. Мы изучали работы С. Смейла, Д. А. Аносова, В. И. Арнольда, Я. Г. Синая по гладким системам, книжку Л. Ауслендера, Л. Грина и Ф. Хана о динамике на однородных пространствах и т. д. Позже (начиная с 1969 года) я расширил тематику семинара, включив в нее теорию представлений, C^*-алгебры и многое другое.

На одно из первых заседаний осенью 1967 г. пришел неизвестный мне молодой человек и заявил, что он уже прочел брошюру Аносова. Отвечая на мой вопрос, он ответил, что учится на первом курсе (учебный год только начинался). Я с некоторым недоверием отнесся

к его заявлению о прочитанном и спросил, кто его направил на семинар, на что он уверенно сказал, что никто его не направлял, просто он узнал про семинар и хочет что-то делать по гиперболической тематике. Так я познакомился с Сашей Лившицем. Вскоре я услышал от его сокурсников и других людей о его блестящем олимпиадном прошлом (первая премия по 10-м классам, когда он был то ли в 8-м, то ли в 9-м классе), о его славе быстрейшего решателя задач («как фон Нейман», сказал мне его однокурсник позже). Но очень скоро я и сам увидел свойства его таланта. Действительно, от природы он был наделен необычайной скоростью мысли и остротой восприятия различной интеллектуальной информации. Но думаю, что это одно не дало бы ему возможности сделать то, что он сделал. Немало есть примеров того, как такой талант, не умеющий сосредоточиваться на решении трудных проблем, не смог реализоваться в науке.

Первая задача, которую стал решать Саша в конце первого курса, была тогда популярна: подсчет числа и выяснение структуры периодических траекторий автоморфизмов тора над конечным полем. Любопытно, что и сейчас она не потеряла своей притягательности — о ней много писал в последние годы жизни В. И. Арнольд. Короткая заметка [1][1] на эту тему, законченная на втором курсе, сразу показала, насколько глубоко автор чувствует задачу: он остроумно использовал для получения уточнения оценки естественные соображения из p-адического анализа, чего не делали предыдущие авторы.

Вслед за этим Саша стал думать над задачей о когомологиях гиперболических автоморфизмов и потоков — над задачей, решение которой принесло ему международную славу. Я говорил ему об этой задаче, но повторял, что она может оказаться сложной и, может быть, надо отложить ее. К счастью, он этого не сделал и вчерне решил задачу о когомологиях гиперболических систем, когда был только в конце третьего – начале четвертого курса. Тут надо сказать, что столь важную и напрашивающуюся проблему почему-то упустила из виду группа очень сильных московских математиков, фактически лидеров в тогдашней гиперболической теории. Несомненно, решение было им под силу, но случилось иначе. Плохо скрытое раздражение по этому поводу еще долго чувствовалось, и видимо из-за этого статьи [2-4] и особенно главная публикация [4] шли в печать очень трудно.

Тем не менее, полный и безоговорочно признанный приоритет принадлежит А. Лившицу. Не только он, но и я гордился его результатом.

[1]Ссылки в этой статье относятся к «Списку математических трудов А. Н. Лившица», помещенному в настоящем сборнике. *Прим. ред.*

Эта работа цитируется в десятках статей, а теорема, без преувеличения ставшая классической, используется всеми, кто занимается гиперболической теорией и ее связями. Неожиданность и важность этой теоремы в том, что она показывает, что когомологии весьма сложных (хаотических с всюду плотным множеством периодических траекторий) динамических систем оказываются намного проще трудно обозримых когомологий весьма простых систем — таких как, например, системы с дискретным спектром). Такой баланс сложностей неслучаен, по-видимому, он связан с противоположностью и дополнительностью спектральных и когомологических характеристик динамических систем. Это обуславливает множество приложений теоремы, не только к динамике, но и к теории вероятностей (чем активно занимался М. И. Гордин), к топологической алгебре и т. п.

Вслед за этим Саша, под влиянием моих долгих разговоров с Р. Зайдманом, занялся проблемой кодирования символических систем. Р. Зайдман объявил, но к сожалению, не оправдал высказанное еще А. Н. Колмогоровым фундаментальное предположение о том, что энтропия есть полный метрический инвариант автоморфизмов Бернулли. Чуть позже Д. Орнштейн блестяще доказал это, однако одна идея Р. Зайдмана оказалась полезной в теории кодирования самой по себе. А. Лившиц, развивая ее, ввел важное понятие S-кодов и вскоре он получил оценку минимального числа состояний символической системы в зависимости от энтропии, практически совпадающую (несколько слабее) с известной оценкой У. Кригера ([6,7]). Этот результат понравился В. А. Рохлину, который давно ставил вопрос о точной оценке. Поскольку рохлинский эргодический семинар к тому времени уже прекратил свое существование, до этого момента В. А. не общался с Сашей, хотя, конечно, слышал о нем. Мы втроем обсуждали и результат, и проблему публикации (работа В. Кригера уже была опубликована, но Саша о ней узнал позже).

Это было время сашиной аспирантуры, о его поступлении в нее я пишу ниже. Но стоит упомянуть одну важную вещь. Он вел в это время в математическом интернате не просто кружок, а своего рода спецкурс для талантливой молодежи, и этот курс с удовольствием вспоминают и сейчас те, кто его слушал.

Блестящая защита диссертации в срок в 1975 году (оппоненты В. М. Алексеев и В. Ф. Лазуткин, внешняя организация — МГУ), тем не менее, не помогла удовлетворительному устройству Саши на работу (я об этом пишу ниже). С этим связан долгий перерыв в его научной работе. Новый цикл относится уже к концу 80-х годов. Он

снова стал посещать семинар, время от времени поражая докладчиков и участников своими неожиданными и точными комментариями. Я привлек его к работе над тем, что я назвал адическими преобразованиями. Он сразу заметил их связь с теорией подстановок и с энтузиазмом стал думать над этими вещами. Наша (единственная) совместная работа [14] вышла с большой задержкой, но сделалась базовой в этом круге вопросов. В спектральной теории подстановок он получил очень красивые результаты с теоретико-числовой интерпретацией. Позже он стал заниматься вероятностными задачами. В 1993 году он, наконец, был принят в докторантуру. Результатов у него накопилось столько, что диссертация была защищена до окончания докторантуры. Благодаря помощи Н. А. Широкова, который тогда заведовал кафедрой математики ЛЭТИ, А. Лившиц был принят на кафедру и стал доцентом, а потом и профессором кафедры. Его всегда интересовали компьютеры, технику которых он понимал не просто как пользователь, а как профессионал; он стал уделять много внимания информатике, компьютерным наукам и их преподаванию. Математикой в последние годы он не занимался, хотя интересовался ею и иногда посещал семинар.

В коротком рассказе об А. Н. Лившице нельзя не упомянуть о деталях его судьбы, довольно обычных для тех времен, но трагичных, если помнить о том, что речь идет о судьбе таланта. Курс, на котором он учился, был, возможно, самым сильным за всю доступную мне историю мат-меха. На нем учились его друзья по 239-й школе и другие даровитые молодые люди, ставшие впоследствии большими учеными; вот неполный их список: А. Суслин, Б. Цирельсон, Л. Тахтаджян, В. Харламов, Я. Элиашберг, А. Рейман, ... Понятно, что все они были первыми кандидатами в аспирантуру. Но это был 1972 год, и надежд на то, что Лившица зачислят в аспирантуру, да еще ко мне, не было. Я написал очень решительное письмо декану, перечисляя бесспорные успехи Лившица, но, конечно, ничего бы не получилось, если бы не один неожиданный шанс: на этом же курсе училась дочка первого секретаря обкома партии Г. Романова, Валя, которая училась неплохо и вообще вела себя очень скромно (история с пересдачей экзамена В. А.[2] сюда не относится). Не принять ее в аспирантуру было бы невозможным, но, по-видимому, для того, чтобы не было нежелательных разговоров, было решено принять в аспирантуру и Лившица, и Цирельсона, что было совершенно необычно, а для нас оказалось при-

[2]См., например, воспоминания С. П. Новикова Рохлине в сб. *В. А. Рохлин. Избранные работы.* МЦНМО, 2010, с. 560. – *Прим. ред.*

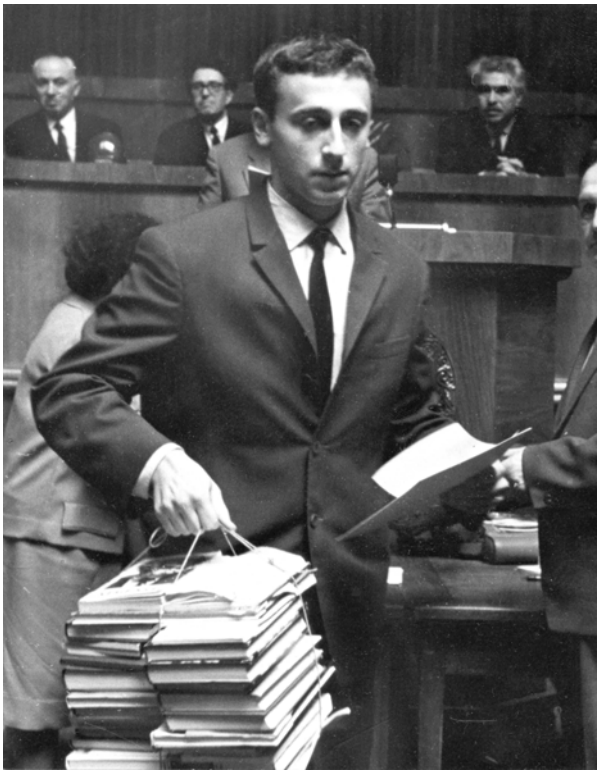
ятным подарком судьбы. Нужно ли говорить, что оба они с блеском провели это время и в срок представили выдающиеся диссертации. Но отыграться за этот вынужденный прием начальство, конечно, не замедлило и распределение на работу оба получили не в университет, и даже не в Ленинград, где они жили всю жизнь, а в Архангельск (Б. Цирельсон там отработал три года) и в Сыктывкар (Лившиц). После долгих нудных переговоров о необходимости продолжать научную работу здесь удалось заменить распределение для Саши на ленинградское. Это была обычная закрытая организация, где никакого подобия не только научной, но и прикладной работе по математике не было. По своему характеру любивший уединение, немного чудаковатый и не умеющий наладить контакт с людьми парень сразу стал в этом типичнейшем советском учреждении предметом насмешек и шуток. Он старался как можно дольше быть «на картошке», чтобы избежать этой постылой службы, да и не нужен он был для нее. Конечно, там находились люди, понимающие ситуацию (был там даже один выпускник мат-меха намного старше его), но помощи Саше они оказать не могли, а иногда даже корили его за неумение прижиться. Замена работы через несколько лет на другое, но аналогичное место не принесла облегчения. Время от времени он приходил ко мне и мы говорили о математике. Сам он никогда мне не жаловался, но описывал ситуацию адекватно. Но я с горечью вспоминаю редкие звонки его мамы, которая с болью умоляла меня помочь Саше устроиться в «научное» место. Тот, кто помнит это время, представляет себе, насколько реальными были ее планы. Только в послеперестроечные годы, когда я уже работал в ПОМИ, мне удалось настоять на принятии Лившица в докторантуру института, о чем я писал выше.

Время и силы были уже не те. Потерян был темп и импульсы к работе. Кто знает, что потеряла наука ... В университете и в аспирантуре я с удовольствием наблюдал его жадность ко всякому математическому знанию. Он учил многие не относящиеся к основной работе вещи, например, работы Коэна по логике, интересовался физикой, вычислительными машинами и т. п. Другое его свойство состояло в умении быстро понимать даже малопонятные тексты, содержащие глубокие вещи. Помню, что я заказывал ему рефераты для доклада на семинаре по самым разным темам. Он блестяще преподавал аудитории, в которой сидели юноши, похожие на него самого. До сих пор выпускники интерната, чуть младше, чем он, вспоминают, как много разных теорий восприняли они от него. Но обычное рутинное преподавание у него шло тяжело ...

Он обладал своим собственным пониманием того, что существенно в математике, а что нет, и кто реально что-то сделал, а кого не обязательно читать или слушать. В своих суждениях он был независим, но нечасто высказывал их. Однажды он указал на младшекурсника И. Френкеля (бывшего младше его на два курса) как на талантливого молодого человека, и тот позже стал моим дипломником. Я благодарен ему за эту наводку.

Однажды он сформулировал более точно мою роль: «Вот это тоже важно: взрыхлять почву, готовить что-то для других ... » Полностью согласен. Было в нем нечто мало соответствующее тогдашней нашей действительности. Но, как ни странно, он был скептически настроен по отношению к возможной эмиграции. Нечего и говорить, с каким энтузиазмом он был бы принят в ведущие университеты мира, как это случилось со многими его друзьями и сверстниками, включая и моих лучших учеников, не нашедших себе здесь места.

Я не могу пожаловаться на то, что у меня было мало аспирантов и учеников. К сожалению, многие из них уже ушли. Саша был одним из первых и, пожалуй, из самых талантливых и запоминающихся.



Александр Лившиц – абсолютный победитель и обладатель специального приза Международной математической олимпиады 1967 года в Югославии

Список математических трудов А. Н. Лившица*

1. Периодические траектории автоморфизмов тора и аппроксимация инвариантных мер. Изв. высш. уч. зав., сер. Матем., 1970, вып. 4 (95), 64-66.
2. Некоторые свойства гомологий У-систем. Матем. заметки, 10, вып. 5 (1971), 555-564.
3. О гомологиях динамических систем. Успехи мат. наук, 27 (1972), вып. 3 (165), 203–204.
4. Когомологии динамических систем. Изв. АН СССР, сер. Матем., 36, вып. 6 (1972), 1296-1320.
5. Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных У-систем (совм. с Я. Г. Синаем). ДАН СССР, 207 (1972), 1039–1041.
6. Образующие автоморфизмов с конечной энтропией. Вестник ЛГУ, 1973, вып. 1, 32–36.
7. К проблеме изоморфизма схем Бернулли. Теор. вер. и ее прим., 19, вып. 2 (1974), 409-416. Письмо в редакцию. Ibid., 25, вып. 1 (1980), 217-218.
8. О спектрах адических преобразований марковских компактов. Успехи мат. наук, 42, вып. 3 (1987), 189–190.
9. Некоторые примеры адических преобразований и автоморфизмов подстановки. Депонировано в ВИНИТИ, № 7384-В88 (1988), 25 с.
   Английский перевод: Some examples of adic transformations and automorphisms of substitutions. Selecta Math. Soviet. , 11 (1992), no. 1, 83–104.
10. Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований. Мат. заметки, 44, вып. 6 (1988), 785–793.
11. Об одной слабоперемешивающей подстановке. Депонировано в ВИНИТИ, № 035-4708 (1989), 15 с.
    Английский перевод: About a certain weakly mixing substitution. in: Representation theory and dynamical systems, 241–251, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
12. Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса подстановок. Препринт ПОМИ Р-10-91 (1991) (12 с.)
13. О построении марковских компактов. Алгебра и анализ, 3 (1991), вып. 1, 165-175.
14. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics (with A.M.Vershik) in: Representation theory and dynamical systems, 185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
15. Об одной стационарной последовательности случайных величин. Препринт ПОМИ Р-5-92 (1992) (36 с.)
16. On a class of stationary sequences of random variables. in: Probability theory and mathematical statistics, (St. Petersburg, 1993), 81–88, Gordon and Breach, Amsterdam, 1996.
17. Morphisms from different points of view (coding, formal languages, dynamical systems). Int. Congress on Computer Systems and Applied Mathematics CSAM'93, St. Petersburg (Тезисы доклада).

*В список не вошли около 25 публикаций научно-технического содержания.

18. On certain sequence of matrices. POMI Preprint 2 (1994) (5 pp.)
19. Некоторые свойства подстановочных динамических систем. Препринт ПОМИ 13 (1994) (10 с.)
20. О предельных распределениях и асимптотике экстремальных значений для некоторых последовательностей случайных величин. Записки научн. сем. ПОМИ РАН, т. 216 (1994), Проблемы теории вероятностных распределений, 13, 86–103, 163–164;
21. О суммах координатных случайных величин для одного класса подстановочных динамических систем. Записки научн. сем. ПОМИ РАН, т. 216 (1994), Проблемы теории вероятностных распределений, 13, 104–109, 164.
22. О некоторых свойствах декодируемости допустимых слов примитивных подстановок. Записки научн. сем. ПОМИ РАН„ т. 223 (1995), Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы, 1, 127–136, 338.
23. Some applications of computer to investigation of substitutional dynamical systems. Записки научн. сем. ПОМИ РАН„ т. 240 (1997), Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы, 2, 147–153, 293.
24. Decoding of sequences generated by morphisms related to primitive substitutions. Рукопись. 8 с.

Учебные пособия

25. Математическая статистика. 1999, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 68 с. (совместно с С. В. Маловым).
26. Анализ однородных статистических данных. 2005, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 56 с. (совм. с В. А. Егоровым, Ю. И. Ингстером, И. Ю. Маловой, С. В. Маловым).
27. Численные методы. Введение в численные методы анализа. 2006, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 64 с. (совм. с С. Н. Солнышкиным).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРА И АППРОКСИМАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

Пусть $U : T^2 \to T^2$ — алгебраический эргодический автоморфизм двумерного тора T^2. Тор будем представлять себе как произведение двух окружностей длины 1. Я. Г. Синай [3] приводит следующую оценку для числа L_n периодических траекторий автоморфизма U длины, не превосходящей n:

$$\ln L_n \sim n \ln \lambda, \tag{1}$$

где λ — большее по модулю собственное число U. Из самой оценки нельзя что-либо заключить о характере расположения периодических точек на торе. Точки с периодом, делящим данный, образуют подгруппу. Для некоторых целей интересно было бы выделить из этой подгруппы меньшую, состоящую из всех точек с рациональными координатами, имеющими знаменатель, делящий фиксированный. Желательно, чтобы этот знаменатель был возможно большим по величине и, например, таким, что приведенная выше оценка (1) реализовывалась бы уже на этом запасе периодических траекторий. Оказывается, отчасти это выполнимо.

Теорема 1. Существуют последовательность натуральных чисел n_k, содержащая арифметическую прогрессию, константа $C > 0$ и последовательность M_k такие, что $M_k > C\lambda^{n_k/2}$ и любая точка, знаменатель координат которой делит M_k, имеет период, делящий n_k.

Таким образом, уточнение оценки (1), данное в формулировке теоремы, реализуется уже на множестве точек с данным знаменателем. В дальнейшем $\det U = 1$ и $\operatorname{sp} U = a$ ($\neq \pm 2$), сопряженный с U автоморфизм $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и автоморфизмы, индуцированные им в модулях над рассматриваемыми кольцами, будут обозначаться тоже через U.

Известия высших уч. зав. Сер. матем., 1970, вып. 4 (95), с. 64-66.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность целых чисел $m_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)$, где λ_i — корни характеристического уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$.

1) $a_n = (m_n, m_{n-1} + 1) > C\lambda^{n/2}$. Действительно, легко проверить, что m_n и $m_{n-1} + 1$ оба делятся на $\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[(n-1)/2]} \lambda^i$.

2) Выберем последовательность всех таких n, что $(m_n, 2(a^2 - 4)) = 1$. Она содержит арифметическую прогрессию и является последовательностью n_k, о которой говорится в условии теоремы 1. Зафиксируем какое-либо $n_k = n$, $a_{n_k} = A$.

Для доказательства теоремы разобьем простые множители A на две группы: p_i, по которым $a^2 - 4$ есть квадратичный вычет, и q_i, по которым $a^2 - 4$ есть невычет $A = p_1^{l_1} \dots p_s^{l_s} q_1^{r_1} \dots q_t^{r_t}$.

Рассмотрим кольцо

$$Q = \mathbb{Z}_{p_1^{l_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z}_{q_1^{r_t}}(\sqrt{a^2 - 4}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_t^{r_t}}(\sqrt{a^2 - 4})$$

с покоординатными сложением и умножением. В кольцо Q естественно вкладывается $\mathbb{Z}_A$. Условие $(q_i)p_i \nmid 2(a^2 - 4)$ обеспечивает возможность построения Q.

Докажем, что в кольце Q найдется элемент, который является общим корнем двух уравнений $p_1(x) = x^n - 1 = 0$ и $p_2(x) = x^2 - ax + 1 = 0$. Остаток от деления $p_1(x)$ на $p_2(x)$ есть $m_n x - (m_{n-1} + 1) = p_3(x)$, но $p_3(Q) = \{0\}$, ибо $A = (m_n, m_{n-1} + 1)$, а уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ разрешимо в Q по самому построению Q. Таким образом, $p_1(x) = 0$ также разрешимо в Q.

Рассмотрим $Q \oplus Q$. Из доказанного следует, что $U^n = E$, если рассматривать действие U в $Q \oplus Q$ как в Q-модуле. Возьмем рациональную сетку со знаменателем A, сопоставим каждой точке этой сетки вектор ее числителей, вложим его в $\mathbb{Z}_A \oplus \mathbb{Z}_A$, а затем в $Q \oplus Q$. Из приведенных рассуждений вытекает, что период каждой точки этой сетки делит n. В качестве M_k возьмем a_{n_k}, и теорема доказана.

Характер расположения периодических точек уточняет

Теорема 2. Для бесконечного множества чисел n подгруппа точек периода, делящего n, в точности совпадает с множеством точек, координаты которых имеют данный знаменатель.

Доказательство. Пусть O_p — кольцо целых p-адических чисел. Для почти всех p к O_p можно присоединить собственные числа U, если

их там нет (такие p выделяются условием $p \nmid (a^2-4)$). Будем рассматривать такие S, которые делятся только на такие p. Расширяя $\mathbb{Z}_S$, как в доказательстве теоремы 1, получим Q_S. В Q_S разрешимо уравнение $x^2-ax+1=0$. Зафиксировав его корни λ и $1/\lambda$ в Q_S-модуле $Q_S \oplus Q_S$, будем иметь однозначное разложение по собственным векторам, отвечающим этим собственным числам. Теперь, если точка d на T^2 с наименьшим общим знаменателем координат S имеет период n, то, вкладывая вектор числителей в $Q_S \oplus Q_S$, увидим, что собственные векторы имеют период, делящий n, и вся сетка со знаменателем S имеет такой период. Ограничимся теперь такими n, которые не могут быть периодами точек со знаменателями, отличными от принятых нами S (можно показать, что среди этих n содержатся все, удовлетворяющие условию $(n, \beta_p) = 1$, где β_p — порядок группы $SL(2, \mathbb{Z}_p)$, равный $(p-1)p(p+1)$ ([2], с. 156). Множество таких n содержит арифметическую прогрессию.

Из сказанного выше следует, что вместе с каждой точкой периода, делящего такое n, входит содержащая ее рациональная «сетка» точек, координаты которых имеют тот же знаменатель; значит, вся группа точек периода, делящего n, есть объединение таких сеток. Но вместе с любыми двумя сетками в нашу группу входит наименьшая, их содержащая (со знаменателем, равным наименьшему общему кратному их знаменателей). Поскольку вся группа конечна, существует наибольшая «сетка», которая и совпадает с нужной подгруппой, что и требовалось доказать. Если воспользоваться формулой Лефшеца [1], то в сочетании с теоремой 2 можно получить теорему 1.

Приведенные теоремы возникли в результате попыток ответить на вопрос, поставленный А. М. Вершиком: как аппроксимировать произвольную инвариантную относительно U меру на торе в смысле слабой сходимости. Например, возможна ли аппроксимация всякой инвариантной эргодической меры дискретными (эргодическими) инвариантными мерами; как связаны свойства инвариантной меры $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \delta_{U_a^i}$ с арифметическими свойствами точки a и др.

В качестве приложения полученных фактов к этой проблематике может быть доказана

Теорема 3. Каждая мера на T^2, инвариантная и эргодическая относительно U, может быть слабо аппроксимирована эргодическими дискретными мерами, т. е. равномерными нагрузками, сосредоточенными на периодических траекториях.

Доказательство. По эргодической теореме Биркгофа для любой эргодической инвариантной меры μ почти всякая по μ точка x такова, что

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-1}\sum_{m=-n}^{n} f(U^m x)=\int f d\mu$$

для любой непрерывной функции f. Нам достаточно показать, что существуют последовательности $\varphi(k)\underset{k\to\infty}{\to}0$, $\psi(k)=n_k-o(n_k)$ (n_k из теоремы 1) такие, что для всякой точки x существует x_k, имеющая период n_k, и для $\psi(k)$ точек из $\{U^i x\}$, $-n_k/2<i\leqslant n_k/2$, верно $\rho(U^i x, U^i x_k)\leqslant\varphi(k)$. Вследствие равномерной непрерывности всякой непрерывной на T^2 функции, отсюда следует сходимость $\mu_k=n_k^{-1}\sum\limits_{n_k/2<i\leqslant n_k/2}\delta_{U^i x_k}$ к μ. В качестве x_k можно взять рациональное приближение x со знаменателем M_k, тогда x_k имеет период n_k : $(M_k>C\lambda^{n_k/2})$, причем $\psi(k)=n_k-\sqrt{2n_k}$ и $\varphi(k)=C'\lambda^{-\sqrt{n}}$. Теорема доказана.

Заметим, что, вообще говоря, предел эргодических дискретных мер не обязательно есть эргодическая мера.

В заключение я благодарю А. М. Вершика за ценные указания.

Литература

1. Артин М., Мазур Б. *О периодических точках.* В сб. переводов: «Математика», **11**:5 (1967), 3–20.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. *Теория представлений и автоморфные функции.* В сб.: «Обобщенные функции», вып. 6. М., «Наука», 1966.
3. Синай Я. Г. *Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны.* Изв. АН СССР, сер. матем., **30**:6, 1966, 1275–1292.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОМОЛОГИЙ *У*-СИСТЕМ

Пусть на многообразии M^n действует *У*-система T^t (T^k). Дается критерий гомологичности нулю гельдеровской функции относительно этой динамической системы, некоторые его следствия и обобщение для функций, принимающих значения в произвольной группе Ли.

Пусть M^m — гладкое замкнутое риманово многообразие класса C^2 с метрикой ρ, T^t (T^k) — гладкий поток (каскад) [1], f — вещественная функция на M^m, удовлетворяющая условию Гёльдера. Функция f называется гомологичной нулю в классе гельдеровских функций, если существует гельдеровская функция g, такая что

$$f(x) = \frac{d}{dt} g(T^t x)_{t=0} \quad (f(x) = g(Tx) - g(x)).$$

Основным результатом данной заметки является следующий критерий гомологичности функции нулю.

Теорема 1. Если T^t — У-поток (T^k — У-каскад) [1], *имеющий всюду плотные траектории, то для того, чтобы f была гомологична нулю в классе гельдеровских функций, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической траектории $\{T^t x\}_{t=0}^{t=\tau}$ ($\{T^n x\}_{n=0}^{n=n_0}$) было верно следующее:*

$$\int_0^\tau f(T^t x) = 0 \qquad \Big(\sum_1^{n_0} f(T^n x) = 0 \Big), \tag{1}$$

причем если гельдеровский модуль непрерывности функции f есть $\omega(\rho) = C\rho^\delta$, то модуль непрерывности функции g не превосходит $C_\delta C \rho^\delta$, где C_δ — константа, зависящая от δ и динамической системы.

Математические заметки, **10**:5 (1971), 555–564.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Будем для простоты рассматривать случай каскада. Многообразие M^m будем предполагать снабженным ляпуновской метрикой, согласованной с условием $У$ для нашего каскада [2]. Докажем основную лемму.

Лемма. Существует $K > 0$ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что если $n > N_\varepsilon$ и $\rho(T^n x, x) < \varepsilon$, то существует точка x_0, удовлетворяющая условиям $T^n x_0 = x_0$ и $\rho(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l < n$.

Доказательство. Пусть G^k и G^l инвариантные, соответственно сжимающееся и расширяющееся слоения. Мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из непрерывной зависимости слоев от начальных точек: существует $a > 0$ такое, что если Π_0 и Π_1 — гладкие площадки, лежащие в слоях G^k, такие, что любую точку $\omega_0 \in \Pi_0$ можно соединить путем длины, меньшей a, лежащим в слое G^l, с точкой $\omega_1 \in \Pi_1$, то отображение $U : \Pi_0 \to \Pi_1$, $u(\omega_0) = \omega_1$ непрерывно, и при малой непрерывной деформации этих площадок отображение меняется непрерывно (см. [1], стр. 26). Поэтому из компактности M^m следует, что все U, построенные таким образом, имеют модули непрерывности, не превосходящие одного общего $\delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$), где в слоях берется индуцированная метрика. Далее, существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что для любых двух точек A и B многообразия M^m с $\rho(A, B) < \gamma$ можно указать точку S, которая лежит в одном сжимающемся слое с A и в одном расширяющемся слое с B, причем расстояния от S до A и от S до B в слоях меньше $C_\rho(A, B)$.

Пусть теперь $\rho(x, T^n x) < \varepsilon$. Рассмотрим для $x, T^n x$ нашу точку $S_{x,T^n x}$. Около точки x в сжимающемся слое опишем шар D радиуса $(C + 1)\varepsilon$. Если ε меньше некоторого фиксированного, а n достаточно велико, то, во-первых, по свойству $У$ диаметр образа $T^n D$ достаточно мал для того, что было определено отображение U, переводящее $T^n D$ в сжимающийся слой, проходящий через точку x, а во-вторых, при данном ε можно сделать n настолько большим, что $U(T^n D)$ будет лежать в шаре радиуса ε с центром в точке S в сжимающемся слое, ибо $U(T^n x) = S$. Из наличия «универсального» модуля непрерывности для U следует наличие универсального N_ε, которое может быть взято в качестве нижней границы для таких n. Но шар радиуса ε с центром в точке S содержится в первоначальном шаре радиуса $(C + 1)\varepsilon$ с центром в точке x. Следовательно, по теореме Брауэра в круге радиуса $(C + 1)\varepsilon$ с центром в точке x есть неподвижная точка

отображения $U \circ T^n$. Эта точка обладает тем свойством, что ее образ при отображении T^n лежит с ней в одном расширяющемся слое и отстоит от нее на расстоянии, меньшем $C'\varepsilon$ вдоль расширяющегося слоя, где C' — некоторая константа. На этом слое отображение T^{-n} является сжимающим, поэтому на расстоянии, меньшем $C''\varepsilon$ от нее, найдется неподвижная точка отображения T^n. Разумеется, эта точка является искомой периодической. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{T^k x\}_1^\infty$ — некоторая всюду плотная траектория, существующая по предположению теоремы. Зададим на ней функцию $g : g(T^k x) = \sum_0^{k-1} f(T^l x)$. Нам надо доказать, что существует $L > 0$ такое, что

$$|g(T^{l'}x) - g(T^l x)| < L\rho(T^{l'}x, T^l x)^\delta, \tag{2}$$

где $0 < \delta \leqslant 1$ (причем мы докажем, что δ можно взять совпадающим с показателем гельдеровости функции f). Тогда мы сможем по непрерывности продолжить g на все M^m гельдеровским же образом, и продолжение будет искомой функцией. Для доказательства сначала допустим, что $|l - l'| > N_{\rho(T^{l'}x, T^l x)}$ (в обозначениях леммы). Тогда по лемме существует x' такое, что $T^{l'-l}x' = x'$ (пусть $l' > l$) и $\rho(T^{k-1}x, T^{k-l-1}x') < K\rho(T^l x, T^{l'}x)$ при $l + 1 \leqslant K \leqslant l'$. Рассмотрим разность $g(T^{l'}x) - g(T^l x) = \sum_{l+1}^{l'} f(T^k x)$. Вследствие предположения теоремы она равна

$$\sum_{l+1}^{l'} f(T^{k-1}x) - \sum_{0}^{l'-l-1} f(T^m x') = \sum_{l+1}^{l'} [f(T^{k-1}x) - f(T^{k-l-1}x')]. \tag{3}$$

Каждой паре $T^{k-1}x$ и $T^{k-l-1}x'$ сопоставим точку S_k, как в доказательстве леммы, причем если $\rho(T^l x, T^{l'}x)$ достаточно мало, то можно считать, что при любом $k \quad S_{k+1} = TS_k$, и каждую разность (3) можно представить в виде $[f(T^{k-1}x) - f(S_k)] + [f(S_k) - f(T^{k-l-1}x') \leqslant L'\rho(T^{k-1}x, S_k)\delta + L'\rho(S_k, T^{k-l-1}x')^\delta$, где L' — константа гельдеровости функции f. Но

$$\sum_{l+1}^{l'} L'\rho(T^{k-1}x, S_k)^\delta < \sum_{l+1}^{\infty} L'\rho(T^{k-1}x, S_k)^\delta \leqslant$$

$$\leqslant L''\rho(T^l x, S_{l+1})^\delta \leqslant L'''\rho(T^l x, T^{l'}x)^\delta.$$

Сходимость и оценка ряда следует из того, что $T^{k-1}x$ и S_k лежат в одном сжимающемся слое, и, значит, общий член ряда меняется экспоненциально. Аналогично оценивается сумма вторых слагаемых из

(3). Таким образом, для рассматриваемого случая оценка (2) доказана. Для произвольных же l и l' доказательство сводится к тому, что вследствие всюду плотности траектории точки x при сколь угодно больших N найдутся $n > N$ и $T^n x$, сколь угодно близкие к $T^l x$, и к применению (2) к парам $(T^l x, T^n x)$ и $(T^{l'} x, T^n x)$. Теорема доказана.

Доказательство для потоков существенно ничем не отличается, кроме формулировки леммы. Для потоков она гласит.

Лемма. Существуют K_1 , K_2 такие, что для всякого ε найдется N_ε, такое что для $t > N_\varepsilon$ из $\rho(T^t x, x) < \varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0, удовлетворяющие условиям $|t_0 - t| < K_1\varepsilon$, $\rho(T^s x, T^s x_0) < K_2\varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \min(t_0, t)$ и $T^{t_0} x_0 = x_0$.

Доказательство вполне аналогично. Происхождение K_1 следующее. Если $T^t x$ близко к x, то существует t_0, близкое к t, такое, что $T^{t_0} x$ можно соединить с x двузвенной ломаной из сжимающегося и расширяющегося отрезка.

Замечание 1. Рассмотрим непрерывную функцию f на многообразии M^m, удовлетворяющую условию сходимости интеграла $\int_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f.

В этом случае равенство нулю сумм по периодическим траекториям в случае каскада или интегралов по периодическим траекториям в случае потока влечет гомологичность f нулю в $C(M^m)$, что следует из доказательства теоремы 1.

Разумеется, функция g получается в этом случае тоже продолжением с всюду плотной траектории.

Замечание 2. Гомологичность нулю функции, удовлетворяющей условию замечания 1 в классе существенно ограниченных измеримых функций, влечет ее гомологичность нулю в $C(M^m)$. Действительно, пусть для некоторой функции f, удовлетворяющей условию замечания 1, есть существенно ограниченная измеримая функция такая, что, $f(x) = g(Tx) - g(x)$ при почти всех x (мы рассматриваем для простоты случай каскада). Если предположить, что для какой-нибудь периодической траектории $\{T^k x_0\}_1^n$ верно

$$\sum_1^n f(T^k x_0) = c \neq 0,$$

то $|\sum_1^{mn} f(T^k x_0)| = |mc| \leqslant \operatorname{vrai\,sup} |\sum_1^{mn} f(T^k x)|$ вследствие непрерывности f, но $\sum_1^{mn} f(T^k x) = g(T^{mn+1} x) - g(x)$, т. е., устремляя m

к бесконечности, мы видим, что нарушается условие существенной ограниченности g. Таким образом, суммы по периодическим траекториям равны 0, и, согласно замечанию 1, f гомологична нулю в C.

Замечание 3. Если M есть тор, T — его автоморфизм или эндоморфизм, то для функции f, удовлетворяющей условию Гёльдера и условию абсолютной сходимости ряда Фурье, гомологичность нулю в $L^1(M,\mu)$, где μ — мера Лебега, эквивалентна гомологичности нулю в C. Действительно, если f гомологична нулю в L^1 и существует функция $g \in L^1$ такая, что при почти всех x имеет место соотношение $f(x) = g(Tx) - g(x)$, то, рассматривая ряд Фурье функции g по характерам тора, мы увидим, что в разложении функции f сумма коэффициентов Фурье по любой полной траектории сопряженного к T эндоморфизма группы характеров равна 0.

Пусть $\{T^k x_0\}_1^m$ — периодическая траектория T в торе. Докажем, что

$$\sum_1^m f(T^k x_0) = 0.$$

В самом деле, для любой полной траектории $S = \{T^{*p}\gamma\}_0^\infty$ (или $S = \{T^{*p}\gamma\}_{-\infty}^\infty$) сопряженного эндоморфизма T^* в группе характеров тора и для функции

$$\varphi_S = \sum_{T^{*p}\gamma \in S} a_p^S T^{*p}\gamma,$$

где a_p^S — коэффициенты Фурье f при $T^{*p}\gamma$, имеем:

$$\sum_1^m \varphi_S(T^k x_0) = \sum_1^m \sum_{T^{*p}\gamma\in S} a_p^S T^{*p}\gamma(T^k x_0)$$

$$= \sum_{p:T^{*p}\gamma\in S} a_p^S \sum_{p+1}^{p+m} \gamma(T^k x_0) = \sum_{p:T^{*p}\gamma\in S} a_p^S \sum_1^m \gamma(T^k x_0) = 0$$

(так как $T^m x_0 = x_0$), но поскольку $f = \sum_S \varphi_S$, то и для f выполняется соотношение $\sum_1^m f(T^k x_0) = 0$. Следовательно, по замечанию 1, f гомологична нулю в C.

Теорема 2. Гомологичность нулю непрерывно дифференцируемой функции f в классе существенно ограниченных измеримых функций эквивалентна ее гомологичности нулю в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Доказательство. Согласно замечанию 2 f гомологична нулю в C, и соответствующую функцию g можно получать продолжением с всюду плотной траектории каскада T^n (мы снова для удобства ограничимся случаем каскада). Рассмотрим теперь произвольную точку A, «сжимающийся» вектор X единичной длины, гладкую кривую $a(t)$; $a(0) = \mathrm{A}$; $0 \leqslant t \leqslant t_0$; $A(t)$ лежит в сжимающемся слое, и касательный вектор к $a(t)$ в точке A при $t = 0$ есть X. Пусть $\{T^k x\}_0^\infty$ — всюду плотная траектория, с которой мы продолжаем функцию g. Выберем $t' \in [0, t_0]$, тогда найдутся пары (n, n') натуральных чисел со сколь угодно большой разностью $n' - n$ такие, что $T^n x$ как угодно близко к A, а $T^{n'} x$ как угодно близко к $a(t')$. Если t' достаточно мало, то при достаточно большом $n' - n$ будет существовать периодическая точка A$'$ периода $n' - n$, аппроксимирующая точку $T^{n'} x$ согласно лемме, причем из доказательства леммы видно, что, сделав $n' - n$ достаточно большим, а $T^n x$ достаточно близким к $a(0) = \mathrm{A}$ и $T^{n'} x$ достаточно близким к $a(t')$, можно добиться того, чтобы наша периодическая точка A$'$ была близка к $a(t')$. Тогда разность $g(a(t')) - g(A)$ близка к

$$g(T^{n'} x) - g(T^n x) = \sum_n^{n'-1} f(T^k x) = \sum_n^{n'-1} [f(T^k x) - f(T^{k-n} A')].$$

Если теперь $n' - n$ устремлять к $+\infty$ за счет изменения n и n' так, чтобы $T^n x$ стремилось к A, а $T^{n'} x$ к $a(t')$, то наша разность будет стремиться, с одной стороны, к $g(a(t')) - g(A)$, а с другой, к $\sum_0^\infty [f(T^k A) - f(T^k(a(t')))]$ (последний ряд сходится ввиду того, что A и $a(t)$ лежат в одном сжимающемся слое, а f дифференцируема). Пусть касательный вектор к $a(t)$ в точке $a(t)$ есть $\xi(t)$, тогда

$$f(T^k A) - f(T^k(a(t'))) = -\int_0^{t'} \left(\widetilde{T}^k(\xi(t)), df T^k(a(t))\right),$$

где $\widetilde{T}^k$ — дифференциал диффеоморфизма T^k. Ввиду того, что $\xi(t)$ — «сжимающийся» вектор, сразу получим, что g дифференцируема по направлению $\xi(0) = X$, и производная равна $-\sum_0^\infty (\widetilde{T}^k(X), df(T^k A))$. Аналогично получим дифференцируемость вдоль любого «расширяющегося» направления, рассматривая, конечно, T^{-1}. Из трансверсальности сжимающегося и расширяющегося слоений и непрерывной зависимости слоев от начальных данных теперь легко можно усмотреть дифференцируемость функции g (учтя равномерную сходимость ряда для производной).

Замечание. В общем случае, по-видимому, неочевидно, дифференцируема ли функция g столько же раз, сколько f, даже если предполагать f дифференцируемой лишь дважды. Тем не менее, для полупростых эргодических эндоморфизмов тора (т. е. таких, матрицы которых имеют одномерные клетки Жордана) верно следующее: если $f \in C^{r+\delta}$, где $\delta \leqslant 1$ и все r-е производные имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, то из гомологичности f нулю в C следует ее гомологичность нулю в $C^{r+\delta}$. Наметим план доказательства существования смешанных производных по собственным направлениям эндоморфизма — этого достаточно. Если выбранные нами собственные направления таковы, что произведения соответствующих собственных значений отличны от единицы, то существование смешанной производной доказывается так же, как в теореме 2 (соответствующий ряд сходится, конечно, к гельдеровской функции с показателем δ). Если же произведение собственных чисел равно единице, и тем самым ряд расходится, то обозначим через D соответствующий оператор дифференцирования. Если $g(Tx) - g(x) = f(x)$ и если бы существовала непрерывная функция Dg, то, вследствие равенства единице произведений собственных чисел, имеем

$$Dg(Tx) - Dg(x) = Df(x).$$

То есть прежде всего надо доказать, что Df гомологична нулю в C. Рассмотрим ряды Фурье f и Df. Из того, что произведение собственных чисел равно единице, легко видеть, что эти ряды вдоль траекторий сопряженного к T эндоморфизма группы характеров тора отличаются постоянными на траекториях множителями, и поэтому суммы коэффициентов вдоль траекторий равны нулю у f и Df одновременно. Действуя теперь, как в замечании 3 к предыдущей теореме, мы убедимся в гомологичности нулю функции Df в C и, тем самым, в пространстве гельдеровских функций. Среди функций, осуществляющих эту гомологичность, выберем ту, которая в разложении Фурье имеет нулевой коэффициент при тривиальном характере. Она и будет Dg. Действительно, если формально применить оператор D к ряду Фурье функции g, то в пространстве формальных рядов Фурье полученный ряд тоже будет осуществлять гомологичность f нулю, и поэтому разность между ними и рядом Фурье найденной нами функции постоянна на траекториях сопряженного к T эндоморфизма группы характеров. Но на каждой траектории эта постоянная есть нуль, ибо коэффициенты Фурье функции g и формального ряда Dg отличаются множителями, постоянными на траекториях, и, значит, одновременно стремятся к нулю вдоль траекторий так же, как и у ряда Фурье

нашего «кандидата» в Dg, и так же, следовательно, как у изучаемой разности. Таким образом, Dg существует вследствие обычных теорем о дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов. Ее гельдеровость с показателем δ следует из теоремы 1.

Представляет интерес изучение гомологии $У$-систем с коэффициентами в произвольной группе Ли. Пусть на римановом многообразии M^m действует группа G, а Γ — некоторая группа Ли. Пусть $\Gamma(M)$ обозначает группу гельдеровских отображений M в Γ (понятие гельдеровости не зависит от метрики вследствие компактности M). Циклом называется функция $f(x,g)$, отображающая $M\times G$ в Γ и такая, что

$$f(x,g_1)f(xg_1,g_2)=f(x,g_1g_2).$$

Два цикла f_1 и f_2 называются гомологичными, если

$$f_1(x,g)=\varphi^{-1}(x)f_2(xg)\varphi(xg)$$

для некоторой гельдеровской функции $\varphi: M\to\Gamma$. В случае $G=\mathbb{Z}$ цикл определяется функцией $\bar f(x)=f(x,1)$, и условие гомологичности

$$\bar f_1(x)=\varphi^{-1}(x)\bar f_2(x)\varphi(Tx),$$

где T — действие образующего элемента группы G. Если G — аддитивная группа вещественных чисел и если потребовать дифференцируемости циклов и функций $\varphi(xg)$ по g, то цикл определится функцией $\bar f: M\to\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ — алгебра Ли группы Γ):

$$\bar f(x)=\lim_{t\to 0}t^{-1}\exp^{-1}[f(x,0)^{-1}f(x,t)],$$

где $\exp^{-1}$ определено при малых t, а условие гомологичности цикла нулю будет в терминах $\bar f$ таково:

$$\bar f(x)=\lim_{t\to 0}t^{-1}\exp^{-1}(\varphi^{-1}(x)\varphi(T^tx)),$$

где T^t — поток, определяемый действием группы $\mathbb{R}$, а φ — некоторая функция

$$\varphi:\ M\to\Gamma.$$

Тем самым оправдываются определения, предпосланные теореме 1, и мы можем говорить о функциях, гомологичных нулю. Сформулируем без доказательства теорему, обобщающую теорему 1.

Теорема 3. Если группа G есть $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$ и ее действие на римановом многообразии M^m определяет У-каскад (или У-поток), имеющий всюду плотную траекторию, то в каждой группе Ли Γ существует окрестность единицы U (в алгебре Ли группы Γ существует окрестность нуля U), такая что гельдеровская функция

$$\bar{f}: M \to U$$

определяет нулевой элемент $H^1(G, \Gamma(M))$ тогда и только тогда, когда для соответствующего цикла $f(x, g)$ условие $xg = x$ влечет $f(x, g) = \mathrm{e}_\Gamma$.

Замечание 1. Если группа Γ имеет двусторонне инвариантную метрику или конечномерна, то в качестве U можно взять всю группу Γ (всю алгебру Ли группы Γ). Для действия $\mathbb{Z}$ достаточно, чтобы Γ имела двусторонне инвариантную метрику, не обязательно являясь группой Ли.

Замечание 2. Разумеется, условие теоремы 3 эквивалентно равенству e_Γ произведений по периодическим траекториям аналогично теореме 1, и в случае двусторонне инвариантной метрики в группе доказательство теоремы 3 есть простой пересказ доказательства теоремы 1.

При доказательстве леммы 1 об аппроксимации произвольной траектории периодическими мы пользовались замечаниями, сделанными Г. А. Маргулисом.

Теорема 3 является ответом на вопрос, поставленный А. М. Вершиком в связи с теоремой 1.

Литература

1. Аносов Д. В. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.* Тр. Матем. ин-та АН СССР, **90** (1967).
2. Аносов Д. В. *О касательных полях трансверсальных слоений в У-системах.* Матем. заметки, **2**:5 (1967), 539–549.

КОГОМОЛОГИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе сформулирован и доказан критерий когомологичности нулю функций на фазовых пространствах различных динамических систем (*У*-системы, топологические цепи Маркова, системы Смейла) с коэффициентами в некоторых группах и изучены приложения этого критерия. (В простейшем случае преобразования $T : M \to M$ когомологичность нулю вещественной функции f означает, что $f(x) = g(Tx) - g(x)$.)

В работе [1] изучались гомологии *У*-систем с коэффициентами в аддитивной группе вещественных чисел и в других группах. Цель данной заметки заключается в том, чтобы дать подробное доказательство анонсированных и не доказанных там полностью фактов. Кроме того, одна теорема работы [1] будет обобщена и усилена. Также мы укажем некоторые приложения доказанных фактов: к проблеме расширений динамических систем, к проблеме приводимости систем линейных дифференциальных уравнений, к проблеме существования интегрального инварианта. Будут рассмотрены также и другие вопросы.

§1. Определения и предварительные сведения

Пусть на замкнутом римановом многообразии M гладко действует группа G, а Γ — некоторая топологическая группа с единицей e_Γ, являющаяся полным метрическим пространством. Пусть $\Gamma(M)$ обозначает группу непрерывных отображений $M \to \Gamma$. Коциклом называется функция $f(x, g)$, отображающая $M \times G$ в Γ и такая, что $f(x, g_1) \times f(xg_1, g_2) = f(x, g_1 g_2)$. Два коцикла f_1 и f_2 называются когомологичными, если

$$f_1(x, g) = \varphi^{-1}(x) f_2(x, g) \varphi(xg)$$

Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, **36** (1972), 1296–132.

для некоторой непрерывной функции $\varphi : M \to \Gamma$. В случае, когда группа $G = \mathbb{Z}$, для которой мы перейдем к аддитивной записи, коцикл определяется функцией $\bar{f}(x) = f(x, 1)$, а условие когомологичности имеет вид

$$\bar{f}_1(x) = \varphi^{-1}(x)\bar{f}_2(x)\varphi(Tx),$$

где T — действие образующего элемента группы G. Если G — аддитивная группа вещественных чисел и если потребовать, чтобы коциклы и функции $\varphi(xg)$ по g были дифференцируемы и чтобы Γ была группой Ли, то коцикл определится функцией $\bar{f} : M \to \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы Γ),

$$\bar{f}(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \exp^{-1}(f(x, 0)^{-1} f(x, t)),$$

где $\exp^{-1}$ определено при малых t, а условие когомологичности коцикла нулю будет в терминах $\bar{f}$ таково:

$$\bar{f}(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \exp^{-1}((\varphi(x))^{-1}\varphi(T^t x)),$$

где T^t — поток, определенный действием группы $\mathbb{R}$, а φ — некоторая функция $\varphi : M \to \Gamma$.

§2. Случай двусторонне инвариантной метрики в Γ

В [1] по сути дела доказана следующая теорема (теорема 1 и замечания к теореме 3), которая будет нами неоднократно использована.

Теорема 0. Если группа G есть $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{R}$) и ее действие на римановом многообразии M^n определяет топологически транзитивный У-каскад (или У-поток), то для любой полной группы Γ с двусторонне инвариантной метрикой гёльдеровская функция $\bar{f} : M \to \Gamma$ ($\bar{f} : M \to \mathfrak{G}$) определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $xg = x$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$, причем соответствующая функция φ тоже гёльдеровская.

Теорема 1. Пусть S — эндоморфизм тора T^n, представляющийся матрицей с простыми элементарными делителями, все собственные значения которой вещественны и отличны от ± 1. Если для некоторой функции $f \in C^{r+\delta}$, где $r \geqslant 1$, $0 < \delta \leqslant 1$, все r-ые смешанные производные имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, существует такая функция $g \in L^l(T^n)$, что почти всюду $f(x) = g(Sx) - g(x)$, то функция g совпадает почти всюду с функцией $g' \in C^{r+\delta}$ и при всех x из T^n $f(x) = g'(Sx) - g'(x)$.

Доказательство. В [1] (замечание 3 к теореме 1 и теорема 2) показано, что g' может быть взята из $C^1(T^n)$, и сосчитана производная вдоль произвольного вектора X, сжимающегося под действием S:

$$g'_x(a) = \sum_0^\infty (\tilde{S}^k X, df(S^k a)),$$

где a — точка, в которой считается производная, $\tilde{S}^k$ — дифференциал диффеоморфизма S, и, аналогично, для расширяющегося вектора X

$$g'_x(a) = \sum_0^\infty (\tilde{S}^{-k} X, df(S^{-k} a)).$$

Вследствие предположенной в условии теоремы полупростоты $\tilde{S}$ в касательном пространстве к T^n, в каждой точке может быть выбран базис из собственных векторов $\tilde{S}$. В связи с параллелизуемостью тора мы будем считать, что все рассматриваемые нами в дальнейшем векторы отнесены к одной точке. Достаточно доказать, что существуют и лежат в $\mathrm{Lip}^\delta(T^n)$ все смешанные производные g' порядков до r включительно вдоль собственных направлений S.

Будет использован тот очевидный факт, что если $f \in C^{r+\delta}$ и все r-ые смешанные производные имеют абсолютно суммируемые ряды Фурье, то $f \in C^{r+\delta}$ и все r'-ые смешанные производные f также имеют абсолютно суммируемые ряды Фурье, если $r' < r$. Допустим, что для всех r', меньших данного r, наша теорема доказана. Поскольку, как уже отмечалось, для $r = 1$ она доказана в [1] даже без предположения абсолютной суммируемости рядов Фурье производных, достаточно совершить индукционный переход. Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — некоторый набор собственных векторов S единичной длины, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — соответствующие собственные значения.

I случай. $|\lambda_1 \ldots \lambda_r| \neq 1$. Допустим, что $|\lambda_1 \ldots \lambda_r| < 1$ (случай $|\lambda_1 \ldots \lambda_r| > 1$ аналогичен). Расположим собственные векторы и собственные числа S в следующем порядке:

$$y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_r; \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_r,$$

где β_i — собственное число, отвечающее собственному вектору y_i, $|\beta_1| < 1, \ldots, |\beta_k| < 1, |\beta_{k+1}| > 1, \ldots, |\beta_r| > 1$. Докажем существование непрерывной производной $g_{y_1 \ldots y_n}$. Тем самым, с помощью индукционного предположения и обычных теорем о повторных, производных I случай будет полностью рассмотрен. Но из нашей формулы для

производной g_{y_1} последовательным дифференцированием ее по y_i как функционального ряда (это дифференцирование законно вследствие расположения β_i) мы получаем, что $g_{y_1 \dots y_r}(A)$ существует, равна

$$\sum_0^\infty (\beta_1 \dots \beta_r)^k f_{y_1 \dots y_r}(S^k A)$$

в каждой точке $A \in T^n$ и тем самым принадлежит $\mathrm{Lip}^\delta(T^n)$.

II случай. $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r = \pm 1$. Если $\lambda_1 \dots \lambda_r = -1$, то заменяя S на S^2, а $f(x)$ — на $f_1(x) = f(x) + f(Sx)$, мы сводим все к случаю $\lambda_1 \dots \lambda_2 \cong 1$, который мы и будем впредь рассматривать. Пусть D — оператор смешанного дифференцирования вдоль направлений $X_1, \dots, X_r$, отвечающих, соответственно, собственным числам $\lambda_1 \dots \lambda_r$:

$$(Dg)(x) = g_{X_1 \dots X_r}(x).$$

Если $g(Sx) - g(x) = f(x)$ и если бы существовала непрерывная функция $Dg(x)$, то мы имели бы $D(U_S g) - Dg = Df$, где $(U_S g)(x) = g(Sx)$ вследствие $\lambda_1 \dots \lambda_r = 1$, и $Dg(Sx) - Dg(x) = Df(x)$. Таким образом, мы должны доказать, что Df гомологична нулю в C. Рассмотрим ряды Фурье f и Df:

$$f = \sum_\chi c_\chi \chi, \qquad Df = \sum_\chi b_\chi \chi,$$

где χ пробегает характеры тора. Очевидно, что $D\chi = a_\chi \chi$, где a_χ некоторое число; это следует из общего вида χ:

$$\chi = e^{2\pi i \sum m_j \theta_j},$$

где θ_j — циклические координаты на торе T^n. Но так как $(D(U_S \chi)(x) = D\chi(Sx)$, то $a_\chi = a_{U_S \chi}$. Из вышесказанного следует, что a_χ постоянно на любой траектории Q преобразования U_S в группе характеров тора. А поскольку $\sum\limits_{\chi \in Q} c_\chi = 0$ (вследствие когомологичности f нулю в $L^1(T^n)$), то и $\sum\limits_{\chi \in Q} b_\chi = \sum\limits_{\chi \in Q} a_\chi c_\chi = 0$. Докажем теперь, что для любой периодической траектории $\{S^k x_0\}_1^m$ в торе T^n

$$\sum_1^m (Df)(S^k x_0) = 0.$$

В самом деле, $Df = \sum\limits_{Q} \varphi_Q$, где $\varphi_Q = \sum\limits_{\chi \in Q} b_\chi \chi$,

$$\sum_{1}^{m} \varphi_Q(S^k x_0) = \sum_{1}^{m} \sum_{\chi \in Q} b_\chi \chi(S^k x_0) = \sum_{\chi \in Q} b_\chi \sum_{1}^{m} \chi(S^k x_0).$$

Но для периодической точки x_0, $S^m x_0 = x_0$, сумма $\sum\limits_{1}^{m} \varkappa(S_k x_0)$ для всех $\varkappa$ из одной траектории Q одинакова, ибо если $\varkappa_1 = U_{S^l} \varkappa_2$, то

$$\sum_{1}^{m} \varkappa_1(S^k x_0) = \sum_{1}^{m} \varkappa_2(S^{k+l} x_0) = \sum_{1-l}^{m-l} \varkappa_2(S^{k+l} x_0) = \sum_{1}^{m} \varkappa_2(S^k x_0).$$

Поэтому $\sum\limits_{1}^{m} \varphi_2(S^k x_0) = 0$ и $\sum\limits_{1}^{m} (Df)(S^k x_0) = 0$ (мы неоднократно использовали абсолютную сходимость ряда Фурье Df). Из теоремы 0 следует теперь, что Df когомологична 0 в $\mathrm{Lip}^\delta(T^n)$.

Среди функций $U(x)$ таких, что $U(Sx) - U(x) = (Df)(x)$, выберем ту, которая в разложении Фурье имеет нулевой коэффициент при тривиальном характере. Но эта функция и будет Dg. Действительно, пусть $g = \sum\limits_{\varkappa} d_\varkappa \varkappa$ — ряд Фурье функции g. Применив к нему формально оператор D, получим ряд $\sum\limits_{\varkappa} a_\varkappa d_\varkappa \varkappa$. Мы знаем, что $(Dg)(Sx) - (Dg)(x) = (Df)(x)$ в множестве формальных рядов Фурье. Пусть, далее, ряд Фурье нашей функции есть $\sum\limits_{\varkappa} p_\varkappa \varkappa$. В пространстве формальных рядов Фурье теперь окажется

$$((Dg)(Sx) - U(Sx)) - ((Dg)(x) - U(x)) = 0,$$

то есть

$$a_\varkappa d_\varkappa - p_\varkappa = a_{U_S \varkappa} d_{U_S \varkappa} - p_{U_S \varkappa}.$$

Таким образом, последняя разность постоянна на траектории в группе характеров. Но мы видели, что $a_\varkappa$ постоянна на траектории в группе характеров; $d_\varkappa$ стремится к 0 вдоль траекторий как коэффициент Фурье функции g; $p_\varkappa$ — стремится к 0 вдоль траекторий как коэффициент Фурье функции U. Поэтому $a_\varkappa d_\varkappa - p_\varkappa = 0$, то есть $Dg = \sum p_\varkappa \varkappa = U$, где $u \in \mathrm{Lip}^\delta(T^n)$. Таким образом, мы доказали, что ряд Фурье функции g имеет формальные смешанные производные порядков до r включительно, являющиеся рядами Фурье функций из $\mathrm{Lip}^\delta(T^n)$. Докажем, что из этого следует принадлежность g к $C^{r+\delta}$.

Будем для удобства изучать дифференцируемость не по собственным направлениям S, а по θ_i , где θ_i — циклические координаты на торе. Пусть нам нужно доказать существование производной $g_{\theta_{i_1}\dots\theta_{i_r}}$. Согласно предположению индукции существует $g_{\theta_{i_2}\dots\theta_{i_r}}$ и лежит в $\mathrm{Lip}^{\delta}(T^n)$. Зафиксируем значения всех координат θ_i, кроме θ_{i_1}. Пусть

$$\varphi(\theta_{i_1}) = g_{\theta_{i_2}\dots\theta_{i_r}}(\theta_1 \dots \theta_{i_1} \dots \theta_r).$$

где θ_{i_1} — переменная координата. Тогда ряд Фурье $\varphi(\theta_{i_1})$ и формальный ряд Фурье $\varphi'(\theta_{i_1})$ равномерно сходятся как ряды Фурье гёльдеровских функций. Теперь уже существование производной $g_{\theta_{i_1}\dots\theta_{i_r}}$ и принадлежность ее к $\mathrm{Lip}^{\delta}(T^n)$ следует из ранее доказанного и теоремы о дифференцировании функциональных рядов. Теорема доказана.

Как известно, функция на n-мерном торе, лежащая в $C^{[\frac{n}{2}]+1}$, имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье (доказательство такое же, как для одномерного случая — см. [8], т. I, стр. 384). Таким образом, «утрата гладкости» составляет величину $[\frac{n}{2}]+1$, и если $f \in C^{\infty}$, то $g \in C^{\infty}$. По тем направлениям, для которых произведения собственных значений отличны от единицы по модулю, дифференцируемость не утрачивается даже и без предположения о полупростоте $\tilde{S}$ над $\mathbb{R}$.

Сейчас будут даны некоторые обобщения и усиления теоремы 0.

§3. Более сложные группы Γ

Определение. Топологическая группа Γ называется хорошей, если она допускает эквивалентные правоинвариантную и левоинвариантную метрики ρ_{Π} и ρ_{Λ} такие, что Γ, метризованная посредством этих метрик, является полным метрическим пространством и для любой пары точек $(x_1, x_2) \in \Gamma \times \Gamma$

$$\frac{\rho_{\Lambda}(x_1, x_2)}{\rho_{\Lambda}(gx_1g^{-1}, gx_2g^{-1})} \to 1, \quad \frac{\rho_{\Pi}(x_1, x_2)}{\rho_{\Pi}(gx_1g^{-1}, gx_2g^{-1})} \to 1,$$

при $g \to e_{\Gamma}$. Это стремление равномерно по (x_1, x_2) в Γ на ограниченных множествах.

Разумеется, все конечномерные группы Ли хороши. Вероятно, возможна аналогичная трактовка для некоторых бесконечномерных групп.

Теорема 2. Если группа G есть $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{R}$) и ее действие (класса C^2) на многообразии M определяет У-каскад (или У-поток) со свойством топологической транзитивности, то в каждой хорошей

группе Γ существует такая окрестность единицы U (в алгебре Ли хорошей группы Ли Γ существует такая окрестность нуля U), что гёльдеровская функция $\bar{f} : M \to U$ определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $f(x, g) = e_\Gamma$.

Доказательство. Рассмотрим случай каскада $\{T^n\}_{-\infty}^{\infty}$. В работе [1] была использована следующая лемма (мы предполагаем, что многообразие M снабжено ляпуновской метрикой $d(x, y)$ относительно T [2]).

Лемма. Существует $K > 0$ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N_ε , что если $n > N_\varepsilon$, то из $d(T^n x, x) < \varepsilon$ следует, что существует точка x_0, для которой $T^n x_0 = x_0$ и $d(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l \leqslant n$.

Пусть $\{T^n x\}^\infty$ — всюду плотная траектория. Будем, как и в работе [1], строить на ней и пытаться продолжить с нее по непрерывности функцию $\varphi(T^n x) = f(x)f(Tx)\dots f(T^{n-1}x)$. Воспользуемся сейчас левоинвариантной метрикой ρ_Λ в группе Γ. Допустим, что $d(T^{m-1}x, T^{n-1}x) < \varepsilon$ и, для начала, $|m - n| > N_\varepsilon$. Тогда существует периодическая точка x_0 из леммы, а также лежащая с ней в одном сжимающемся слое точка S, такие, что $T^{n-m+1}x_0 = x_0$,

$$d(T^k S, T^k x_0) < CQ^{m-k}\, d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)$$

и

$$d(T^k S, T^k x_0) < Q^{k-n}\, C\, d(T^{m-1}x, T^{n-1}x), \quad m < k \leqslant n-1,$$

где $C > 0$, $Q > 1$ — константы, зависящие лишь от $У$-системы T на M. Это легко следует из леммы и определения $У$-системы. Из левоинвариантности ρ_Λ следует, что

$$\begin{aligned}\rho_\Lambda(\varphi(T^{m-1}x), \varphi(T^{n-1}x)) &= \rho_\Lambda(e_\Gamma, \bar{f}(T^m x)\dots\bar{f}(T^{n-1}x)) = \\ &= \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m x_0)\dots\bar{f}(T^{n-1}x_0), \bar{f}(T^m S)\dots\bar{f}(T^{n-1}S))\end{aligned}$$

в силу условия теоремы, которое для $G = \mathbb{Z}$ как раз и означает, что для периодической точки x_0

$$\bar{f}(T^m x_0)\dots\bar{f}(T^{n-1}x_0) = e_\Gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\rho_\Lambda(\varphi(T^{n-1}x), \varphi(T^{m-1}x)) \\ &\qquad \leqslant \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m x_0)\dots\bar{f}(T^{n-1}x_0),\ \bar{f}(T^m S)\dots\bar{f}(T^{n-1}S)) \\ &\qquad\qquad + \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m S)\dots\bar{f}(T^{n-1}S),\ \bar{f}(T^m x)\dots\bar{f}(T^{n-1}x)).\end{aligned}$$

Допустим, что показатель гёльдеровости функции f равен δ. Обозначим $\bar{f}(T^{m+k-1}x_0)$ через a_k, $\bar{f}(T^{m+k-1}S)$ — через b_k, $\bar{f}(T^{m+k-1}x)$ — через c_k, $d(\varphi(T^{n-1}x), \varphi(T^{m-1}x))$ — через ε. Из определения $У$-системы, гёльдеровости f и условия теоремы следует, что

$$\begin{gathered} a_1 \dots a_{n-m} = e_\Gamma, \quad \rho_\Lambda(a_k, b_k) < K_1 Q^{-\delta(k-1)} \varepsilon^\delta, \\ \rho_\Lambda(b_k, c_k) < K_1 Q^{-\delta(n-m-1-k)} \varepsilon^\delta. \end{gathered} \tag{1}$$

План дальнейшего доказательства следующий. Мы установим существование такой окрестности U единицы e_Γ группы Γ (она и будет искомой окрестностью из условия), что если $a_i \in U$, $b_i \in U$, $c_i \in U$, то существует константа K_2 такая, что выполнение соотношений (1) влечет оценку $\rho_\Lambda(e_\Gamma, c_1, \dots, c_n) < K_2 \varepsilon^\delta$. Тем самым для нашего случая будет доказано, что

$$\rho_\Lambda(\varphi(T^m x), \varphi(T^n x)) < K_2\, d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)^\delta,$$

если $|m - n| > N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}$ (см. лемму). Если же $|m - n| < N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}$, то, как и в работе [1], пользуясь всюду плотностью нашей траектории $\{T^l x\}_0^\infty$, найдем такое q, что

$$\begin{gathered} d(T^q x, T^{m-1}x) < d(T^{m-1}x, T^{n-1}x), \\ d(T^q x, T^{n-1}x) < d(T^{m-1}x, T^{n-1}x), \\ |q - m| > N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}, \quad |q - n| > N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}, \end{gathered}$$

и, стало быть, предыдущее неравенство будет доказано для любых m и n, а функция φ будет продолжима по непрерывности на все многообразие. Кроме метрики ρ_Λ мы будем пользоваться также правоинвариантной метрикой ρ_Π в группе Γ, для которой тоже справедливы соотношения (1). Поскольку ρ_Λ и ρ_Π эквивалентны, то существует окрестность единицы V в Γ, в которой

$$\frac{1}{R}\, \rho_\Pi(v_1, v_2) < \rho_\Lambda(v_1, v_2) < R\, \rho_\Pi(v_1, v_2),$$

где R — некоторая константа, v_1, v_2 — любые элементы из V. Пусть U — такая окрестность e_Γ, все элементы которой обладают следующим свойством:

$$\rho_\Pi(g_1, g_2) < D\rho_\Gamma(ug_1u^{-1}, ug_2u^{-1}),\ \rho_\Lambda(g_1, g_2) < D\rho_\Lambda(ug_1u^{-1}, ug_2u^{-1}),$$

где g_1, g_2 — любые элементы Γ, а D $(1 < D < Q^{\delta})$ — некоторая константа. Пусть, наконец, ε столь мало, что шары в метриках ρ_{Π} и ρ_{Λ} с центром в e_{Γ} и радиусом $H = (R+1)\,K_1$, $\varepsilon^{\delta}(1 - DQ^{-\delta})^{-1}$ лежат в V. Тогда

$$\begin{gathered}\rho_{\Pi}(a_1, \ldots, a_{n-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}) < \rho_{\Pi}(a_1, \ldots, a_{n-m}, b_1 a_2, \ldots, a_{n-m}) + \\ + \rho_{\Pi}(b_1 a_2, \ldots, a_{n-m}, b_1 b_2 a_3, \ldots, a_{n-m}) + \cdots + \\ + \rho_{\Pi}(b_1, \ldots, b_{n-m-1} a_{n-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}) = \\ = A_1 + \cdots + A_{n-m}.\end{gathered}$$

Но $A_1 < C_1 \varepsilon^{\delta} < H_1$, значит, $b_1 a_2, \ldots, a_{n-m} \in V$,

$$\begin{gathered}A_2 = \rho_{\Pi}(b_1 a_2, \ldots, a_{n-m}, b_1 b_2 a_3, \ldots, a_{n-m}) < \\ < D\rho_{\Pi}(a_2, \ldots, a_n b_1^{-1}, b_2 a_3, \ldots, a_n b_1^{-1}) = \\ = D\rho_{\Pi}(a_2, b_2) < KDQ^{-\delta}\varepsilon^{\delta}\end{gathered}$$

(что следует из (1)). Следовательно, $A_2 + A_1$ меньше H и $b_1 b_2 a_3, \ldots, a_{n-m} \in V$.

Поступая и далее таким же образом, мы убедимся, во-первых, что $b_1, \ldots, b_{n-m} \in V$ и, во-вторых, что

$$\rho_{\Pi}(a_1, \ldots, a_{n-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}) < K_1 \varepsilon^{\delta}(1 - DQ^{-\delta})^{-1}.$$

Теперь оценим $\rho_{\Lambda}(b_1, \ldots, b_{n-m}, c_1, \ldots, c_{n-m})$:

$$\begin{gathered}\rho_{\Lambda}(b_1, \ldots, b_{n-m}, c_1, \ldots, c_{n-m}) < \\ \rho_{\Lambda}(b_1, \ldots, b_{n-m}, b_1 b_2, \ldots, b_{n-m-1} c_{n-m}) + \\ + \rho_{\Lambda}(b_1 b_2, \ldots, b_{n-m+1} c_{n-m}, b_1, \ldots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} c_{n-m}) + \ldots \\ \cdots + \rho_{\Lambda}(b_1 c_2, \ldots, c_{n-m}, c_1, \ldots, c_{n-m}) = B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-m},\end{gathered}$$

$B_1 > K_1 \varepsilon^{\delta}$ (вследствие (1)), значит,

$$\rho_{\Lambda}(a_1, \ldots, a_{n-m}, c_1, \ldots, c_{n-m-1} b_{n-m}) < RK_1 \varepsilon^{\delta}(1 - DQ^{-1})^{-1} + B_1 < H,$$

то есть $c_1, \ldots, c_{n-m-1} b_{n-m} \in V$. Далее,

$$\begin{gathered}B_2 = \rho_{\Lambda}(b_1 b_2, \ldots, b_{n-m-1} c_{n-m}, b_1, \ldots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} \\ < D\,\rho_{\Lambda}(c_{n-m}^{-1} b_1, \ldots, b_{n-m-1} c_{n-m}^{-1}, b_1, \ldots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} \\ < DK_1 Q^{-\delta} \varepsilon^{\delta}.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\rho_{\Lambda}(a_1,\dots,a_{n-m},b_1,\dots,b_{n-m-2}c_{n-m-1}c_{n-m}) < RK_1\varepsilon^{\delta}(1-DQ^{-\delta})^{-1}+B_1+B_2<H,$$

то есть $b_1,\dots,b_{n-m-2}c_{n-m-1}c_{n-m}\in V$, и так далее. Окончательно мы получаем:

$$\rho_{\Lambda}(a_1,\dots,a_{n-m},c_1,\dots,c_{n-m})\leqslant H=K_1(R+1)(1-DQ^{-\delta})^{-1}\varepsilon^{\delta},$$

то есть в качестве искомого K_2 для малых ε можно взять $K_1(R+1)(1-DQ^{-\delta})^{-1}$. Значит, для случая $У$-каскада теорема доказана.

Для $У$-потока соответствующая лемма о периодических траекториях гласит следующее (см. [1]).

Лемма. Существуют P_1,P_2 такие, что для всякого ε можно найти F_3, что если $t>F_{\varepsilon}$, то из $d(T^tx,x)<\varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0, $t_0<|t_0-t|<P_1\varepsilon$, для которых $T^{t_0}x_0=x_0$ и $d(T^sx,T^sx_0)<P_2\varepsilon$ при $0<s\leqslant\min(t_0,t)$.

По аналогии со случаем $У$-каскада мы должны доказать существование такой окрестности U нуля в алгебре Ли группы Γ, что если ρ' — метрика в алгебре Ли,

$$A:[0,T]\to U,\quad B:[0,T]\to U,\quad C:[O,T]\to U$$

– три любых непрерывных отображения отрезка $[0,T]$ в U,

$$F_A:[0,T]\to\Gamma,\quad F_B:[0,T]\to\Gamma,\quad F_c:[0,T]\to\Gamma$$

– отображения того же отрезка в Γ такие, что $F_A(0)=F_B(0)=F_C(0)=e_{\Gamma}$ и $\lim\limits_{t\to0}t^{-1}\exp^{-1}(F_X(t_0)^{-1}F_X(t_0+t))=X(t_0)$, (здесь X — это A,B или C), то из условий $F_A(T)=e_{\Gamma}$ и

$$\rho'(A(t),B(t))<K_1Q^{\delta t}\varepsilon^{\delta},\quad \rho'(B(t),C(t))<K_1Q^{-\delta t}\varepsilon^{\delta}\quad(0\leqslant t\leqslant T)$$

следует, что $\rho_{\Lambda}(e_{\Gamma},F_c(T))<K_2\varepsilon^{\delta}$, где ρ_{Λ} — левоинвариантная метрика, порожденная метрикой в алгебре Ли, а K_2 — константа. Рассуждения, необходимые для доказательства этого факта, практически ничем не отличаются от тех, которые были только что проведены

для случая каскада. Сформулируем лишь новое определение U: это такая окрестность нуля в алгебре Ли, что

$$\rho_\Pi(g_1, g_2) < D^t \rho_\Pi(\exp(tu) g_1 \exp(-tu), \exp(tu) g_2 \exp(-tu)),$$
$$\rho_\Lambda(g_1, g_2) < D^t \rho_\Lambda(\exp(tu) g_1 \exp(-tu), \exp(tu) g_2 \exp(-tu)),$$

где g_1, g_2 — любые элементы Γ, а D, $1 < D < Q^\delta$, — некоторая константа (через Q обозначен «коэффициент расширения Y-потока на единицу длины»). После этого редукция к рассуждениям для каскада получается тривиальным применением метода сеток. Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай конечномерной группы Ли.

Теорема 3. Если группа G есть $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{R}$) и ее действие (класса C^2) на многообразии M определяет Y-каскад (Y-поток), имеющий всюду плотную траекторию, то для каждой конечномерной группы Ли Γ гёльдеровская функция $\bar{f} : M \to \Gamma$ ($\bar{f} : M \to \mathfrak{G}$) определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда условие $xg = x$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$.

Доказательство. Сформулируем известный результат.

Лемма 1. Для любой связной группы Ли Γ существует последовательность $\Gamma = \Gamma_1 \xrightarrow{i_1} \Gamma_2 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} \Gamma_r = KN$, где K — компактная группа, N — односвязная разрешимая группа, i_k — эпиморфизмы с коммутативными ядрами ([3, стр. 149, 150, 248, 257]).

Лемма 2. Если A — замкнутый коммутативный нормальный делитель группы C и для группы C/A теорема 3 верна, то она верна и для группы C.

Лемма 3. Теорема 3 верна для группы вида KN.

Рассуждения в доказательствах леммы 2 и леммы 3 весьма схожи. Мы рассмотрим полностью технически наименее громоздкий частный случай леммы 2, достаточный в случае, когда Γ односвязна.

Лемма 2′. Если утверждение теоремы 3 верно для групп Ли Γ_1 и Γ_2 и группа Γ_2 гладко действует автоморфизмами на Γ_1, то это утверждение верно и для полупрямого произведения $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ этих групп.

Доказательство. Обозначим для элемента $y \in \Gamma_2$ через $\varphi(y)$ автоморфизм группы Γ_1 — действие y. Тогда если x, $x' \in \Gamma_1$ и y, $y' \in \Gamma_2$,

то умножение в $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ будет следующим:

$$(x, y)(x', y') = (x \cdot \psi(y)(x'), y \cdot y').$$

Пусть функция $\bar{f} : M^l \to \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ имеет вид $\bar{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Из определения умножения в группе $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ и из условия теоремы 3 следует, что для любой m-периодической точки x_0 (то есть $T^m x_0 = x_0$, где T — действие образующей группы $G = \mathbb{Z}$) имеет место соотношение

$$\bar{f}(x_0) \cdot \bar{f}(Tx_0) \dots \bar{f}(T^{m-1}x_0) = e_{\Gamma_1 \cdot \Gamma_2}$$

и, значит,

$$f_2(x_0) \dots f(T^{m-1}x_0) = e_{\Gamma_2}.$$

Отсюда вытекает, что f_2 когомологична нулю в группе гёльдеровских отображений M в Γ. Следовательно, существует отображение $\varphi_2 : M \to \Gamma$ такое, что $f_2(x) = \varphi_2(x)^{-1}\varphi_2(Tx)$ с гёльдеровской функцией φ_2. Учитывая это, снова используем тот факт, что

$$\bar{f}(x_0) \cdot \bar{f}(Tx_0) \dots \bar{f}(T^{m-1}x_0) = e_{\Gamma_1} \cdot e_{\Gamma_2}.$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned}(f_1(x_0) \cdot \psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(Tx_0))(f_1(Tx_0)) \times \\ \times \psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(T^2x_0))(f_1(T^2x_0)) \cdots \\ \cdots \psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(T^{m-1}x_0))(f(T^{m-1}x_0))\end{aligned}$$

(по формуле умножения в полупрямом произведении), значит,

$$\begin{aligned}\psi(\varphi_2(x_0))^{-1}\big[\psi(\varphi_2(x_0))(f_1(x_0))\big]\big[\psi(\varphi_2(Tx_0))(f_1(Tx_0))\big] \\ \cdots \big[\psi(\varphi_2(T^{m-1}x_0))(f_1(T^m x_0))\big] = e_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\big[(\psi(\varphi_2(x_0))(f_1(x_0))\big] \cdots \big[\psi(\varphi_2(T^{m-1}x_0))(f_1(T^{m-1}x_0))\big] = e_{\Gamma_1}$$

для любой периодической точки x_0. Но функция

$$g(x) = \psi(\varphi_2(x))(f_1(x)$$

гёльдеровская и, стало быть, удовлетворяет условию когомологичности нулю в Γ_1. Поэтому для некоторой функции $\varphi_1(x)$ имеем:

$$g(x) = \psi(\varphi_2(x))(f_1(x)).$$

Теперь из определения нашего полупрямого произведения непосредственно можно получить, что для отображения $\varphi : M \to \Gamma$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$,

$$\bar{f}(x) = \varphi^{-1}(x)\varphi(Tx).$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Случай потока рассматривается аналогично.

Замечание 1. Доказательство леммы 2 протекает аналогично доказательству леммы $2'$.

Если мы обозначим C/A через P, то групповая структура может быть определена на $A \times P$ с помощью гомоморфизма $\psi : P \to \mathrm{Aut}(A)$ и системы факторов $f : P \times P \to A$ (f разрывна), $f(x, 1) = 0 = f(1, y)$,

$$\psi(x)(f(y, z)) + f(x, yz) = f(x, y) + f(xy, z) \tag{1}$$

(групповая операция в A записывается аддитивно; в P — мультипликативно). Тогда имеем:

$$(a_1, p_1) + (a_2, p_2) = (a_1 + \psi(p_1)(a_2) + f(p_1, p_2), p_1 p_2).$$

Предполагая теорему выполненной для группы P, мы проведем, пользуясь (1), формальные выкладки, аналогично лемме для односвязных групп, и получим, что для некоторой функции $g : M \to A$ суммы по периодам — нулевые, но она не гёльдеровская, потому что в нее уже будет входить разрывное (возможно) отображение f, задающее систему факторов. Однако если мы функцию $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ будем получать по $f = (f_1, f_2)$ стандартным методом продолжения с всюду плотной траектории, то достаточно показать следующее: для каждого куска траектории $T^m x, \ldots, T^n x$, для которого $\rho(T^m x, T^n x)$ мало, сумма $\sum_{m+1}^{m} g(T^i x)$ тоже мала при каком-нибудь выборе системы факторов в том же классе двумерных когомологий, что и f. Действительно, тогда вследствие предположенных коммутативности A и справедливости теоремы для P, влекущей существование непрерывной φ_2, будут близки

$$((f_1(x), f_2(x)) \ldots (f_1(T^m x), f_2(T^m x)))$$

и

$$((f_1(x), f_2(x)) \dots (f_1(T^n x), f_2(T^n x)))$$

(при этом, как и выше, надо использовать непрерывность φ_2 на M).

Но если мы возьмем y и z такие, что $T^{n-m}z = z$, y лежит в одном сжимающемся слое с z и в одном расширяющемся с $T^m x$, $\rho(y, z)$ и $\rho(T^n x, T^{n-m} y)$ малы (как обычно), то, конечно, можно, выбрать систему факторов так, чтобы наши обычные экспоненциальные оценки для $g(T^i y), g(T^i z), g(T^{m+i} x)$ (как в [1] или здесь в теореме 2) сохранялись, что и требовалось. В случае потока мы будем методом сеток заменять интегралы суммами и после этого варьировать выбор системы факторов. Доказательство леммы 3, конечно, тоньше, ввиду отсутствия в произведении KN структуры расширения, но компактность группы K спасает дело.

Разумеется, снова приходится пользоваться леммой о периодической аппроксимации и тем фактом, что разрешимая односвязная группа получается из прямой $\mathbb{R}$ несколькими полупрямыми умножениями на $\mathbb{R}$.

То, что алгебраические конструкции теоремы 3 работают, естественно: ведь верна «локальная» теорема 2.

Замечание 2. Аналогично работе [1] можно доказать, что во всех рассмотренных случаях когомологичности коцикла нулю гладкость отображения $\bar{f}$ влечет гладкость соответствующего отображения φ. Кроме того, если $\bar{f}$ — гёльдеровская, то φ — гёльдеровская и ее гёльдеровский модуль непрерывности не превосходит гёльдеровского модуля непрерывности $\bar{f}$, умноженного на некоторую положительную константу. И, наконец, требование гёльдеровости f можно заменить требованием $\int\limits_0 \frac{\omega(\rho)}{\rho} < \infty$,[3] где $\omega(\rho)$ — модуль непрерывности, и тогда φ будет непрерывным отображением M в Γ. Легко, тем не менее, показать что непрерывности функции f недостаточно.

§4. Топологические цепи Маркова и системы Смейла

Рассмотрим теперь аналог нашей теоремы для сдвига f в пространстве Ω_Π [4], где $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ — матрица переходов некоторой транзитивной топологической цепи Маркова, то есть Ω_Π — пространство последовательностей $\omega = \{\dots i_{-n} \dots i_0 \dots i_n \dots\}$, для которых $\pi_{i_s i_{s+1}} = 1$ при всех s. Транзитивность означает, что матрица Π^m для достаточно больших m имеет только строго положительные элементы.

[3] То есть $\int\limits_0^b \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, d\rho < \infty$ при некотором $b > 0$. (*Прим. ред.*)

Я. Г. Синай ввел пространство F_ρ функций на Ω_Π с «быстрым убыванием зависимости». Несколько обобщая его определение, мы будем через $F_{\rho,\Gamma}$ обозначать группу отображений из Ω_Π в Γ, где Γ — произвольная группа Ли, со следующим свойством: для любых x_1 и x_2

$$d(g(x_1),(g(x_2)) < C_g\rho^{K(x_1,x_2)}, \quad 0<\rho<1,$$

где C_g — константа, d — метрика в группе Γ, а $K(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in\Omega_\Pi$, есть наименьший модуль номера несовпадающих координат точек x_1 и x_2. Определение когомологичности прежнее.

Теорема 4. Если $g\in F_{\rho,\Gamma}$, то g когомологична нулю тогда и только тогда, когда для всякой точки $\omega_1\in\Omega_\Pi$, удовлетворяющей условию $f^n\omega_1=\omega_1$, верно соотношение $g(\omega_1)\dots g(f^{n-1}\omega_1)=e_\Gamma$, причем соответствующая функция h лежит в $F_{\rho,\Gamma}$ и сопоставление $g\mapsto h$ можно выбрать непрерывным в естественной метрике $F_{\rho,\Gamma}$.

Доказательство. Мы будем предполагать, что Γ имеет двусторонне инвариантную метрику d. Редукция задачи к этому случаю проведена в доказательстве предыдущей теоремы. Поскольку наша топологическая марковская цепь транзитивна, найдется такая точка $\omega\in\Omega_\Pi$, что ее траектория $\{f^n\omega\}$ всюду плотна в Ω_Π в слабой топологии. Зададим на ней функцию h : $h(f^n\omega)=g(f^{-1}\omega)\dots g(f^{n-1}\omega)$. Пусть $K(f^l\omega,f^j\omega)=K$. Тогда ω имеет вид $\{\dots i_{-n}\dots i_0\dots i_n\dots\}$, причем для $|r|\leqslant K$ выполняются равенства $i_{l+r}=i_{j+r}$. Отсюда и из определения топологической марковской цепи очевидным образом следует, что существует точка $\omega'\in\Omega_\Pi$, имеющая период $j-l$, координаты которой с номерами $-k+l+1\dots j+1$ совпадают с координатами ω (этими требованиями ω' определена однозначно). Из двусторонней инвариантности метрики d, определения ω' и принадлежности g группе F_ρ следует, что

$$\begin{aligned}&d(g(f^l\omega')\dots g(f^{j-1}\omega'),g(f^l\omega)\dots g(f^{j-1}\omega))\leqslant\\&\leqslant\sum_l^{j-1}d(g(f^r\omega),g(f^r\omega'))\leqslant 2C_g\rho^k(1+\rho+\dots+\rho^{[\frac{j-l}{2}]+1})\leqslant C'C_g\rho^K,\end{aligned}$$

где C' зависит только от ρ ($C'=\frac{2}{1-\rho}$). Значит, на множестве $\{f^n\omega\}_0^\infty$ функция h тоже принадлежит $F_{\rho,\Gamma}$. Теперь мы можем продолжить ее по непрерывности и получить искомую функцию $h\in F_{\rho,\Gamma}$ на всем множестве Ω_Π. Непрерывного сопоставления $g\mapsto h$ можно добиться следующим образом. Очевидно, что при фиксированном g функцию

h можно слева умножать на любую константу. Зафиксировав точку $\omega \in \Omega_\Pi$ и потребовав, чтобы $h(\omega) = e_\Gamma$, мы однозначно определим искомую функцию h для любой g. Теорема доказана.

Перейдем теперь к случаю нетранзитивной цепи Маркова $\Omega_{\Pi'}$. Разобьем множество состояний цепи на классы A_k попарно сообщающихся состояний. Обозначим через $W^s(\omega)$ ($W^u(\omega)$) множество таких точек $\omega_0 \in \Omega_\Pi$, что для некоторого l координаты точек ω и ω' с номерами, меньшими l (большими l), совпадают, через Ω_k — объединение траекторий, попадающих только в состояния класса A_k.

Теорема 5. Для того, чтобы функция $g \in F_{\rho,\Gamma}$ была когомологична нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) *g когомологична нулю на $\bigcup \Omega_i$;*

2) *соответствующие функции $h_i : \Omega_i \to \Gamma$ путем умножения слева на константы можно выбрать такими, чтобы из*

$$\omega \in W^u(\omega_1) \cap W^s(\omega_2) \quad (\omega_1 \in \Omega_{i_1},\ \omega_2 \in \Omega_{i_2})$$

следовало

$$g(f^{-n}x) \dots g(x) \dots g(f^n x) h_{i_2}^{-1}(f^n x_2)(f^{-n}x_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e_\Gamma,$$

причем сопоставление $g \mapsto h$ можно снова выбрать непрерывным в естественной метрике F_ρ.

Доказательство. Мы снова будем считать, что Γ обладает двусторонне инвариантной метрикой d, ибо снова редукция задачи к этому случаю проводится чисто формально почти аналогично теореме 3. Прежде всего для всякой точки $\omega \in \Omega_\Pi$ найдутся точки ω_1 и ω_2 из условия 2) теоремы 5. Для точки ω рассмотрим последовательность

$$h^{(n)}(\omega) = h_{i_1}(f^{-n}\omega_1) g(f^{-n}\omega) g(f^{-n+1}\omega) \dots g(f^{-1}\omega).$$

Из определения h_{i_1} мы получим, что

$$h^{(n+1)}(\omega) = h_{i_1}(f^{-n}\omega_1) g(f^{-n-1}\omega_1)^{-1} g(f^{-n-1}\omega) h_{i_1}^{-1}(f^{-n}\omega_1) h^{(n)}(\omega)$$

и

$$d(h^{(n+1)}(\omega), h^{(n)}(\omega)) = d(g(f^{-n-1}\omega_1), g(f^{-n-1}\omega))$$

вследствие двусторонней инвариантности метрики d. Но поскольку g принадлежит F_ρ и $\omega \in W^u(\omega_1)$, мы видим, что, начиная с некоторого N, последовательность $d(h^{(n+1)}(\omega), h^{(n)}(\omega))$ экспоненциально стремится к нулю, поэтому $h^{(n)}(\omega)$, как последовательность Коши, будет иметь предел $h(\omega)$.

Можно было бы определить $h(\omega)$ как $\lim\limits_{h\to\infty} h_*^{(n)}(\omega)$ где $h_*^{(n)}(\omega) = h_{i_2}(f^n(\omega_2)(g(\omega)\dots g(f^{n-1}\omega)^{-1})$ (здесь h_{i_2} и ω_2 — из условия 2) теоремы 5). Аналогично предыдущему, этот предел существует, и из того же условия 2) (согласованности) следует, что он равен значению h, полученному с помощью точки ω_1. Выбор точек ω_1 и ω_2 в условии 2) теоремы 5, вообще говоря, неоднозначен, что же касается выбора Ω_{i_1} и Ω_{i_2}, то он однозначен. Нам нужно доказать последнее и то, что $h(\omega)$, построенное выше, не зависит от выбора ω_1 и ω_2.

Лемма. Любая точка $\omega = \{\dots i_{-n}\dots i_0\dots i_n\dots\}$, не принадлежащая $\bigcup \Omega_k$, имеет вид $\{\dots i_{-n}\dots i_0\dots i_n\dots\} = \{B_1\dots B_n\}$, где последовательности символов B_1 — бесконечна слева, B_n — бесконечна справа, остальные — конечные последовательности, причем символы из B_s принадлежат множеству A_{k_s}.

Доказательство. Напомним, что A_k — это множества попарно сообщающихся состояний, поэтому между двумя элементами из одного A_k в представлении точки ω не может стоять элемент из другого A_k, откуда и следует утверждение леммы. Теперь видно, что для точки ω, в обозначениях леммы, $\Omega_{i_1} = \Omega_{k_n}$ а $\Omega_{i_2} = \Omega_{k_1}$ и, конечно, Ω_{i_1} и Ω_{i_2} определяются однозначно.

Докажем теперь независимость $h(\omega)$, например, от выбора точки ω_1. Для этого зафиксируем точку $\omega_2 \in \Omega_{i_2} \bigcap W^s(\omega)$. Из условия 2) теоремы 5, как мы знаем, следует, что независимо от точки ω_1 значение $h(\omega)$, полученное с помощью ω_1, равно значению $h(\omega)$, полученному с помощью ω_2, то есть не зависит от ω_1.

Теперь необходимо проверить принадлежность построенной нами функции h группе $F_{\rho,\Gamma}$. Пусть для точек ω' и ω'' верно $K(\omega',\omega'') = K$. Тогда ω' имеет вид $\{XAY\}$, а ω'' имеет вид $\{ZAT\}$, где A — слово длины $2K+1$, $A = \{i_{-k}\dots i_0\dots i_k\}$. Согласно определению марковской цепи, существует точка $\omega''' = \{XAT\}$. Значит, для точек ω'' и ω''' существует общая точка ω_1. С ее помощью мы и будем получать $h(\omega'')$ и $h(\omega''')$. Из определения $F_{\rho,\Gamma}$ и представления точек ω'' и ω''' следует, что $d(g(f^{-s}(\omega''), g(f^{-s}(\omega''')) \leqslant C\rho^{k+s}$. Поэтому из двусторонней инвариантности метрики d следует, что

$$d(h^{(n)}(\omega''), h^{(n)}(\omega''')) \leqslant C\sum_1^n \rho^{k+s}$$

и

$$d(h(\omega''), h(\omega''')) \leqslant C\frac{\rho}{1-\rho}\rho^k.$$

Аналогичная оценка верна и для $d(h(\omega'), h(\omega'''))$, но оба значения h получаются уже с помощью общей точки ω_2. Отсюда и следует, с помощью неравенства треугольника, что $h \in F_{\rho,\Gamma}$. Соответствие $g \mapsto h$ можно теперь установить аналогично теореме 4.

Гладкими аналогами нетранзитивных топологических цепей Маркова являются диффеоморфизмы Смейла, а для непрерывного времени — потоки Смейла. Пусть M — многообразие и f — диффеоморфизм M (соответственно, φ_t — поток на M). Мы будем считать, что f (соответственно, φ_t) удовлетворяет аксиоме A (A') Смейла (см. [6], обозначения — там же). Напомним аксиому A и теорему Смейла для диффеоморфизмов.

Аксиома A. а) *Неблуждающее множество Ω гиперболично.*
б) *Множество периодических точек плотно в Ω.*[4]

Мы введем еще аксиому L, не вдаваясь в вопрос о связи ее с аксиомой A и другими аксиомами Смейла. Пусть ρ — риманова метрика в M.

Аксиома L (соответственно, L'). Существуют такие константы $\gamma > 0, C_1, C_2, \lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, что если $\rho(x_1, x_2) < \gamma$, то существует такая точка x_3, что $\rho(x_3, x_i) < C_1\rho(x_1, x_2)$ для $i = 1, 2$ и

$$\rho(f^n x_1, f^n x_3) < C_2\lambda^n \rho(x_1, x_3),$$
$$\rho(f^{-n} x_2, f^{-n} x_3) < C_2\lambda^n \rho(x_2, x_3)$$

при $n > 0$ (соответственно,

$$\rho(\varphi^{t+t_0} x_1,\, \varphi^t x_3) < C_2\lambda^t \rho(x_1, x_3),$$
$$\rho(\varphi^{-t} x_2,\, \varphi^{-t} x_3) < C_2\lambda^t \rho(x_2, x_3),$$

при $t > 0$, $|t_0| < C_1\rho(x_1, x_2)$).

Эта аксиома введена нами для того, чтобы при изучении вопроса о гомологиях динамической системы f или, аналогично, φ_t можно

[4]Аксиома A′[6]. Все неподвижные точки потока φ_t — гиперболические. Множество неблуждающих точек Ω состоит из конечного множества F неподвижных точек и замыкания Λ объединения замкнутых орбит; F и Λ не пересекаются. Наконец, производная потока, рассматриваемая на ограничении касательного расслоения на Λ, $D\varphi_t : \mathrm{T}_\Lambda(M) \to \mathrm{T}_\Lambda(M)$, — гиперболическая. (*Прим. ред.*)

было провести параллель с рассуждениями о топологических марковских цепях. После того, как будет сформулирована теорема 6 для систем Смейла, читатель с легкостью увидит, что единственное место в доказательстве теоремы 5, которое трудно перевести на язык диффеоморфизмов или, аналогично, потоков на многообразии — это доказательство принадлежности функции h группе F_ρ (аналог гёльдеровости), а именно, построение по точкам $\omega' = \{XAY\}$ и $\omega'' = \{ZAT\}$ точки $\omega''' = \{XAT\}$. Но наша точка x_3 и есть аналог точки ω'''. Предположим, что $f\ (\varphi_t)$ удовлетворяет аксиомам $A\ (A')$ и $L\ (L')$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Для того, чтобы гёльдеровская функция $g : M \to \Gamma$ (соответственно, $g : M \to \mathfrak{G}$) была когомологична нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *g когомологична нулю на $\Omega = \bigcup\limits_i \Omega_i$.*

2) *Соответствующие функции $h_i : \Omega_i \to \Gamma$ путем умножения слева на константы можно выбрать такими, чтобы из*

$$x \in W^u(x_1) \cap W^s(x_2) \quad (x_1 \in \Omega_{i_1}, x_2 \in \Omega_{i_2})$$

следовало

$$g(f^{-n}x) \dots g(x) \dots g(f^n x) h_{i_2}^{-1}(f^n x_2) h_{i_1}(f^{-n}x_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e_\Gamma$$

(*соответственно,*[5]

$$H(g, -t, t) h_{i_1}(\varphi_{-t}x_1) h_{i_2}^{-1}(\varphi_t, x_2) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} e_\Gamma),$$

где $g(t) = g(\varphi_t x)$, причем существует такая конечная функция $C = C(M, f, \delta)$ (соответственно, $C = C(M, \varphi_t, \delta)$), что если модуль непрерывности ω_g функции g удовлетворяет неравенству

$$\omega_g(\rho) \leqslant K\rho^\delta,$$

то модуль непрерывности функции h допускает оценку

$$\omega_h(\rho) \leqslant K\rho^\delta C.$$

[5]Если $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{G}$ — некоторое отображение прямой в алгебру Ли группы Γ и отображение $p : \mathbb{R} \to \Gamma$ таково, что $g(t_0) = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}p(t_0)^{-1}p(t_0+t)$ при всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $g(a) = e_\Gamma$, то символом $H(g, a, b)$ автор обозначает «интеграл» $p(b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ (ср. краткое сообщение *А. Н. Лившиц. О гомологиях динамических систем.* УМН, **27**:3 (1972), 203–204) (*Прим. ред.*)

Если $g \in C^1(M)$, то и $h \in C^1(M)$. Если g — не гёльдеровская, но $\int\limits_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta} < \infty$, то теорема верна и $h \in C(M)$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 5.

Для удобства в усмотрении этой аналогии в теоремах 5 и 6 за понятиями, соответствующими друг другу, закреплены одинаковые обозначения. Единственность Ω_{i_1} и Ω_{i_2} для данной точки еще более очевидна, чем в теореме 5.

Замечание. Теоремы 4, 5 и 6 верны и в предположении, что Γ — хорошая группа (для потоков — хорошая группа Ли). Надо только потребовать, чтобы значения функции g лежали в некоторой окрестности единицы группы Γ (для потоков — нуля ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$). Метод доказательства сходен с методом доказательства теоремы 2.

§5. Приложения

Рассмотрим вопрос об интегральном инварианте (инвариантной мере с плотностью, большей нуля почти всюду из L^1 по гладкой мере).

Теорема 7. Пусть f (соответственно, φ_t) — топологически транзитивный У-каскад класса C^2 (соответственно, У-поток класса C^2). Для того, чтобы f (φ_t) имел интегральный инвариант, достаточно, чтобы для любой периодической точки x_0 выполнялось соотношение

$$g(x_0) \dots g(f^{n-1}x_0) = 1,$$

где $f^n x_0 = x_0$, g — якобиан f по некоторой гладкой мере (соответственно,

$$g_T(x_0) = 1,$$

где $\varphi_T x_0 = x_0$, g_t — якобиан φ_t).

Действительно, в этом случае g когомологична нулю в мультипликативной группе положительных вещественных чисел ($g_* = \frac{d \ln g}{dt}\big|_{t=0}$ в ее алгебре Ли), поэтому очевидно, что соответствующую функцию h можно взять в качестве плотности искомой инвариантной меры по исходной мере, причем эта плотность окажется гладкой.

Замечание. Оказывается, что условие теоремы 7 не только достаточно, но и необходимо для существования интегрального инварианта. Это следует из результатов Я. Г. Синая о предельных распределениях Гиббса для У-систем и леммы, являющейся усилением теоремы 0. Мы приведем эту лемму.

Лемма. Пусть группа G есть $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{R}$) и ее действие на римановом многообразии определяет топологически транзитивный У-каскад (У-поток), а U — произвольное открытое подмножество M. Для любой конечномерной группы Ли Γ гёльдеровская функция $\bar{f} : M \to \Gamma$ определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $xg = x$ при $x \in U$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$, $xg = x$ при $x \in U$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$.

Доказательство леммы требует малосущественных дополнений по сравнению с теоремой 3. Эти дополнения относятся, главным образом, к лемме о периодических траекториях (начало доказательства теоремы 2). Рассмотрим их.

Пусть ρ — метрика на нашем многообразии. Тогда существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что для любых двух точек A и B многообразия, для которых $\rho(A, B) < \gamma$, можно указать точку S, которая лежит в одном сжимающемся слое с A [2] и в одном расширяющемся слое с B [2], причем расстояния от S до A и от S до B в слоях меньше $C\rho(A, B)$. Мы обозначим S через $[A, B]$. В случае потока T^t существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что при $\rho(A, B) > \gamma$ существуют t_1, $|t_1| < C\rho(A, B)$, и точка S, лежащая в одном сжимающемся слое [2] с $T^{t_1}A$ и в одном расширяющемся слое с B, причем расстояния от S до $T^{t_1}A$ и от S до B меньше $C\rho(A, B)$. Обозначим S через $[A, B]$. И в случае потока, и в случае каскада точка $[A, B]$ определена при $\rho(A, B) < \gamma$. Сформулируем нашу новую лемму для каскада $\{\mathrm{T}^n\}$ (здесь она будет подлеммой).

Подлемма для каскада. Существует $K > 0$ такое, что для всяких ε, δ можно найти такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что если $n > N_{\varepsilon,\delta}$, то из $\rho(T^n x, x) < \varepsilon$ следует, что существует x_0 такая, что $T^n x_0 = x_0$ (или x_0' такая, что $T^n x_0' = x_0'$), $\rho(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l \leqslant n$ $(\rho(T^l x_0', T^l x) < K\varepsilon)$ и $\rho(x_0, [x, T^n x]) < \delta$ $(\rho(x_0', [T^n x, x]) < \delta)$.

Подлемма для потока. Существует K, такое, что для всяких ε, δ можно найти такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что если $t > N_{\varepsilon,\delta}$, то из $\rho(T^t x, x) < \varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0, $|t_0 - t| < K\varepsilon$, такие, что $T^{t_0} x_0 = x_0$ $(x_0'$ с теми же свойствами$)$, $\rho(T^s x, T^s x_0) < K\varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \min(t_0, t)$ и $\rho(x_0, [x, T^t x]) < \delta$ $(\rho(x_0', [T^t x, x]) < \delta)$.

Доказательство подлеммы для каскада. Пусть G^k и G^l — инвариантные, соответственно, сжимающиеся и расширяющиеся слоения. Мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из непрерывной зависимости слоев от начальных точек: существует такое $a > 0$, что если Π_0 и Π_1 — гладкие площадки, лежащие в слоях

G^k, такие, что любую точку $\omega_0 \in \Pi_0$ можно соединить путем, лежащим в слое G^l, длины, меньшей a, с точкой $\omega_1 \in \Pi_1$, то отображение $Q : \Pi_0 \to \Pi_1$, $Q(\omega_0) = \omega_1$, непрерывно и при малой непрерывной деформации этих площадок меняется непрерывно ([7, стр. 26]). Поэтому из компактности многообразия следует, что все Q, построенные таким образом, имеют модули непрерывности, не превосходящие одного $\delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), где в слоях берется индуцированная метрика.

Пусть теперь $\rho(x, T^n x) < \varepsilon$. Около точки x в сжимающемся слое опишем шар D радиуса $\varepsilon(C+1)$ (C определено перед формулировкой леммы). Если ε достаточно мало, а n достаточно велико, то, по свойству $У$, диаметр образа $T^n D$ достаточно мал для того, чтобы было определено отображение Q, переводящее $T^n D$ в сжимающийся слой, проходящий через точку x. Кроме того, при данном ε можно сделать n настолько большими, что $Q(T^n D)$ будет лежать в шаре радиуса ε с центром в точке $[x, T^n x]$ в сжимающемся слое, ибо $Q(T^n x) = [x, T^n x]$. Но шар радиуса ε с центром в точке $[x, T^n x]$ содержится в первоначальном шаре радиуса $(C+1)\varepsilon$ с центром в точке x. Следовательно, по теореме Брауэра, в круге радиуса $(C+1)\varepsilon$ с центром в точке x имеется неподвижная точка y отображения $Q \circ T^n$. Мы видим из определения y, что y и $T^n y$ лежат в одном расширяющемся слое и находятся друг от друга на расстоянии, меньшем, чем $C'\varepsilon$ в метрике этого слоя, где C' — некоторая константа. Но на этом слое T^n — сжимающее отображение, поэтому оно имеет неподвижную точку y', причем $\rho(y, y') < C''\lambda^{-n}\varepsilon$, где $|\lambda| < 1$ — константа. Теперь, используя наличие универсального модуля непрерывности отображений, мы получим, что существует такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что диаметр (в многообразии, а не в слое) множества $Q(T^n D)$ есть $\frac{\delta}{2}$ и $\rho(y, y') < \frac{\delta}{2}$ при $n > N_{\varepsilon,\delta}$; отсюда $\rho([x, T^n x], y') < \delta$ и, очевидно, $\rho(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l \leqslant n$ (для некоторого K). Теперь берем y' в качестве x_0 и аналогично ищем x'_0. Подлемма доказана.

Подлемма для потоков доказывается аналогично.

При доказательстве леммы заметим прежде всего, что наше открытое множество U можно считать всюду плотным и относительно инвариантным, поскольку если $f(x, g) = e_\Gamma$, то, кроме точки x, это верно и для всей траектории этой точки, поэтому вместо U можно взять $\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n U$, а оно уже всюду плотно, так как наша $У$-система имеет всюду плотную траекторию.

Рассмотрим случай каскада. Прежде всего, мы построим точку x' со всюду плотной траекторией $\{T^k x'\}_0^\infty$, такую, что если для натуральных m и n точка $[T^m x', T^n x']$ определена, то $[T^m x', T^n x'] \in U$.

Пусть $V_1, \ldots, V_n, \ldots$ — последовательность таких открытых множеств из M, что $\operatorname{diam} V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\bigcup_l^\infty M_n$ плотно в M при всех $l > 0$ (она, очевидно, существует). Мы будем пользоваться следующим простым утверждением. Если m и n — натуральные числа и если D — шар с центром в точке x, в котором определено $[T^m y, T^n y]$, то, во-первых, $f(y)$ непрерывно зависит от y и, во-вторых, $f(D)$ содержит некоторый шар D' с центром в точке $f(x)$. Утверждение это очевидным образом следует из трансверсальности слоений и непрерывной зависимости слоев от начальной точки. Теперь мы построим последовательность вложенных замкнутых шаров D_n ($D_n \subset D_{n-1} \subset M$) указанным далее способом. Именно, множество пар различных натуральных чисел (m, n) можно пересчитать, то есть указать функцию $(m(k), n(k))$ натурального аргумента k такую, что все значения ее различны и пробегают всевозможные пары различных натуральных чисел. Тогда, задавшись произвольным шаром D_0, мы будем строить дальнейшие шары индуктивно. Предположим, что шары $D_0, D_1 \ldots, D_{2k}$ построены. Могут быть два случая:

1) для любой точки $x \in D_{2k}$ имеем $\rho(T^{m(k+1)}x, T^{n(k+1)}x) \geqslant \gamma$. Тогда в качестве D_{2k+1} берем любой шар, лежащий в $\operatorname{Int} D_{2k}$;

2) для некоторой точки $x \in \operatorname{Int} D_{2k}$ имеем $\rho(T^{m(k+1)}x, T^{n(k+1)}x) < \gamma$. Тогда функция $f(y) = [T^{m(k+1)}y, T^{n(k+1)}y]$ определена в некотором шаре D' с центром в точке x, причем $f(D')$ содержит некоторый шар. Внутренность последнего имеет непустое пересечение с нашим всюду плотным открытым множеством U. Прообраз этого пересечения при отображении f открыт, так как f непрерывно, и содержит, следовательно, некоторый шар D'', который мы и возьмем в качестве D_{2k+1}. Пусть теперь шары $D_o, D_1, \ldots, D_{2k+1}$ построены. Тогда множество $\bigcup_1^\infty T^{-l}V_k$ открыто и всюду плотно, поэтому $\operatorname{Int} D_{2k+1} \cap \bigcup_1^\infty T^{-l}V_{k+1}$ содержит некоторый шар. Возьмем такой шар и обозначим его через D_{2k+2}. Таким образом, шары D_n построены. Последовательность D_n имеет непустое пересечение. Очевидно, что если $x' \in \bigcup_0^\infty D_n$, то траектория x' всюду плотна (из определения V_{2k} и шаров D_{2k}). Из определения же шаров D_{2k+1} не менее очевидным образом следует, что x' удовлетворяет требуемому условию.

Теперь, если учесть проведенную редукцию случая групп Ли к случаю группы с двусторонне инвариантной метрикой и другие ранее проведенные рассуждения, например, в теореме 2, мы увидим, что для достижения желаемого результата достаточно для любых двух точек $T^m x'$ и $T^n x'$ с $\rho(T^m x', T^n x') < \frac{\gamma}{C}$ найти третью $T^S x'$ с

$S > \max(m, n)$ такую, что

$$\rho(T^m x', T^S x') < C\rho(T^m x', T^n x'),$$
$$\rho(T^S x', T^n x') < C\rho(T^m x', T^n x'),$$

причем периодическая точка, соответствующая $T^m x'$ и $T^S x'$ (в смысле подлеммы), и периодическая точка, соответствующая $T^S x'$ и $T^n x'$, должна лежать в U. Действительно, $z = [T^m, x', T^n x'] \in U$ вместе с некоторым кругом с центром z радиуса r. Выберем S таким, чтобы $T^S x'$ было близко к z настолько, чтобы

$$\rho([T^m x', T^S x'], z) < \frac{r}{2}, \quad \rho([T^S x', T^n x'], z) < \frac{r}{2}.$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$S^{-m} > N_{\rho(T^m x', z) + \frac{r}{2}, \frac{r}{2}}, \quad S^{-n} > N_{\rho(T^n x', z) + \frac{r}{2}, \frac{r}{2}}.$$

Это можно сделать, вследствие плотности траектории точки x' во всем пространстве. Таким образом, точка $T^S x'$ удовлетворяет всем требуемым условиям, что и доказывает нашу лемму.

Замечание. Может возникнуть впечатление, что достаточно ограничиться еще меньшим запасом периодических траекторий, чем даже указано в последней лемме. Мы сейчас приведем, однако, пример гладкой функции на многообразии M, где действует транзитивный $У$-диффеоморфизм T, которая имеет нулевые суммы по периодическим траекториям, заполняющим всюду плотное множество в M, и тем не менее не когомологичной нулю в $C(M)$.

Пусть $T' : N \to N$ — топологически транзитивный $У$-диффеоморфизм класса C^2 многообразия N. В качестве T возьмем $T' \times T' : N \times N \to N \times N$ ($M = N \times N$). Разумеется, T топологически транзитивен (это следует, например, из теории марковских разбиений для $У$-диффеоморфизмов — «квадрат» транзитивной топологической цепи Маркова транзитивен). Если теперь f_1 — гладкая функция на N, когомологичная нулю, x, y — точки N такие, что $T'^n x = x$, $T'^m y = y$ с взаимно простыми m и n, то $T^{mn}(x, y) = (x, y)$, причем mn — наименьший период точки (x, y) многообразия M и среди точек $T^j(x, y)$, $1 \leqslant j \leqslant mn$, встретятся по одному разу все пары $(T'^k x, T'^l y)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m$. Поэтому для гладкой функции f на M, задаваемой формулой $f(x, y) = f_1(x) f_1(y)$, имеем

$$\sum_1^{mn} f(T^j(x, y)) = \sum_1^m f_1(T'^l y) \sum_1^n f_1(T'^k x) = 0,$$

так как f_1 когомологична нулю, непериодические точки (x, y) с $(m, n) = 1$ всюду плотны в M. Это тривиальным образом следует из леммы, формулируемой ниже.

Лемма. Если $T' : N \to N$ — топологически транзитивный У-диффеоморфизм, то для любого $\varepsilon > 0$ существует K такое, что при любом $k > K$ точки $x \in N$, удовлетворяющие условию ${T'}^k x = x$, образуют ε-сеть.

Лемма известна и вытекает, например, из теории марковских разбиений.

Построенная функция f и является искомым примером. То, что она не когомологична нулю, легко увидеть, рассматривая периодические траектории, лежащие на диагонали $\{(x, y) : x = y\}$, суммы по которым все, конечно, не могут быть равны нулю, если только f_1 — не тождественный нуль. Легко, разумеется, построить пример транзитивного У-потока и гладкой функции, не когомологичной нулю, но имеющей нулевые интегралы по всюду плотному множеству периодических траекторий, пользуясь предыдущим примером и известной конструкцией специального потока над построенным диффеоморфизмом по функции, тождественно равной 1. Вместо f при этом берется такая гладкая функция g, что для любой точки x из базы

$$\int_0^1 g(T^t x)dt = f(x).$$

Такая g, конечно, существует.

Перейдем теперь к расширениям и приводимости. Пусть $U(X, Y)$ — множество всех непрерывных отображений многообразия X в многообразие Y. Пусть группа G действует на X преобразованиями $T_g : X \to X$ $(g \in G)$, а Γ — на Y преобразованиями $S_\gamma : Y \to Y$ $(\gamma \in \Gamma)$. Пара $(X \times Y, \hat{T}_g)$ называется расширением динамической системы (X, T_g) с группой Γ, если при всех $g \in G, x \in X, y \in Y$ верно $\hat{T}_g(x, y) = (T_g x, S_{h(x,g)} y)$, где $h : X \times G \to \Gamma$ — такое отображение, что $\hat{T}_g$ определяет действие группы G на $X \times Y$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$h(T_{g_1} x, g_2)\, h(x, g_2) = h(x, g_1, g_2).$$

Расширения $(X \times Y, \hat{T}^1_g)$ и $(X \times Y, \hat{T}^2_g)$ называются изоморфными, если существует гомеоморфизм S: $X \times Y \to X \times Y$, такой, что $S(x, y) =$

$(x, S_{\varphi(x)}y)$ и $h_2(x,g) = \varphi(T_g x)\, h_1(x,g)\, \varphi^{-1}(x)$, где φ — непрерывное отображение X в Γ (см. [5]).

Рассмотрим важный частный случай. Пусть T^t — поток на многообразии X, определяемый системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — элемент касательного пространства в x.

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y} = A(x)y \\ \dot{x} = \omega(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = B(x)y \\ \dot{x} = \omega(x), \end{cases}$$

где $y : X \to C^k$ и $A : X \to GL(k, C)$; $B : X \to GL(k, C)$.

Две такие системы называются приводимыми одна к другой [5], если существует замена переменных $C : X \to GL(x, C)$, переводящая одну систему в другую, или, иначе, $A(x) = C^{-1}(x)B(x)C(x) - C^{-1}(x)\dot{C}(x)$. Разумеется, система дифференциальных уравнений является расширением динамической системы T^t с группой $GL(k, C)$, где $h(x,t) = Y_x(t)$ — решение соответствующей матричной системы с начальными условиями $Y(0) = E, x(0) = x$.

Приводимость двух систем друг к другу означает изоморфизм соответствующих расширений. Будем теперь считать, что G и Γ снабжены метрикой, а $h \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(X \times G)$.

Теорема 8. 1) *Если T^t — У-поток (T^k — У-каскад) на многообразии X и $\Gamma \subset \mathrm{Diff}\, Y$ хороша, то в Γ существует такая окрестность единицы U, что если $h(x,t) \in U$ при всех x и $t \in [0,1]$, то для изоморфности расширения тривиальному необходимо и достаточно, чтобы из $T^t x = x$ следовало $h(x,t) = e_\Gamma$.*

2) *Если Γ — конечномерная группа Ли, то в качестве U можно взять все Γ.*

3) *Система линейных дифференциальных уравнений приводима к тривиальной ($A = 0$) тогда и только тогда, когда она приводима к тривиальной на каждой периодической траектории.*

4) *Если $R \in \mathrm{Lip}^{a}(X \times \mathbb{R})$, то $\varphi \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(X)$; если $h \in C^1(X \times \mathbb{R})$, то $\varphi \in C^1(X)$, причем сопоставление $h \to \varphi$ можно выбрать непрерывным в метрике соответствующего пространства.*

Доказательство. Поскольку условие изоморфности расширения тривиальному означает, что $h(x,t)$ ($h(x,n)$) — коцикл, когомологичный нулю, теорема 8 является следствием теорем 2 и 3.

Аналогичным образом можно переформулировать и теоремы для потоков Смейла для применений к теории приводимости.

§6. Измеримые коэффициенты

Наряду с изложенным ранее существует другой подход к доказательству необходимого условия теоремы 7, а именно, применение нижеследующей теоремы автора. Доказательство этой теоремы, близкое к нижеприведенному, получил также, как стало известно автору, Д. В. Аносов.

Теорема 9. Пусть $f(\varphi_t)$ — транзитивный У-диффеоморфизм (У-поток) класса C^2 в M, имеющий инвариантную конечную меру μ, совместимую с гладкостью, $g\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\int\limits_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho} < \infty$. Тогда если для функции h, измеримой по μ, почти всюду по μ $g(x) = h(fx) - h(x)$ (при любом $T > 0$ почти всюду $\int\limits_0^T g(\varphi_t x) = h(\varphi_T x) - h(x)$), то существует непрерывная функция h', почти всюду совпадающая с h.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай каскада. Пусть $\mu(M) = 1$. Из теории функций вещественной переменной следует, что существует функция h'', $\mu\{x|h''(x) \neq h(x)\} = 0$, и замкнутое множество C, $\mu(C) = 1$ такие, что h'' непрерывна на C. Рассмотрим множество

$$M^C = \{x|\, x \in M : \frac{1}{h}\sum_0^n x_C(f^i x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(C),$$

$$\frac{1}{h}\sum_{-n}^0 x_C(f^i x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(C),$$

$$g(f^i x) = h''(f^{i+1}x) - h''(f^i x), \quad -\infty < i < +\infty\}.$$

Известно, что мера μ эргодична [7], значит, $\mu(M^C) = 1$. Для каждой точки x рассмотрим множества $A_R(x)$ и $B_R(x)$, где R — любое число, большее нуля, $A_R(x)$ — открытый круг в сжимающемся слое радиуса R в индуцированной с M метрике, $B_R(x)$ — открытый круг в расширяющемся слое радиуса R в индуцированной метрике. Пусть μ^C и μ^P — меры на сжимающемся и расширяющемся слоях, индуцированные римановым объемом, а ρ^C и ρ^P — метрики, индуцированные римановой метрикой. Построим последовательность множеств M_i : $M_0 = M^C$;

$$M_{n+1} = \{x\big|\, x \in M_n,\ \mu^C(A_R(x) \setminus M_n) = 0,\ \mu^P(B_R(x) \setminus M_n') = 0\}$$

*Под этим подразумевается, что она эквивалентна мере, индуцированной римановым объемом.

и $M_\infty = \cap_0^\infty M_n$. Из абсолютной непрерывности слоений (см. [7]) следует, что $\mu(M_\infty) = 1$ и для любого имеем:

$$\mu^C(A_R(x) \setminus M_\infty) = 0, \quad \mu^P(B_R(x) \setminus M_\infty) = 0.$$

Лемма. Пусть ρ — риманова метрика в M. Тогда найдутся $K > 0$, $\tau > 0$ такие, что если $\rho(X, Y) < \tau$, $X, Y \in M_\infty$, то найдутся точки $C \in M_\infty$, $D \in M_\infty$, $E \in M_\infty$ такие, что X и C лежат в одном сжимающемся слое, C и D — в одном расширяющемся, D и E — в одном сжимающемся, E и Y — одном расширяющемся слое и

$$\rho^C(X, C) < K\rho(X, Y), \quad \rho^P(C, D) < K\rho(X, Y),$$
$$\rho^C(D, E) < K\rho(X, Y), \quad \rho^P(E, Y) < K\rho(X, Y).$$

Доказательство. Выберем τ таким, чтобы $A_R(x) \cap B_R(Y) \neq \varnothing$, если $\rho(X, Y) < \tau$. Это можно сделать вследствие трансверсальности слоений и компактности M. Можно выбрать (по непрерывности сжимающегося и расширяющегося слоений и компактности M) константу $K > 0$ такую, что для некоторой точки $H \in A_R(X) \cap B_R(Y)$ (если R с самого начала достаточно мало, то H единственна) имеем:

$$\rho^C(X, H) < K\rho(X, Y), \quad \rho^P(Y, H) < K\rho(X, Y).$$

Если теперь в достаточно малой окрестности точки H зафиксировать в $A_R(X)$ точку C из M_∞, то выбором точки E в этой окрестности из $M_\infty \cap B_R(Y)$ мы однозначно можем определить D с помощью канонического изоморфизма расширяющихся слоев [4]. Поскольку канонический изоморфизм абсолютно непрерывен [4] и по определению M_∞ мы можем добиться того, чтобы и D и E лежали в M_∞, а также чтобы выполнялись наши неравенства. Лемма доказана.

Пусть точки U и V из M_∞ лежат в одном сжимающемся слое. Тогда

$$\begin{aligned} h''(U) - h''(V) &= h''(f^n U) - h''(f^n V) + g(V) + g(fV) + \dots \\ &\quad + g(f^n V) - (g(U) + g(fU) + \dots + g(f^n U)) = \\ &= h''(f^n U) - h''(f^n V) + g(V) - g(U) + (g(fV) - g(fU)) + \dots \\ &\quad \dots + (g(f^n V) - g(f^n U)). \end{aligned}$$

Расстояния $\rho(f^nU, f^nV)$ убывают как геометрическая прогрессия, по свойству Y, а так как функция g обладает свойством Дини $\big(\int\limits_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho} < \infty$, то

$$\sum_0^\infty (g(f^nV) - g(f^nU)) < P(\rho(U,V)) < +\infty,$$

где $P(z) \to 0$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}$. Поэтому, если быть уверенным в том, что найдется бесконечная последовательность $n_k < \infty$ такая, что $h''(f^{n_k}U) - h''(f^{n_k}V) \to 0$ при $n_k \to \infty$, то будет очевидным, что

$$h''(U) - h''(V) < P(\rho(U,V)).$$

Но n_k существует по определению M_∞: ведь $M_\infty \subset M^C$ и $\mu(C) > \frac{1}{2}$. По определению M^C видно также, что можно было считать, что U и V лежат в одном расширяющемся слое. Применяя теперь нашу лемму, мы видим, что h'' равномерно непрерывна на M_∞ с модулем непрерывности, меньшим чем $4KP(\rho)$. Но M_∞ всюду плотно в M ($\mu(M_\infty) = 1$), поэтому продолжим h'' на M и получим h'. Очевидно, всюду $g(x) = h'(fx) - h'(x)$. Случай каскадов рассмотрен.

Переходим к случаю потока φ_t. Представляются две возможности [7]. Первая — в спектре потока есть дискретная компонента и он специальный над транзитивным Y-диффеоморфизмом f' на многообразии M'; вторая — диффеоморфизм $f = \varphi_1$ эргодичен. В обоих случаях найдутся замкнутое множество C, $\mu(C) > \frac{1}{2}$, и функция h'', непрерывная на C и почти всюду равная h, такие, что если

$$M^C = \Big\{x |\, x \in M : \frac{1}{n}\sum_0^n \chi_C(f^i x) \to \mu(C);$$

$$\frac{1}{n}\sum_{-n}^0 \chi_C(f^i x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(C);$$

$$\int_n^{n+1} g(\varphi_t x)dt = h''(\varphi_{n+1}x) - h''(\varphi_n x) \text{ при любом целом } n\Big\},$$

то $\mu(M^C) = 1$ (в случае специального потока берем C' в M' для f', а в качестве C берем $\bigcup\limits_{t=0}^1 \varphi_t C'$). Рассмотрим μ^m и ρ^m — естественные меры и метрики на траекториях (задаваемые временем) и для каждой

точки x множество $C_R(x) = \bigcup\limits_{-R}^{R} \varphi_t x$. Пусть

$$M_0 = M^C;$$
$$M_{n+1} = \Big\{ x |\, x \in M_n,\ \mu^C(A_R(x) \setminus M_n) = 0,$$
$$\mu^P(B_R(x) \setminus M_n) = 0,\ \ \mu^m(C_R(x) \setminus M_n) = 0 \Big\}$$
$$\text{и}\ \ M_\infty = \bigcap_0^\infty M_n.$$

Изменим также формулировку леммы.

Лемма. Пусть ρ — риманова метрика в M. Тогда найдутся $K > 0$, $\tau > 0$ такие, что если $X, Y \in M_\infty$, $\rho(X,Y) < \tau$, то найдутся точки $X' \in M_\infty$, $C \in M_\infty$, $D \in M_\infty$, $E \in M_\infty$ такие, что $X' = \varphi_t X$: $|t| < K\rho(X,Y)$, X' и C лежат в одном сжимающемся слое, C и D — в одном расширяющемся, D и E — в одном сжимающемся, E и Y — в одном расширяющемся и

$$\rho^C(X^P, C) < K\rho(X,Y), \quad \rho^P(C,D) < K\rho(X,Y),$$
$$\rho^C(D,E) < K\rho(X,Y), \quad \rho^P(E,Y) < K\rho(X,Y).$$

Доказательство леммы и дальнейшее доказательство теоремы проходят так же, как и в случае диффеоморфизма. Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 очевидно вытекает теорема 7: ведь если $g(g_t)$ — якобиан по $f(\varphi_t)$ отношению к риманову объему, то условие теоремы 9 выполнено для функции $\ln g\Big(\frac{d}{dt} \ln g_t\big|_{t=0}\Big)$.

Автор благодарит Д. В. Аносова за полезные замечания.

Литература

1. Лившиц А. Н., *Некоторые свойства гомологий У-систем.* Матем. заметки, **10**:5 (1971), 355–564.
2. Аносов Д. В., *О касательных полях трансверсальных слоений в У-системах.* Матем. заметки, **2**:5 (1967), 539–540.
3. *Теория алгебр Ли. Топология групп Ли*, М., ИИЛ, 1967.
4. Синай Я. Г., *Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы.* Функциональный анализ, **2**: 1 (1968), 64–89.
5. Каток С. Б., *Линейные расширения динамических систем и условия приводимости.* Матем. заметки, **8**:4 (1970), 451–463.

6. Смейл С., *Дифференцируемые динамические системы.* УМН, **25**:1 (1970), 113–185.
7. Аносов Д. В., *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.* Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, XC. 1967.
8. Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, М., «Мир», 1965.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ, СОВМЕСТИМЫХ С ГЛАДКОСТЬЮ, ДЛЯ ТРАНЗИТИВНЫХ *У*-СИСТЕМ

А. Н. Лившиц, Я. Г. Синай

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27.III.1972)

В данной заметке доказываются две теоремы, дающие необходимое и достаточное условие существования интегрального инварианта, совместимого с гладкостью, для транзитивных *У*-систем в случае дискретного и непрерывного времени соответственно. Вначале рассматривается

Случай дискретного времени. Пусть T — транзитивный *У*-диффеоморфизм класса C^∞, действующий на C^∞-компактном многообразии M^n. По теореме Аносова [1] периодические траектории T всюду плотны.

Теорема 1. Для того чтобы на M^n существовала конечная инвариантная мера, абсолютно непрерывная относительно гладкой меры, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической точки x_0 периода n выполнялось условие $\det \widetilde{T}^n\big|_{x_0} = 1$, где $\widetilde{T}$ — дифференциал T.

Доказательство. Достаточность. Пусть dx — риманов объем на $M = M^n$, $f(x)$ — якобиан T в точке x по отношению к dx. Достаточность эквивалентна тому, что $f(x_0)\cdots f(T^{n-1}x_0) = 1$ для любой периодической точки x_0. Из теорем 1 и 2 из [2] следует, что в таком случае существует функция $\varphi(x) \in C^1$, для которой $f(x) = \varphi^{-1}(x)\varphi(Tx)$. Но тогда $d\mu = \varphi(x)dx$ будет дифференциалом инвариантной меры.

Доклады АН СССР, **207**:5 (1972), 1039–1041.

Необходимость. Допустим, что T обладает конечной инвариантной мерой μ, абсолютно непрерывной относительно риманова объема. В работе [3] для T были построены инвариантные меры $\mu^{(\mathrm{c})}, \mu^{(\mathrm{p})}$ со следующим характерным свойством: эти меры эргодичны и для любого измеримого разбиения на локальные сжимающиеся (расширяющиеся) слои условные меры задаются плотностями по мере, индуцированной римановым объемом. Из результатов [3, 4] следует, что в нашем случае $\mu^{(\mathrm{c})} = \mu^{(\mathrm{p})} = \mu$. Далее, как показано в [4], $\mu^{(\mathrm{c})} = \mu^{(\mathrm{p})}$ являются гиббсовскими мерами, построенными по функциям $\ln \lambda^{(\mathrm{c})}(x), -\ln \lambda^{(\mathrm{p})}(x)$, где $\ln \lambda^{(\mathrm{c})}(x), \ln \lambda^{(\mathrm{p})}(x)$ — объемные коэффициенты сжатия и растяжения соответственно, и мере с максимальной энтропией для T.

Возьмем образующее марковское разбиение ξ для T (см. [3, 4]). Пусть Π — его матрица пересечений, Ω_Π — соответствующее пространство символической динамики, $\varphi : \Omega_\Pi \to M$ – каноническое отображение, T'-сдвиг в Ω_Π. Положим $h_1(\omega) = \ln \lambda^{(\mathrm{c})}(\varphi(\omega))$, $h_2(\omega) = -\ln \lambda^{(\mathrm{p})}(\varphi(\omega))$. Тогда функции h_1, h_2 являются функциями с быстрым убыванием зависимости от далеких переменных, то есть принадлежат к введенным в [6] классам $F_{\rho,\varkappa}$ при $\varkappa = 1$. Из того, что $\mu^{(\mathrm{c})} = \mu^{(\mathrm{p})}$, вытекает, в силу результатов [6], что найдутся такая функция $u(\omega) \in F_{\rho',1}, \rho < \rho' < 1$, и константа K, при которых $h_1(\omega) = h_2(\omega) + u(T\omega) - u(\omega) + K$. Так как $\mu = \mu^{(\mathrm{c})} = \mu^{(\mathrm{p})}$, то энтропия диффеоморфизма T по отношению к μ равна (см. [4])

$$\int h_1(\omega) d\mu = \int h_2(\omega) du(\omega).$$

Отсюда следует, что $K = 0$, то есть

$$h_1(\omega) = h_2(\omega) + u(T\omega) - u(\omega).$$

Возьмем периодические точки x_0 такие, что точки Tx_0, x_0, $T^{-1}x_0$ не лежат на границе параллелограммов марковского разбиения.

Из свойств марковского разбиения следует тогда, что никакие их сдвиги также не лежат на границах параллелограммов марковского разбиения. В таком случае для каждой такой точки x_0 найдется единственная периодическая (относительно T') точка ω_0, для которой $\varphi(\omega_0) = x_0$. Но тогда, если n — период x_0, то

$$\begin{aligned}\ln \det \widetilde{T}^n_{x_0} &= \sum_{i=0}^{n-1} [\ln \lambda^{(\mathrm{c})}(T^i x_0) + \ln \lambda^{(\mathrm{p})}(T^i x_0)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h_1((T')^i \omega_0) - \sum_{i=0}^{n-1} h_2((T')^i \omega_0) = 0.\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь следующей леммой, являющейся усилением теоремы 1 из [2].

Лемма 1. Пусть T — транзитивный У-диффеоморфизм класса C^2, $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, U — открытое подмножество M^n. Для существования функции $g(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера и такой, что $f(x) = g(Tx) - g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической точки $x_0 \in U$ выполнялось соотношение $\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x_0) = 0$, где n — период точки x_0. Если $f \in C^1$, то $g \in C^1$.

Применение леммы к множеству U, являющемуся дополнением к объединению границ элементов разбиений ξ, $T\xi$, $T^{-1}\xi$ и к функции $f(x)$, равной якобиану, приводит к утверждению теоремы.

Случай непрерывного времени. Как и в случае дискретного времени, доказательства формулируемых далее утверждений основаны на теории марковских разбиений.

Теорема 2. Пусть на компактном C^∞-многообразии задан транзитивный У-поток $\{S_t\}$, обладающий марковским образующим разбиением. Для существования конечной инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно гладкой меры, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической точки x_0 ($S_\tau x_0 = x_0$) выполнялось соотношение $\det(\widetilde{S}_\tau)_{x_0} = 1$, где $\{\widetilde{S}_t\}$ — дифференциал потока $\{S_t\}$.

Доказательство. Достаточность вытекает, как и в случае дискретного времени, из теорем 1 и 2 из [2].

Необходимость доказывается в основном таким же образом, как и в случае дискретного времени. Здесь также существуют пространство символической динамики Ω_Π и функция F на нем с быстрым убыванием зависимости, специальный поток [5], построенный по сдвигу T' и функции F и каноническое отображение φ пространства специального потока в M^n (см. [6]). В качестве $\mu^{(\mathrm{c})}$ и $\mu^{(\mathrm{p})}$ на многообразии M^n мы возьмем гиббсовские меры, построенные по функциям

$$q^{(\mathrm{c})}(x) = \frac{d \ln \lambda_t^{(\mathrm{c})}(x)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad q^{(\mathrm{p})}(x) = \frac{d \ln \lambda_t^{(\mathrm{p})}(x)}{dt}\Big|_{t=0},$$

где $\lambda_t^{(\mathrm{c})}(x), \lambda_t^{(\mathrm{p})}(x)$ — якобиан S_t по мере на слое. Считая что Ω_Π естественным образом вложено в пространство специального потока, рас-

смотрим функции $g_1, g_2 : \Omega_\Pi \to \mathbb{R}$:

$$g_1(\omega) = \int_0^{F(\omega)} q^{(\mathrm{c})}(S_t\varphi(\omega))dt, \quad g_2(\omega) = \int_0^{F(\omega)} q^{(\mathrm{p})}(S_t\varphi(\omega))dt.$$

Как и в случае диффеоморфизма (см. [6]),

$$g_1(\omega) - g_2(\omega) = u(T'\omega) - u(\omega) + \mathrm{const},$$

причем const, как и в случае дискретного времени, равна нулю. Для любой точки $\omega_0 \in \Omega_\Pi$, такой что $(T')^l\omega_0 = \omega_0$, имеем:

$$\sum_1^l g_1(T^i\omega_0) = \sum_{i=1}^l g_2(T^i\omega_0),$$

но, очевидно, что тогда

$$1 = \exp\Big(\sum_1^l g_1((T')^i\omega_0) - \sum_1^l g_2((T')^i\omega_0)\Big) = \det \widetilde{S}^{\sum_i F((T')^i\omega_0)}_{\varphi(\omega_0)}.$$

Таким образом, аналогично случаю диффеоморфизма, утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. Пусть $\{S_t\}$ — транзитивный У-поток на многообразии M^n; $f : M^n \to \mathbb{R}$ — гёльдеровская функция, U — произвольное открытое множество в M^n.

Тогда для существования гёльдеровской дифференцируемой в силу системы функции g такой, что $f(x) = \frac{d}{dt}g(S_tx)\big|_{t=0}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0 \in U$ такой, что $S_\tau x_0 = x_0$, выполнялось соотношение $\int_0^\tau f(S_tx)dt = 0$. Если $f \in C^1$, то $g \in C^1$.

Как сообщил недавно Р. Боуэн [7], им построены марковские разбиения для произвольных транзитивных У-потоков.

Литература

1. Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **90** (1967).
2. А. Н. Лившиц, Матем. заметки, **10**:5 (1971), 555-564.
3. Я. Г. Синай, Функцион. анализ и его приложения, **2**:1 (1968), 64–89.
4. Я. Г. Синай, Изв. АН СССР, сер. матем., **30**:1 (1966), 15–68.
5. В. А. Рохлин, УМН, **4**:2 (1949), 57-128.
6. Я. Г. Синай, УМН, **27**:4 (1972), 21–64.
7. R. Bowen, Preprint, 1972.[6]

[6] R. Bowen. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms.* Amer. J. Math. **92** (1970), 725–747 — *Прим. ред.*

ОБРАЗУЮЩИЕ АВТОМОРФИЗМОВ С КОНЕЧНОЙ ЭНТРОПИЕЙ

Пусть T — метрический автоморфизм пространства Лебега (X, μ). Разбиение $\xi = \{A_n\}_1^l$ $1 \leqslant l \leqslant \infty$, пространства X на измеримые множества A_n называется образующей (l-членной), если $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^k \xi = \varepsilon$, где ε — разбиение на точки по модулю 0. Если $l = +\infty$, то образующая называется счетной.

В [1] В. А. Рохлин доказал, что всякий апериодический автоморфизм с конечной энтропией имеет образующую с конечной энтропией. Недавно Кригер [2], используя работу Заславского [3], установил, что эргодический автоморфизм T с конечной энтропией h имеет конечную образующую, и привел оценку для числа элементов в ней: минимальное число злементов $\Delta(T) \leqslant 2^h + 1$. Однако при выводе последней оценки используется следующее утверждение [2, лемма на стр. 464]: если T имеет образующую $\xi = \{A_n\}_1^l$ и $\mu(A_1) > \mu(A_2) + 2\mu(A_3)$, то T имеет образующую из $l-1$ элемента. Не совсем ясно, как согласовать с этим утверждением пример автоморфизма Бернулли с l состояниями и вероятностями

$$p_1 = \frac{6}{5(l-1)} + \varepsilon, \quad p_2 = \frac{2}{5(l-1)}, \quad p_3 = p_2 - \varepsilon,$$
$$p_4 = \ldots = p_l = \frac{1}{l-1},$$

имеющего при малых ε энтропию, большую $\lg_2(l-1)$. В этой заметке мы приводим следствие результатов [3] в нужной для дальнейшего форме (теорема 1), даем новое доказательство аппроксимационной теоремы Кригера и теоремы Кригера о существовании конечной образующей (теорема 2). Наконец, в теореме 3 дается оценка $\Delta(T) < 2^h + 2$.

Вестник Ленинградского университета, 1973, № **1**, 32-36.

Вопрос об оценке $\Delta(T) \leqslant 2^h + 1$, по-видимому, следует считать открытым. Автор благодарит участников семинара ЛГУ по эргодической теории, обсуждавших эту работу.

Теорема 1. Пусть T — эргодический автоморфизм пространства Лебега (M, μ) со счетной образующей $\xi = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mu(A_n) = p_n$ (среди p_n могут быть и нули). Если существует последовательность целых чисел w_i $(i \geqslant 1)$ таких, что

1) $w_i > 0$, если $p_i > 0$ и хоть одно $w_i > 1$;

2) $p_0 > \sum\limits_{1}^{\infty}(w_i - 1)p_i$;

3) для некоторого натурального m $\sum\limits_{i \,|\, w_i > 1} (m-1)^{1-w_i} \leqslant 1$, то T имеет образующую с числом элементов $m + \operatorname{ord}\{i \,|\, w_i = 1\}$.

Доказательство. Мы будем пользоваться теоремой А. Х. Заславского [3] об образующих. Для наших целей формулировка этой теоремы несколько расширена. Приведем ее без доказательства.

Теорема. Пусть T — эргодический автоморфизм пространства Лебега (M, μ) со счетной образующей $\xi = \{A_n\}_0^{\infty}$; $\mu(A_n) = p_n$ (среди p_n могут быть и нули). Пусть существуют последовательность s_j $(j \geqslant 1)$ натуральных чисел, алфавит $Z = \{a_1, ..., a_l\}$, $l < +\infty$, и последовательность слов $B_j = \{u_1^j \dots u_{s_j}^j\}$ длины s_j, удовлетворяющих нижеприведенным условиям C и D:

C. Если для каких-нибудь j_1, j_2 и целого k верно побуквенно

$$u_k^{j_1} \dots u_{k+s_{j_2}-1}^{j_1} = u_1^{j_2} \dots u_{s_{j_2}}^{j_2},$$

то $k = 1$ и $j_1 = j_2$ (никакое слово не есть часть другого).

D. Если для каких-нибудь j_1, j_2, и k верно побуквенно $u_1^{j_1} \dots u_k^{j_1} = u_{s_{j_2}-k+1}^{j_2} \dots u_{s_{j_2}}^{j_2}$, то $k = s_{j_1}$ и $j_1 = j_2$ (начало любого слова не есть конец какого-либо слова). Тогда, если $p_0 > \sum\limits_{1}^{\infty}(s_j - 1)p_j$, T имеет образующую из l элементов.

В [3] ξ предполагалось конечным.

В качестве l возьмем теперь $m + \operatorname{ord}\{j \,|\, w_j = 1\}$. Рассмотрим алфавит $Z = \{a_1, ..., a_l\}$. Мы покажем, что можно построить набор слов из алфавита Z, удовлетворяющих условиям C и D, с w_j в качестве s_j. Всем j, для которых $w_j = 1$, сопоставим однобуквенные слова

$a_1, \ldots, a_{\mathrm{ord}\{j \mid w_j=1\}}$, для остальных же слов будут использованы буквы $a_{\mathrm{ord}\{j \mid w_j=1\}+1}, \ldots, a_l$, причем в каждом из них буква a_l употребляется исключительно в роли первой буквы. При таком построении условие C автоматически выполняется. Возможность же провести это построение так, чтобы еще и выполнялось условие D, эквивалентна, как легко увидеть, возможности построить из букв $a_{l-n_i+1}, \ldots, a_{l-1}$ слова, отвечающие всем $j : w_j > 1$ с длинами $w_j - 1$, такие, что никакое из них не есть начало другого, что, в свою очередь, эквивалентно [4, стр. 22] условию 3). Тем самым выполнены условия теоремы Заславского и теорема 1 доказана.

Сформулируем теперь теорему существования.

Теорема 2. Всякий эргодический автоморфизм пространства Лебега (X, μ) с конечной энтропией имеет конечную образующую.

Доказательство. Из результата В. А. Рохлина следует, что наш автоморфизм имеет счетную образующую $\xi = \{A_n\}$; $\mu(A_n) = p_n$ (можно считать $p_n \geqslant p_{n+1}$) с конечной энтропией $h = \sum\limits_0^\infty -p_i \lg_2 p_i$. Тогда для некоторого k $p_j < 1/2$ при $j > k$ и $\sum\limits_{k+1}^\infty -p_i \lg_2 p_i < p_0$. Положим $w_i = 1$ при $i \leqslant k$ и $w_i = 1 + [-\lg_2 p_i] > 1 + \frac{1}{2}(-\lg_2 p_i)$, $i > k$. Тогда, положив $m = 5$, мы удовлетворим условию 3) теоремы 1 и, применяя ее, убедимся в существовании образующей из $k + 5$ элементов, что и доказывает теорему. Получим теперь оценку для числа элементов образующей. При этом будем пользоваться аппроксимационной теоремой Кригера ([2], стр. 460). Для простоты утверждение ее незначительно ослаблено.

Теорема. Пусть S — эргодический автоморфизм пространства Лебега (X, μ) с конечной энтропией h и образующей ξ из l элементов, $l < k \leqslant +\infty$. Тогда для любого набора чисел $\{p_i\}_1^l$; $p_i > 0$; $\sum\limits_1^l p_i = 1$; $\sum\limits_1^l -p_i \lg_2 p_i = h' > h$ и любого $\varepsilon > 0$, существуют числа $\{p'_l\}_1^l$: $|p_i - p'_i| < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и образующая ξ' — разбиение X на множества $A_i : 1 \leqslant i \leqslant l$; $\mu(A_i) = p'_i$.

Приведем план доказательства этой теоремы, которое представляет собой существенное усовершенствование доказательства Кригера. По условию теоремы можно считать, что X — пространство бесконечных двусторонних последовательностей $X = \{x = \{a_n\}_{n=-\infty}^\infty\}$ букв из

алфавита $Z = \{u_1, ..., u_l\}$, S — сдвиг в нем, μ — мера, инвариантная относительно S. Пусть $A = b_1 \dots b_k$, $b_i \in Z$; $1 \leqslant i \leqslant k$ — произвольное слово из алфавита Z.

Введем множества слов: $U_A = \{B = (c_1 ... c_r),\ 0 < r < \infty \,|\, \forall s : 0 < s < r\ \exists m : 0 < m < s < m + k \leqslant r$, такое что $(c_m c_{m+1} ... c_s ... c_{m+k}) = A\}$,

$$V_A = \{B' = (c'_n \dots c'_r); 0 < r' < \infty : \forall S : 0 < S < k;$$
$$(c'_{r'-k+s-1} \dots c'_r, b_1 \dots b_s) \neq A;$$
$$(b_1 \dots b_s, c'_1 \dots c'_{k-s}) \neq A;$$
$$\forall\ s', 0 \leqslant s' < s' + k \leqslant r' : (c'_{s'+1} \dots c'_{s+k}) \neq A\}.$$

Цилиндрические множества в X: $\tilde{A} = \{x \in X \,|\, x = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty} : (x_1 \dots x_k) = A\}$.

Опишем теперь построение ξ'. Для некоторого A, такого, что $\mu(\tilde{A}) > 0$, будет устроено взаимно однозначное отображение F: $v_A \to v_A$ и рассмотрено взаимно однозначное отображение T_F множества X_A последовательностей вида ... $A_{-n}\mathrm{B}_{-n} ... A_0\mathrm{B}_0 ... A_n\mathrm{B}_n$ ..., $A_i \in u_A$, $B_i \in v_A$, в себя:

$$T_F\{...A_{-n}\mathrm{B}_{-n} ... A_0\mathrm{B}_0 ... A_n\mathrm{B}_n ...\} =$$
$$\{\dots A_{-n}F(\mathrm{B}_{-n}) \dots A_0F(\mathrm{B}_0) \dots A_nF(\mathrm{B}_n) \dots\}.$$

Корректность этого определения очевидна.

Из эргодичности S и из того, что $\mu(\widetilde{A}) > 0$, следует, что $\mu(X_A) = 1$. Далее A и F будут выбраны таким образом, что, $|\mu(T_F^{-1}\tilde{u}_i) - p_i| < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant l$. В качестве ξ будет взято разбиение на $A_i : A_i = T_F^{-1}\tilde{u}_i$.

Очевидно, ξ — измеримое разбиение и образующая.

Опишем выбор A и F. Введем обозначения. Если Q — произвольное множество слов из некоторого алфавита, то Q^n — множество слов длины n из Q, а $|Q|^n$ — число слов из Q^n. Для произвольного набора чисел $q_1, \dots, q_l$, $q_i > 0$, $\sum\limits_1^l q_i = 1$, и $\delta > 0$ обозначим через $Q_{\{q_i\},\delta}$ множество слов b таких, что если n — длина слова B, а n_i — число вхождений буквы u_i в B, то $\left|\frac{n_i}{n} - q_i\right| < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant l$.

Основная часть доказательства заключена в лемме 1. Обозначим через $|C|$ длину любого слова C.

Лемма 1. Пусть $Z = \{u_1, ..., u_l\}$ — алфавит, q_l , δ фиксированы. Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется K, что при $k > K$ для любого слова

$A : |A| = k$ *при всех* $n > 2k$

$$\left|v_A \cap Q_{\{q_i\},\delta}\right|^n > 2^{(n-2k)(h''-\gamma)}, \quad \text{где} \quad h'' = -\sum_1^l q_i \ln q_i.$$

Лемма 2. В условиях теоремы для любого k *найдется слово* A_k : $|A_k| = k$, $0 < \mu(\tilde{A}_k) < 2^{-hk}$.

Следует из того, что из слов длины k минимум 2^{kh} словам A отвечают множества $\tilde{A}$ положительной меры (из определения энтропии).

Лемма 3. В условиях теоремы обозначим через A_δ *множество всех слов* A *таких, что* $\left|h(S)+\sum_1^l \frac{k_i}{|A|} \lg_2 \left(\frac{k_i}{|A|}\right)\right| < \delta$ (k_i — *число вхождений* u_i *в* A). *Тогда*

1) $|A_\delta|^n < 2^{(h(S)+\delta)n}$;

2) для любых $\gamma, \delta, \gamma > 0$, $h(S) + \delta < h'$, *существуют* $K, C > 0$, *что при* $k > K$

а) для всех слов $A : |A| = k$ *при* $n > Ck$

$$\left|V_A \cap Q_{\{p_i\},\frac{\varepsilon}{2}}\right|^n > |A_\delta|^n,$$

б) для любого слова A_k *(лемма 2)*

$$\mu\{x = \{\alpha_i\}_{-\infty}^{\infty} = \dots B\alpha_{-n_1} \dots \alpha_{n_2} C \dots; B, C \in U_{A_k};$$

$$\alpha_{-n_1} \dots \alpha_{n_2} \in V_{A_k} \cap A_\delta^{n_1+n_2+1}, n_1 + n_2 + 1 > Ck\} > 1 - \gamma.$$

Утверждение 1) получается из комбинаторных соображений, утверждение 2а) из утверждения 1) леммы 3 и леммы 1, утверждение 2б) — из леммы 2, эргодической теоремы Биркгофа и теоремы Шеннона–Макмиллана–Бреймана. Задавшись теперь произвольным δ, $\delta + h(S) < h'$, возьмем $\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$, выберем соответствующие K, C по лемме 3, некоторое A_k (2б) в качестве A, от F потребуем лишь чтобы

1) $F(V_A^n) = V_A^n$ при всех n,

2) $\left(V_A^n \cap Q^n_{\{p_i\},\frac{\varepsilon}{2}}\right) \supset F(A_\delta^n)$ при $n > Ck$.

Используя лемму 3 и зргодическую теорему, мы видим, что это построение возможно, и требования, предъявлявшиеся нами ранее к F и A, удовлетворяются. Теорема доказана.

Теорема 3. Эргодический автоморфизм T с конечной энтропией $h > 0$ имеет двустороннюю образующую с числом элементов, меньшим чем $2^h + 2$.

Доказательство. Пусть m — число элементов какой-либо конечной образующей (такая существует по теореме 2). Пусть $n = [2^h] + 1$, тогда по теореме Кригера для любого ε найдется образующая $\xi = \{A_i\}_1^m$; $|\mu(A_i) - \frac{1}{n}| < \varepsilon$ при $1 \leqslant i \leqslant n$; $\mu(A_i) < \varepsilon$, $i > n$.

Применим теперь лемму — следствие теоремы Заславского.

Лемма. Пусть образующая эргодического автоморфизма имеет элементы с мерами $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$, причем $p_1 > \sum_2^l (2k-1)p_k$. Тогда автоморфизм имеет образующую с $n - l + 2$ элементами.

Положим в нашем случае ε столь малым, чтобы $\mu(A_n) > \sum_{n+1}^{m} (2i - 2n + 1)\mu(A_i)$, и лемма немедленно даст нужный факт.

Литература

1. В. А. Рохлин. *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* УМН, **22**:5 (1967), 3–56.
2. W. Krieger. *On entropy and generators of measure preserving transformations.* — Trans. Amer. Math Soc, **149** (1970), 453–464.
3. А. Х. Заславский. *К проблеме изоморфизма стационарных процессов.* Теория вероятностей и ее применения, **9**:2 (1964), 291–298.
4. А. Файнштейн. *Основы теории информации.* М., ИЛ, 1960.

К ПРОБЛЕМЕ ИЗОМОРФИЗМА СХЕМ БЕРНУЛЛИ

Пусть $Z = \{a_j\}_1^m$ $(0 < m \leqslant \infty)$ — конечный или счетный алфавит. *Словом* в алфавите Z называется конечная последовательность букв из $Z : A = b_1 b_2 \dots b_n$, $b_i \in Z$; $i = 1, \dots, n$. *Длина* слова A — число букв в нем — обозначается символом $|\mathrm{A}|$. *Кодом над* Z назовем конечную или счетную последовательность слов $A = \{A_j\}$, $0 < j \leqslant n \leqslant \infty$. Код $A = \{A_j\}$ $(A_j = b_1^j \dots b_{k_j}^j)$ называется *S-кодом*, если выполнены два условия U и V.

U: Если для каких-либо j_1, j_2 и ω верно побуквенно

$$b_\omega^{j_1} \dots b_{\omega+k_{j_2}-1}^{j_1} = b_1^{j_2} \dots b_{k_{j_2}}^{j_2},$$

то $\omega = 1$ и $j_1 = j_2$ («никакое слово не есть часть другого».)

V: Если для каких-либо j_1, j_2 и ω верно побуквенно

$$b_1^{j_1} \dots b_\omega^{j_1} = b_{k_{j_2}-\omega+1}^{j_2} \dots b_{k_{j_2}}^{j_2},$$

то $\omega = k_{j_1}$ и $j_1 = j_2$ («начало любого слова не есть конец другого».)

С помощью S-кодов можно осуществлять кодирование (и декодирование) случайных последовательностей. Одновременно S-коды позволяют построить процедуру, реализующую изоморфизм двух схем (автоморфизмов) Бернулли. Примеры изоморфизма автоморфизмов Бернулли, в основе которого лежат идеи кодирования, имеются у Мешалкина [1], Блюма и Хэнсона [2], Заславского [3], Зайдмана (неопубликованная работа). Р. А. Зайдману принадлежит и название S-код. Независимо от А. Х. Заславского S-коды рассматривал по другому поводу В. И. Левенштейн [4], который называл их вполне регулярными.

Теория вероятностей и ее применения, **XIX**:2 (1974), 409–416.

Интересной проблемой является изучение условий на m и совокупность чисел k_j, позволяющих реализовать их в качестве, соответственно, объема алфавита и длин слов S-кода. С этой целью в настоящей работе проводится комбинаторное изучение S-кодов, которое применяется здесь к этой проблеме и к проблеме изоморфизма схем Бернулли.

Уместно сказать о том, что методы кодирования, близкие изучавшимся в данной работе, нашли применение в теории образующих. Именно, В. Кригер использовал метод, близкий методу работы [2], в сочетании с другими новыми идеями, доказывая свою известную теорему о минимальном числе элементов образующей эргодического автоморфизма с конечной энтропией.

Предположим, что Z — алфавит и $X_Z = \prod_{-\infty}^{\infty} Z_i$, $Z_i = Z$, — бесконечное в обе стороны произведение счетного числа Z, T — сдвиг влево на X_Z. Пусть P — мера на Z и μ_P — прямое произведение мер $P_i = P$ на Z_i. Тогда (X_Z, μ_P, T) называется *схемой Бернулли с состояниями Z и вероятностью P*, а T как преобразование (X_Z, μ_P), сохраняющее меру, — *автоморфизмом Бернулли*. Предположим, что $\{A_j\}_{j=1}^n$ — S-код в алфавите Z и $|A_j| = k_j$ – длины слов.

Всякое слово $A = b_1 \dots b_r$ в алфавите Z порождает цилиндрическое множество $\widetilde{\mathrm{A}}$ на X_Z, определяемое следующим образом: $\widetilde{A} = \{\{x_i\} \in X_Z : x_i = b_i, i = 1, \dots, r\}$. Тем самым, код $\{A_j\}$ порождает систему цилиндрических множеств $\{\widetilde{A}_j\}$.

Теорема 1. Пусть заданы, натуральные k_j, $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant \infty$, где не все k_j равны 1, а также числа q_j, $0 < q_j < 1$. Для существования алфавита Z, S-кода $\{A_j\}_1^n$ и меры P на Z, таких, что

$$|A_j| = k_j, \quad \mu_P \widetilde{A}_j = q_j,$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного s ряд $f(t) = 1 - t + \sum q_j t^{k_j}$ сходился на $[0, s]$ и выполнялось условие $f(s) = 0$.

Доказательство. Пусть сначала n конечно. Докажем необходимость.

Пусть $D_N = X_Z \setminus \bigcup_j \bigcup_{l=0}^{N-k_j} T^l \widetilde{A}_j$ — последовательность множеств. Будем подсчитывать их меры согласно известной формуле комбинаторики:

$$\mu\Big(\bigcup_i B_j\Big) = \sum_j \mu B_j - \sum_{j_1,j_2} \mu\big(B_{j_1} \bigcap B_{j_2}\big) + \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{j_1,\dots,j_r} \mu\big(B_{j_1} \bigcap \dots \bigcap B_{j_r}\big) + \cdots,$$

$$\mu_P(D_N) = 1 - \mu_P\Big(\bigcup_j \bigcup_{l=0}^{N-k_j} T^l \widetilde{A}_j\Big) = 1 - \sum_j (N - k_j + 1) q_j + \cdots + (-1)^v \sum_{j_1,\dots,j_v;\, l_1,\dots,l_v} \mu_P\Big(\bigcap_{r=1}^{v} T^{l_r} \widetilde{A}_{j_r}\Big) + \cdots$$

Абсолютная величина каждого члена нашей альтернированной суммы может быть для удобства интерпретирована следующим образом. Пусть в последовательности из N букв алфавита Z, начиная с номеров l_r, расположены слова A_{j_r}, где $1 \leqslant r \leqslant v$. Мы должны просуммировать вероятности всех таких событий по всевозможным наборам j_r и l_r. Однако, по определению S-кода, слова A_{j_r} не могут налегать одно на другое. Поэтому если рассматривать все те наборы A_{j_r}, в которые каждое A_j входит с кратностью a_j ($\sum_1^n a_j = v$), то вклад вероятностей их различных расположений среди N букв в нашу сумму будет равен

$$\prod_j q_j^{a_j}\, C^v_{N-a_1(k_1-1)-\dots-a_n(k_n-1)} C_v^{a_1,\dots,a_n},$$

где первое число сочетаний есть, как нетрудно усмотреть, наибольшее число попарно неэквивалентных способов расположения наших v слов в последовательности из N букв, причем два расположения считаются эквивалентными, если для любого i, $0 \leqslant i < v$, совпадают расстояния (количества букв, не попавших в наши v слов) между последней буквой i-го слова и первой буквой $(i+1)$-го слова одного расположения и между последней буквой i-го и первой буквой $(i+1)$-го слов другого расположения, а также совпадают числа букв, предшествующих первым словам расположений. Второе число сочетаний есть число различных расположений наших v слов в фиксированном классе эквивалентности. Но наше произведение можно записать как

$$C^{a_1,\dots,a_n}_{N-a_1(k_1-1)-\dots-a_n(k_n-1)} \prod_j q_j^{a_j},$$

и, наконец,

$$\mu_P(D_N) = \sum_{\{a_j\}} C^{a_1,\dots,a_n}_{N-a_1(k_1-1)-\dots-a_n(k_n-1)} \prod (-q_j)^{a_j},$$

где суммирование идет по всем наборам целочисленных a_j. Из свойств сочетаний следует рекуррентное соотношение

$$C_y^{x_1,\dots,x_n} = C_{y-1}^{x_1,\dots,x_n} + \sum_{i=1}^{n} C_{y-1}^{x_v,\dots,x_i-1,\dots,x_n},$$

откуда

$$\mu_P\Big(D_{N+\sum\limits_1^n k_j}\Big) = \mu_P\Big(D_{N-1+\sum\limits_1^n k_j}\Big) + \sum_j (-q_j)\mu_P\Big(D_{N-k_j+\sum\limits_1^n k_i}\Big).$$

Для того, чтобы найти общий вид последовательности, удовлетворяющей такому соотношению, надо найти ненулевые корни $Z_1, \dots, Z_{\max k_j}$ полинома

$$Z^{\sum\limits_1^n k_j} - Z^{\sum\limits_1^n k_j - 1} + \sum_j q_j Z^{\sum\limits_1^n k_i - k_j},$$

и тогда

$$\mu_P(D_N) = \sum B_{ij} N^i Z_j^N,$$

где B_{ij} — некоторые константы (см. [5, стр. 37]). Среди Z_j выберем те, которые имеют наибольший модуль, а среди последних — те, которые имеют ненулевые коэффициенты B_{ij} с наибольшим i. Докажем, что среди выбранных нами чисел Z_j в этом случае будет вещественное положительное. Переобозначим выбранные Z_j через $u_1, \dots, u_r$. Рассмотрим часть разложения для $\mu_P(D_N)$: $F_N = N^i \sum\limits_1^r S_v u_v^N$, где i есть выбранное наибольшее, $S_v = B_{ij}$, где j — номер нашего u_v среди Z_l. Докажем, что F_N вещественно и неотрицательно. Действительно, пусть $u > 0$ есть общий модуль u_v. Тогда

$$F_N = u^N N^i \sum_1^r S_v \Big(\frac{u_v}{u}\Big)^N = u^N N^i h_N,$$

где h_N — почти периодическая последовательность (см. [6, стр. 208]). Если предположить, что хотя бы для одного значения N соответствующее $h_N = h$ будет иметь ненулевой аргумент, то, вследствие почти периодичности, для бесконечной подпоследовательности N_l числа h_{N_l} будут лежать в окрестности h, отделенной от положительного луча вещественной прямой. Но в этом случае, по самому определению u_v,

$$\mu_P\big(D_{N_l}\big) = u^{N_l} N_l^i h_{N_l} + o\big(u^{N_l} N_l^i h_{N_l}\big);$$

значит, $\mu_P(D_{N_l})$ имеет ненулевой аргумент, чего, конечно, не может быть. Итак, $F_N \geqslant 0$. Отсюда последует, что одно из u_v вещественно и положительно, что проверяется с помощью утверждения, которое мы сейчас докажем в несколько более общей форме, чем нам это здесь необходимо.

Лемма. Пусть σ — комплексная дискретная мера ограниченной вариации на единичной окружности, $a_0, \dots, a_l, \dots$ — ее коэффициенты Фурье с неотрицательными номерами. Если все $a_l \geqslant 0$, то либо все $a_l = 0$ и $\sigma = 0$, либо σ содержит ненулевую нагрузку в единице окружности.

Доказательство. Пусть σ сосредоточена в точках $z_1, z_2, \dots$ и нагрузка в z_i равна b_i, $\sum |b_i| < \infty$; тогда $a_i = \sum b_i z_i^l$. Если все $z_j \neq 1$, то чезаровские средние $|l^{-1}(z_i + \dots + z_i^l)|$ стремятся к нулю при $l \to \infty$, так как

$$|l^{-1}(z_i + \dots + z_i^l)| \to 0; \quad \sum |b_i| < \infty.$$

Докажем, что в условиях леммы это может быть лишь при $\sigma = 0$. Действительно, a_l есть почти периодическая последовательность, и потому она либо вся нулевая, либо хотя бы один ее член ненулевой, и тогда, вследствие неотрицательности и почти периодичности, ее чезаровское среднее строго больше нуля. Следовательно, $\sigma \neq 0$ может быть, лишь если $z_i = 1$ для некоторого i. Лемма доказана.

Применяя лемму к той мере, с помощью которой строится почти периодическая последовательность h_N, имеем $u_v/u = 1$ для некоторого v $(1 \leqslant v \leqslant r)$, и, значит, полином

$$Z^{\sum_1^n k_j} - Z^{\sum_1^n k_j - 1} + \sum_1^n q_j Z^{\sum_1^n k_i - k_j}$$

имеет вещественный положительный нуль. Положив $1 = 1/u$, мы и получим необходимость при $n < \infty$.

Докажем теперь необходимость при $n = \infty$. Пусть $\{q_j\}_1^\infty$; $\{k_j\}_1^\infty$ — вероятности и длины слов нашего кода и $f_l(t) = 1 - t + \sum_1^l q_j t^{k_j}$. Очевидно, каждый из полиномов $f_l(t)$ имеет два корня $x_1^l > 0$ и $x_2^l > 0$, причем $f_l(t) < 0$ при $x_1^l < t < x_2^l$, $f_l(t) > 0$ при $t < x_1^l$ и $t > x_2^l$. Далее, $x_1^{l+1} > x_1^l$ и $x_2^{l+1} < x_2^l$, потому что $f_{l+1}(t) > f_l(t) > 0$ на $(0, x_1^l)$ и (x_2^l, ∞) и нули f_{l+1} тем самым — внутри (x_1^l, x_2^l). Пусть $s = \lim_{l\to\infty} x_1^l$,

тогда при $0 \leqslant t \leqslant s \quad f_{l+1}(t) \geqslant f_l(t)$ и $f_l(t) \leqslant 1$ при каждом l. Значит, $f(t)$ сходится на $[0, s]$. Далее, очевидно, что при $0 \leqslant t \leqslant 1 \quad f(t) \leqslant 0$. Но у ряда $f(t) = 1 - t + \sum q_j t^{k_j}$ скачок может быть только вверх, значит, $f(s) = 0$, что и доказывает требуемое.

Докажем достаточность. Пусть

$$Z = \{a_j\}_0^n \quad \text{и} \quad A_j = a_j \underbrace{a_0 \dots a_0}_{k_j - 1 \text{ раз}}.$$

В этом случае очевидно, что существование искомого распределения P на Z в точности эквивалентно нашему условию как при $n < \infty$, так и при $n = \infty$. Действительно, если положить $P(a_0) = 1/s$ и $P(a_j) = q_j s^{k_j - 1}$, то

$$\sum_0^n P(a_j) = \frac{1}{s} + \sum_1^n q_j s^{k_j - 1} = 1$$

по условию теоремы, и $\mu_P(\widetilde{A}_j) = q_j$, что и требовалось. Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть мы имеем алфавит $Z = \{a_i\}_1^n$ из n букв. От слов также потребуем, чтобы они имели n букв. Каково максимальное количество слов в таком S-коде?

Рассмотрим на алфавите Z распределение с вероятностями, равными $1/n$. Пусть $\{A_j\}_1^k$ — наш набор слов и $\mu_P(\widetilde{A}_j) = 1/n^n$. Необходимо, чтобы полином $1 - t + \frac{k}{n^n} t^n$ имел вещественный положительный корень. Легко видеть, что максимальным среди положительных (а не натуральных) k будет то, при котором полином $1 - t + \frac{k}{n^n} t^n$ имеет кратный вещественный положительный корень. Но это возможно лишь при $k = (n-1)^{n-1}$. Таким образом, мы получили с помощью теоремы 1 оценку сверху для числа слов в нашем S-коде. Она достигается. В самом деле, рассмотрим совокупность всех слов $A = a_1 a_{j_1} \dots a_{j_{n-1}}$, где $j_l \neq 1$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Это, очевидно, S-код с числом слов $(n-1)^{(n-1)}$.

В общем случае необходимое условие реализации S-кода, получаемое из теоремы 1 рассмотрением схемы Бернулли с равными вероятностями, таково.

Следствие. Для того, чтобы существовал S-код $A = \{A_j\}_1^n$, $|A_j| = k_j$, с элементами из алфавита $Z = \{a_j\}_1^m$, $0 < m < \infty$, необходимо, чтобы для некоторого положительного s ряд $f(t) = 1 - t + \sum_1^n \left(\frac{1}{m}\right)^{k_j} t^{k_j}$ сходился на $[0, s]$ и $f(s)$ равнялось нулю.

Это условие, по существу, доказано в работе В. И. Левенштейна [7].

Мы уже видели, что последнее условие близко к достаточному, но существует пример, показывающий, что оно не достаточно. Действительно, будем составлять S-коды, состоящие из семибуквенных слов над алфавитом $Z = \{a_1, a_2\}$. Из нашей теоремы следует, как легко сосчитать, что число слов в таком коде не больше 8. Однако проверка показывает, что эта оценка сверху не достигается и максимальное число слов в S-коде есть 7.

Мы рассмотрим теперь вопрос о применении S-кодов к проблеме изоморфизма сдвигов Бернулли. Будет использован метод кодирования, сходный с методом Мешалкина. Суть его состоит в следующем. Пусть имеется S-код $A = \{A_j\}$. Назовем его слова *словами первого рода*. Если *слова n-го рода*, построены, то слово B мы назовем *словом $(n+1)$-го рода* в том и только в том случае, когда оно имеет вид $B_1 A_j B_2$, где B_1 и B_2 — непустые слова, а слово $B_1 B_2$ — n-го рода. Например, из слов первого рода 01 и 002 можно построить слово третьего рода 00002102.

Пусть (X_Z, μ_P, T) — схема Бернулли и A — S-код в алфавите Z. Занумеруем как-либо слова всех родов $\{B_j\}$. Построим систему цилиндрических множеств $\{\widetilde{B}_j\}$. Мы скажем, что S-код покрывает схему (X_Z, μ_P, T), если почти каждая реализация нашей схемы есть двусторонняя последовательность, являющаяся конкатенацией[7] связных кусков — слов некоторого рода, или, что эквивалентно[8], если совокупности множеств $T^k \widetilde{B}_j$ при всех k, j образуют базис пространства (X_Z, μ_P) (то есть минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все множества этой совокупности, есть σ-алгебра всех измеримых множеств).

Докажем теперь теорему, которая, по-видимому, неявно использовалась, но нигде достаточно четко не формулировалась.

Теорема 2. Пусть $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ и $(X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$ — две схемы Бернулли и $A' = \{A_j\}_1^{n'}$ и $A'' = \{A''_j\}_1^{n''}$ — S-коды в алфавитах Z' и Z'' соответственно. Предположим, что

$$0 < n' = n'' = n \leqslant \infty, \quad |A'_j| = |A''_j|; \quad \mu_{P'}(\widetilde{A}'_j) = \mu_{P''}(\widetilde{A}''_j), \ j = 1, \dots, n.$$

Тогда

[7] В оригинале «объединением». (*Прим. ред.*)

[8] См. исправление этого утверждения в приведенном в конце статьи «письме в редакцию». (*Прим. ред.*)

(1) *если коды A' и A'' покрывают схемы*

$$(X_{Z'}, \mu_{P'}, T') \quad \text{и} \quad (X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$$

соответственно, то автоморфизмы T' и T'' изоморфны;

(2) *если код A' покрывает схему $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$, то T' и T'' изоморфны.*

Доказательство. 1. Из простых комбинаторных соображений [3] вытекает, что слова всех родов из одного алфавита и слова другого можно естественным образом привести во взаимно однозначное соответствие. При надлежащей нумерации $\{B'_j\}$ и $\{B''_j\}$ слов из обоих алфавитов можно считать, что слово B'_l соответствует слову B''_l. Обозначим через $\{B'^{(\prime)}_{j_l,m_l}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ двустороннюю последовательность — конкатенацию слов $B'^{(\prime)}_{j_l}$, начинающихся в этой последовательности с номеров m_l. В таком случае изоморфизм осуществляется следующим образом:

$$\{B'_{j_l,m_l}\}_{l=-\infty}^{\infty} \longleftrightarrow \{B''_{j_l,m_l}\}_{l=-\infty}^{\infty}.$$

То есть осуществляется взаимно-однозначное соответствие (кодирование-декодирование [3]) двусторонних последовательностей — конкатенаций слов некоторого рода. Такое определение корректно (то есть не зависит от способа представления последовательностей в виде $\{B'^{(\prime)}_{j_l,m_l}\}_{l=-\infty}^{\infty}$, что проверяется непосредственно). Это соответствие инвариантно относительно сдвига, сопоставляет, по предположению, множества полной меры в $X_{Z'}$ и $X_{Z''}$ и сохраняет меру на σ-алгебрах, порожденных совокупностями множеств $T'^{\,k}\widetilde{B}'_j$ и $T''^{\,k}\widetilde{B}''_j$. Поскольку последние совокупности суть базисы своих пространств с мерой, наше соответствие действительно является метрическим изоморфизмом. Можно дать другое, эквивалентное, определение этого изоморфизма как продолжения с базисов $\{T''^{\,k}\widetilde{B}''_j\}$ и $\{T'^{\,k}\widetilde{B}'_j\}$ соответствия $T'^{\,k}\widetilde{B}'_j \longleftrightarrow T''^{\,k}\widetilde{B}''_j$, $j = 1, \ldots, n$; $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$.

2. Мы докажем, что коды A' и A'' покрывают или не покрывают соответствующие схемы Бернулли одновременно и воспользуемся утверждением 1. Для доказательства приведем формулировку условия покрываемости схемы Бернулли S-кодом в других терминах. А именно, если (X_Z, μ_P, T) — схема Бернулли и $\{A_j\}$ — S-код, то пусть $\{B_j\}$ — как-либо занумерованные слова всех родов и $\omega_j = |B_j|$. Тогда необходимое и достаточное условие того, что код $\{A_j\}$ покрывает схему (X_Z, μ_P, T), как легко видеть из определения, состоит в

том, что $\mu_P(\bigcup\limits_j \bigcup\limits_1^{\omega_j} T^{-l}\widetilde{B}_j) = 1$. Но теперь непосредственно проверяется, что $\mu_P(\bigcup\limits_j \bigcup\limits_1^{\omega_j} T^{-l}\widetilde{B}_j)$ зависит только от набора чисел $k_j = |A_j|$ и $q_j = \mu_P(\widetilde{A}_j)$. Поэтому для схем $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ и $(X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$ и кодов $\{A'_j\}$ и $\{A''_j\}$ это условие одновременно выполняется или не выполняется, что и требовалось доказать.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема 3. Для того, чтобы S-код $\{A_j\}_1^n$ покрывал схему Бернулли (X_Z, μ_P, T), необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$f(t) = 1 - t + \sum_1^n \mu_P(\widetilde{A}_j) t^{|A_j|}$$

имел кратный вещественный положительный корень в круге сходимости.

Доказательство. Назовем каноническим S-кодом над алфавитом $Z' = \{a_i\}_0^n$; $0 < n \leqslant \infty$, код $A' = \{A'_j\}_1^n$, $A'_j = a_j \underbrace{a_0 \dots a_0}_{k_j - 1 \text{ раз}}$, где $k_j = |A'_j|$ — натуральные числа.

Пусть $|B|_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, — число вхождений буквы a_j в B. Воспользуемся комбинаторной леммой.

Лемма [3]. *Для того, чтобы слово B в алфавите Z было словом некоторого рода для канонического S-кода $A = \{A_j\}_1^n, |A_j| = k_j$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: $|B|_0 = \sum\limits_1^n (k_j - 1)|B|_j$ и для любого слова C, являющегося началом слова B, $|C|_0 < \sum\limits_1^n (k_j - 1)|C|_j$.*

Построим теперь канонический S-код $\{A'_j\}_1^n$ над алфавитом $Z' = \{a_i\}_0^n$; $|A'_j| = |A_j|$ где $\{A'_j\}_1^n$ — S-код из условия теоремы. Из того что $\{A_j\}$ — S-код, по теореме 1 следует, что $f(t)$ имеет вещественный положительный корень, а потому (см. конец доказательства теоремы 1) существует мера P' на Z', такая, что мера $\mu_{P'}$ на $X_{Z'}$, построенная указанным ранее способом, удовлетворяет равенству $\mu_{P'}(\widetilde{A}'_j) = \mu_{P''}(\widetilde{A}''_j)$. Но из леммы и эргодической теоремы видно, что для того, чтобы канонический S-код $\{A'_j\}_1^n$ над алфавитом Z' покрывал схему Бернулли

$(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_1^n P'(a_j)|A'_j| = 1$. В самом деле, если код покрывает схему, то для почти всякой последовательности x найдется бесконечное число ее сколь угодно длинных в обе стороны (конечных) отрезков B, для которых по лемме

$$|B|_0 = \sum_1^n (k_j - 1)|B|_j \quad \text{и} \quad |B| = |B|_0 + |B|_1 + \cdots + |B|_n = \sum_1^n k_j |B|_j,$$

что влечет, по эргодической теореме, требуемое.

Обратно, если равенство $\sum\limits_1^n P'(a_j)|A'_j| = 1$ имеет место, то по эргодической теореме в применении к схемам Бернулли (эргодическое среднее для почти всех последовательностей бесконечное число раз оказывается больше и бесконечное число раз меньше своего предела) обнаружим, что для почти всякой последовательности с каждой ее буквы a_j, $j \neq 0$, начинается слово, удовлетворяющее условию леммы. Но последнее равенство, как легко видеть, эквивалентно наличию общего корня у ряда $f(t)$ и его производной, то есть кратного корня $f(t)$. Применяя теперь полученное в доказательстве части 2 предыдущей теоремы утверждение о том, что коды $\{A_j\}$ и $\{A'_j\}$ одновременно покрывают или не покрывают соответствующие схемы Бернулли, мы и получим искомый результат. Теорема доказана.

Все примеры, построенные Л. Д. Мешалкиным, являются частными случаями теоремы 3. Нахождение новых примеров эффективного кодирования схем Бернулли является интересной задачей, несмотря на наличие теоремы Д. С. Орнстейна о том, что полным метрическим инвариантом для автоморфизмов Бернулли является энтропия. Теорема 3 в сочетании с предыдущим утверждением является источником таких примеров. Так, если

$$Z = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad 0 < n < \infty, \quad P = \left\{\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$$

и код $\{A_j\}$ состоит из всех слов длины n вида

$$a_1 a_{j_1} \ldots a_{j_{n-1}}; \quad j_l \neq 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$Z = \left\{b_0, b_1, \ldots, b_{(n-1)^{n-1}}\right\}$$

и код $\{A'_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant (n-1)^{n-1}$, канонический,

$$A'_j = b_j \underbrace{b_0 \ldots b_0}_{n-1 \text{ раз}}, \quad \text{а} \quad P'(b_0) = \frac{n-1}{n}, \quad P'(b_j) = \frac{1}{n(n-1)^{n-1}} \ (j > 0),$$

то автоморфизм $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ изоморфен автоморфизму (X_Z, μ_P, T). Действительно,

$$f(t) = 1 - t + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} t^n.$$

Заметим, что если один из наших S-кодов канонический, то соответствующий метрический изоморфизм схем Бернулли сохраняет σ-алгебру прошлого, в чем легко убедиться.

Автор благодарит рецензента за сообщение о работах В. И. Левенштейна.

Литература

1. Л. Д. Мешалкин, *Один случай изоморфизма схем Бернулли*. ДАН СССР **128**:1 (1959), 41–44.
2. J. R. Blum, D. L. Hanson, *On the isomorphism problem for Bernoulli schemes*. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 221–223.
3. А. Х. Заславский, *К проблеме изоморфизма стационарных процессов*. Теория вероятн. и ее примен. **IX**:2 (1964), 318–326.
4. В. И. Левенштейн, *Декодирующие автоматы, инвариантные относительно начального состояния*. Проблемы кибернетики **12** (1964), 125–136.
5. М. Холл, *Комбинаторика*. Мир., М., 1970.
6. Л. Люмис, *Введение в абстрактный гармонический анализ*. ИЛ, М., 1956.
7. В. И. Левенштейн, *О максимальном числе слов в кодах без перекрытий*. Проблемы передачи информации **4** (1970), 88–90.

Письмо в редакцию[9]

В работе [1] на стр. 413 наряду с основным приводится второе возможное определение покрываемости через базисы. На самом деле утверждение об их эквивалентности ошибочно: то, что совокупность множеств $T^k \widetilde{B}_j$ (для всех возможных k, j) есть базис, не влечет, вообще говоря, покрываемость схемы S-кодом. Ниже будет сформулирован точный результат. Воспользуемся обозначениями и определениями [1] (стр. 409, 410, 412, 413); отметим, что в пятой строке текста [1] на стр. 409 должно быть $n \leqslant \infty$). Обозначим через k_j^i число вхождений буквы $a_j \in \Sigma$ в слово A_i S-кода.

[9]Исправление к статье (*Теория вероятн. и ее примен.*, **XXV**:1 (1980), 217-218).

Теорема. Три следующих утверждения эквивалентны.

1) *Совокупность* $\{T^k \widetilde{B}_j\}$ *образует базис разбиения, которое есть* $\varepsilon \mod 0$.

2) *S-код* $\mathrm{A} = \{A_i\}$ *покрывает схему Бернулли* (X_Z, μ_p, T) *или не покрывает, но в алфавите* Z *найдется такая буква* a_k, *что почти всякая реализация может быть представлена (однозначно с точностью до нумерации* j_l *— возможного сдвига) в виде*

$$\dots a_k B_{j_{-n}} a_k \dots a_k B_{j_{-n+1}} a_k \dots a_k B_{j_0} a_k \dots B_{j_1} \dots a_k B_{j_{n'}} a_k \dots ,$$

где B_{j_l}, $-\infty < l < \infty$, *— слово какого-либо рода, т. е. все «лакуны» между словами какого-либо рода (при некоторых* l *их может не быть) заполнены буквами* a_k *в произвольном числе.*

3) Для всех букв $a_j \in Z$, *кроме, может быть, одной (которая есть* a_k *из 2)) имеет место равенство* $P(a_j) = \sum\limits_i k_j^i t_0^{|A_i|-1} \mu_p(\widetilde{A}_i)$, *где* t_0 *— минимальный вещественный положительный корень полинома (ряда)* $f(t) = l - t + \sum \mu_p(A_i) t^{|A_i|}$.

Имеет место равенство $t_0 = (1 - \sum \mu_p(\widetilde{B}_j))^{-1}$, где суммирование идет по всем словам какого-либо рода. Покрываемости соответствует выполнение равенств из 3) для всех a_j. Если для k_j, q_j выполнены условия теоремы 1 из [1], то возьмем канонический S-код, описанный на стр. 412 в [1], и в качестве s корень t_0 (см. выше) полинома (ряда) $f(t) = 1 - t + \sum q_j t^{k_j}$. Выполнение равенств условия 3) сформулированной выше теоремы для всех a_j, кроме, может быть, a_0 очевидно; так что любой набор k_j, q_j (стр. 410), который реализуется на S-коде и схеме Бернулли, реализуется на коде и схеме, для которых выполнены условия 1–3 теоремы. Достаточно, стало быть, наличие положительного корня $f(t)$, в то время как покрываемость требует существования кратного положительного корня, являясь, тем самым, более сильным условием.

Автор благодарит за полезные замечания А. М. Вершика, привлекшего, в частности, его внимание к вопросу о связи с базисами, а также других участников эргодического семинара, обсуждавших этот вопрос и саму работу [1].

2.6.78 *А. Н. Лившиц*

Литература

1. А. Н. Лившиц. *К проблеме изоморфизма схем Бернулли.* Теория вероятн. и ее примен., **XIX**:2 (1974), 409–416.

О СПЕКТРАХ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МАРКОВСКИХ КОМПАКТОВ

В заметке приводятся новые результаты об адических преобразованиях, введенных в [1], в первую очередь об их спектрах для стационарного случая.

1. В [2] доказано, что всякий автоморфизм пространства Лебега имеет адическую реализацию, причем заданная инвариантная алгебра множеств переходит в алгебру цилиндрических множеств. Следующая теорема уточняет этот результат. Пусть автоморфизм T реализован как сдвиг в $\prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$, где $Z_i = Z$ — конечный или счетный алфавит [9].

Теорема 1. Существует такой марковский компакт X и отображение $\tau\colon \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i \to X$, определенное почти всюду относительно любой эргодической стационарной меры в $\prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$ с положительными мерами всех цилиндров, которое осуществляет изоморфизм сдвига и адического преобразования компакта X.

Компакт X и изоморфизм τ строятся явно; адический сдвиг в X является минимальным.

Таким образом, компакт X является в определенном отношении универсальным. Метод доказательства основан на эффективном кодировании последовательностей.

2. Рассмотрим стационарные адические преобразования [2]. Далее формулируется комбинаторный результат о достаточных условиях наличия и отсутствия непрерывной компоненты в спектре. Иной подход — выяснение связей с диофантовыми приближениями корней характеристического полинома матрицы преобразования — развивался

Успехи математических наук, **42**:3 (1987), 189–190.

участниками семинара А. М. Вершика, привлекшего внимание автора к этой тематике. В частности, в доказательстве следующей теоремы используется один теоретико-операторный результат Б. М. Соломяка [10].

Пусть строго эргодическое адическое преобразование имеет пространство состояний $P_i = D = (1, \dots, m)$ и постоянную матрицу переходов M (то есть стационарно), все элементы которой равны 0 или 1. Сопоставим i-му столбцу матрицы M слово X_i в алфавите D, буквы которого суть все номера ненулевых букв i-го столбца, перечисленные в порядке возрастания.

Введем преобразование $\omega_M : \bigcup_{k=1}^{\infty} D^k \to \bigcup_{k=1}^{\infty} D^k$ так:

если $A = a_1 \dots a_k$, то $\omega_M(A) = X_{a_1} \dots X_{a_k}$. Мы говорим,что слова U и V в алфавите D имеют одинаковую номенклатуру, если для каждой буквы $i \in D$ число ее вхождений в U равно числу ее вхождений в V.

Задавшись произвольными символами a, $b \in D$, определим последовательности слов $x_L^{a,b}$ и $y_L^{a,b}$ при больших L. В качестве $x_L^{a,b}$ возьмем подслово слова $\omega_M^L(a)$, начинающееся сразу после первого вхождения b (такое найдется при больших L по транзитивности). В качестве $y_L^{a,b}$ — слово $bx_L^{a,b}$. Будем предполагать, что найдутся два пути $a_1, \dots, a_l$ и $a'_1, \dots, a'_l$ с $a'_1 = a$ и $a'_l = a_1$, для которых образы при адическом отображении (предположим, что таковые однозначно определены) имеют разные первые символы, например, c и d. Отсутствие таких путей влечет, как нетрудно показать, дискретность спектра. Зафиксируем указанные выше c и d и любые a и b.

Теорема 2. (a) *Предположим, что в алфавите D существует конечный набор слов $\{y_i\}$ такой, что для любой пары слов (X, Y) вида (y_{i_1}, y_{i_2}) или вида $(x_L^{a,b}, y_L^{a,b})$ существует натуральное $N_{X,Y}$ такое, что $\omega_L^{N_{X,Y}}(X) = y_{j_1} \dots y_{j_s} A$ и $\omega_L^{N_{X,Y}}(y) = y_{k_1} \dots y_{k_s} B$. A или B пустое при любом i: $1 \leqslant i \leqslant s$; y_{j_i} и y_{k_i} имеют одинаковую номенклатуру и хоть одно $y_{j_i} = y_{k_i}$. В этом случае спектр адического преобразования дискретен.*

(b) *Предположим, что в алфавите D найдется конечный набор слов $\{y_i\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел N_i такие, что при каждом i $\omega_M^{N_i}(c) = y_{j_1}, \dots, y_{j_s} A$; $\omega_M^{N_i}(d) = y_{k_1}, \dots, y_{k_s} B$, где A или B — пустое слово, при любом t: $1 \leqslant t \leqslant s$, $y_{j_t} \neq y_{k_t}$ и слова y_{k_t} и y_{j_t} имеют одинаковую номенклатуру. В этом случае спектр адического преобразования имеет непрерывную компоненту.*

Как легко видеть, теорема устанавливает связь между стационарными адическими преобразованиями и интенсивно изучаемыми преобразованиями подстановки (см. [3], а также [4, 8]), в частности, последовательностями Морса. Не всякая подстановка порождается стационарным адическим преобразованием, но для всякой подстановки, если она строго эргодична, верна теорема 2 с естественно определяемым ω. Условие, предпосланное теореме 2, тоже легко переформулировать.

3. Рассмотрим следующий пример: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Условие (b) теоремы 2 выполнено с $y_1 = 2312$ и $y_2 = 1223$. Автоморфизм T_M^4 имеет 4 эргодических компоненты, на каждой из которых он изоморфен автоморфизму, связанному с последовательностью Морса, то есть T тоже имеет 2-адическую и сингулярную компоненты спектра [5].

Среди адических строго эргодических преобразований имеется много преобразований с чисто непрерывным спектром, например, стационарное преобразование с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Все они не обладают сильным перемешиванием, также как и примеры Какутани [6] (см. также [3]).

Литература

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* ДАН СССР **259**:3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. F. M. Dekking, M. Keane, *Mixing properties of substitutions.* Z. Wahr. **42**:1 (1978), 23–33.
4. W. H. Gottschalk, *Substitution minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **109**:3 (1963), 467–491.
5. S. Kakutani, *Strictly ergodic symbolic dynamical systems.* In: Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. **6** (1972), 319-326.
6. S. Kakutani, *Examples of ergodic measure preserving transformations which are weakly mixing but not strongly mixing.* Lect. Notes Math. **318** (1973), 143–149.
7. T. Kamae, *A topological invariant of substitution minimal sets.* J. Math. Soc. Japan **24**:2 (1972), 285–306.
8. P. Michel. *Coincidence values and spectra of substitutions.* Z. Wahr. **42**:3 (1978), 205–227.
9. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* УМН **22**:5 (1967), 3–56.
10. Б. М. Соломяк, *Об одной динамической системе с дискретным спектром.* УМН **41**:2 (1986), 209–210.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СЛАБОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОДСТАНОВОК И СТАЦИОНАРНЫХ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Целью работы является доказательство достаточного условия слабого перемешивания для широкого класса стационарных адических автоморфизмов, веденных в [1] и [2], и подстановочных автоморфизмов, метод основан на результатах [3].

Все пространства последовательностей снабжены слабой топологией.

Следуя [4, 6, 8], определим подстановочный автоморфизм.

1. Исходным объектом является совокупность слов $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^n$ в алфавите $Z = \{1, \dots, n\}$. По $\mathcal{A}$ строится матрица [4–6] $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, где $g_{ij} \geqslant 0$ — число вхождений символа j в слово $\mathcal{A}_i$. В дальнейшем предполагается примитивность $G_{\mathcal{A}}$ (то есть положительность некоторой ее степени) [7, с. 378].

Определим преобразование $\omega_{\mathcal{A}}$ множества всех конечных слов:

$$\omega_{\mathcal{A}} : \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k \to \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k : \omega_{\mathcal{A}}(a_1 \dots a_l) = A_{a_1} A_{a_2} \dots A_{a_l},$$

где в правой части стоит конкатенация[10] слов. Подстановкой называется сужение $\omega_{\mathcal{A}}|_Z$.

Назовем *порождающей четверкой* такой набор натуральных чисел (i, j, m, n'), $i \leqslant n$, $j + 1 \leqslant |A_i|$, для которого найдутся символы $a, b, c, d \in Z$, такие, что:

Математические заметки, **44**:6 (1988), 785–793.

[10] В оригинале «соединение». (*Прим. ред.*)

1) c и d являются, соответственно, j-м и $(j+1)$-м символами слова A_i;

2) слово $\omega_{\mathcal{A}}^{m}(c)$ кончается на a и слово $\omega_{\mathcal{A}}^{m}(d)$ начинается с b;

3) $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)$ кончается на a и $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b)$ начинается с b.

Порождающие четверки всегда существуют. Выберем какую-либо из них и, пользуясь соответствующими ей символами a и b, определим *последовательность конкатенаций слов*:

$$ab,\ \omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b),\ \omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(b),$$

и т. д.

В каждой из конкатенаций $\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(b)$ пронумеруем символы таким образом, чтобы последний символ $\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(a)$ имел номер 0. По определению a и b последовательность этих конкатенаций состоит из возрастающих в обе стороны слов, объединение которых — бесконечная в обе стороны последовательность символов из Z. Обозначим ее через $x(i,j,m,n')$. Рассмотрим слабое замыкание (в пространстве всех бесконечных в обе стороны последовательностей) траектории $x(i,j,m,n')$ относительно двустороннего сдвига. Обозначим его через $X_{\mathcal{A}}$. *Автоморфизмом подстановки* будем называть сдвиг $T : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$. При условии примитивности $G_{\mathcal{A}}$ пространство $X_{\mathcal{A}}$ не зависит от выбора порождающей четверки. Известно, что T строго эргодичен [5].

Определенный в [1, 2] стационарный автоморфизм или адическое преобразование, о котором речь идет ниже, — это тоже символическая динамическая система, однако с иным действием. Пусть снова $Z = \{1, \dots, n\}$ — алфавит, $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ — матрица переходов. Будем считать, что все π_{ij} равны 0 или 1 и что Π примитивна. Адический автоморфизм действует в марковском компакте — пространстве Ω_Π бесконечных в одну сторону путей $x_0, x_1, \dots,\ x_i \in Z\ (i = 0, 1, \dots)$, таких, что $\pi_{x_i x_{i+1}} = 1$. Действие описывается в [1] и [2].

2. По матрице Π адического преобразования строится совокупность слов, аналогичная совокупности слов, определяющей подстановку: $\mathcal{A}_\Pi = \{A_i\}_1^n$, где A_i — слово, символы которого суть номера всех ненулевых символов i-го столбца матрицы Π, перечисляемые в порядке возрастания [3].

Подстановка, построенная по $\mathcal{A}_\Pi$, как и в п. 1, в широком классе случаев метрически изоморфна самому адическому преобразованию.

Для подстановки ниже будут описаны конструкции, ставящие ей в соответствие метрически изоморфные ей адические или обобщенные адические преобразования.

Зафиксировав подстановку (то есть Z и $\mathcal{A}$), назовем *допустимой* всякую последовательность $x = \{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, принадлежащую пространству $X_{\mathcal{A}}$ (см. выше).

Будем говорить, что подстановка удовлетворяет условию ОДД — однозначной допустимой декодируемости, — если всякая допустимая последовательность из $X_{\mathcal{A}}$ единственным образом представляется в виде конкатенации $\dots A_{i_k} A_{i_{k+1}} \dots$, такой, что $b_0 \in A_{i_0}$ и последовательность $\dots i_k i_{k+1} \dots$ тоже допустима и имеет только одно допустимое декодирование по приведенному определению, и т. д.

Вполне вероятно, что всякая нециклическая [6] подстановка такова (см. также [9, 10, 12]). Условие ОДД будет предполагаться выполненным.

По набору слов $\mathcal{A}$ строятся две динамические системы типа адического преобразования. Для каждого слова $A_i \in \mathcal{A}$ и любого входящего в него символа j пронумеруем все вхождения символа в том порядке, в каком они встречаются в слове $j^{(1)} j^{(2)} \dots j^{(k)}$. Символ с номером назовем *отмеченным* символом. Через $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ обозначим пространство бесконечных в одну сторону последовательностей отмеченных символов (путей) вида $y_0^{(i_0)}, y_0^{(i_1)}, \dots$, $y_s \in Z$, таких что при каждом $s > 0$ отмеченный символ $y_{s-1}^{(i_{s-1})}$ соответствует i_{s-1}-му вхождению символа y_{s-1} в слово A_{y_s}.

Преобразование $T^1_{\mathcal{A}} : \Omega^1_{\mathcal{A}} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$ определяем следующим образом. Если $A_{y_1} = a_1 \dots a_r$ и символ, отвечающий $y_0^{(i_0)}$, имеет в слове A_{y_1} номер $s < r$, то $T^1_{\mathcal{A}}(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = a^j_{s+1}, y_1^{(i_1)}, y_2^{(i_2)}, \dots$, где для символа a_{s+1} тоже отмечен номер его вхождения j. Если $s = r$, то пусть $l > 0$ — наименьший номер, такой, что символ, отвечающий $y_l^{(i_l)}$, не является последним в слове $A_{y_{l+1}} = b_1 \dots b_{r'}$, а имеет в нем номер $s' < r'$ (для всех точек, кроме конечного множества номеров $l < \infty$). Тогда

$$T^1_{\mathcal{A}}(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, \dots z_l^{(j)}, y_{l+1}^{(j_{l+1})}, y_{l+2}^{(j_{l+2})}, \dots ,$$

где $z_l = b_{s'+1}$ (верхний индекс j — тоже номер вхождения), каждый из z_i^1, $i < l$, является первым в слове $A_{z_{i+1}}$ ($A_{z_{i+1}}$ не зависит от номера вхождения z_{i+1} в следующее слово). С помощью $T^1_{\mathcal{A}}$ в пространстве путей можно определить частичное упорядочение, аналогичное лексикографическому в марковском компакте. Будем считать, что $\Gamma_1 > \Gamma_2$ для путей $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Omega^1_{\mathcal{A}}$, если существует $m > 0$, такое, что $\Gamma_1 = T^{1m}_{\mathcal{A}} \Gamma_2$. Ясно, что сравнимы таким же образом и конечные пути, имеющие одинаковую длину и одинаковый конец.

Пусть снова $\mathcal{A}$ определяет подстановку. Опишем два множества: $X'_{\mathcal{A}} \subset X_{\mathcal{A}}$ и $\Omega^{1'}_{\mathcal{A}} \subset \Omega^1_{\mathcal{A}}$, каждое из которых является дополнением счетного инвариантного множества, а также взаимно однозначное соответствие $\varphi : X'_{\mathcal{A}} \to \Omega^{1'}_{\mathcal{A}}$ между ними, удовлетворяющее соотношению $T^1_{\mathcal{A}} \circ \varphi = \varphi \circ T$.

Пусть $U_{\mathcal{A}} \subset X_{\mathcal{A}}$ – множество всех $x(i,j,m,n')$, где (i,j,m,n') — порождающая четверка (см. определение подстановки). $U_{\mathcal{A}}$ конечно, хотя множество порождающих четверок счетно. $X'_{\mathcal{A}}$ определим как $X_{\mathcal{A}} \setminus \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(U_{\mathcal{A}})$, $\Omega^{1'}_{\mathcal{A}}$ — как множество таких путей $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots, y_k^{(i_k)}, \ldots$, где для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не первый в слове A_{y_k}, и для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не последний в слове A_{y_k}.

Если $x \in X'_{\mathcal{A}}$, $x = \ldots, b_{-k}, \ldots, b_0, \ldots, b_k, \ldots$, то, как легко видеть, существует единственная (отвечающая последовательным допустимым декодированиям) последовательность элементов $y_0, y_1, y_2, \ldots$ множества Z, что $b_0 = y_0$, y_0 — символ слова $\omega_{\mathcal{A}}(y_1) = A_{y_1}$, y_k – символ слова $\omega_{\mathcal{A}}(y_{k+1}) = A_{y_{k+1}}$ и т. д., а также для бесконечного множества номеров k y_k — не первый символ $A_{y_{k+1}}$ и для бесконечного множества номеров k — не последний (в противном случае $x \in \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^i U_{\mathcal{A}}$). В качестве $\varphi(x)$ берем путь $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots$ с фиксацией номеров вхождений символов y_k в слова $\omega(y_{k+1})$. Очевидно, что φ биективно и измеримо по любой вероятностной борелевской инвариантной мере. Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение:

$T^1_{\mathcal{A}}$ имеет единственную борелевскую инвариантную вероятностную меру, и φ является метрическим изоморфизмом между T и $T^1_{\mathcal{A}}$.

Тем самым мы дали определение одноэргодичности для не всюду определенного отображения $T^1_{\mathcal{A}}$ (естественно обобщаемое для произвольных адических отображений). Специфично и определение минимальности — должна требоваться всюду плотность всех элементов разбиения на траектории, что в нашем случае имеет место.

Заметим, что для адического преобразования с матрицей Π имеет место равенство $(\Omega_\Pi, T) = (\Omega^1_{\mathcal{A}_\Pi}, T^1_{\mathcal{A}_\Pi})$, которое можно считать попросту определением адического преобразования. Если подстановка с набором слов $\mathcal{A}_\Pi$ удовлетворяет требованию ОДД, то она метрически изоморфна (Ω_Π, T).

Определим теперь динамическую систему $T^2_{\mathcal{A}} : \Omega^2_{\mathcal{A}} \to \Omega^2_{\mathcal{A}}$, точнее, класс эквивалентных определяющих ее адических преобразований.

Пусть $N = \sum_1^n |A_i|$. Приведем элементы алфавита $Z' = \{1, \ldots, N\}$ во взаимно однозначное соответствие с множеством пар натуральных

чисел вида (f,g), где $1 \leqslant f \leqslant n$, $1 \leqslant g \leqslant |A_f| : l \to \{f_l, g_l\}$, $1 \leqslant l \leqslant N$. К соответствию будем предъявлять единственное требование: для каждого q, $1 \leqslant q \leqslant n$, на множестве $\{(q,s) | 1 \leqslant s \leqslant |A_q|\}$ соответствие должно быть строго монотонным по s. Определим матрицу

$$\Pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = \begin{cases} \pi_{ij} = 1, & \text{если в слове } A_{fj} \text{ символом с номером} \\ & g_i \text{ является } f_i, \\ \pi_{ij} = 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве $\Omega_{\mathcal{A}}^2$ примем марковский компакт Ω_Π.

Динамическая система $T_{\mathcal{A}}^2 : \Omega_{\mathcal{A}}^2 \to \Omega_{\mathcal{A}}^2$ определяется как адическое преобразование марковского компакта Ω_Π. Это определение корректно, потому что с точностью до тривиального изоморфизма, являющегося гомеоморфизмом, наша динамическая система не зависит от выбора соответствия, определяющего Π. Впрочем, можно считать, что мы имеем дело не с классом изоморфных динамических систем, а с адическим преобразованием, если в определении адического преобразования требовать упорядоченности не всего пространства состояний Z', а каждого из подмножеств вида $Y_q \subset Z'$, $Y_q = \{s \in Z' \mid \pi_{sq} = 1\}$, $1 \leqslant q \leqslant N$. Ясно также, что все эти преобразования эквивалентны $T_{\mathcal{A}}^1 : \Omega_{\mathcal{A}}^1 \to \Omega_{\mathcal{A}}^1$.

Пусть T — подстановочный автоморфизм, построенный по подстановке, определяемой набором слов $\mathcal{A}$, или адический автоморфизм, определяемый матрицей Π. Пусть $f_T(t) = t^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$ — характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$ (соответственно, матрицы Π). Дальнейшие рассуждения будут проводиться для случая (более общего) преобразования $T_{\mathcal{A}}^1 : \Omega_{\mathcal{A}}^1 \to \Omega_{\mathcal{A}}^1$, являющегося при выполнении ОДД обобщенным адическим представлением подстановочного преобразования.

Сформулируем очевидное утверждение. Пусть $P_1 = y_0^{(i_0)}, \dots, y_l$ и $P_2 = z_0^{(j_0)}, \dots, z_l$ — два пути длины l, причем

$$y_0 = z_0, \quad y_l = z_l, \quad P_1 < P_2. \tag{1}$$

Определим последовательность натуральных чисел $N_m(P_1, P_2)$ следующим образом: для любой принадлежащей $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ последовательности (пути) $x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, y_0^{(i_0)}, \dots, y_l^{(i_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots$ имеет место соотношение

$$T^{N_m(P_1,P_2)}(x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, y_0^{(i_0)}, \dots, y_l^{(i_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots) = \\ = x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, z_0^{(j_0)}, \dots, z_l^{(j_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots .$$

Ясно, что от выбора x_i число $N_m(P_1, P_2)$ не зависит. Наше утверждение состоит в том, что $N_m(P_1, P_2)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N_{m+n}(P_1, P_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i N_{m+i}(P_1, P_2).$$

Сформулируем основную теорему работы.

Теорема. Пусть для подстановочного автоморфизма T с условием ОДД (для стационарного адического или обобщенного адического преобразования) все корни характеристического полинома $f_T(t)$ лежат вне круга $B = \{z \mid |z| < 1\}$ и существуют два пути P_1, P_2 одинаковой длины с условием (1) такие, что ни для какого номера m_0 при $m > m_0$ все $N_m(P_1, P_2)$ в совокупности не имеют общего делителя, большего единицы. Тогда соответствующий автоморфизм обладает слабым перемешиванием.

Доказательство теоремы. Теорема вытекает из приводимых ниже предложения и леммы.

Предложение. Если последовательность целых чисел N_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $N_{m+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i N_{m+i}$, где α_i — рациональные коэффициенты полинома $t^i - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$ с корнями по модулю $\geqslant 1$, и не существует такого номера m_0, начиная с которого все N_m в совокупности имеют общий делитель > 1, то не существует и такого нецелого λ, что

$$e^{2\pi i N_m \lambda} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

При доказательстве случай с рациональным λ рассматривается с помощью условия отсутствия общего делителя N_m, случай с иррациональным — по аналогии с [11, с. 166].

А именно, $N_m\lambda$ — последовательность, удовлетворяющая тому же рекуррентному соотношению; начиная с некоторого места, ему же удовлетворяет последовательность $\beta_m \to 0$, где $\beta_m = -R_m + N_m\lambda$ (R_m — ближайшее целое к $N_m\lambda$), что противоречит предположению о корнях полинома.

Лемма. Если строго эргодическая подстановка (стационарный адический автоморфизм) с условием ОДД имеет собственное значение $e^{2\pi i\lambda}$ и P_1, P_2 — два пути одинаковой длины, удовлетворяющие (1), то

$$e^{2\pi i N_m(P_1,P_2)\lambda} \to 1, \quad m \to \infty.$$

Доказательство леммы. Из совместимости инвариантной меры с топологической структурой $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ вытекает утверждение — аналог теоремы о точках плотности теории функций вещественной переменной.

Пусть $C \subset \Omega^1_{\mathcal{A}}$ — измеримое множество, $\mu(C) > 0$. Тогда для почти всякой точки $x \in C$ существует последовательность цилиндрических множеств $V^x_1 \supset \ldots \supset V^x_j \supset \ldots \ni x$, отвечающих путям, начинающимся в момент 1, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C \cap V^x_n)/\mu V^x_n = 1.$$

Из этого утверждения следует, что если U — собственная функция автоморфизма T с собственным значением $e^{2\pi i\lambda}$, то для произвольных положительных последовательностей $\varepsilon_k \to 0$, $\delta_k \to 0$ можно выбрать последовательность множеств A_k, $\mu(A_k) > 0$, и цилиндров B_k, таких, что колебание функции U на A_k не превосходит ε_k и

$$\mu(B_k \cap A_k)/\mu A_k > 1 - \delta_k.$$

Из примитивности $G_{\mathcal{A}}$ и свойств меры μ следует существование таких констант $D > 0$ и $M > 0$, что если Y_{m,P_i} — множество таких x, для которых координаты с $m+2$ по $m+l+2$ образуют путь P_i $(i = 1, 2)$, то для любых n_1, n_2 с $n_2 - n_1 > M$ и любого пути B длины n_1 имеем $\mu(Y_{n_2,P_i} \cap \widetilde{B}) \geqslant D\mu\widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ — цилиндрическое множество, соответствующее B.

Отсюда и из определения $N_m(P_1, P_2)$ следует, что если для цилиндра B_k длина пути, его порождающего, равна N_k и $D > 2\delta_k$, то при $m > N_k + M$ выполняется неравенство $|e^{2\pi i N_m(P_1,P_2)\lambda} - 1| \leqslant \varepsilon_k$. Лемма, и тем самым теорема, доказаны.

В качестве примера может быть рассмотрена подстановка $0 \to 001$ $1 \to 10110$ из работы [4], где несколько иной метод эквивалентной подстановки не дал возможности установить слабое перемешивание. Теорема настоящей работы применима для этого и наряду с методом [4] для других примеров [4]. Достаточно взять пути $P_1 = 0^1 0$ и $P_2 = 0^2 0$. В этом случае [4]

$$N_m(P_1, P_2) = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^n + 1) \quad (\text{корни } f_T(t) \text{ суть } 1 \text{ и } 4).$$

Результаты о дискретном спектре подстановок (полученные несколько иным методом), из которых вытекает аналогичная теорема о слабом перемешивании, содержатся в работе [12], вышедшей, когда

статья была сдана в печать. Методом, описанным в статье, может быть доказано и утверждение из [12] (полученное независимо автором) о том, что всякая измеримая собственная функция почти всюду совпадает с непрерывной функцией. Непрерывная собственная функция строится также путем продолжения с всюду плотной траектории с учетом аргумента о том, что сходимость в вышедоказанной лемме экспоненциальна, и очевидного для примитивной матрицы существования натурального M такого, что для любых двух бесконечных путей вида

$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, y_1^{(k_1)}, y_2^{(k_2)}, \dots,$$
$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, z_1^{(l_1)}, z_2^{(l_2)}, \dots$$

существуют две последовательности натуральных чисел N_k, L_k, $N_{k-1} < L_k < N_k < L_{k+1}$, $|N_{k+1} - N_k|$, $|L_{k+1} - L_k| < M$, и путь

$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, t_1^{(r_1)}, t_2^{(r_2)}, \dots \in \Omega_{\mathcal{A}}^1,$$
$$t_{N_k} = y_{N_k}, \quad t_{L_k} = z_{L_k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Литература

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* ДАН СССР **259**:3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории.* Зап. научн. сем. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. Н. Лившиц, *О спектрах адических преобразовании марковских компактов.* УМН **42**: 3 (1987), 189–190.
4. F. M. Dekking, M. Keane, *Mixing properties of substitutions.* ZFW **42** (1978), 23–33.
5. P. Michel, *Coincidence values and spectra of substitutions.* ZFW **42** (1978), 205–207.
6. T. Kamae, *A topological invariant of substitution minimal sets.* J. Math. Soc. Japan. **24**:2 (1972), 285–305.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука, 1967.
8. W. H. Gottschalk, *Substitutions minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.
9. J. C. Martin, *Substitution minimal flows.* Amer. J. Math. **93**:2 (1971), 503–526.
10. J. C. Martin, *Minimal flows arising from substitutions of non-constant length.* Math. Syst. Theor. March. **7**:1 (1973) 73–82.
11. Дж. В. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* М., ИЛ, 1961.
12. B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longeur variable.* Ergod. Th. and Dynam. Sys. **6** (1986), 529–540.

СПОСОБ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОДСТАНОВОК

В работе [1] было доказано топологическое перемешивание гомеоморфизма, определяемого подстановкой $\begin{matrix} 0 \to 001 \\ 1 \to 11100 \end{matrix}$. Доказательство существенно учитывало специфику этой подстановки (подстановка с той же матрицей $\begin{matrix} 0 \to 001 \\ 1 \to 11001 \end{matrix}$ топологическим перемешиванием не обладает [1], [2]; в [2] предложено иное описание этой динамической системы). Важным моментом доказательства являлась лемма 5, согласно которой для некоторой вспомогательной подстановки существуют допустимые блоки со сколь угодно большим «эксцессом» $2N_a(B) - N_b(B)$, где $\{a, b\}$ — алфавит вспомогательной подстановки, $N_a(B)$ — число букв a в допустимом блоке B и $N_b(B)$ — число букв b (иначе, $|B|_a$ и $|B|_b$).

В рассматриваемой ниже ситуации доказательство тоже будет базироваться на оценках подобного «эксцесса». Возможность достижения сколь угодно больших его значений будет гарантироваться свойствами матрицы подстановки и информацией о его значениях для не слишком длинных допустимых слов. То есть константы в формулах для его оценки можно будет с большой точностью найти с помощью численного эксперимента.

С точки зрения асимптотики эксцесса ситуация, с которой мы будем иметь дело, может быть рассмотрена с помощью методов и результатов работы [3].

В [3] доказано, что если σ — подстановка с примитивной матрицей M, второе по величине собственное число которой $\theta_2 < \theta$ [11] —

Препринт ПОМИ Р-10-91 (1991)

[11] θ — собственное число Перрона – Фробениуса – *Прим. ред.*

вещественное строго превосходящее по модулю 1 и модуль остальных собственных чисел, кроме θ, а $\alpha+1$ — порядок θ_2 в минимальном многочлене матрицы M и $\beta = \log_\theta \theta_2$, то для любого отображения f алфавита σ в R, такого, что его значения образуют вектор, ортогональный к собственному подпространству M, отвечающему θ, и любой неподвижной точки $(u_i)_{i\geqslant 1}$ подстановки σ существует вещественная функция $F \in C[1,+\infty)$, такая, что $F(\theta x) = F(x)$ и

$$S^{(f)}(N) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} f(u_i) = (\log_\theta N)^\alpha N^\beta F(N) + O(\Psi(N)),$$

где Ψ всегда есть $o((\mathrm{Log}_\theta N)^\alpha N^\beta)$. Использованию этого результата для оценки эксцесса мешает то обстоятельство, что для некоторых x может быть $F(x) = 0$. При этом, тем не менее, допустимые слова длины $N \approx x$ имеют еще возможность обладать большим значением $S^{(f)}$ (эксцесса), поскольку $\{u_1, \ldots, u_N\}$ — лишь один из многих блоков длины N. Дать и строго обосновать соответствующие оценки для некоторого класса случаев и является нашей задачей при исследовании эксцесса.

Рассмотрим сначала подстановку η

$$\begin{array}{c} a \to aab \\ b \to abbbb \end{array}.$$

Пусть $T_\eta : X_\eta \to X_\eta$ — гомеоморфизм, определяемый η.

Теорема. Подстановка η обладает топологическим перемешиванием, то есть для любых открытых множеств $u \subset X_\eta$ и $v \subset X_\eta$ найдется $N(u,v)$, такое, что при $n > N(u,v) : T_\eta^n u \cap v$ непусто.

Доказательство. Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. Для любого натурального $M > 0$ найдется натуральное $N_M > 0$, такое, что при любом $n > N_M$ найдутся допустимая последовательность $\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}$ в X_η и натуральное k_n, такие, что

$$a^n_{k_n+1} \ldots a^n_{k_n+|\eta^M(b)|} = \eta^M(b); \quad a^n_{k_n+n+1} \ldots a^n_{k_n+n+|\eta^M(b)|} = \eta^M(b).$$

Доказательство. Будут использованы два утверждения.

Факт 1. При всех натуральных M числа $|\eta^M(a)|$ и $|\eta^M(b)|$ взаимно просты.

(Является очевидным следствием рекуррентных соотношений для $|\eta^M(a)|$ и $|\eta^M(b)|$).

Факт 2. Пусть $u(n)$ — наименьшее значение $|A|_b$ для допустимых слов A длины n, $v(n)$ — наибольшее значение $|A|_b$ для допустимых слов A длины n. Тогда существует натуральное L и положительные константы c_1, c_2, такие, что

$$u(n) \leqslant cn - c_1 n^{\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})}; \quad v(n) \geqslant cn - c_2 n^{\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})};$$

при $n > L$.

Здесь c — мера цилиндра, соответствующего букве b. Ясно, что $-u(n) + cn$ и $v(n) - cn$ – это аналоги эксцесса. Так же, как в [3], обозначим $\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})$ через β. Легко убедиться, что $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Мы будем пользоваться тем, что если промежуток $[N_1, N_2]$ достаточно велик и $\mathcal{A}(N_1, N_2) = \{A_i\}^{R(N_1,N_2)}$ — множество всех η–допустимых слов длин от N_1 до N_2, то уже на словах $\{\eta(A_i)\}_1^{R(N_1,N_2)}$, а не на их допустимых расширениях, как в [1], реализуется достаточно большой для индукционного перехода интервал длин и для каждой длины достаточно широкий разброс значений эксцесса.

Обозначим через d_1^N число $\frac{cN-u(N)}{N^\beta}$, через d_2^N — $\frac{v(N)-cN}{N^\beta}$. Рассмотрим некоторый промежуток $[N_1, N_2]$, где N_1, N_2 — натуральные, такие, что $N_2 > (3+\sqrt{2})N_1 + 2N_1^\beta \min\limits_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} d_2^n$, где смысл множителя 2 выяснится в дальнейшем.

Обозначим $\min\limits_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} d_1^n$ через $c_1(N_1, N_2)$, $\min\limits_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} d_2^n$ — через $c_2(N_1, N_2)$, число $[(3+\sqrt{2})N_2 - 2c_1(N_1, N_2)N_2^\beta]$ — через N^* и докажем следующее утверждение.

Подлемма. $c_1(N_2+1, N^*) > c_1(N_1, N_2) - \lambda N_2^{-\beta}$, $c_2(N_2+1, N^*) > c_2(N_1, N_2)\left(1 - 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta - \lambda N_2^{-\beta}$, *где* $\lambda = 7$.

Доказательство. Если слово $A \in \mathcal{A}(N_1, N_2)$, $|A| = p$, $|A|_a = s$, $|A|_b = r$, то для $\eta(A)$ имеем $|\eta(A)| = 2r + 3p$, $|\eta(A)|_b = 3r + p$. Зафиксировав $k \in [N_2 + 1, N^*]$, рассмотрим такие пары r, p, что $p \in [N_1, N_2]$ и $cp - c_1(N_1, N_2)p^\beta \leqslant r \leqslant cp + c_2(N_1, N_2)p^\beta$ (чем заведомо обеспечивается существование A с такими r и p, поскольку, очевидно, при условии $|A| = p$ все значения из промежутка $[u(p), v(p)]$ пробегаются величиною $|A|_b$). Полагая, что $2r + 3p = k$, будем смотреть, какой промежуток пробегает величина $3r + p = 1.5k - 3.5p$. Разумеется, крайним значениям этой величины отвечают крайние значения p. Но по нашему условию для p и r и учитывая, что $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, имеем, что $(3+\sqrt{2})p - 2c_1(N_1, N_2)p^\beta \leqslant k = 2r + 3p \leqslant (3+\sqrt{2})p + 2c_2(N_1, N_2)p^\beta$.

Для оценки крайних значений p одной четности с k оценим сначала решения p_1 и p_2 уравнений $k = (3+\sqrt{2})p_1 - 2c_1(N_1,N_2)p_1^\beta$ и $k = (3+\sqrt{2})p_2 - 2c_2(N_1,N_2)p_2^\beta$. Они будут использованы для оценки d_1^k и d_2^k. Пусть $\Delta_1 = \frac{k}{3+\sqrt{2}} + p_1$, $\Delta_2 = \frac{k}{3+\sqrt{2}} + p_2$. Имеем:

$$(3+\sqrt{2})\Delta_1 - 2c_1(N_1,N_2)\big(\frac{k}{3+\sqrt{2}} + \Delta_1\big)^\beta = 0 \quad \text{и}$$
$$\Delta_1 > 2c_1(N_1,N_2)\big(\frac{k}{3+\sqrt{2}}\big)^\beta (3+\sqrt{2})^{-1}.$$

С другой стороны,

$$O = 2c_2(N_1,N_2)\big(\frac{k}{3+\sqrt{2}} - \Delta_2\big)^\beta - (3+\sqrt{2})\Delta_2. \tag{1}$$

Оценивая разность в скобках сверху числом $\frac{k}{3+\sqrt{2}}$, получаем оценку сверху для Δ_2:

$$\Delta_2 \leqslant \frac{2}{3+\sqrt{2}}\left(\frac{k}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta c_2(N_1,N_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2k}{(3+\sqrt{2})^2}\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1} c_2(N_1,N_2).$$

Подставляя мажоранту в то же выражение в скобках, получаем из (1) оценку для Δ_2 снизу:

$$\Delta_2 \geqslant$$
$$2c_2(N_1,N_2)\left(\frac{k}{3+\sqrt{2}} - 2c_2(N_1,N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{k}{(3+\sqrt{2})^2}\right)^\beta \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$
$$= \left(\frac{k}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta 2c_2(N_1,N_2)\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2c_2(N_1,N_2)}{3+\sqrt{2}}\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\right)^\beta.$$

Теперь можно оценить $[p_1]-1$ и $2+[p_2]$ и получить утверждение подлеммы. Имеем:

$$-1.5k + 3.5([p_1]-1) + ck = (c-1.5)k + 3.5\big(\Delta_1 + \frac{k}{3+\sqrt{2}} - \gamma_1\big)$$
$$= 3.5\Delta_1 - 3.5\gamma_1 > -3.5\gamma_1 + c_1(N_1,N_2)k^\beta,$$

где $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 2$, и, стало быть, $d_1^k > c_1(N_1, N_2) - 3.5\gamma_1 N_2^{-\beta}$. Далее,

$$1.5k - 3.5([p_2] + 2) - ck > \\ > -3.5\gamma_2 + k^\beta c_2(N_1, N_2)\left(1 - \frac{2c_2(N_1, N_2)}{3 + \sqrt{2}}\left(\frac{N_2}{3 + \sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\right)^\beta.$$

Поэтому

$$d_2^k > c_2(N_1, N_2)\left(1 - \frac{2c_2(N_1, N_2)}{3 + \sqrt{2}}\left(\frac{N_2}{3 + \sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\right)^\beta - 3.5\gamma_2 N_2^{-\beta},$$

где $0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 2$. Подлемма доказана.

Разумеется, промежуток (N_1, N^*) удовлетворяет нашему первоначальному требованию. Преобразование от $[N_1, N_2]$ к $[N_1, N^*]$ можно итерировать. Верхняя грань промежутка будет расти экспоненциально, поэтому неравенства подлеммы дают возможность оценить $c_1(N_1, \infty)$ и $c_2(N_1, \infty)$ снизу, если численный эксперимент дал надлежащую информацию для какого-либо промежутка $[N_1, N_2]$.

Докажем теперь теорему в предположении, что оценки $c_1(N_1, \infty)$ и $c_2(N_1, \infty)$ подтвердили факт 2.

Последовательность $u^n_{k_n+1} \dots u^n_{k_n+n+|\eta^M(b)|}$ из леммы будем искать в виде $\eta^M(\{b\}\|\eta(D))$, где D — допустимое слово, а $\|$ — знак соединения двух последовательностей. Очевидно, что $b\|\eta(D)$ — допустимое слово. Чтобы условие было удовлетворено, должно иметь место равенство:

$$|D|_a|\eta^{M+1}(u)| + |D|_b|\eta^{M+1}(b)| - |\eta^M(b)| = n. \tag{2}$$

Но если n достаточно велико, то по факту 2 существует слово D', такое, что

$$|D'|_b = \left[\frac{c(n + |\eta^M(b)|)}{c|\eta^{M+1}(b)| + (1-c)|\eta^{M+1}(a)|}\right] \quad \text{и}$$
$$|D'|_a = \left[\frac{(1-c)(n + |\eta^M(b)|)}{c|\eta^{M+1}(b)| + (1-c)|\eta^{M+1}(a)|}\right].$$

Это слово нельзя взять в качестве D, поскольку для него разность R между левой и правой частью не равна нулю, но

$$-R < |\eta^{M+1}(a)| + |\eta^{M+1}(b)|.$$

Из факта 1 вытекает существование целых чисел x и y: $|x| < |\eta^{M+1}(b)|$; $|y| < |\eta^{M+1}(a)|$ таких, что

$$x|\eta^{M+1}(a)| + y|\eta^{M+1}(b)| = 1.$$

Если n достаточно велико, то имеем (по факту 2)

$$u(|D'| - R(x+y)) < |D'|_b - Ry < v(|D'| - R(x+y)),$$

вследствие чего и существует допустимое слово D, такое что

$$|D| = |D'|_a - Rx; \quad |D|_b = |D'|_b - Ry.$$

Для него выполнено (2), что и доказывает лемму.

В общем случае матрицы подстановки $\left(\begin{smallmatrix} e & f \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ условие $\theta > \theta_2 > 1$ эквивалентно $cf < (e-1)(d-1)$, условие на N_1 и N_2 выглядит как $N_2 > \theta N_1 + (c+d-e-f)N_1^{\beta} c_2(N_1, N_2)$, где $\beta = \log_\theta \theta_2$ и предполагается, что $c+d > e+f$. N^* определяется как $[\theta N_2 - (c+d-e-f)c_1(N_1, N_2)N_2^{\beta}]$. Если $c+d = e+f$, то это подстановка с постоянной длиной слова и не может быть топологическим перемешиванием.

Выражение для $|\eta(A)|_b$ выглядит как

$$P\left(f - \frac{(d-f)(e+f)}{c+d-e-f}\right) + k\frac{d-f}{c+d-e-f} = \\ = k\frac{d-f}{c+d-e-f} - p\frac{de-cf}{c+d-e-f},$$

оценка для Δ_1 — как

$$\Delta_1 \geqslant \frac{\omega c_1(N_1, N_2)\left(\frac{k}{\theta}\right)^{\beta}}{\theta},$$

где $\omega = c+d-e-f$, оценка для Δ_2 — как

$$\Delta_2 \geqslant \frac{\omega c_2(N_1, N_2)}{\theta}\left(\frac{k}{\theta}\right)^{\beta}\left(1 - \omega c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{\theta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}\right)^{\beta},$$

утверждение подлеммы:

$$c_1(N_2+1, N^*) > c_1(N_1, N_2) - \lambda N_2^{-\beta},$$

$$c_2(N_2+1,N^*) > c_2(N_1,N_2)\left(1-\omega c_2(N_1,N_2)\Big(\frac{N_2}{\theta}\Big)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}\right)^{\beta} - \lambda N_2^{-\beta},$$

где $\lambda = de - cf$. Обозначим $\omega c_2(N_1,N_2)\Big(\frac{N_2}{\theta}\Big)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}$ через α. При малых α, β справедливо неравенство $(1-\alpha)^{\beta} > 1+\beta\ln(1-\alpha)$. Разумеется, следует предполагать, что существуют и выбраны такие $N_1,\ N_2$, что правые части положительны. Для оценки минорант $c_i(N_1,\infty)$ мы будем заменять неравенства правилами итерационного вычисления минорант на растущих промежутках. Ясно, что миноранты c_i при этом будут убывать (как и сами c_i по определению).

Поскольку

$$\frac{N^*}{N_2} > \theta - \frac{1}{N_2} - \omega c_1(N_1,N_2)N_2^{\beta-1} = \nu,$$

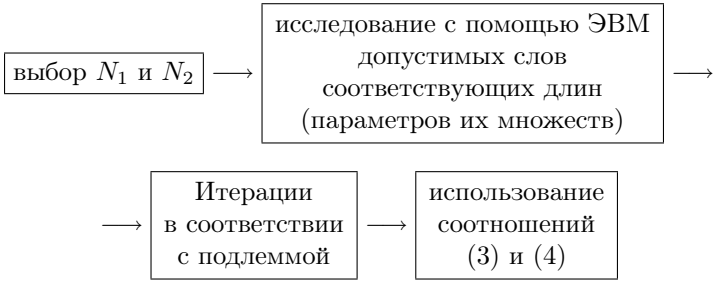
имеем:

$$c_1(N_1,\infty) > c_1(N_1,N_2) - \frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\frac{1}{1-\nu^{-\beta}} = c_1(N_1,N_2) - \frac{\lambda S}{N_2^{\beta}}. \qquad (3)$$

В то же время $c_2(N_2+1,N^*) > c_2(N_1,N_2)(1+\beta\ln(1-\alpha)) - \lambda N_2^{-\beta}$, поскольку $\beta < 1$. Поэтому

$$c_2(N_1,\infty) > c_2(N_1,N_2) - \frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\frac{1}{1-\nu^{-\beta}} + c_2(N_1,N_2)\beta\ln(1-\alpha)\frac{1}{1-\nu^{\beta-1}}. \qquad (4)$$

Разумеется, в (3) и (4) в качестве N_2, может быть взят конец любого получающегося при итерациях промежутка, поэтому, если для каких-либо целей нужна более точная оценка, алгоритм может быть таким:



Для рассмотренного нами частного случая в результате получилось при $N_1 = 4525$ и $N_2 = 20000$: $c_2(N_1,N_2) > 0.27$; $c_1(N_1,N_2) > 0.87$; вычитаемое в формуле (3) $\approx 0.32 \times S : S < 3$, в формуле (4) — $0.32 \times S$.

Последнее недостаточно, но, как легко видеть, если в наших выкладках к словам вида $\eta(A)$ присовокупить их расширения вида $[b]\eta(A)[a]$, то, избавившись от забот о четности, можно в должной мере уменьшить λ, не увеличивая N_2 ($c_1 > 0$ тоже влечет топологическое перемешивание).

В общем же случае в предположении доказанности фактов 1, 2 выбрать D в точности так, как это было сделано, не всегда удается. Может быть предложен следующий путь. Очевидно, что существует такое натуральное l, что подстановка $\eta' = \eta^l$ обладает следующими свойствами:

1) для некоторых символов i, j имеем: $\eta'(i)$ начинается на i, $\eta'(j)$ кончается на j;

2) в слова $\eta'(i)$ и $\eta'(j)$ входит символ b.

Ясно, что если допустимое слово имеет вид iDj, то такой же вид имеет слово $\eta'(iDj)$.

Обозначим через $u_{i,j}(n)$ наименьшее значение содержащей $[c_b n]$ компоненты связности множества значений $|A|_b$ для допустимых слов вида iDj длины n, через $v_{i,j}(n)$ — наибольшее значение этой компоненты связности для допустимых слов вида iDj длины n. Здесь c_b — мера цилиндра, отвечающего однобуквенному слову b.

Если предполагать, что для таких функций $u_{i,j}(n)$ и $v_{i,j}(n)$ доказан факт 2, то топологическое перемешивание можно доказывать так же, как и для нашего частного случая. Действительно, существуют слова E и F,такие, что E есть начинающийся с b конец слова $\eta'(i)$, а F есть кончающееся на b начало слова $\eta'(j)$. Слово

$$a^n_{k_n+1} \dots a^n_{k_n+n+|\eta'^M(b)|}$$

из леммы (формулирующейся без изменений, но, чего вполне достаточно, для подстановки η') ищем в виде $\eta'^M(E\eta'(D)F)$, где iDj — допустимое слово. Ясно, что существуют натуральные числа k_1 и k_2 ($k_1 = |E|_b + |F|_b - 1$; $k_2 = |E|_a + |F|_a$) такие, что условие леммы приобретает вид

$$|D|_a|\eta'^{M+1}(a)| + |D|_b|\eta'^{M+1}(b)| = n - k_1|\eta'^M(b)| - k_2|\eta'^M(a)|.$$

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны частному случаю.

Литература

1. P. M. Dekking, K. Keane, *Mixing properties of substitutions.* Z. Wahr. **42**:1 (1978), 23–33.

2. K. E. Petersen, L. Shapiro, *Induced flows.* Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 375–389.
3. J.-M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theoretical Computer Science **65**:2, 28 (1989), 153–169.

О ПОСТРОЕНИИ МАРКОВСКИХ КОМПАКТОВ

Введение

Имеются два важных комбинаторных подхода к изучению топологических и метрических свойств динамических систем. Первый состоит в использовании образующих и построении эквивалентных символических динамических систем. Второй — предложен недавно [3, 4] для целей метрической теории и теории операторных алгебр и заключается в построении так называемых адических реализаций. Он оказывается полезным при изучении аппроксимационных, спектральных и иных свойств динамических систем [3, 4, 6, 7].

Реализация произвольного эргодического автоморфизма пространства Лебега с вероятностной инвариантной мерой адическим преобразованием марковского компакта осуществлена в работе [4]. С использованием прямой аппроксимационной техники для произвольной плотной инвариантной алгебры измеримых множеств и фиксированной возрастающей к ε последовательности разбиений на множества из этой алгебры А. М. Вершик предложил явный метод построения аппроксимирующих башен и согласованного с алгеброй марковского компакта.

В данной работе предлагается некий канонический метод построения адической реализации символической динамической системы. Поскольку, как легко увидеть, проанализировав доказательство утверждения 10.12 из [8], с. 38, автоморфизм имеет счетную образующую с элементами из рассматриваемой в [4] алгебры, мы получаем новый вариант согласованного с алгеброй компакта.

Приводимая здесь конструкция явно связывает марковский компакт с символическим представлением. Множество всех символических систем разбивается на классы, для каждого из которых строится универсальный компакт.

Алгебра и анализ, **3**:1 (1991), 165–175.

Такое описание динамической системы двумя способами, как это видно на примере подстановочных символических систем [7, 9], должно облегчить изучение не только аппроксимационных, но также комбинаторных, энтропийных и спектральных свойств. Оно способствует применению в аппроксимационной и траекторной теориях методов символической динамики.

В доказательстве наряду с методами метрической теории (построение последовательности специальных автоморфизмов подобно [4] и пр.) используются методы топологической динамики и кодирования.

Приведем определение марковского компакта (без кратных дуг) и адического преобразования (на основе [4]).

Пусть $r_1, r_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел, D_1, $D_2, \dots$, — последовательность множеств (пространств состояний); пусть число элементов в D_i равно r_i. Пусть, далее M_1, $M_2, \dots$ — последовательность $r_i \times r_{i+1}$-матриц из нулей и единиц (матриц перехода):

$$M_i = (m^i_{uv})_{u\in D_i, v\in D_{i+1}}; \quad m^i_{uv} = M_i(u,v) \in \{0,1\}.$$

Марковским компактом называется пространство $\mathcal{Y}$ путей, т. е. последовательностей $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \in D_i$, таких, что $m^i_{x_i x_{i+1}} = 1$ для всех i, снабженное слабой (адической) топологией.

Введем две функции L, $B : \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} D_i \to \{0, 1, \dots\}$ следующим образом: если $x \in D_i$, то $L(x)$ есть число таких $u \in D_{i-1}$, что $m^{i-1}_{ux} = 1$, а $B(x)$ — число таких последовательностей $x_1, \dots, x_i$, что $m^j_{x_j x_{j+1}} = 1$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$ и $x_i = x$.

Предъявим к $\mathcal{Y}$ (к последовательности M_i) дополнительное требование отсутствия адически изолированных точек (т. е. таких последовательностей $(x_1, \dots, x_i, \dots) \in \mathcal{Y}$, что $L(x_i) = 1$ при $i > 1$ для некоторого I). Легко видеть, что этому эквивалентно следующее требование:

$$\lim_{i\to\infty} \min_{x\in D_i} B(x) = \infty.$$

Марковский компакт назовем *минимальным*, если для любого $i > 0$ и любого $x \in D_i$, существует j такое, что для любого $y \in D_j$ существует путь $(x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{Y}$ с $x_i = x$ и $x_j = y$.

Эквивалентное определение выглядит так: существует последовательность $k_1 < k_2 < \dots$, для которой матрицы $M_{k_i} M_{k_i+1} \dots M_{k_{i+1}-1}$ не имеют нулевых элементов при $i = 1, 2, \dots$ (см. предложение 2 из [4]).

Минимальный марковский компакт заведомо не имеет адически изолированных точек.

Предположим теперь, что в каждом D_i элементы пронумерованы натуральными числами от 1 до r_i и каждое D_i соответственно тому упорядочено.

Введем частичное упорядочение $\succ$ на $\mathcal{Y}$: $(x_1, x_2, \dots) \succ (y_1, y_2, \dots)$, если $x_I > y_I$ для некоторого I и $x_i = y_i$ при $i > I$.

Определим *адическое преобразование* U марковского компакта $\mathcal{Y}$, несколько конкретизируя определения на точечном уровне для лучшего понимания дальнейшего. Пусть $K_1(\mathcal{Y}, \succ)$ — множество максимальных элементов в $\mathcal{Y}$ ([2], с. 144), $K_2(\mathcal{Y}, \succ)$ — множество минимальных элементов. Оба эти множества могут быть конечными, счетными, континуальными и иметь мощности, между собой различающиеся.

Пусть, например: $r_i = 2^i + 1$; $D_i = \{a_1^i, \dots, a_{2^i}^i, b_i\}$ и b_i — наибольшее в D_i; $L(a_s^i) = 2$; $M_{i-1}(b_{i-1}, a_s^i) = M_{i-1}(a_\sigma^{i-1}, a_s^i) = 1$ при $\sigma = s \bmod 2^{i-1}$; $i \geqslant 2$, $s = 1, \dots, 2^i$. Тогда K_2 континуально. Если дополнительно потребовать, чтобы $L(b_i) = 2^{i-1} + 1$, $i \geqslant 2$, то компакт $\mathcal{Y}$ будет минимален и K_1 одноточечно.

Если $x \in \mathcal{Y} \setminus K_1$, то существует $y \succ x$ такое, что если $z \succ x$, то $z \succeq y$. Положим $Ux = y$; аналогично определяем U^{-1} на $\mathcal{Y} \setminus K_2$ (поскольку адически изолированные точки отсутствуют, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$). На инвариантном множестве $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus \big(\bigcup_{i=0}^{\infty} U^{-1} K_1 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} U^i K_2 \big)$ преобразования U и U^{-1} определены и взаимно-однозначны; $U\mathcal{Y}' = U^{-1}\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'$. Если компакт $\mathcal{Y}$ минимален, то все траектории и полутраектории всюду плотны (см. также [7]).

Борелевская вероятностная мера μ на $\mathcal{Y}$, инвариантная относительно U, называется центральной. Имеем: $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 0$.

Определим теперь понятие *марковского множества*. Для этого в определении пространства $\mathcal{Y}$ разрешим r_i принимать значение $+\infty$, но потребуем от матриц M_i, чтобы функция L (и соответственно B) принимала лишь конечные значения. Упорядочение $\succ$, множества K_1, K_2, адическое преобразование и центральная мера определяются так же. Переносится на этот случай и первое из определений минимальности. Такое понятие само по себе вполне удовлетворительно для нужд метрической теории.

Обратимся к символическому представлению. Пусть $Z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный алфавит, $X_Z = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$ с $Z_i = Z$ — пространство двусторонних последовательностей [1, 8] со слабой топологией, $T : X_Z \to X_Z$ —

сдвиг, μ — недискретная борелевская вероятностная мера, инвариантная относительно T и эргодическая (в дальнейшем — НБВИЭ-мера).

Через $\mathrm{Cyl}(\mu)$ обозначим множество всех слов над Z, которым соответствуют цилиндры положительной меры. Множество слов $\mathcal{A}$ назовем Cyl-*множеством*, если существует НБВИЭ-мера μ', для которой $\mathcal{A} = \mathrm{Cyl}(\mu')$ (все такие меры будем называть $\mathcal{A}$-мерами). Через $X_Z^{\mathcal{A}}$ обозначим борелевское инвариантное подмножество пространства X_Z, состоящее из всех последовательностей, в которых слова, не принадлежащие $\mathcal{A}$, вообще не встречаются, а слова из $\mathcal{A}$ встречаются с ненулевыми в обе стороны плотностями ([5], с. 11). (Иначе говоря, $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ принадлежит $X_Z^{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $x_{-i}\dots x_0\dots x_i \in \mathcal{A}$, $i \geqslant 1$, и для каждого слова $B \in \mathcal{A}$ выполняется условие: если $\dots - j_n^B < -j_{n-1}^B < \dots < -j_1^B \leqslant 0 \leqslant i_1^B < i_2^B < \dots$ — множество всех номеров, с которых начинаются вхождения слова B в $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, то последовательности $1 \cup \{i_n^B\}_{n=1}^{\infty}$ и $1 \cup \{j_n^B\}_{n=1}^{\infty}$ имеют положительные плотности).

Заметим, что если НБВИЭ-мера μ'' сосредоточена на некотором компактном инвариантном строго эргодическом множестве $M \subset X_Z$ и $\mathcal{A}'' = \mathrm{Cyl}(\mu'')$, то $X_Z^{\mathcal{A}''} = M$.

Мы докажем, что для любого Cyl-множества $\mathcal{A}$ существуют минимальный марковский компакт $\mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}}$ с пространствами состояний $\mathcal{D}_1^{\mathcal{A}}, \mathcal{D}_2^{\mathcal{A}}, \dots$, переходными матрицами $M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}}, \dots$ и адическим преобразованием $U^{\circ\mathcal{A}}$, борелевское множество $X_Z^{''\mathcal{A}} \subset X_Z^{\mathcal{A}}$ полной меры (для всякой $\mathcal{A}$-меры) и борелевское инъективное отображение $f'_{\mathcal{A}} : Z_Z^{''\mathcal{A}} \to \mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}}$, такие, что

$$U^{\circ\mathcal{A}} \circ f'_{\mathcal{A}} = f'_{\mathcal{A}} \circ T$$

и прообразы цилиндрических множеств являются множествами положительной меры ν для любой $\mathcal{A}$-меры ν. Это утверждение составляет содержание теоремы 2.

Упрощенный вариант основной конструкции содержится в доказательстве теоремы 1 о существовании (минимального) марковского множества $\mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ с пространствами состояний $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$, матрицами перехода $M_1, M_2 \dots$ и адическим преобразованием $U^{\mathcal{A}}$, подмножества $X_Z^{'\mathcal{A}} \subset X^{\mathcal{A}}$ и отображения $f_{\mathcal{A}} : X_Z^{'\mathcal{A}} \to \mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ с такими же свойствами.

Тройку $(X_Z^{''\mathcal{A}}, f'_{\mathcal{A}}, \mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}})$ назовем *марковским* $\mathcal{A}$- *компактом*, а тройку $(X'_Z, f_{\mathcal{A}}, \mathcal{Y}^{\mathcal{A}})$ — *марковским* $\mathcal{A}$-*множеством*.

В конце статьи приводится пример применения подобных конструкций для изучения периодических траекторий символических динамических систем.

При подготовке работы полезны были обсуждения теории адических преобразований с А. М. Вершиком, которому автор выражает благодарность.

§1. Марковские множества

Теорема 1. Для любого Cyl*-множества* $\mathcal{A}$ *существует марковское* $\mathcal{A}$*-множество* $(X_Z'^{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{A}}, \mathcal{Y}^{\mathcal{A})}$.

Доказательство. Выберем некоторое натуральное s с $z_s \in \mathcal{A}$ и пронумеруем произвольным образом все слова из $\mathcal{A}$, имеющие вид $\underbrace{z_s \dots z_s}_{m \text{ раз}} z_{i_1} \dots z_{i_k}$ с m, $k > 0$ и $i_1, \dots, i_k \neq s$. Пусть перечень таких слов есть $\{B_j\}_{j=1}^{h_1'}$; $h_1' \leqslant \infty$. Тогда для всякой последовательности $x = (\dots, z_{i_{-k}}, \dots, z_{i_{-1}}, z_{i_0}, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, \dots)$ из $X_z^{\mathcal{A}}$ существует и единственна такая строго возрастающая двусторонняя бесконечная последовательность целых чисел $\dots n_{-k} < n_{-k+1} < \dots < n_0 \leqslant 0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$, что для каждого целого k существует j_k такое, что

$$z_{i_{n_k}} z_{i_{n_k+1}} \dots z_{i_{n_{k+1}-1}} = B_{j_k}.$$

То есть имеем представление для x, которое будем обозначать

$$\{\{B_{j_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0\}.$$

Выделим среди слов B_j те, которые фактически встречаются в представлениях элементов $X_Z^{\mathcal{A}}$. (Пример пропадания: пусть $\mathcal{A}$ таково, что все $\mathcal{A}$-меры сосредоточены на множестве последовательностей вида

$$\{\dots z_{i_{k-1}''} z_s z_s z_s z_{i_k} z_{i_k'} z_{i_k''} z_s z_s z_s z_{i_{k+1}} z_{i_{k+1}'} z_{i_{k+1}''} \dots\},$$

где все i_k, i_k'', i_k^{ii}, $-\infty < k < \infty$, не равны s. Тогда слова типа $z_s z_s z_i$, $i \neq s$, выпадут из исходного списка. Вообще, слово $\underbrace{z_s z_s \dots z_s z_{i_1} \dots z_{i_k}}_{m}$ выпадает, если все слова $z_l \underbrace{z_s \dots z_s}_{m} z_{i_1} \dots z_{i_k} z_s, l \neq s$, не лежат в $\mathcal{A}$).

Перенумеруем их. Их полный перечень $\{B_j\}_{j=1}^{h_1}$, $h_1 \leqslant \infty$, будем рассматривать как новый алфавит Z^1.

Всякая $\mathcal{A}$-мера μ естественным образом индуцирует инвариантную относительно сдвига $T : Z_{Z^1} \to X_{Z^1}$ эргодическую меру μ^* (инвариантную меру производного автоморфизма) в X_{Z^1}, причем, очевидно, $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ не зависит от выбора $\mathcal{A}$-меры μ. Обозначим $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ через $\mathcal{A}_1$.

Теперь проделанное можно повторить для $X_{Z^1}^{\mathcal{A}_1}$, предварительно выбрав $B_{s_1}^1 \in Z^1$. (Заметим, что представления элементов $X_Z^{\mathcal{A}}$ используют все элементы $X_{Z^1}^{\mathcal{A}_1}$ и только их). Тогда получится алфавит $Z^2 = \{B_j^2\}_{j=1}^{h_2}$, и для последовательности $\{B_{j_k}^1\}_{k=-\infty}^{\infty}$, входящей в представление произвольной точки, возникает аналогичное Z^1-представлению точки x Z^2-представление $\{\{B_{j_k^1}^2\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^1\}$, а для самой точки x — представление $\{\{B_{j_k^1}^2\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^1, 1-n_0\}$.

Продолжая построение таким образом, мы для каждого натурального m получим алфавит Z^m, множество слов $\mathcal{A}^m(\mathcal{A})$ и для всякой точки $x \in X_Z^{\mathcal{A}}$ представление $\{\{B_{j_k^{m-1}}^m\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^{m-1}, 1-n_0^{m-2}, \dots, 1-n_0\}$. Ясно, что элементы алфавита Z^m — это слова в Z, имеющие длину, не меньшую, чем 2^m.

Докажем, что для почти всех по любой $\mathcal{A}$-мере точек x бесконечно многие члены последовательности натуральных чисел $1-n_0$, $1-n_0^1$, $1-n_0^2, \dots, 1-n_0^m, \dots$ не равны 1, и бесконечно многие $1-n_1^i$ не равны 0, т. е. вся последовательность x (а не ее односторонняя часть) представлением определена. Обозначим через C множество тех x, для которых все n_0^m равны 0. Тогда множество тех x, для которых в нашей последовательности лишь конечное число не единиц, есть $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n C$. Поскольку все $T^n C$ попарно не пересекаются, $\mu(C) = 0$.

В качестве $X_Z^{'\mathcal{A}}$ возьмем $X_Z^{\mathcal{A}} \setminus \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} T^n C$ ($X_Z^{'\mathcal{A}}$ — аналог $\Omega_{\mathcal{A}}^{1'}$ из [7], с. 788).

Теперь построим марковское множество $Y^{\mathcal{A}}$ и отображение $f_{\mathcal{A}}$.

В качестве $\mathcal{D}_1$ возьмем множество пар $(B_j^1, l) : B_j^1 \in Z^1$, $1 \leqslant l \leqslant |B_j^1|_Z$. Для каждого натурального m в качестве $\mathcal{D}_m$ возьмем множество пар (B_j^m, l): $B_j^m \in Z^m$, $1 \leqslant |B_j^m|_{Z^{m-1}}$ (имеется в виду длина записи в алфавите Z^{m-1}). Переходную матрицу M_m определим следующим образом (отвлекаясь от нумерации в $\mathcal{D}_m$): положим

$$M_m((B_j^m, l_1), (B_{j'}^{m+1}, l_2)) = 1, \quad \text{если} \quad B_{j'}^{m+1} = B_{i_1}^m \dots B_{i_t}^m$$

($t = |B_{j_1}^{m+1}|^{z^m}$ и $i_{l_2} = j$) и 0 в противном случае. От упорядочения в $\mathcal{D}^m$ требуется лишь, чтобы $(B_j^m, l_1) < (B_j^m, l_2)$ при $l_1 < l_2$. В остальном оно произвольно.

Отображение $f_{\mathcal{A}} : X_Z^{'\mathcal{A}} \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i$ строится так. Если последовательность представлений точки есть

$$\{\{B_{k_k^{m-1}}^m\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^{m-1}, 1-n_0^{m-2}, \dots, 1-n_0\},$$

то

$$f_{\mathcal{A}}(x) = ((B^1_{j_0}, 1-n_0), (B^2_{j_0^1}, 1-n_0^1), \dots, (B^m_{j_0^{m-1}}, 1-n_0^{m-1}), \dots).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. При построении алфавитов Z^{m+1} определяющим моментом является выбор слова $B^m_{s_m}$. Его регулированием на каждом шаге можно добиться минимальности адического представления. Выбирать последовательность надо так, чтобы для любых M и N с $B^N_M \in Z^N$ нашлось $m = m(M,N)$ такое, что в представление $B^m_{s_m}$ элементами Z^N входило бы B^N_M. Ясно, что такой выбор легко осуществить.

Если $X^{\mathcal{A}}_Z$ — строго эргодический компакт, то марковское множество окажется компактом. В случае подстановочного строго эргодического компакта [7] получится компакт много более громоздкий, чем стационарный компакт, построенный для этого случая в [7] ($\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \dots = \mathcal{D}$; $M_1 = M_2 = \dots = M$). Как добиться компактности в общем случае? После одноточечной компактификации представление перестанет быть минимальным. Если при построении алфавитов Z^N для каждого N просто ограничить сверху константой C^N длину всех Z'^{N-1}-слов, представляющих элементы Z'^N (например, разрезая на куски соответствующие слова для Z'^N), то мы тоже утратим минимальность. Тогда при соответствующем $\mathcal{A}$ бесконечная последовательность, состоящая из одинаковых букв, будет иметь в марковском компакте образ с не всюду плотной траекторией, в то время как на каждом этапе построения не возникает оснований для ее исчезновения. Построить минимальный марковский компакт все же можно, но для нового соответствия (тоже универсального) прообразы цилиндров, отвечающих словам вида $d_1 \dots d_k$ ($d_i \in \mathcal{D}_i$), будут устроены намного сложнее.

§2. Марковский компакт

Теорема 2. Для всякого Cyl-*множества* $\mathcal{A}$ *существует марковский* $\mathcal{A}$-*компакт* $(X''^{\mathcal{A}}_Z, f'_{\mathcal{A}}, Y^{\circ\mathcal{A}})$.

Доказательство. Построение будет отличаться от предыдущего тем, что на каждом этапе будут происходить перекодирования, изменяющие все предыдущие алфавиты при построении следующего.

Предполагая, что множество Z счетно, введем в рассмотрение еще одно счетное множество $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. В Λ будет рассмотрена возрастающая цепочка не более чем счетных множеств $\Lambda_n \subset \Lambda$ и на каждом

шаге последовательности над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ будут перекодироваться в последовательности над $Z \cup \Lambda_n$.

Для каждого натурального числа m и каждого слова $v_1 \dots v_k$ над $Z \cup \Lambda$ определим m-проекцию — вектор $v_1' \dots v_k'$, где v_i' зависит от v_i следующим образом. Пусть $v_i = z_{n_i}$. Тогда если число $n_i < 2^{m+1}$, то $v_i' = n_i$; если же число $n_i \geqslant 2^{m+1}$ и его двоичное разложение есть $a_0 + 2a_1 + \dots + 2^m a_m + \dots$, то $v_i' = 2^{m+1} + a_0 + \dots + 2^m a_m$. Пусть $v_i = \lambda_{r_i}$. Тогда если число $r_i < 2^{m+1}$, то $v_i' = 2^{m+2} + r_i$; если же число $r_i \geqslant 2^{m+1}$ и $b_0 + 2b_1 + \dots + 2^m b_m + \dots$ — его двоичное разложение, то $v_i' = 2^{m+3} + b_0 + 2b_1 + \dots + 2^m b_m$. Слово $v_1 \dots v_k$ будет называться представителем вектора $v_1' \dots v_k'$ (m считается известным). m-проекция слова однозначно определяет его $m-1$-проекцию. Обозначение: $v_1' \dots v_k' = R_m^2(v_1 \dots v_k)$, $k \geqslant 1$.

Сейчас будет приведено определение специального кодирования (которым мы воспользуемся ниже).

Пусть Z^* — алфавит (конечный или счетный); $X_{Z^*} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i^{*'}$ с $Z_i^{*'} = Z^*$; μ^* — мера в X_{Z^*}, инвариантная и эргодическая относительно сдвига T^* в X_{Z^*}. Пусть, далее, $\{A_i\}_{i=1}^r$, $r \leqslant +\infty$ — набор слов над Z^*, одновременно рассматриваемый как алфавит Z_1^* с символами A_i.

Пусть $\{\tilde{A}_i\}_1^r$ — набор цилиндров, отвечающих словам A_i, и $B_i \subset \tilde{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, — набор μ^*-измеримых множеств положительной меры, такой, что совокупность множеств $\{T^{*j} B_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant |A_i|\}$ представляет собой измеримое разбиение ξ — образующую сдвига T^* [8]. Пусть T_1^* — сдвиг в $X_{Z_1^*}$ и f — функция на $X_{Z_1^*}$, принимающая для последовательности $\{\dots, A_{i_{-k}}, \dots, A_{i_0}, \dots, A_{i_k}, \dots\}$ значение $|A_{i_0}| - 1$. Пусть $U_1^* : Q^f_{Z_1^*} \to Q^f_{Z_1^*}$ — специальный автоморфизм, построенный по T_1^* и f. Очевидно, что в $Q^f_{Z_1^*}$ существует инвариантная эргодическая относительно U_1^* мера μ_1^* такая, что T^* и U_1^* метрически изоморфны, причем изоморфизм реализуется естественным отображением $\varphi : X_{Z^*} \to Q^f_{Z_1^*}$. Выделение образующей ξ эквивалентно фиксации для почти всякой последовательности $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ представления (в естественном смысле инвариантного относительно сдвига) в виде $\{\{\dots, A_{i_{-k}}, \dots, A_{i_0}, \dots, A_{i_k}, \dots\}, 1 - n_0\}$ (подобно тому, как это делалось в доказательстве теоремы 1), такого, что множества $B_i = T^{*-1}\{x \,|\, n_0 = 0; i_0 = i\}$ μ^*-измеримы. Такое представление вместе с отображением φ мы будем называть *специальным кодированием*. Очевидно, что композиция отображений специальных кодирований φ_1 и φ_2 является отображением специального кодирования. Соответству-

ющее представление и набор слов легко строятся по представлениям φ_1 и φ_2. Простейший пример может быть получен, если $\{A_i\}$ образуют код со свойством однозначного декодирования (по крайней мере почти всюду по мере μ^*). С такой ситуацией мы встретились в доказательстве теоремы 1. Пусть $P_* : Q^f_{Z_1^*} \to X_{Z_1^*}$ — проекция.

Если обозначить через $\mathcal{A}'$ множество слов $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ и провести рассмотрение, аналогичное предыдущему, на теоретико-множественном уровне, требуя от $B_i \subset X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$, чтобы они были открытыми в относительной топологии $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*} \subset X_{Z^*}$, а от разбиения $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}\xi$ — чтобы оно было образующей в теоретико-множественном смысле (определение [8] без пренебрежения множествами меры 0), то мы получим определение $\mathcal{A}'$-специального кодирования, причем определения T_1^*, U_1^*, f, $Q^f_{z_1^*}$ останутся в прежнем виде, а сужение φ на $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$ окажется гомеоморфизмом между $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$ и $P_*^{-1}X^{\mathrm{Cyl}(\mu_1^*)}_{Z_1^*}$, индуцирующим биекцию классов $\mathcal{A}'$-мер и $\mathrm{Cyl}(\mu_1^*)$-мер. Ниже описывается класс необходимых для дальнейшего кодирований именно такого типа.

Пусть $Z' = \{z_n^*\}_1^{r_*}$ — счетный или конечный алфавит, $z_p^* \in Z'$, $X_{Z'}$ и T' определены по аналогии с X_Z и T. Пусть $\mathcal{A}^*$ — некоторое Cyl-множество слов над Z'. Зададимся натуральным K. Тогда существует такой набор слов $\{B_i\}$, что для каждой последовательности

$$x' = \{\dots, z^*_{i_{-k}}, \dots, z^*_{i_0}, \dots, z^*_{i_k}, \dots\} \in X^{\mathcal{A}^*}_{Z'}$$

имеем представление $\{\{B_{j'_k}, 1 - n_0\}$ (см. §1), для которого существует множество целых чисел $\{l_s\}_{-\infty}^{\infty}$, $l_{-1} < 0 \leqslant l_0$; $l_s > l_{s-1}$, $-\infty < s < \infty$, такое, что

1) $|B_{l_s+i}| = K, 1 \leqslant i < l_{s+1} - l_s$;

2) $K \leqslant |B_{l_{s+1}}| < 2K$;

3) соединение $B_{l_s+1} \dots B_{l_{s+1}}$ можно представить как $C_1^s \dots C_{r_s}^s$, где $r_s \geqslant 1, |C_1^s| \geqslant K'$, $|C_i^s| < K'$ при $i > 1$, каждый блок C_i^s имеет вид $z_p^* z_p^* \dots z_p^* z_{m_1}^* \dots z_{m_t}^*$, причем $m_k \neq p$, $1 \leqslant k \leqslant t$.[12] Такое представление (если в особых случаях алгоритм фиксирован) единственно. Оно определяет $\mathcal{A}^*$-специальное кодирование. Назовем его (z_p^*, K)-представлением. Пример $(1, 3)$-представления:

$$\begin{array}{cccccccc} 110 & 0010 & 111 & 00000 & 110 & 1010 & 110 & 110 \\ B_{l_1+1} & B_{l_2} & B_{l_2+1} & B_{l_3} & B_{l_3+1} & B_{l_4} & B_{l_5} & B_{l_6}. \end{array}$$

[12] K' таково, что в последовательностях из $X^{\mathcal{A}^*}_{Z'}$ содержатся блоки-компоненты C обоих типов (либо K, либо минимальное возможное). Если все $|C_i^s|$ одинаковы, что вместо $|C_i^s|$ берется $t(C_i^s)$, и т. д. Если K' слишком мало, то строятся блоки того минимального «ранга», при котором осмысленно говорить о соединении $B_{l_s+1} \dots B_{l_{s+1}}$.

Вернемся к исходной задаче. В качестве Λ_1 возьмем пустое множество, в качестве Z^1 — совокупность 0-проекций однобуквенных слов из $\mathcal{A}$, $Z^1 \subseteq \{1,2,3\}$. Возникает тривиальное специальное кодирование всех 0-проекций точек из $X_Z^{\mathcal{A}}$.

Предположим, что алфавит Z^{n-1} построен и что все элементы, его образующие, суть $(n-2)$-проекции каких либо слов над $Z \cup \Lambda_{n-1}$, содержащих элементы Z. Пусть зафиксированы: Cyl-множество $\mathcal{A}_{n-1}$ над $Z \cup \Lambda_{n-1}$, коммутирующий со сдвигом гомеоморфизм $\varphi_n : X_Z^{\mathcal{A}} \to X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}^{\mathcal{A}_{n-1}}$ (в относительных топологиях подмножеств X_Z и $X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}$), индуцирующий биекцию классов $\mathcal{A}$-мер и $\mathcal{A}_{n-1}$-мер; $\mathcal{A}_{n-1}$ – специальное кодирование с помощью слов-представителей элементов Z^{n-1}, индуцирующее естественным образом представление $(n-2)$-проекций точек $X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}^{\mathcal{A}_{n-1}}$ с помощью элементов Z^{n-1}.

Предположим также, что заданы аналогичные объекты предыдущих этажей с теми же свойствами. Поскольку предыдущие алфавиты будут корректироваться (после чего они тоже будут над $Z \cup \Lambda_n$), обозначим их через Z_{n-1}^k $(0 < k < n)$. Иерархическое соотношение алфавитов Z_{n-1}^k таково же, как в доказательстве теоремы 1.

Приступим к построению всех перечисленных объектов для n-го этажа с теми же свойствами.

Обозначим $|Z_{n-1}^{n-1}|$ через R_{n-1}; общий наибольший делитель всех длин слов Z_{n-1}^{n-1} над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ обозначим через d_{n-1}, сумму длин всех слов Z_{n-1}^{n-1} — через S_{n-1}, минимум — через Q_{n-1}. Выделим произвольно одно из слов c^{n-1}. Очевидно, существует такое c'_{n-1}, что для всякого натурального $l > c'_{n-1}/d_{n-1}$ найдутся натуральные $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$, такие, что b_i суть длины слов из Z_{n-1}^{n-1} и $a_1b_1 + \ldots + a_sb_s = ld_{n-1}$. Выберем натуральное $K_n > n^2$ такое, что $K_nQ_{n-1} > S_{n-1} + |c^{n-1}| + c'_{n-1}$. Пусть $B'_1, \ldots, B'_{R_{n-1}}$ — полный перечень слов из Z_{n-1}^{n-1}. Рассмотрим (B'_1, K_n)-представление $(n-2)$-проекций над Z_{n-1}^{n-1}. Из выбора K_n следует, что для каждого участвующего в нем слова $D = u_1 \ldots u_r$ над $Z_{n-1}^{n-1}(K_n \leqslant r < 2K_n)$ найдется другое слово ε над Z_{n-1}^{n-1} вида $B'_1 \ldots B'_{R_{n-1}} c^{n-1} h_1 \ldots h_l$, такое, что $|D|_{Z\cup\Lambda_{n-1}} = |E|_{Z\cup\Lambda_{n-1}}$. Для каждого слова B из Z_{n-1}^{n-1} зафиксируем представителя $\mathrm{Rep}(B)$ из $\mathcal{A}_{n-1}$ и рассмотрим перечень M_{n-1} всех слов над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ (множество их длин конечно), участвующих в композиции исходного $\mathcal{A}_{n-1}$-специального кодирования (связанного с Z_{n-1}^{n-1}-представлением), и того, которое индуцирует (B'_1, K_n)-представление $(n-2)$-проекций. Определим инъекцию $f_{n-1} : M_{n-1} \to \Lambda \setminus \Lambda_{n-1}$, такую, что $\Lambda \setminus (\Lambda_{n-1} \cup f_{n-1}(M_{n-1}))$ бесконечно. Зафиксируем символ в $\mathrm{Rep}(c^{n-1})$, принадлежащий Z. Поста-

вим в соответствие каждому элементу $g \in M_{n-1}$ слово $\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)$, получающееся заменой этого символа на $f_{n-1}(g)$. Обозначив через Λ_n множество $\Lambda_{n-1} \cup f_{n-1}(M_{n-1})$, определим отображение f^*_{n-1} множества слов M_{n-1} в множество слов над $Z \cup \Lambda_n$, сохраняющее длину слова. Пусть $D = R^2_{n-2}(g)$. Зафиксируем одно из возможных слов E, выше поставленных в соответствие слову D, и в качестве $f^*_{n-1}(g)$ возьмем $\mathrm{Rep}(B'_1)\dots\mathrm{Rep}(B'_{R_{n-1}})\,\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)\,\mathrm{Rep}(h_1)\dots\mathrm{Rep}(h_l)$. Пусть самое длинное слово из M_{n-1} имеет длину u^*_n, самое короткое — v^*_n. Возьмем натуральное $K'_n \geqslant 1 + u^*_n K_n / v^*_n$. Гомоморфизм φ_n будет строиться как композиция $\varphi'_n \circ \varphi_{n-1}$. Для построения φ'_n выберем некое $g'_n \in M_{n-1}$ и определим (g'_n, K'_n)-представление M_{n-1}-последовательностей. Пусть $G = g_1 \dots g_l$ $(K'_n \leqslant l < 2K'_n)$, $g_i \in M_{n-1}$ — слово, в нем участвующее. Положим $\varphi'^*_n(G) = f^*_{n-1}(g_1) q_2 \dots g_l$. Наконец, для произвольной точки, имеющей в M_{n-1}-словах представление $\{\{G_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, 1-p_0\}$, определяем ее φ_n-образ как $\{\{\varphi'^*_n G_i\}, 1-p_0\}$; p_0, аналогично предыдущему, — номер первого $Z \cup \Lambda_{n-1}$-символа G_0. Тем самым построено φ_n и отвечающее индуцируемому им отображению мер новое Cyl-множество $\mathcal{A}_n$ над $Z \cup \Lambda_n$. Нашему представлению φ'_n-образов отвечает $\mathcal{A}_n$- специальное кодирование. Ясно, что φ_n удовлетворяет всем предъявляемым требованиям. В качестве элементов Z^n_n берем $(n-1)$-проекции всех слов вида $\varphi'^*_n(G)$, участвующих в этом кодировании. Коррекцию предыдущих алфавитов (состоящую, как мы увидим, в их сохранении или увеличении без изменения множества длин слов) осуществляем исходя из требования сохранения иерархической структуры слов (мест расположения подслов низших уровней) — $(n-2)$-проекций (R^2_{n-2}) всех $\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)$. Z^{n-1}_n-структура слова из Z^n_n такова: если оно есть проекция $f^*_{n-1}(g_1) g_2 \dots g_l$, то рассматриваются $(n-2)$-проекции составляющих $f^*_{n-1}(g_1)$ и $(n-2)$-проекции всех составляющих g_2, составляющих g_3, и т. д. Индукционный переход завершен.

Из построения ясно, что для каждого n найдется $N(n)$, такое, что $Z^n_{N(n)} = Z^n_{N(n)+1} = \dots$ Обозначим $Z^n_{N(n)}$ через $Z^n = \{B^n_i\}_{i=1}^{l_n}$. Поскольку $\sum 1/K_n < \infty$, существует инвариантное подмножество $X^{*\mathcal{A}}_Z \subset X^{\mathcal{A}}_Z$ полной меры для любой $\mathcal{A}$-меры, такое, что для любой его точки x последовательность $\varphi_n(x)$ имеет предел $\varphi_\infty(x)$ в слабой топологии пространства последовательностей над $Z \cup \Lambda$.

Отображение φ_∞ биективно на $X^{*\mathcal{A}}$, и для каждой последовательности из $\varphi_\infty(X^{*\mathcal{A}}_Z)$ наша стабилизирующаяся последовательность специальных кодирований и перекодирований определяет иерархическую структуру Z^n-представлений $(n-1)$-проекций, т. е. для точ-

ки x имеем при каждом n представление $\{\{B^n_{j_k^{n-1}}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-p_0^{n-1}, 1-p_0^{n-2}, \dots, 1-p_0\}$, где $B^n_{j_k^{n-1}} \in Z^n$ суть проекции соответствующих слов. Так же, как в теореме 1, доказывается, что для почти всех точек (по любой инвариантной нормированной мере) бесконечно многие члены последовательности $1-p_0, \dots, 1-p_0^m, \dots$ не равны 1, чем и определено множество $X_Z^{''\mathcal{A}}$. Элементы $\cup\Lambda_n$ — «метки» иерархической структуры.

Для каждого слова $B_j^m \in Z^m$ обозначим через N_j^m Z^{m-1}-длину $(m-2)$-проекции. Построим марковский компакт. В качестве $\mathcal{D}_m^{\mathcal{A}}$ возьмем множество пар (B_j^{m+1}, l), $1 \leqslant l \leqslant N_j^{m+1}$. Положим $M_m^{\mathcal{A}}((B_j^{m+1}, l_1), (B_{j'}^{m+2}, l_2)) = 1$, если m-проекция $B_{j'}^{m+2}$ имеет вид $B_{i_1}^{m+1} \dots B^{m+1}_{i_{N_{j'}^m}}$ и $i_{l_2} = j$.

Упорядочение и отображение $f'_{\mathcal{A}}$ определяются по аналогии с теоремой 1. Минимальность ясна из определения $f_n(g)$, подобно замечанию после доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Заметим, что получившийся марковский компакт весьма избыточен и мог бы быть использован для континуального Z. При определении m-проекции различение случаев u_i, $r_i < 2^{m+1}$ и u_i, $r_i \geqslant 2^{m+1}$ делалось для того, чтобы по конечному числу координат точки марковского компакта определять координаты исходной последовательности.

§3. Периодические точки символических динамических систем

С помощью построения, близкого построению марковского компакта, будет в символической ситуации дан ответ на один вопрос Д. А. Линда. Вопрос состоял в том, существует ли для гомеоморфизма компактного метрического пространства компактное множество, содержащее ровно одну точку каждой периодической траектории [10].

Такой компакт будет построен для каждой динамической системы $T' : D \to D$, $T' = T|_D$, где $T : X_Z \to X_Z$ — сдвиг в пространстве двусторонних последовательностей элементов конечного алфавита $Z = \{1, \dots, n\}$, а D — замкнутое в слабой топологии (как известно, метризуемой) инвариантное относительно T множество.

Предложение. Если $D \subset X_Z$ — замкнутое множество, инвариантное относительно сдвига T в X_Z, то существует компакт $K \subset D$ такой, что если $x \in D$ и $T^m x = x$ для некоторого m и

$T^{m'}x \neq x$ при $1 \leqslant m' < m$, то существует единственное $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, такое, что $T^i x \in K$.

Доказательство. Множество будет строиться следующим образом: будет выбрано по одной точке из каждой периодической траектории и доказано, что замыкание получившегося множества K' не содержит других периодических точек.

Введем упорядочение в множестве всех слов из Z. На множестве слов длины k соотношение $a_1 \dots a_k < b_1 \dots b_k$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое k_0, $0 < k_0 \leqslant k$, что $a_s = b_s$ при $s < k_0$ и $a_{k_0} < b_{k_0}$. Из двух слов разной длины большим будем считать более длинное. Пусть a — одна из точек периодической траектории, изображающаяся периодической с периодом N двусторонней последовательностью из $D : a = \{u_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$; пусть $u = \max\limits_{-\infty<i<\infty} u_i$. Тогда существует j, такое, что $u_j = u$. В этом случае блок $P = \{u_j, \dots, u_{j+N-1}\}$ есть соединение $A_1^1 \dots A_{n_1}^1$, где каждый блок Y из числа A_j^1 имеет вид u или $y_1 \dots y_{|Y|}$, где $y_1 = u$ и $y_i < u$ при $|Y| \geqslant i > 1$. Если $n_1 = 1$, то включим точку $T^{j-1}a$ в K' и назовем ее точкой *первого типа*; если нет, то рассматриваем максимальный блок A^2 среди A_j^1. Пусть перечень ему равных есть $A_{i_1^1}^1 \dots A_{i_{n_2}^1}^1$. Если $n_2 = 1$, то полагаем $t_2 = \sum\limits_{i<i_1} |A_i^1| + j$, берем точку T^{t_2-1}, включаем ее в K' и называем точкой II типа. Если $n_2 > 1$, то имеем представление $P = B_2 A_1^2 \dots A_{n_2-1}^2$, такое, что если обозначить $A_2' B_2$ через $A_{n_2}^2$, то каждый блок второго уровня A_i^2 имеет вид A^2 или $A^2 A_i^1 \dots A_{i'+k}^1$, где все $A_{i'+l}^1 < A^2$ при $0 \leqslant l \leqslant k$. Дальше, выбрав максимальный блок A^3 среди A_i^2, действуем точно так же, как на предыдущих этапах, разделяя случаи $n_m = 1$ и $n_m > 1$. Ясно, что точки, включаемые в K', не зависят от выбора исходных точек на периодических траекториях, которым они принадлежат. Блоки каждого уровня, равные максимальному, будем называть основными блоками этого уровня. Для каждой периодической точки построение, как легко понять, закончится, и ее образ при каком-либо T^s будет включен в K'. В качестве K возьмем замыкание K'.

Докажем, что K содержит периодические точки только из K'. Действительно, если периодическая точка $b = \{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ наименьшего периода N' содержится в K и, стало быть, в D, то для каждого $n > 0$ должно найтись $v_n \in K'$ такое, что $v_n = \{r_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ имеет период, больший, чем nN' (иначе совершенно очевидно, что $b = v_n$ и лежит в K'), и $r_1 \dots r_{nN'} = b_1 \dots b_{nN'}$. Построение основных блоков всех уровней

для любой точки из X должно происходить так же, как для всех ее сдвигов. Мы должны индукцией по типу, совпадающему с высшим уровнем блоков, доказать, что построение, на начальных этапах параллельное для b и v_n, должно было успеть (при больших n) выявить, что $b \in K'$. Но это ясно из структуры последовательности из K' — ее положительная часть $\{b_i\}_1^\infty$ начинается с основного блока A_M уровня M; его начало A_{M-1} — основной блок уровня $M-1$; его начало A_{M-2} — основной блок уровня $M-2$, и т. д. Найдется наибольшее M', такое, что $A_{M'} \subset b_1 \dots b_{nN'}$ ($A_{M'}$ не зависит от $\{r_i\}_{nN'+1}^\infty$). Если $A_{M'} \supseteq b_1 \dots b_{N'}$, то все доказано. Если $A_{M'} \subset b_1 \dots b_{N'}$, то при $n \geqslant 2$ оказывается, что на «неосновном» участке $b_{N'+1} \dots b_{nN'}$ для $A_{M'+1}$ можно разместить основной блок — сдвиг $A_{M'}$ на N'. Невозможность этого легко доказывается индукцией по построению, с учетом того, что про каждое подслово $\{r_i\}$, не зная его места, можно сказать, является ли оно основным блоком построения, и если да, то указать уровень. Предложение доказано.

Литература

1. П. Биллингслей, *Эргодическая теория и информация*, Мир, М., 1969.
2. Н. Бурбаки, *Теория множеств*. Мир, М., 1965.
3. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*. ДАН СССР **259**:3 (1981), 526–529.
4. А. М. Вершик, *Теорема о марковской аппроксимации в эргодической теории*. Зап. науч. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
5. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник, *Элементарные методы в аналитической теории чисел*. ФМ, М, 1962.
6. А. Н. Ливщиц, *О спектрах адических преобразований марковских компактов*. Успехи мат. наук **42**:3 (1987), 189–190.
7. А. Н. Ливщиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*. Мат. заметки **44**:6 (1988), 785–793.
8. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*. Успехи мат. наук **22**:5 (1967), 3–56.
9. W. H. Gottschalk, *Substitutions minimal sets*. Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467– 491.
10. D. A. Lind, *Dynamical properties of quasihyperbolic toral automorphisms*. Ergod. Th. and Dynam. Sys. **1**:2 (1982), 49–68.

ADIC MODELS OF ERGODIC TRANSFORMATIONS, SPECTRAL THEORY, SUBSTITUTIONS, AND RELATED TOPICS

A. M. Vershik and A. N. Livshits

Introduction

We shall state here the definitions and main theorems for "adic" transformations, and discuss their relationship to other topics. The notion of adic transformation comes from certain ideas about approximation in ergodic theory that were developed by the first author in the 70s and which are connected with the AF and C^*-algebra approach to the study of skew products, actions of general groups, etc. Later the second author made an important remark about their relationship with substitution theory: namely, stationary adic transformations are nothing more than substitutions. So we have two different models for Morse-like transformations. We shall give more details and describe later progress in forthcoming papers. Here we also present the first examples of multidimensional adic transformations.

§1. Adic transformations and adic realizations

1.1. Definitions. We begin with the definitions of a Markov compactum and adic transformation due to A. M. Vershik [1, 2].

Suppose $D_1, \dots, D_n, \dots$ is a sequence of finite sets, $|D_i| = r_i$, the r_i are arbitrary natural numbers > 1, and M_i is a sequence of $r_i \times r_{i+1}$ matrices of 0's and 1's. Let us suppose that the elements of D_i are enumerated as $\{\beta_1^i, \dots, \beta_{r_i}^i\}$, and $M_i = \{m_{jk}^i\}$, $j = 1, 2, \dots, r_i$, $k = 1, \dots, r_{i+1}$.

Advances in Soviet Mathematics, Vol. **9**, 185-204 (1992).

An associated *Markov compactum* Y is defined as the space of paths, i.e., one-sided sequences $x_1, x_2, \dots$; $x_i \in D_i$, $i = 1, 2, \dots$, such that $m^i_{jk} = 1$ if $x_i = \beta^i_j$ and $x_{i+1} = \beta^{i+1}_k$. We consider this as a topological space with the weak topology of the space of sequences. Together with the topology we introduce an ordering in Y: we say that

$$(x_1, x_2, \dots) \prec (y_1, y_2, \dots)$$

if there exists an I such that

$$x_I = \beta^I_m,\ y_I = \beta^I_n,\ m < n, \quad \text{and} \quad x_i = y_i \quad \text{for} \quad i > I.$$

Let K_1 be the set of minimal elements of $\prec$, and K_2 the set of maximal elements.

We shall call the Markov compactum $Y = Y(\{D_i\}, \{M_i\})$ *minimal* if for every S there exists an S' such that the matrix $M_{S+1} \cdots M_{S'+1}$ has only positive elements. In this case the maximal linearly ordered subsets of $(Y, \prec)$ are infinite; in fact, they are order-isomorphic to $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, or $\mathbb{Z}_-$. In the general case, finite ones are possible.

If $x \in Y \setminus K_2$, then there exists a y such that $z \succ x$ implies $z \succeq y$. Such a y must be unique. Define $U(x) = y$ to get the map $U : Y \setminus K_2 \to Y \setminus K_1$. The inverse map $U^{-1} : Y \setminus K_1 \to Y \setminus K_2$ can be defined in a similar way. For a minimal compactum $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, even the sums $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} U^i K_1$ and $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} U^{-i} K_2$ are defined, and

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} U^i K_1 \right) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} U^{-i} K_2 \right) = \varnothing.$$

If

$$Y' = Y \setminus \left(\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} U^i K_1 \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} U^{-i} K_2 \right) \right),$$

then Y' is a U-invariant set and $U|_{Y'}$ is a bijection. The map U is called an *adic* transformation.

If Y is minimal, then all the two-sided and one-sided trajectories of U are dense in Y. Any normalized Borel measure $\mathcal{G}$ in Y which is invariant under U is called a *central* measure. If there are no finite maximal linear ordered subsets, then evidently $\mathcal{G}(K_1) = \mathcal{G}(K_2) = 0$, but in special cases even their presence does not prevent this. If $D = D_1 = D_2 = \dots$ and

$M = M_1 = M_2 = \dots$, then the adic automorphism is called *stationary*. It is easy to see that if the corresponding Markov compactum is minimal, then there is only one central measure which is equivalent to the measure of maximal entropy for a topologically transitive Markov chain with transition matrix M ([3]: a kind of unique ergodicity). These two measures differ by a distribution of the first coordinate.

The next object of this theory is the *Markov compactum with change of order* [4]. In fact, the compactum with a more general order is defined in [4]. We shall give the definition only for the stationary case. Let M, D, Y be the same as in the ordinary case. Let $D = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$, and suppose $0 = \{\underset{1}{\prec}, \dots, \underset{r}{\prec}\}$ be a vector of total orderings of the subsets $U_1, \dots, U_r$ of D; $U_j = \{\beta_i : m_{ij} = 1\}$.

We define a new ordering $\underset{0}{\prec}$ on $Y : x_1 \dots \underset{0}{\prec} y_1 \dots$ if there exists an I such that for every $i > I$ we have $x_i = y_i$ and $x_{I+1} = y_{I+1} = \beta_j$ implies $x_I \underset{j}{\prec} y_I$. Having defined the ordering $\underset{0}{\prec}$, we can define K_1^0, K_2^0, and $U_0 : Y \setminus K_2^0 \to Y \setminus K_1^0$ similarly to the previous K_1, K_2, and U. This may be done in the nonstationary case as well.

For the stationary case we can make a further generalization: we define *generalized adic transformation* (GAT) [5]. Let $D = \{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ be an alphabet, and $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^l$ a list of words in D. Denote by $G_{\mathcal{A}}$ the matrix $(g_{ij})_{i,j=1}^l$, g_{ij} being the number of occurrences of β_j in the word A_i. Let

$$h(j) = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} g_{ij}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l.$$

For every β_j introduce $h(j)$ marked symbols $\beta_j^{(s)}$, $1 \leqslant s \leqslant h(j)$. By $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ we denote the space of sequences of marked symbols $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots$ such that for any $k \geqslant 0$ if $y_k = \beta_p$ and $y_{k+1} = \beta_q$, then $i_k \leqslant g_{qp}$ ($y_k^{(i_k)}$ corresponds to the i_kth occurrence of β_p in A_q). As in the adic case, these will be called *paths*.

Denote by $K_{\mathcal{A}}^1$ the set of sequences such that for any $s \geqslant 0$, if $y_s = \beta_r$ and $y_{s+1} = \beta_q$, then the i_sth occurrence of β_p in A_q is the last letter of A_q (in this case, of course, $i_s = g_{qp}$). Again we introduce the map

$$T_{\mathcal{A}}^1 : \Omega_{\mathcal{A}}^1 \setminus K_{\mathcal{A}}^2 \to \Omega_{\mathcal{A}}^1 \setminus K_{\mathcal{A}}^1.$$

It is defined in the following way. If $y_1 = \beta_p$ and $A_p = a_1 \dots a_m$, and the symbol corresponding to $y_0^{(i_0)}$ is the sth symbol in A_p, with $s < m$, then

$$T_{\mathcal{A}}^1(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = (a_{s+1}^j, y_1^{(i_1)}, y_2^{(i_2)}, \dots),$$

where for the symbol a_{s+1} the number of its occurrence is marked too. If $s = m$, then let t be the smallest positive number such that the symbol corresponding to $y_t^{(i_t)}$ is not the last in the word $A_v = a'_1 \dots a'_q$ ($y_{t+1} = \beta_v$); in fact this symbol is the s'th symbol, $s' < q$. Then

$$T^1_{\mathcal{A}}(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = (z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, \dots, z_{t-1}^{(1)}, z_t^{(j)}, y_{t+1}^{(i_{t+1})}, y_{t+2}^{(i_{t+2})}, \dots),$$

where $z_t = a'_{s'+1}$ (j is its number of occurrence) and every $z_i^{(1)}$, $i < t$, is the first letter in the corresponding word (A_p for $z_{i+1} = \beta_p$). The inverse $(T^1_{\mathcal{A}})^{-1}$ is defined similarly: $(T^1_{\mathcal{A}})^{-1} : \Omega^1_{\mathcal{A}} \setminus K^1_{\mathcal{A}} \to \Omega \setminus K^2_{\mathcal{A}}$. By means of $T^1_{\mathcal{A}}$ one can order the paths: $\Gamma_1 \underset{\mathcal{A}}{\succ} \Gamma_2$ if there exists an $m > 0$ such that $T^{1m}_{\mathcal{A}} \Gamma_2 = \Gamma_1$.

We shall further assume that $G_{\mathcal{A}}$ is primitive, i.e., some power of $G_{\mathcal{A}}$ has only positive elements. In this case, analogous to the adic case, $T^1_{\mathcal{A}}$ is minimal and only one central measure (defined similarly) exists.

One can see that GAT is a generalization of adic with change of order. Indeed, let A_j be a word formed by elements of U_j (from the definition of adic with change of order) ordered by $\underset{j}{\prec}$ from left to right, and $l = r$. Then $h(j) \equiv 1$, and for $\mathcal{A} = \{A_j\}$, (Y, U_0) is the same as $(\Omega^1_{\mathcal{A}}, T^1_{\mathcal{A}})$ (modulo the difference of numeration: $y_1, y_2, \dots$ and $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}$, where $i_j = 1$). A GAT can also be described in terms of adic with change of order, and with a matrix M of natural numbers (rather than $0 - 1$).

1.2. Definition of substitutions and Morse sequences. Let D, $\mathcal{A}$, $G_{\mathcal{A}}$ be the same as in the definition of GAT. Define the map

$$\omega_{\mathcal{A}} : \bigcup_{k=1}^{\infty} D^k \to \bigcup_{k=1}^{\infty} D^k : \omega_{\mathcal{A}}(\beta_{i_1} \dots \beta_{i_s}) = A_{i_1} \dots A_{i_s}.$$

The restriction $\omega_{\mathcal{A}}|D$ is called a *substitution*. Using this notion, we can define a class of transformations with invariant measure, which is very important for ergodic theory (see [6, 7, 8, 9, 10], for example).

Call *generating quadruple* a quadruple of natural numbers (i, j, m, n), $i \leqslant l$, $j + 1 \leqslant |A_i|$, such that there exist symbols a, b, c, $d \in D$ for which

(1) c and d are the jth and $(j+1)$th symbols, respectively, of the word A_i;

(2) the word $\omega^m_{\mathcal{A}} c$ ends with a and the word $\omega^m_{\mathcal{A}} d$ begins with b;

(3) $\omega^n_{\mathcal{A}}(a)$ ends with a and $\omega^n_{\mathcal{A}}(b)$ begins with b.

Generating quadruples always exist. Choose one of them and build the sequence of concatenations of words: $\{a\}\{b\}$; $\omega^n(a)\omega^n(b)$; $\omega^{2n}(a)\omega^{2n}(b)$,

and so on. In every concatenation enumerate the symbols from the left in such a way that the last symbol of $\omega^{kn}(a)$ will have the number 0. By property (3) of generating quadruples, the sequence of words will grow, tending to its union, a two-sided infinite sequence of symbols of D, which we denote by $x(i,j,m,n)$. Consider the weak closure of the trajectory of $x(i,j,m,n)$ in the space of two-sided sequences under the shift. If $G_{\mathcal{A}}$ is primitive (in this case the substitution is called *primitive*), then this set does not depend on the choice of generating quadruple. Denote it by $X_{\mathcal{A}}$.

The shift $S : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$ will be called the *substitution automorphism*. As a homeomorphism of the compactum $X_{\mathcal{A}}$, S is uniquely ergodic [10]. It never mixes [11], but it can have discrete, continuous, and mixed spectrum ([8, 9, 12, 13], etc.).

The sequence $x = \dots \beta_{i_{-s}} \dots \beta_{i_0} \dots \beta_{i_s} \dots$ will be called admissible if $x \in X_{\mathcal{A}}$. We shall say that the substitution $\omega_{\mathcal{A}}$ is UAD (has unique admissible decoding) if every admissible $\dots \beta_{i_{-s}} \dots \beta_{i_0} \dots \beta_{i_s} \dots$ has a unique representation as an infinite concatenation $\dots A_{j_{-s}} \dots A_{j_0} \dots A_{j_s} \dots$ for which $\beta_{i_0} \in A_{j_0}$ and the sequence $\beta_{j_{-s}} \dots \beta_{j_0} \dots \beta_{j_s} \dots$ is admissible too. There are some conditions for UAD [14], but necessity has not been proven.

Substitutions have zero entropy, and because of this determinism admit a "one-sided" description, which is used by some authors [7, 8].

Now we define a larger class of automorphisms, the "generalized Morse sequences"; this class has the cardinality of the continuum [15, 16, 17]. If $A = a_1 \dots a_k$ and $B = b_1 \dots b_s$ are 0-1 words, we define the product

$$A \times B = a_1^1 \dots a_k^1 a_1^2 \dots a_k^2 \dots a_1^s \dots a_k^s,$$

where $a_i^j = a_i$ if $b_j = 0$, and $a_i^j = \bar{a}_i$ [13] if $b_j = 1$. Let $c_1 \dots c_n c \dots$ be a sequence of 0-1 words of length more than 1, beginning with 0; let infinitely many among them differ from $00 \dots 0$, infinitely many from $0101 \dots 010$, and

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|c_i|} \min\{\mathrm{fr}(0, c_i), \mathrm{fr}(1, c_i)\} = \infty.$$

Take $x = c_1 \times c_2 \times \dots$ and consider the closure $\mathcal{O}_x$ of the orbit of x in $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ under the left shift σ. It is known that $\sigma|_{\mathcal{O}_x}$ is uniquely ergodic. These dynamical systems have interesting metric and spectral properties.

[13] Здесь $\bar{a} = 1 - a$ (*Прим. ред.*).

1.3. Equivalence of representations from 1.1 and 1.2

Let D and $\mathcal{A}$ be an alphabet and a collection of words defining a UAD substitution with primitive $G_{\mathcal{A}}$. Thus, we have two dynamical systems, $T^1_{\mathcal{A}}$ in $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ and S in $X_{\mathcal{A}}$. We claim that they are metrically isomorphic. More precisely, we present two sets: $X^1_{\mathcal{A}} \subset X_{\mathcal{A}}$ and $\Omega^{1'}_{\mathcal{A}} \subset \Omega_{\mathcal{A}}$ which are invariant under S and $T^1_{\mathcal{A}}$ and have countable complements, and a natural bijection $\varphi : X^1_{\mathcal{A}} \to \Omega^{1'}_{\mathcal{A}}$, measurable together with φ^{-1} for any Borel measure (in fact, φ is a homeomorphism in the relative topologies), such that $T^1_{\mathcal{A}} \circ \varphi = \varphi \circ S$. Let us define

$$X^1_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}} \setminus \bigcup_{-\infty}^{\infty} S^k R_{\mathcal{A}},$$

where $R_{\mathcal{A}}$ is the set of all $x(i,j,m,n)$ for generating quadruples (i,j,m,n), $\Omega^{1'}_{\mathcal{A}}$ is defined as the set of all paths $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)} \dots$ such that for infinitely many numbers k the symbol $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ is not the first in the word A_{j_k}, and for infinitely many k (maybe others), not the last in the word A_{j_k} (here $y_k = \beta_{j_k}$).

Another equivalence: consider an ordinary stationary adic automorphism with states $D = \{(A_i, k), 1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant k \leqslant |A_i|\}$ ordered in such a way that $(A_i, k) < (A_i, j)$ if $k < j$, and the matrix M defined by

$$M((A_i,k),(A_j,p)) = \begin{cases} 1 & \text{if the } p\text{th letter in } A_j \text{ is } \beta_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The corresponding adic transformation will be denoted by $T^2_{\mathcal{A}}$ [5] and its space by $\Omega^2_{\mathcal{A}}$. Clearly, $T^1_{\mathcal{A}}$ and $T^2_{\mathcal{A}}$ are topologically isomorphic.

Conversely, let a stationary adic automorphism be defined by D and M. Let the ith column of M be $m_{1i}, \dots, m_{li}$ and $j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant l$ be the list of all j such that $m_{ji} = 1$. Consider the word $A_i = \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k}$. Let $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^l$. It is evident that $G_{\mathcal{A}}$ and M are simultaneously irreducible (primitive) or not. If $\mathcal{A}$ defines a UAD substitution, then the corresponding dynamical system is metrically isomorphic to the initial adic automorphism [19, 20], which is in turn the system $T^1_{\mathcal{A}}$ for it ($h(j) \equiv 1$).

In this way, a partial adic transformation turns into the substitution homeomorphism after the semitrajectories are replaced by a certain collection of their gluings into the trajectories. Let us consider the adic transformation with matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

which is known to have pure discrete spectrum

$$\{\exp(in\lambda); n \in \mathbb{Z}\}, \quad \lambda = (1-\sqrt{5})/2.$$

The compactum consists of all sequences of ones and twos not containing the word $(2,2)$. The ordering on this Markov compactum has two maximal points: $(1,2,1,2,\dots)$ and $(2,1,2,1,\dots)$, and one minimal point: $(1,1,1,\dots)$.

Therefore, we have three semitrajectories, two of type $\mathbb{Z}_-$ and one of type $\mathbb{Z}_+$. The corresponding substitution is $1 \mapsto (1,2)$, $2 \mapsto 1$. There are two generating quadruples $(1,1,1,2)$ and $(1,1,2,2)$ (see the definition above). A detailed analysis shows that if we join the two semitrajectories of type $\mathbb{Z}_-$ and the semitrajectory of type $\mathbb{Z}_+$ (this gives the space of substitution homeomorphism) and glue these two trajectories in a natural way, we shall obtain the unit circle as the quotient space and rotation by the "golden ratio" as the automorphism.*

Now let us describe the adic representation of generalized Morse sequences. Let $\operatorname{card} D_i = 2|c_i|$, $D_i = \{\beta_1^i, \dots, \beta_{2|c_i|}^i\}$. Define the matrices M; let $u = \beta_m^i$, $v = \beta_n^{i+1}$, and

$$m_{uv}^i =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } m \leqslant |c_i|, n \leqslant |c_{i+1}|, \text{ and } n\text{th letter of } c_{i+1} \text{ is } 0, \\ 1 & \text{if } m > |c_i|, n \leqslant |c_{i+1}|, \text{ and } n\text{th letter of } c_{i+1} \text{ is } 1, \\ 1 & \text{if } m > |c_i|, n > |c_{i+1}|, \text{ and } (n-|c_{i+1}|)\text{th letter of } c_{i+1} \text{ is } 0, \\ 1 & \text{if } m \leqslant |c_i|, n > |c_{i+1}|, \text{ and } (n-|c_{i+1}|)\text{th letter of } c_{i+1} \text{ is } 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

All the necessary unique decodings take place, as is known, so again we can claim that our dynamical systems are isomorphic.

1.4. The main theorem about adic representation of a general ergodic transformation. We have already discussed adic representations of different classes of ergodic transformations. But an important fact is that *every* ergodic transformation with invariant Lebesgue measure has an adic representation. Specifically, A. M. Vershik has proved the following statement [1, 2].

*Note in proof. See [30], where the author defines the precise isomorphism from the Markov compactum into reals (Fibadic expansion).

Theorem. Let S be an automorphism of a Lebesgue space X with a continuous invariant measure m, and let $\mathcal{B}_0$ be a countable invariant dense subalgebra of the σ-algebra $\mathcal{B}$ of all measurable sets. There exist a Markov compactum $\mathfrak{X}$ and a central measure $\mathcal{M}$ on it such that (X, S, m) is metrically isomorphic to $(\mathfrak{X}, T, \mathcal{M})$, and the algebra $\mathcal{B}_0$ is sent onto the algebra of cylinder sets under the isomorphism. If S is ergodic, then $\mathfrak{X}$ can be chosen minimal and also uniquely ergodic by an appropriate choice of $\mathcal{B}$.

This existence result (proved by periodic approximation) has turned out to be useful in the theory of operator algebras. The preceding and following special cases and examples can be treated as results about adic representations (useful for metric and spectral theory), with a combinatorial proof revealing the connection between the adic representations and the other symbolic representations as a shift in the space of two-sided sequences. In the general case, as A. N. Livshits has proved [21], the same connection exists. It follows from the theory of generators [22] that we can describe any ergodic automorphism with invariant measure as a shift T in the space

$$X = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i, \quad Z_i = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad -\infty < i < \infty,$$

with invariant nondiscrete probability Borel ergodic measure $\mathcal{M}$ (INPBE-measure).

Let us denote by $\mathrm{Cyl}(\mathcal{M})$ the set of all words over Z which correspond to cylinders of positive measure $\mathcal{M}$. If $\mathcal{A}$ is a set of words for which an INPBE-measure m' exists with $\mathrm{Cyl}(m') = \mathcal{A}$, then we call $\mathcal{A}$ a Cyl-set, call m' an $\mathcal{A}$-measure, and introduce the set $X_Z^{\mathcal{A}}$ consisting of all sequences $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ such that the words $x_{-i} \dots x_0 \dots x_i$ are in $\mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$, and if

$$\dots < -j_n^B < -j_{n-1}^B < \dots < -j_1^B \leqslant 0 < i_1^B < i_2^B < \dots$$

is the set of numbers of all initial letters of the occurrences of B (where B is any word of $\mathcal{A}$) in $\{x_i\}$, then the sequences $1 \cup \{i_n^B\}_1^{\infty}$ and $1 \cup \{j_n^B\}_1^{\infty}$ have positive densities ([23, Russian p. 11]).

Theorem. There exist a minimal Markov compactum $Y^{\mathcal{A}}$ with state spaces $D_1^{\mathcal{A}}$, $D_2^{\mathcal{A}}, \dots D_K^{\mathcal{A}}, \dots$, transition matrices $M_1^{\mathcal{A}}, \dots, M_K^{\mathcal{A}}, \dots$, and adic transformation U, a shift-invariant Borel set $W_Z^{\mathcal{A}} \subset X_Z^{\mathcal{A}}$ of measure equal to 1 (for any $\mathcal{A}$-measure), and a Borel injective mapping $g_{\mathcal{A}} : W_Z^{\mathcal{A}} \to Y^{\mathcal{A}}$ such that $U^{\mathcal{A}} \circ g_{\mathcal{A}} = g_{\mathcal{A}} \circ T$ and the preimages of cylinders are sets of positive measure ν for any $\mathcal{A}$-measure ν.

§2. Spectral properties and examples

2.1. Theorems about discrete spectrum. We formulate here some sufficient conditions for an irreducible UAD substitution to have purely discrete spectrum. First, let us consider the case of words of constant length. There are results about this in [7, 9, 14, 24] and elsewhere. Denote the length of the word A by $|A|$, and suppose that $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_l| = q$. Let $x = \ldots u_{-k} \ldots u_0 \ldots u_k \ldots \in X_{\mathcal{A}}$. The number

$$h(\mathcal{A}) = \max\{n \geqslant 1, (n, q) = 1, n | g.c.d\{a : u_a = u_0\}\}$$

is called the height of $\omega_{\mathcal{A}}$. It is easy to see that it does not depend on the choice of the sequence x.

Substitutions with constant word length always have a discrete component in their spectrum. The group of eigenvalues is

$$G = \{e^{2\pi i K_1/q^n} \times e^{2\pi i K_2/h}\},$$

where K_1, K_2 are integers, and n is a natural number. For this class of substitutions the question as to when the discrete component exhausts the spectrum is solved. We say that the substitution $\omega_{\mathcal{A}}$ *has coincidence* if there exist K and $j < q^K$ such that

$$\omega_{\mathcal{A}}^K(\beta_1)_j = \omega_{\mathcal{A}}^K(\beta_2)_j = \ldots = \omega_{\mathcal{A}}^K(\beta_l)_j,$$

where the subscript j denotes the jth symbol of the word. Dekking [9] has proved the following theorem:

THEOREM. *$\omega_{\mathcal{A}}$ has discrete spectrum iff $\omega_{\mathcal{A}}$ has coincidence.*

Note that, as proved in [18], the discreteness of the spectrum in this case is equivalent to rank one.

For the case of variable word length no criteria exist, but there are some sufficient conditions, and some concrete examples have been examined. In [25] B. M. Solomyak has proved an operator-theoretic sufficient condition for the spectrum to be purely discrete, and has studied two series of stationary adic transformations, which turned out to have purely discrete spectrum (with noncoinciding groups of eigenvalues for the transposed matrix). There are some combinatorial conditions in [7, 12, 13, 20]. An investigation of possible eigenvalues was done in [8] ([5] can help too). Here we give a combinatorial condition from [19, 20], which was intended for adic transformations but turned out to have analogies with [12]. It uses a condition from [25].

We call the symbols a, $b \in D$ *equivalent* if for every $m > 0$ we have $|\omega_{\mathcal{A}}^m(a)| = |\omega_{\mathcal{A}}^m(b)|$. Thus, D is partitioned into classes of equivalent symbols. Let C be such a class. There exist a finite number of blocks $x_1 \dots x_r$ entering every sequence of $X_{\mathcal{A}}$ such that $x_1, x_r \in C$ and $x_2, \dots, x_{r-1} \notin C$. We call such blocks *$C$-blocks*.

We shall call two words of the same length in $D : A = a_1 \dots a_k$ and $B = b_1 \dots b_k$ words of *equivalent nomenclature* if there exists a transposition π of the set $(1, \dots, k)$ such that the symbols a_i and $b_{\pi(i)}$ are equivalent for $1 \leqslant i \leqslant k$. We shall assume that the substitution $\omega_{\mathcal{A}}$ is not cyclic (the sequences from $X_{\mathcal{A}}$ are not cyclic).

If $x_1 \dots x_r$ is a C-block, we shall call the pair of words

$$(x_1 \dots x_{r-1}, x_2 \dots x_r)$$

a C-initial base pair of words. The set of all such pairs is denoted by Δ_C. Fix any C.

Theorem 3. Suppose we are given a finite collection of words $\{y_i\}$ in the alphabet D and a set Δ of pairs of words (y_{i_k}, y_{j_k}) of equivalent nomenclature such that for any pair $(x, y) \in \Delta \cup \Delta_C$ there exists a natural number $N_{x,y}$ such that $\omega_{\mathcal{A}}^{N_{x,y}}(x) = y_{l_1} \dots y_{l_s}$ and $\omega_{\mathcal{A}}^{N_{x,y}}(y) = y_{k_1} \dots y_{k_s}$, where every pair $(y_{l_r}, y_{k_r}) \in \Delta \cup \Delta_C$ and $y_{l_r} = y_{k_r}$ for some r. Then the spectrum of the automorphism is discrete.

The simplest example is substitution with $D = (1, 2)$ and $\mathcal{A} = \{12, 1\}$. Take $C = \{1\}$. Then $\Delta_C = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 21 \end{matrix} \right\}$. Take $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. If the substitution has constant word length, then $C = D$, and the set of substitutions satisfying the condition of Theorem 3 is evidently not smaller than that of Dekking's theorem, hence coincides with this set, so that we have

$$\Delta = \{(u, v), u, v \in D\}.$$

2.2. The continuous component of the spectrum and weak mixing. $\omega_{\mathcal{A}}$ being noncyclic, there exist symbols a, c, d, $c \neq d$, such that the blocks ac, ad appear in the sequences from $X_{\mathcal{A}}$. Fix c and d, $c \neq d$.

Theorem 4. Suppose that there is a finite collection of words $\{y_i\}$ and an increasing sequence of natural numbers m_i such that for every i we have

$$\omega^{m_i}(c) = y_{j_1} \dots y_{j_s} A, \quad \omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(d) = y_{k_1} \dots y_{k_s} B,$$

where A or B is the empty word, and for any t, $1 \leqslant t \leqslant s$, we have $y_{j_t} \neq y_{k_t}$ and the words y_{j_t} and y_{k_t} have equivalent nomenclature. In this case the spectrum of the substitution has a continuous component.

The Morse substitution is such an example, and will be discussed later.

Now we shall formulate sufficient conditions for weak mixing ([5, 8, 20]). In [8] there is a criterion suitable for checking specific cases. Further combinatorial conditions can be found in [5] and [20]. We now formulate some consequences of such combinatorial considerations (see [20]).

THEOREM 5. (a) *If the block $a_1 \dots a_k$, $a_1 = a_k$, is contained in some sequence in X_{j_t}, and for any N, ± 1 are the only common divisors for all $\sum_{2}^{k} |\omega_{\mathcal{A}}^n a_i|$, $n > N$, then no $e^{2\pi i\alpha}$ with rational α is an eigenvalue of the automorphism.*

(b) *If the characteristic polynomial $f_r(z)$ with matrix $G_{\mathcal{A}}$ has all its zeros outside of $B = \{z||z| < 1\}$, then no $e^{2\pi i\alpha}$ with irrational α is an eigenvalue of the automorphism.*

Here is the analog [5] for a stationary adic transformation (similarly for a GAT): if $P_1 = y_0 \dots y_t$ and $P_2 = v_0 \dots v_t$ are two words contained in paths with $y_0 = v_0$, $y_t = v_t$, then for any $m > 0$ there exists a unique number $N_m(P_1, P_2)$ such that for any path $x_1 \dots x_m y_0 \dots y_t x_{m+t+2} \dots$ we have

$$U^{N_m(P_1,P_2)}(x_1 \dots x_m v_0 \dots v_t x_{m+t+2} \dots) = x_1 \dots x_m y_0 \dots y_t x_{m+t+2} \dots .$$

We have to replace $\sum_{2}^{k} |\omega_{\mathcal{A}}^n(a_i)|$ by $N_m(P_1, P_2)$, and $f_{\mathcal{A}}(z)$ by the characteristic polynomial of M.

2.3. Adic representation of known examples of measure-preserving transformations.

(1) *The rotation of the circle.* Let $\alpha \in (0, 1)$ be irrational, and put

$$T_\alpha x = (x + \alpha) \bmod 1.$$

We shall give an adic realization of T_α.

Suppose that $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n = \alpha_{n-1}^{-1}$ (α_{n-1}^{-1}), $r_n = [\alpha_n^{-1}] + 1$ ($(\cdot)$ denotes the fractional part). If the $r_n \times r_{n+1}$ matrix M_n has the form

$$M_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}}_{r_{n+1}} \Bigg\} r_n, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

then we can define the Markov compactum and the adic transformation S_α with the given sequence $\{M_n\}$ of matrices; this is a uniquely ergodic transformation.

THEOREM 6 (see [2]). *T_α is isomorphic to the adic transformation S_α.*

In particular, for $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, we have the stationary adic transformation with matrix

$$M_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_n = 2$$

(golden section or Fibonacci automorphism).

Remark. This realization is very close to the Voiculescu–Pimsner approach, if we permit multiple edges and instead of M_n use the 2×2 matrices

$$\widetilde{M_n} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ a_n = r_n - 1, \ b_n = (r_{n+1}-1)(r_n-1).$$

(2) Chacon's example. Let

$$M_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

be the matrix defining the stationary Markov compactum. Then the corresponding stationary adic transformation is isomorphic to Chacon's example of prime automorphism.[14]

(3) Rank one transformations.

THEOREM 7. *Suppose that $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of matrices and M_n is an $r_n \times r_{n+1}$-matrix with entries $m_{ij}^n \in \{0,1\}$ such that*

$$\forall j, \quad \forall i, \quad 0 \leqslant m_{j,i} \leqslant m_{j,i+1} \leqslant 1,$$
$$\forall j, \quad m_{r_n,j} = 1, \quad \textit{and} \quad \forall i, \quad m_{i,r_{n+1}} = 1.$$

Then the adic transformation corresponding to the appropriate Markov compactum has rank one; moreover, any rank one transformation can be represented in this form.

[14] An automorphism is called prime if it has no nontrivial invariant partitions: Chacon's automorphism also has a trivial commutant. The first-named author thanks professor B. Weiss for his explanation of that example.

(4) *Ornstein's mixing transformation of rank* 1. Using the notation of [26], we consider the sequences of numbers $h(n)$, $P(n)$, $a(i,n)$, $1 \leqslant n < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant P(n)$, introduced in [26], referring the reader to this paper for information about relations between these sequences which guarantee mixing, and about the construction itself. Let

$$b(i,n) = h(n-1) + a(i,n), \quad 1 \leqslant i \leqslant P(n),$$
$$C_n = \sum_{i=1}^{P(n+1)} b(i,n+1).$$

Let $h(2) = P(1)$, $|D_n| = P(n)+C_n$; $D_n = \{\beta_i^n\}_1^{|D_n|}$. Define M_n. If $u = \beta_k^n$, $v = \beta_j^{n+1}$, then

$$m_{uv}^n = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant P(n), 1 \leqslant j \leqslant P(n+1), \\ 1, & P(n) + \sum_1^{j-1} b(i,n+1) < k \leqslant P(n) \\ & \quad + \sum_1^{j} b(i,n+1), 1 \leqslant j \leqslant P(n+1), \\ 1, & k = P(n)+1, j > P(n+1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The orderings on D_i are natural. If

$$h(n+1) = P(n) \times h(n) + \sum_{i=1}^{P(n)} b(i,n), \ 1 < n \leqslant \infty \quad \text{and} \quad h(n) \gg b(i,n)$$

(as in the case considered in [26]), then rank one and unique ergodicity are clear.

The reader acquainted with the construction of [26] will understand that the levels of adic transformation are built parallel to the building of approximating towers. If to the finite path $u_1, u_2, \ldots, u_k$, $u_i \in D_i$, there corresponds a column obtained from the cutting and stacking method, then to the collection of columns into which this column was cut, there corresponds a collection of paths of the form $u_1, \ldots, u_k v$, where v runs over the set of all elements D_{k+1} such that $m_{u_k v}^k = 1$ (for substitutions, a similar correspondence appeared in the work of different authors (the work of R. V. Chacon is cited here)).

The states β_j^n, $j > P(n)$, correspond to "additional" [26] levels of the column of the nth tower (notice that for any n and $j > P(n)$ there exists

only one sequence $\beta^1_{i_1}, \dots, \beta^n_{i_n}$ such that $i_n = j$ and $m^{k-1}_{uv} = 1$, $1 < k \leqslant n$; $u = \beta^{k-1}_{i_{k-1}}$, $v = \beta^k_{i_k}$ (all $i_k = P(k) + 1, k < n$).

(5) *Chacon's examples of weak mixing* [27]. The parameter of the automorphism is a sequence of natural numbers $\{j(k)\}_1^\infty$. First we explain the author's construction. He builds an object that has much in common with a substitution (but is nonstationary). His sequence of words $\alpha(k)$ is the following:

$$\begin{aligned}
&\alpha(0) = 01,\\
&\alpha(1) = \underbrace{0\alpha(0)\dots\alpha(0)}_{j(1)}00\underbrace{\alpha(0)\dots\alpha(0)}_{j(1)}0\underbrace{\alpha(0)\dots\alpha(0)}_{j(1)},\\
&\dots\dots\dots\\
&\alpha(k) = 0\underbrace{\alpha(k-1)\dots\alpha(k-1)}_{j(k)}00\underbrace{\alpha(k-1)\dots\alpha(k-1)}_{j(k)}0\underbrace{\alpha(k-1)\dots\alpha(k-1)}_{j(k)}.
\end{aligned}$$

Using this information, we exhibit a Markov compactum. Here $|D_1| = 3$; $|D_n| = 3j(n-1) + 5$, $n > 1$. If $u = \beta^n_k$, $v = \beta^{n+1}_j$, then

$$m^1_{uv} = \begin{cases} 1, & k < 3, j \notin \{1, j(1)+2, j(1)+3, 2j(1)+4, 3j(1)+5\},\\ 1, & k = 3, j \in \{1, j(1)+2, j(1)+3, 2j(1)+4, 3j(1)+5\},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$m^n_{uv} = \begin{cases} 1, & k < |D_n|,\\ & j \notin \{1, j(n)+2, j(n)+3, 2j(n)+4, 3j(n)+5\},\\ 1, & k = |D_n|,\\ & j \in \{1, j(n)+2, j(n)+3, 2j(n)+4, 3j(n)+5\},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

if $n > 1$.

The orderings in D_n are natural too.

(6) *The Ornstein–Shields non-Bernoulli K-automorphism* (we use the description from [28]) can likewise be represented in such a manner. Let $B(n)$ be the number of different $(n-1)$-blocks. We have

$$B(n+1) = (f(n) - 1)B^{2^n}(n).$$

Every D_n will consist of pairs (A, q), where A is an n-block,

$$1 \leqslant q \leqslant g(n) = f(n) + 2^n + s(n)(2^n + 1)(2^{n-1} + 1), \quad n > 1,$$

$g(1) = h(1)$, and of the three symbols f_n, s_n, e_n. The ordering must merely satisfy the condition $(A, q_1) \prec (A, q_2)$ if $q_1 < q_2$.

$$m_{uv}^n = \begin{cases} 1, & (u,v) = (f_n, f_{n+1}), (e_n, e_{n+1}), (s_n, s_{n+1}), \\ 1, & u = f_n, v = (A,q), q \leqslant \bar{f}_\omega(n+1), \omega = \omega(A), \\ 1, & u = e_n, v = (A,q), \\ & q \geqslant g(n+1) + \bar{f}_\omega(n+1) - f(n+1) + 1, \\ 1, & u = (A_1, q_1), v = (A_2, q_2), \\ & q_2 \in \{\bar{f}_\omega(n+1) + i + s(n+1)(i+1)i/2\}_{i=1}^{2^{n+1}} = \mathrm{In}_{n+1} \\ & \text{and} \quad A_1 \quad \text{is the subblock of } A_2 \quad \text{corresponding to} \quad q_2, \\ 1, & u = s_n, v = (A,q), \\ & \bar{f}_\omega(n+1) < q \leqslant g(n+1) + \bar{f}_\omega(n+1) - f(n+1), \\ & q \notin \mathrm{In}_{n+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to choose a central measure corresponding to [28].

2.4. Some stationary transformations. Denote by $U_2 : Y_2 \to Y_2$ the stationary adic transformation with $D = \{1, 2\}$ and $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. It has a purely discrete spectrum, and its eigenvalues are all the numbers $e^{i\pi K/2^n}$, where K is an integer, and n is a natural number. The equivalent substitution (see 1.3) is cyclic ($\mathcal{A} = \{12, 12\}$), but the others are metrically isomorphic to it; for example, $\mathcal{A} = \{11, 12\}$.

(1) *Morse sequence.* Let us consider the substitution connected with the well-known sequence of Morse (see [7, 29], the bibliography in [7] and elsewhere). Here

$$D = \{1, 2\}, \quad \mathcal{A} = \{12, 21\}.$$

Its spectrum has a discrete component equal to the spectrum of U_2, and, by Theorem 4(a), a continuous component. The continuous spectrum is simple, and its maximal spectral type is given by the Riesz product $\prod_{n \geqslant 0} (1 - \cos 2^n \theta)$ (see [7] and references therein).

The automorphism can be represented as a skew product over U_2. More precisely, there exists a measurable function $\varphi : Y_2 \to \{-1, 1\}$ such that the automorphism

$$T_\varphi : Y_2 \times \{-1, 1\} \to Y_2 \times \{-1, 1\}, T_\varphi(x, v) = (U_2 x, \varphi(x) v)$$

is metrically isomorphic to the automorphism defined by $\omega_{\mathcal{A}}$. The definition of φ is

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{if} \quad x = \begin{cases} 1\ldots\ldots \\ 2\ \ 2\ \ 1\ldots \\ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \\ -1 \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

There is also an adic representation:

$$D = \{1,2,3,4\}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) *The Rudin–Shapiro substitution* [7]:

$$D = \{1,2,3,4\}, \quad \mathcal{A} = \{12, 13, 42, 43\}.$$

The discrete component of the spectrum is the same as the two preceding ones. The continuous part is Lebesgue with multiplicity two. This is also a skew product over U_2. The corresponding function φ' is defined as

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -1 \quad \text{if} \quad x = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots \\ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots \\ 1\ \ 2\ \ \ldots\ldots \\ 2\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots \\ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \\ 1 \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

Adic representation: $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) *Adic transformations connected with Coxeter graphs.* It is possible to assign to any graph the adic transformation with multiple arcs whose matrix is M^2, where M is the incidence matrix of the graph [20] ($m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i$ and j are joined by an edge).

In the case of Coxeter graphs, splitting into connected components (with symmetric matrices for such constructions) gives different transformations and series of transformations. One of them, investigated in [20], has $n \times n$ matrices

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Their spectrum, as shown in [20], is purely discrete for $n = 2, 3$, and purely continuous for $n \geqslant 4$.

Pure discreteness follows from Theorem 3; weak mixing is proved in [20] by using a certain sufficient condition of weak mixing in an algebraic formulation contained in [20].

§3. Towards multidimensional adic systems

We shall give some examples of multidimensional (specifically, two-dimensional) adic systems and substitutions. In this paper we do not consider the general definition for arbitrary discrete groups, which will be given elsewhere; our examples are of preliminary character.

3.1. The group approach. Let us consider a discrete group G. In contrast to the group $\mathbb{Z}$, it is not true that an arbitrary measure-preserving action of G has an appropriate meaningful adic realization. Namely, the necessary condition is amenability of the group G. In [4] it was proved that a generalized adic representation exists for any measure-preserving action of an amenable group. But we believe that this representation has a stronger significance for some special actions. The main problem is to define the analog of a substitution or a stationary adic action for some class of amenable groups. It is important that the notion of stationary adic representation depends on the choice of the generators.

The analogs of p-adic shift for $\mathbb{Z}$-action are more varied for $\mathbb{Z}^m$, $m \geqslant 2$, or general groups. Here is a generalization of p-adic action with discrete

spectrum. Let G be an amenable discrete group, and $\varphi : G \to G_1$ be an isomorphism onto the subgroup G_1 with the following properties:

(1) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^n G = \{e\}$, $\varphi^n G \equiv G_n$;

(2) there is a "complement"[15] A to G_1 for which $\{\varphi^n A\}_n$ is a Følner sequence (this means that for any $\varepsilon > 0$, $\varphi^n A$ is an ε-Følner set for sufficiently large n).

Property (1) allows us to define the profinite completion $\varprojlim G/G_n = \check{G}$ of G, on which G acts by continuity. This action has a discrete spectrum in the sense of the general (Mackey) definition. But this construction gives us an adic realization on some space X which *depends on* the choice of complement A to G_1. This complement defines the imbedding

$$G \to \check{G} \simeq \prod_{i=0}^{\infty} G_i/G_{i+1} \simeq \prod_{i=0}^{\infty} A.$$

For $\mathbb{Z}$ this construction yields only a p-adic spectrum (spectrum consisting of roots of unity). But already for $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ the possibilities are much larger, as we can see from the example below.

3.2. The "cross" example. In this example $G = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, and G_1 is the two-dimensional lattice generated by the vectors $\varphi(1,0) = (2,1)$ and $\varphi(0,1) = (-1,2)$. Since

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5,$$

we have $G/G_1 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Hence the group $\check{G}$ is the (additive) group of 5-adic integers. Still the action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ in it is rather complicated. Each generator acts as an automorphism "transversal" in the sense of [4], where this notion was introduced as a generalization of adic transformations.

From the point of view of ergodic theory, the action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ is uniquely determined on the space X, but there are several realizations of this space. One of them, the straight one, is the next.

Denote $(1,0)$ by g_1, $(0,1)$ by g_2; $\mathbb{Z}_5$ is the ring of 5-adic integers.

STATEMENT. *The action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ on $X \simeq \mathbb{Z}_5$ is isomorphic to the action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ on $\mathbb{Z}_5$ such that $g_1 x = x + 1$, $g_2 x = x + \sqrt{-1}$ in the additive group of $\mathbb{Z}_5$.*

[15] This means that A is a fundamental domain for G_1.

By $\sqrt{-1}$ in the ring $\mathbb{Z}_5$ we mean the sequence of integers $m_1, m_2, \dots$ such that $m_1 = -2$, $m_n^2 + 1 \equiv 0(5^n)$, and $m_n \equiv m_{n+1}(5^n)$.

The possibility of representing X as $\mathbb{Z}_5$ in this way follows from the inclusions $5^n g_1 \in G_n$ and $m_n g_1 - g_2 \in G_n$.

For the other realization of the same action, choose as the fundamental domain for the subgroup G_1, the "cross"

$$\{(0,0),(0,-1),(0,1),(1,0),(-1,0)\},$$

and define the crosses of the next levels corresponding to the next factors in a natural way.

Define $D = (0,1,2,3,4)$; $D_n = D$ $(n = 0,1,2,\dots)$, where D_n enumerates the points of the cross of level n:

$$\varphi^n(0,0) \leftrightarrow 0 \quad \varphi^n(1,0) \leftrightarrow 1 \quad \varphi^n(0,1) \leftrightarrow 2$$
$$\varphi^n(-1,0) \leftrightarrow 3 \quad \varphi^n(0,-1) \leftrightarrow 4;$$

put

$$X = \prod_0^\infty D_n, \quad X_n = \prod_{i=n}^\infty D_i;$$

M_n consists of all 1's. By means of natural isomorphisms, all the X_n can be identified with one another. Then the identical actions of $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ on all X_n can be defined, each agreeing with the next one by means of "transfers", a poor analog of transfers (carrying one, etc.) appearing in elementary decimal addition.

The examination of our hierarchy (Figure 1) prompts the following transfer tables.

Action of g_1 on any X_n:

$$\begin{array}{lccccccccc} & 0 & & \varphi(g_1) & & \varphi(g_2)^{-1} & & \varphi(g_2) & & 0 \\ 0 \to & 1 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 0. \end{array}$$

Here the transfers for the next level (X_{n+1}) are written above the states of D_n (when identifying, we view the action of $\varphi(g)$ as that of g).

Action of g_2:

$$\begin{array}{lccccccccc} & 0 & & \varphi(g_2) & & \varphi(g_1) & & \varphi(g_2) & & 0 \\ 0 \to & 2 & \to & 1 & \to & 3 & \to & 4 & \to & 0. \end{array}$$

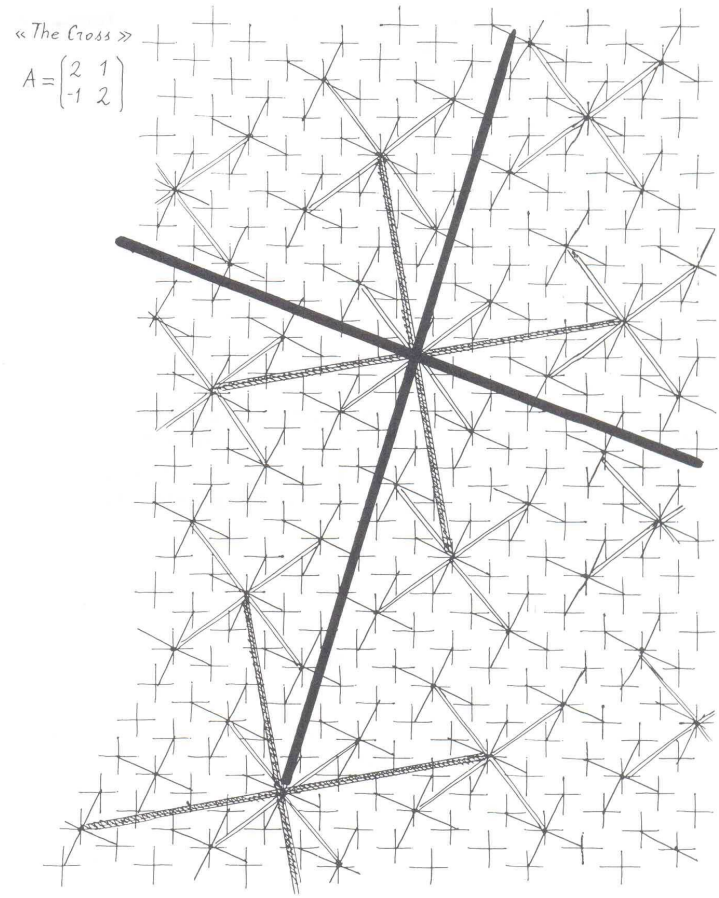


Figure 1

Thus, for example,

$$g_2(210ab\dots) = 1g_2(10ab\dots) = 13g_1(0ab\dots) = 131ab\dots .$$

Since the actions on X_n are identified, we can call the action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ on X "stationary", though neither of the "intermingling" actions of g_1 and g_2 can be called stationary (still it is transversal in the sense of [4], as is now clear).

3.3. Substitutions with square words. Our next example looks like a two-dimensional substitution; we shall define the simplest class of substitutional dynamical systems with $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ as time group.

Let $F=\{1,\dots,k\}$ be the alphabet; a square word of size r by definition is a function on $\{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,r\}$ with values in F. Suppose we have a map from F into the set of all r-square words for a fixed r. Then we have the induced map from the set of all square words into itself sending each word of size s to a word of size sr obtained by replacing every letter by its image, which is an r-square word.

Repeating the construction of an ordinary substitution (see §1), we define the action of $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ on the Markov compactum. Criteria of minimality, ergodicity, unique ergodicity, etc., can be established in the same way as in the case of $\mathbb{Z}$.

We conclude with a concrete example, which, in a natural sense, is a "two-dimensional Morse automorphism". Here $F=\{1,2\}$,

$$1\mapsto\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad 2\mapsto\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$

THEOREM. *Denote the discrete component of the spectrum of the classical Morse automorphism by φ_d (it is a diadic spectrum), and by φ_c the continuous component, which is the Riesz product*

$$\varphi_c=\prod_{i=0}^{\infty}(1-\cos 2^i z).$$

Then the spectrum of the two-dimensional Morse system (as a measure on the 2-torus) is equal to $\varphi_d\otimes\varphi_d+\varphi_c\otimes\varphi_c$.

Remark. This construction can be generalized to the group

$$\mathbb{Z}^m=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}}_{m}.$$

At the same time these examples are not too interesting, because the action of each generator is not ergodic, and because the words have the form of the direct product. It is extremely important to obtain stationary two-dimensional substitutions which are not the direct product of one-dimensional examples. The previous "cross" is an approach to this case.

References

1. A. M. Vershik, *Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **259** (1981), 526–529.
2. A. M. Vershik, *A theorem on Markov approximation in ergodic theory*. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **115** (1982), 72–82.
3. A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Locally semisimple algebras, combinatorial theory and the K_0-functor*, Itogi Nauki i Tekhniki: Sovremennye Problemy Matematiki: Fundamentalnye Napravleniya, vol. 26, VINITI, Moscow, 1985, pp. 3–55.
4. A. A. Lodkin and A. M. Vershik, *Approximation of actions of amenable groups and transversal automorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 1132 (1985), 331–346.
5. A. N. Livshits, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations*, Mat. Zametki **44** (1988), 785–793.
6. W. H. Gottschalk, *Substitution minimal sets*. Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.
7. M. Queffélec, *Substitutional dynamical systems, spectral analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1294 (1987).
8. B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définies par des substitutions de longeur variable*, Ergodic Theory Dynamical Systems **6** (1986), 529–540.
9. F. M. Dekking, *The spectra of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **41** (1978), 221–239.
10. P. Michel, *Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitutions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sen A **278** (1974), 811–813.
11. F. M. Dekking and M. Keane, *Mixing properties of substitutions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **42** (1978), 23–33.
12. P. Michel, *Coincidence values and spectra of substitutions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **42** (1978), 205–207.
13. S. Muralidharam, *Coincidence densities and spectra of a class of substitution minimal sets*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **XLIX** (1985), 185–200.
14. J. T. Martin, *Substitutional minimal flow*, Amer. J. Math. **93** (1971), 503–526.
15. M. Keane, *Generalized Morse sequences*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **10** (1968), 335–353.
16. J. Kwiatkowski, *Spectral isomorphism of Morse dynamical systems*, Bull. Acad. Pol. Sci. **29** (1981), 105–114.
17. J. Kwiatkowski, *Isomorphism of regular Morse dynamical systems*, Studia Math. **62** (1982), 59–82.
18. M. Lemańczyk and M. K. Mentzen, *On metric properties of substitutions*, Compositio Math. **65** (1988), 241–263.
19. A. N. Livshits, *On the spectra of adic transformations on Markov compact sets*, Uspekhi Mat. Nauk **42**:3 (1987), 189–190.
20. A. N. Livshits, *Some examples of adic transformations and substitutions*, Selecta Math. Soviet. **11**:1, (1992), 83–104.
21. A. N. Livshits, *On the construction of Markov compacta*, Algebra i Analiz **3**:1 (1991), 165–175.
22. V. A. Rokhlin, *Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations*, Uspekhi Mat. Nauk **22**:5 (1967), 3–56.
23. A. O. Gel′fond and Yu. V. Linnik, *Elementary methods in analytic number theory*, Fizmatgiz, Moscow, 1962.

24. T. Kamae, *Spectrum of substitution minimal sets*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 567–578.
25. B. M. Solomyak, *On a dynamical system with discrete spectrum*, Uspekhi Mat. Nauk **41**:2 (1986), 209–210.
26. D. S. Ornstein, *On the root problem in ergodic theory*, Proc. 6th Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, vol. II, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1972, pp. 347–356.
27. R. V. Chacon, *Transformations having continuous spectrum*, J. Math. Mech. **16** (1966), 399–415.
28. D. S. Ornstein, *Ergodic theory, randomness, and dynamical systems*, Yale University Press, New Haven (1974).
29. A. Vershik, *A new model for ergodic transformations*, Banach Center Publ. **23** (1989), 381–384.
30. A. Vershik, *The Fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Report no. 4, 1991/92, Inst. Mittag-Leffer, November (1991).

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ ПОДСТАНОВКИ

В ряде работ формулируются достаточные условия наличия или отсутствия у подстановок или адических преобразований ([6, 17, 18, 15]) дискретного или непрерывного спектра, или рассматриваются примеры ([15] и библиография в [15], [8, 11, 12, 16]). Целью данной работы является рассмотрение примеров, иллюстрирующих различные ситуации, встречающиеся при использовании достаточных условии работ ([8, 11, 12]). Попутно формулируются и доказываются некоторые общие факты. Все примеры либо предложены А.М. Вершиком, либо так или иначе связаны с попытками ответить на его вопросы.

§1. Матрицы адических преобразований, связанных со схемами Дынкина

Рассмотрим задачу исследования адического сдвига, построенного по схеме Дынкина [19].

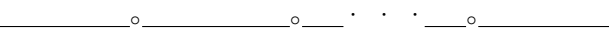
Прежде всего поставим в соответствие произвольному конечному графу без кратных дуг адическое преобразование с симметричной матрицей (конструкция [5] сообщена автору А.М. Вершиком). Предположим, что (D, U) — граф с множеством вершин D (число их обозначим через $\#D$) и множеством дуг U. Пусть $\#D = m$. Введем понятие удвоения графа. Пусть $D = \{d_i\}_1^m$, и D_1 и D_2 — конечные множества, $\#D_1 = \#D_2 = \#D$, $D_j = \{d_i^j\}_1^m$, $j = 1, 2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Обозначим $D_1 \cup D_2$ через D' и назовем *удвоением графа* (D, U) граф (D', U'), дуги которого определены следующим образом: потребуем, чтобы вершины D_1 были попарно не соединены, так же, как и вершины D_2, и

Депонировано в ВИНИТИ, № 7384-В88 (1988). Английский перевод: Selecta Mathematica Sovietica, **11**:1 (1992), 83-104.

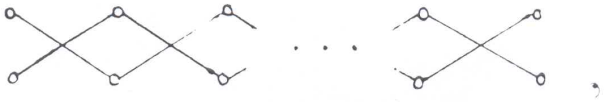
чтобы d_i^2 была соединена с d_j^1 тогда и только тогда, когда d_i соединена с d_j. Рассмотрим наряду с D_1 и D_2 множество $D_3 = \{d_i^3\}_1^m$ и построим граф и вершинами $D_3 \cup D_2$, удвоение (D, U). С учетом всех дуг получится граф с вершинами $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Утроением назовем граф с $D_1 \cup D_3$ в качестве множества всех вершин и совокупности всех путей, ведущих из D_1 в D_3 — в качестве множества дуг.

Мы можем построить теперь наш основной объект — адическое преобразование с пространством состоянии D_1 и симметричной матрицей переходов Π, определяемой матрицей инцидентности утроения как граф с кратными дугами. $\Pi = \{\pi_{ij}\}$, где π_{ij} число дуг, соединяющих d_i^1 с d_j^3.

Пусть исходный граф соответствует схеме Дынкина A_n [19]:



Удвоение:



Утроение:

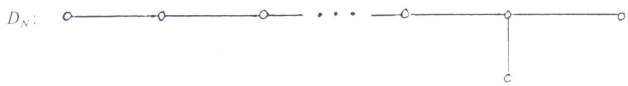
$$\Pi = \begin{pmatrix} 1010 & \dots & 000 \\ 0201 & \dots & 000 \\ 1020 & \dots & 000 \\ 0102 & \dots & 000 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0000 & \dots & 201 \\ 0000 & \dots & 020 \\ 0000 & \dots & 101 \end{pmatrix}.$$

Удвоение имеет симметричную матрицу, но на связных компонентах графа она не симметрична, у утроения — симметрична. При распадении (в случае четных или нечетных размерностей) могут встречаться

матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1100 \ldots 000 \\ 1210 \ldots 000 \\ 0121 \ldots 000 \\ 0012 \ldots 000 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 0000 \ldots 210 \\ 0000 \ldots 120 \\ 0000 \ldots 011 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 110 \ldots 00 \\ 121 \ldots 00 \\ 012 \ldots 00 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 000 \ldots 21 \\ 000 \ldots 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 \ldots 00 \\ 12 \ldots 00 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 21 \\ 00 \ldots 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 \ldots 000 \\ 12 \ldots 000 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 210 \\ 00 \ldots 121 \\ 00 \ldots 011 \end{pmatrix}.$$

Случай схем Дынкина D_n:



Утроение выглядит так:

Матрица такова:

$$\begin{pmatrix} 1010 & \ldots & 0000 \\ 0201 & \ldots & 0000 \\ 1020 & \ldots & 0000 \\ 0102 & \ldots & 0000 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0000 & \ldots & 2011 \\ 0000 & \ldots & 0300 \\ 0000 & \ldots & 1011 \\ 0000 & \ldots & 1011 \end{pmatrix}.$$

Она распадается на две. Типы матриц, могущих фигурировать в роли одной из этих двух, суть:

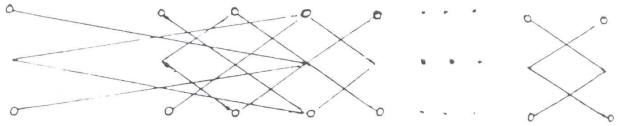
$$\begin{pmatrix} 11 \ldots 00 \\ 12 \ldots 00 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 21 \\ 00 \ldots 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 \ldots 00 \\ 12 \ldots 00 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 21 \\ 00 \ldots 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 \ldots 0000 \\ 12 \ldots 0000 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 2100 \\ 00 \ldots 1201 \\ 00 \ldots 0011 \\ 00 \ldots 0111 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 \ldots 000 \\ 12 \ldots 000 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 00 \ldots 201 \\ 00 \ldots 011 \\ 00 \ldots 111 \end{pmatrix}.$$

При $n = 4$ эти матрицы суть:

$$(3) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}.$$

Случай схем Дынкина E_n:

Утроенный граф:



Матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 10100 & \dots & 000 \\ 01010 & \dots & 000 \\ 10201 & \dots & 000 \\ 01030 & \dots & 000 \\ 00102 & \dots & 000 \\ \dots & \dots & \dots \\ 00000 & \dots & 201 \\ 00000 & \dots & 020 \\ 00000 & \dots & 101 \end{pmatrix}.$$

При $n = 5$: $\begin{pmatrix} 10100 \\ 01000 \\ 10201 \\ 00030 \\ 00101 \end{pmatrix}$.

Она тоже распадается на две. Перечень всех встречающихся при этом типе матриц таков:

$$\begin{pmatrix} 110 \dots 00 \\ 121 \dots 00 \\ 012 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 21 \\ 000 \dots 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 110 \dots 00 \\ 121 \dots 00 \\ 012 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 21 \\ 000 \dots 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 110 \dots 00 \\ 131 \dots 00 \\ 012 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 21 \\ 000 \dots 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 110 \dots 00 \\ 131 \dots 00 \\ 012 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 21 \\ 000 \dots 11 \end{pmatrix}.$$

При $n = 5$: (1); (3); $\begin{pmatrix} 110 \\ 121 \\ 011 \end{pmatrix}$.

Наиболее простыми матрицами являются следующие:

$$A_n = \begin{pmatrix} 210 & \dots & 00 \\ 121 & \dots & 00 \\ 012 & \dots & 00 \\ \dots & \dots & \dots \\ 000 & \dots & 21 \\ 000 & \dots & 12 \end{pmatrix}.$$

Их мы и будем рассматривать. Развиваемая при этом техника может применяться и для матриц всех остальных типов. Основой рассмотрении, связанных со спектрами, являются определения и результаты работ [8, 11, 12], а также их обобщения и конкретизации, содержащиеся в §3 данной статьи. Сейчас приведем только одно из необходимых определений — естественное определение набора слов X_i [11] для стационарного адического преобразования с матрицей M в том случае, когда не все элементы матрицы M равны 0 или 1 (граф переходов имеет кратные дуги). Именно: пусть i-ый столбец имеет вид $b_{1i}, \dots, b_{mi}$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant m$ — список всех j, таких, что $b_{ji} > 0$. В качестве X_i берем слово

$$\underbrace{j_1 \dots j_1}_{b_{j_1 i} \text{ раз}} \underbrace{j_2 \dots j_2}_{b_{j_2 i} \text{ раз}} \cdots \underbrace{j_k \dots j_k}_{b_{j_1 i} \text{ раз}}.$$

по набору слов $\{X_i\}$ определяется преобразование ω_M [11].

§2. Характеристические полиномы, собственные векторы матриц A_n, последовательности $|\omega^l_{A_n}(s)|$

Вычислим прежде всего характеристические полиномы матриц A_n, и их нули. Обозначим через $P_n(t)$ полином матрицы A_n:

$$P_n(t) = \det(A_n - tI).$$

Очевидно рекуррентное соотношение:

$$P_{n+1}(t) = (2 - t)P_n(t) - P_{n-1}(t)$$

Имеем

$$P_1(t) = 2 - t, \quad P_2(t) = t^2 - 4t + 3.$$

Можно принять $P_0(t) = 1$.

Естественно, что эти полиномы связаны с полиномами Чебышева [2, 4].

Пользуясь рекуррентным соотношением, легко найти корни полиномов $P_n(t)$. обозначим корни полинома $P_n(t)$, упорядоченные по возрастанию, через $t_k^{(n)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Имеем

$$t_k^{(n)} = 2 - 2\cos\frac{\pi k}{n+1}.$$

Очевидно, что $0 < t_k^{(n)} < 4$ при всех k и $t_k^{(n)} < 1$ при $k < (n+1)/3$.

Легко найти (с помощью аналогичных рекуррентных соотношений) и собственные векторы — столбцы X_n^k, отвечающие $t_k^{(n)}$. Можно взять в качестве $X_k^n = (x_{k,j}^n)_{j=1}^n$, как в [5], следующие векторы:

$$x_{k,j}^n = \sin j\Big(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}\Big); \quad 1 \leqslant k, \quad j \leqslant n.$$

Положим

$$\alpha_k^n = \pi\frac{n+1-k}{n+1} \quad (t_k^{(n)} = 2 + 2\cos\alpha_k^n).$$

Пусть e_s, $1 \leqslant s \leqslant n$, — вектор-столбец, s-компонента которого есть 1, остальные 0. Тогда, очевидно, длина слова $\omega_{A_n}^l(s)$ есть сумма компонент вектора $A_n^l e_s$, $1 \leqslant l < \infty$. Если разложение e_s по векторам X_k^n имеет вид $e_s = \sum y_k^s X_k^n$, то получим

$$|\omega_{A_n}^l(s)| = \sum_{k=1}^n (t_k^{(n)})^l y_k^s \sum_{j=1}^n \sin j\alpha_k^n. \tag{1}$$

Последовательность несет информацию, ценную для определения спектра ([8, 15, 12] и др.).

§3. Основные необходимые результаты о тригонометрических полиномах, рекуррентных последовательностях и о спектрах адических преобразований и подстановок

3.1. Дадим сводку необходимых тригонометрических тождеств ([7], примеры 1.342 и 1.392, и [3], пример 361).

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sin kx = \sin\tfrac{n+1}{2}x \sin\tfrac{nx}{2}\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}$;

(b) $\displaystyle\sin nx = n\sin x\cos x \prod_{k=1}^{(n-2)/2}\Big(1 - \tfrac{sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\Big)$, n четное;

(c) $\sin nx = n\sin x \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$, n нечетное;

(d) $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_m \\ \sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin 2\alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin m\alpha_1 & \sin m\alpha_2 & \dots & \sin m\alpha_m \end{vmatrix} =$

$(-1)^{[m/2]} 2^{m(m-1)} \prod_{s=1}^{m} \sin\alpha_s \prod_{m \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\alpha_i + \alpha_k}{2} \prod_{m \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\alpha_i - \alpha_k}{2}$.

Преобразуем правую часть равенства (a), пользуясь равенствами (b) и (c) и тем, что $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Обозначая сумму $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ через $R_n(x)$, имеем:

$$R_n(x) = (n+1)n2^{-n}\sin x \prod_{k=1}^{(n-2)/2} \Big(\sin\frac{k\pi}{n}\Big)^{-2} \prod_{k=1}^{n/2} \Big(\sin\frac{k\pi}{n+1}\Big)^{-2} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{(n-2)/2} \big(\cos x - \cos\frac{2k\pi}{n}\big) \prod_{k=1}^{n/2} \big(\cos x - \cos\frac{2k\pi}{n+1}\big)$$

при n четном и

$$R_n(x) = (n+1)n2^{-n}\sin x \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \Big(\sin\frac{k\pi}{n}\Big)^{-2} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \Big(\sin\frac{k\pi}{n+1}\Big)^{-2} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \big(\cos x - \cos\frac{2k\pi}{n}\big) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \big(\cos x - \cos\frac{2k\pi}{n+1}\big) \qquad (2)$$

при n нечетном.

Из этих формул видно, что все полиномы-произведения от $\cos x$ (четырех видов), встречающиеся в их правых частях, имеют рациональные коэффициенты. В самом деле, каждый из них является наибольшим общим делителем двух полиномов от $\cos x$:

$$\frac{R_n(x)}{\sin x} \text{ и } \frac{R_{n-1}(x)}{\sin x}, \text{ либо } \frac{R_n(x)}{\sin x} \text{ и } \frac{R_{n+1}(x)}{\sin x}.$$

3.2. Вследствие того, что

$$\cos\frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2}(e^{k\pi i/(n+1)} + e^{-k\pi i/(n+1)}),$$

из теоремы о неприводимости кругового многочлена ([10, Глава VIII, §3]), следует, что имеют рациональные коэффициенты и неприводимы над полем рациональных чисел следующие полиномы от t:

$$\varphi_n(t) = \prod_{k\in[1,n],(k,n+1)=1} \Big(t - \cos\frac{k\pi}{n+1}\Big).$$

См. также [5].

Преобразуем также формулу (d):

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = (-1)^{[m/2]}2^{(m-1)m}\prod_{j=1}^{m}\sin\alpha_j \prod_{m\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\alpha_j - \cos\alpha_i). \quad (3)$$

3.3. Сформулируем утверждение, резюмирующее основные элементарные факты теории рекуррентных последовательностей на полем $\mathbf{C}$ (см., например, [4]), ограничиваясь для простоты случаем, когда все корни характеристического уравнения простые. Пусть полином

$$f(U) = a_0U^m + a_1U^{m-1} + \ldots + a_{m-1}U + a_m, \quad a_0a_m \neq 0,$$

имеет простые корни $U_1,\dots,U_m$ и $V = (V_1,\dots,V_m)$ — m-мерный комплексный вектор.

Предложение. Существует единственный полином $g_V(U)$ степени, меньшей m, такой, что последовательность

$$h_l = \sum_{k=1}^{m} g_V(U_k)(U_kf'(U_k))^{-1}U_k^l$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_mh_l + a_{m-1}h_{l+1} + \ldots + a_1h_{l+m-1} + a_0h_{l+m} = 0, \quad l > 0,$$

и

$$h_l = V_l \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant l \leqslant m.$$

Точная формула для полинома $g_V(U)$ следующая:

$$g_V(U) = \sum_{i=1}^{m} V_ia_{m-i} + U\sum_{i=1}^{m-1} V_ia_{m-i-1} + U^2\sum_{i=1}^{m-2} V_ia_{m-i-2} + \ldots + U^{m-1}\sum_{i=1}^{m} V_ia_{1-i}.$$

Предложение доказывается непосредственным решением системы линейных уравнений с определителем Вандермонда. Заметим, что если $V = (U_k, U_k^2, \dots, U_k^m)$, то $g_V(U) = U_k f(U)/(U - U_k)$ при $U \neq U_k$ и $g_V(U_k) = U_k f'(U_k)$. Если a_i и V_i целочисленные, то g_V имеет целые коэффициенты.

3.4. Будем считать, что мы имеем дело с подстановкой, определяемой набором слов $\mathcal{A}$ в алфавите Z ([6], [12]), имеющей примитивную матрицу $G_{\mathcal{A}}$ и свойство ОДД — однозначного допустимого декодирования ([8], [12], [13], [14], [15]). Вследствие связи, имеющей место между подстановками и адическими преобразованиями ([11, 12]), можно этим случаем ограничиться — формулировки для адических автоморфизмов в терминах ω_M аналогичны (причем требуется только примитивность матрицы переходов). В некоторых случаях переход на язык адических автоморфизмов все же будет даваться.

Два символа a и b из Z будем считать эквивалентными, если при каждом $m > 0$ имеет место равенство $|\omega_{\mathcal{A}}^m(a)| = |\omega_{\mathcal{A}}^m(b)|$. Таким образом, Z разбит на классы эквивалентных символов. Пусть C — один из таких классов. Существует конечное число блоков вида $x_1, \dots, x_l$, таких, что $x_1, x_l \in C$ и $x_2, \dots, x_{l-1} \notin C$, входящих в допустимую последовательность(это следует, например, из компактности $x_{\mathcal{A}}$ и минимальности). Для адического автоморфизма, соответственно, существует конечно число блоков такого вида, входящих в какое-либо слово вида $\omega_M^l(s)$ — это можно доказать непосредственно или путем эквивалентной подстановки. Назовем такие блоки *C-блоками.*

Будем назвать два слова одной длины $A = a_1 \dots a_k$ и $B = b_1 \dots b_k$ из Z словами *эквивалентной номенклатуры*, если существует такая перестановка π множества $(1, \dots, k)$, что символы a_i, и $b_{\pi(i)}$ эквивалентны при каждом $i = 1, \dots, k$.

Пару слов вида $\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_{l-1} \\ x_2 \dots x_l \end{smallmatrix}$, где $x_1 \dots x_l$ — C-блок, будем называть *C-первичной парой* базовых слов. Множество C-первичных пар обозначим через Δ_C. Будем требовать от подстановки нецикличности [9], от адического отображения, соответственно, что найдутся два пути $P_1 = a_1 \dots a_l$, и $P_2 = a_1' \dots a_l'$, с $a_1' = a_1$ и $a_l' = a_l$, такие, что их образы при адическом отображении однозначно определены и имеют разные первые символы, которые будем обозначать (так же, как какие-либо их аналоги, естественно, существующие, для подстановки) через c и d.

Теорема 1. (а) *Предположим, что в алфавите Z существует конечный набор слов $\{y_i\}$, выделено множество Δ пар слов (y_{i_k}, y_{j_k}) эквивалентной номенклатуры так, что для любой пары $(x, y) \in$*

$\Delta \cup \Delta_C$ (при некотором фиксированном C) существует натуральное $N_{x,y}$, такое, что $\omega_{\mathcal{A}}^{N(x,y)}(x) = y_{l_1} \dots y_{l_s}$ и $\omega_{\mathcal{A}}^{N(x,y)}(y) = y_{k_1} \dots y_{k_s}$, где каждая пара (y_{l_r}, y_{k_r}) принадлежит множеству $\Delta \cup \Delta_C$ и, хотя бы для одного r, $y_{l_r} = y_{k_r}$. Тогда спектр автоморфизма дискретен.

(b) *Предположим, что в алфавите Z найдется конечный набор слов $\{y_j\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел m_i, такие, что при каждом i*

$$\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(c) = y_{j_1} \dots y_{j_s} A, \quad \omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(d) = y_{k_1} \dots y_{k_s} B,$$

где A или B — пустое слово, при любом $t \in [1, s]$ $y_{j_t} \neq y_{k_t}$ и слова y_{j_t} и y_{k_t} имеют эквивалентную номенклатуру. В этом случае спектр автоморфизма подстановки имеет непрерывную компоненту.

Эта формулировка является уточнением формулировки из [11]. Сформулируем теперь достаточное условие слабого перемешивания, являющееся уточнением условия из [12] для случая, когда корни характеристического полинома простые. Оно является простым следствием результатов [8] и [12]. Будут рассматриваться случаи ОДД-подстановки $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$ и адического преобразования с примитивной матрицей M.

Пусть

$$f_T(t) = (-1)^n t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

— характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$ (соответственно, матрицы M). Назовем последовательность L_k натуральных чисел, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$L_{k+n}(-1)^n + a_1 L_{k+n-1} + \dots + a_n L_k = 0,$$

хорошей, если существует блок вида $a_1 a_2 \dots a_l$, $a_1 = a_l$, входящий в допустимую последовательность (то есть в последовательность из $X_{\mathcal{A}}$) такой, что

$$L_k = \sum_{i=1}^{l-1} |\omega_{\mathcal{A}}^k(a_i)|.$$

Очевидно, что

$$(|\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(1)|, \dots, |\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(n)|) = G_{\mathcal{A}}(|\omega_{\mathcal{A}}^k(1)|, \dots, |\omega_{\mathcal{A}}^k(n)|).$$

Такие последовательности рассматривались в [8].

Дадим определение хороших последовательностей для стационарного адического автоморфизма $T_M : X_M \to X_M$, где X_M — марковский компакт, построенный по матрице M, а T_M — его адическое преобразование. Пусть $P_1 = y_0, \dots, y_l$, и $P_2 = z_0, \dots, z_l$ — два пути длины l, причем $y_0 = z_0$, $y_l = z_l$, $P_1 < P_2$. Определим последовательность натуральных чисел $N_m(P_1, P_2)$. Для любого пути $x_0, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_l$, $x_{m+l+2}, \dots \in X_m$, путь $x_0, \dots, x_m, z_0, \dots, z_l, x_{n+l+2}, \dots$ тоже принадлежит X_M и для некоторого k, не зависящего от x_i, имеет место соотношение

$$T^k(x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_l, x_{m+l+2}, \dots) = x_0, x_m, z_0, \dots, z_l, x_{m+l+2}, \dots .$$

Положим $N_m(P_1, P_2) = k$. При фиксированных P_1, P_2 последовательность $N_m(P_1, P_2)$ — рекуррентная, соответствующая характеристическому полиному матрицы M. Назовем все последовательности вида $N_m(P_1, P_2)$ *хорошими*. Такое же определение примем и для обобщенного адического автоморфизма [12].

Очевидно, что если обобщенный адический автоморфизм построен по подстановке [12], то соответствующие классы хороших последовательностей совпадают. Последовательности $L = \{L_k\}$ соответствует вектор $V_L = (V_1, \dots, V_n)$ где $V_i = L_i$, $i = 1, \dots, n$. Вектору V_L соответствует, в свою очередь, полином g_{V_L}. Предположим, что все корни $t_1, \dots, t_n$ полинома $f_T(t)$ — простые.

Теорема 2. Пусть $L = \{L_k\}$ — хорошая последовательность и не существует такого k_0, что все L_k, $k > k_0$, имеют общий делитель, больший 1, а также не существует полинома с целыми коэффициентами, постоянного и иррационального на множестве таких чисел t_i , что $g_{V_L}(t_i) \neq 0$ и $|t_i| \geqslant 1$. Тогда автоморфизм подстановки обладает слабым перемешиванием.

Замечание. Если $L = \{ L_k\}$ — хорошая последовательность для подстановки и наряду с рекуррентным соотношением, отвечающим полиному $f_T(t)$, удовлетворяет иному рекуррентному рациональному соотношению с полиномом f^*, то теорема 2 верна, если вектор V_L, полином g_{V_L}, и множество корней $\{t_i\}$ рассматривать для полинома f^* ($\dim V_L = \deg f^*$).

Ясно, что для матрицы A_n все последовательности вида $|\omega^k_{A_n}(s)|$, при фиксированном s, хорошие. Докажем, что последовательность $|\omega^k_{A_n}(n)|$ удовлетворяет первому требованию теоремы 2. В самом деле, если все числа $|\omega^k_{A_n}(n)|$ при $k > k_0$ имеют общий делитель $d > 1$, то из определения A_n ясно, что d делит все числа $|\omega^k_{A_n}(s)|$ при $1 \leqslant s \leqslant n$ и $k > k_0$ — невозможность этого вытекает из очевидной леммы.

Лемма. Пусть $f(t) = t^n + \dots a_{n-1}t + a_n$ *— целочисленный полином, такой, что* $f(A) = 0$ *для некоторой целочисленной матрицы* A*. Пусть некоторое целое* k *делит* a_n *но не* a_{n-1}*. Пусть, далее, для некоторого целочисленного вектора* a *число* k *делит* $A^s a$*, где* s *целое. Тогда* k *делит* Aa*.*

§4. Спектры адических преобразовании с матрицами A_n

Теорема 3. Для $n = 2$ *и для* $n = 3$ *спектр адических преобразовании с матрицами* A_n *дискретен, для* $n > 3$ *адические преобразования обладают слабым перемешиванием.*

Доказательство. Пусть $n = 2$. Набор слов X_i таков: $X_1 = 112$, $X_2 = 122$. 1 эквивалентно 2, поэтому единственная нетривиальная пара базовых слов — $\{1\}$, $\{2\}$. Добавив пары $(\{1\},\{1\})$ и $(\{2\},\{2\})$, мы, очевидно, исчерпаем $\Delta \cup \Delta_C$. Собственные числа — все числа вида $\exp(2\pi ki/3^m)$, где k и m натуральные.

Пусть $n = 3$. Перечень базовых слов и их пар весьма обширен. Уменьшим его, учитывая симметрию, заключающуюся в возможности чтения слов справа с последующей заменой: $1 \leftrightarrow 3$. В качестве класса C возьмем $\{2\}$. Первичные пары базовых слов будут:

21 23 уже 211 231
12 32 ненужная 112 312,

233 2311 2331 23311
ненужная
332 3112 3312 32112.

К ним добавляются следующие пары:

1 2 3 12 2231
ненужная
1 2 3 23 1212

22311 31122 31122 22323
12112 23233 23233 12122

232331 2323311 23323311 3122311212
311212 3112112 33112112 2232332331

3112122312 33112112122311212
2312232331 23323312232332331

331121121223112112 31121121223122
233233122323323311 23233122323323

3112112122311212 31121121223112112
2323312232332331 23233122323323311.

Группа собственных чисел есть $\{\exp(2\pi i\, r\, P(2+\sqrt{2}))\}$, где r — некоторое рациональное число, а P пробегает все целочисленные полиномы.

Пусть $n=4$. В качестве хорошей последовательности выберем $L=\{|\omega_{A_n}^{l-1}(n)|\}_{l=1}^{\infty}$. Для определения корней g_{V_L} найдем коэффициенты y_k^n из разложения (1) §2 (вектора l_n). В определителе $D(\alpha_1^n,\dots,\alpha_n^n)$ алгебраическим дополнением элемента $\sin n\alpha_k^n$ служит число $(-1)^{n+k}D(\alpha_1^n,\dots,\widehat{\alpha_k^n},\dots,\alpha_n^n)$, где $\widehat{\alpha_k^n}$ означает, что из списка аргументов исключен α_k^n. Поэтому

$$\begin{aligned} y_k^n &= (-1)^{n+k}D(\alpha_1^n,\dots,\widehat{\alpha_k^n},\dots,\alpha_n^n)/D(\alpha_1^n,\dots,\alpha_n^n)\\ &=2^{2(n-1)}(-1)^{n+k+[\frac{n}{2}]-[\frac{n-1}{2}]}(\sin\alpha_k^n)^{-1}\prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\cos\alpha_k^n-\cos\alpha_j^n)^{-1}(-1)^{k-1}\\ &=2^{2(n-1)}(\sin\alpha_k^n)^{-1}\Big(\prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\cos\alpha_k^n-\cos\alpha_j^n)\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\cos\alpha_k^n-\cos\alpha_j^n) &= 2^{-n}\prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(2\cos\alpha_k^n-2\cos\alpha_i^n)\\ &= 2^{-n}\prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(t_j^{(n)}-t_k^{(n)}) = (-2)^nP_n'(t_k^{(n)}) \end{aligned}$$

и $\sin\alpha_k^n\neq 0$ ни для каких k,n, а нули полиномов от $\cos x$ вида $R_n(x)/\sin x$ найдены нами в §3, имеем, что среди нулей полинома g_{V_L} содержатся те и только те $t_k^{(n)}$, для которых $n+1-k$ четно.

Таким образом, по теореме 2, нам осталось доказать, что не существует такого целочисленного полинома $P(t)$, который принимал бы одно и то же иррациональное значение для всех $t_k\geqslant 1$, для которых $n+1-k$ нечетно, или, иначе, для тех $k\geqslant (n+1)/3$, для которых $n+1-k$ нечетно.

При $n=4l+1$ к числу таких $t_k^{(n)}$ относится $t_k^{(n)}=2$ $(k=2l+1)$, поэтому $P(t_k^{(n)})$ рационально.

В остальных случаях доказательство является простым упражнением на использование неприводимости полиномов $\varphi_s(t)$ и рациональности их коэффициентов (§3), в силу следующего тривиального утверждения.

Предложение. Пусть $G_1(t)$ и $G_2(t)$ — два полинома ненулевой степени с рациональными коэффициентами и β — комплексное число. Если $G_1(t)|(G_2(t)+\beta)$, то β рационально.

При n нечетном достаточно выбрать некоторое нечетное k_0, удовлетворяющее условию $(n+1)/3 \leqslant k_0 < (n+1)/2$, и заметить, что по предположению $P(t_{k_0}^{(n)}) = P(t_{n+1-k_0}^{(n)})$ и что, вследствие неприводимости $\varphi_{(n+1)/(k_0,n+1)}$, это влечет $P(t_k^{(n)}) = P(t_{n+1-k}^{(n)})$ для всех $k : (k, n+1) = (k_0, n+1)$ (в том числе k с этим свойством и $0 < k < (n+1)/3$), и применить предложение с $G_1 = \varphi_{(n+1)(k_0,n+1)}$ и $G_2 = P$.

При n четном достаточно выбрать такое четное k_0, что $(n+1)/3 \leqslant k_0 \leqslant \frac{5}{6}(n+1)$ и $(k_0, n+1) = 1$. В качестве такого k_0 можно взять, например, степень двойки. В этом случае имеем $P(t_{k_0}^{(n)}) = P(t_{2k_0}^{(n)})$ (область значении k_0 расширена за пределы $n/2$ вследствие четности функции косинус). Но $t_{2k_0}^{(n)} = 4 - (t_{k_0}^{(n)} - 2)^2$, то есть соотношение снова полиномиальное, равенство $P(t_k^{(n)}) = P(t_{2k}^{(n)})$ снова имеет место для четных k, $0 < k < n+1, (k, n+1) = 1$; область $0 < k < (n+1)/3$ снова "захватывается" множеством постоянства P. Применение предложения завершает доказательство теоремы.

§5. Косые произведения

Известно, что матрица $G_{\mathcal{A}}$ и тем более ее характеристический полином (или матрицы M) не определяет спектр подстановки однозначно. Например, подстановка со смешанным спектром, связанная с последовательностью Морса, имеет матрицу

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix},$$

но такую же матрицу имеет циклическая подстановка $\begin{smallmatrix} 1\to 1 & 2 \\ 2\to 1 & 2 \end{smallmatrix}$ и адический автоморфизм с число дискретным двоично-рациональным спектром. Более сложные примеры имеются в [1], [15] и [16]. Некоторую информацию о спектре характеристический полином $G_{\mathcal{A}}$ все же дает. Например, при естественных предположениях, если характеристический полином неприводим над полем рациональных чисел и среди его корней есть число Пизо, то спектр имеет дискретную компоненту (для адических преобразований это утверждение доказано в дипломной работе М.И.Соломяк; для подстановок см. также [15, стр. 141]).

Если полином приводим, то, как это будет видно ниже, наличие числа Пизо среди корней не гарантирует наличия дискретной компоненты. Одинаковую матрицу $G_{\mathcal{A}}$ могут иметь различные косые произведения с одной базой, поэтому изучение косых произведений и представление в виде косых произведений являются важными источниками получения примеров. Эти вопросы для подстановок и обобщенных последовательностей Морса интенсивно изучаются (см. [15, стр. 175] и библиографию [15]).

Мы изучим сейчас класс косых произведений над подстановками, вообще говоря, с непостоянной длиной слова.

Пусть $Z = \{1, \dots, n\}$ — алфавит, $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^n$ — набор слов, $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$ — автоморфизм подстановки ([6, 12]). Рассмотрим конечное множество $Y = \{1, \dots, m\}$. На нем действует симметрическая группа $\mathfrak{S}_m$.

По аналогии с [12] рассмотрим множество U пар натуральных чисел $(f, g) : 1 \leqslant f \leqslant n$, $1 \leqslant g \leqslant |A_f|$ и произвольное сначала отображение $\pi' : U \to \mathfrak{S}_m$. Построим новую подстановку. В качестве алфавита Z_1, возьмем декартово произведение $Z \times Y$. Набор слов $\mathcal{A}' = \{A_{(i,j)}\}, i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ будет строиться следующим образом: слово $A_{(i,j)}$ будет иметь одинаковую длину с A_i. Если A_i имело вид $a_1, \dots, a_s$, то $A_{(i,j)} = a_1^j, \dots, a_s^j$, где

$$a_l^j = (a_l, \pi(i, l)j) \in Z_1, \quad 1 \leqslant l \leqslant s.$$

От исходной матрицы $G_{\mathcal{A}} = \{g_{ij}\}_{i,j}^n = 1$ мы требуем примитивности. Потребуем от отображения π, чтобы таковая имела место и для $G_{\mathcal{A}'}$. Очевидно, что если базовая подстановка обладает свойством ОДД, то подстановка $T' : X_{\mathcal{A}'} \to X_{\mathcal{A}'}$ является косым произведением со слоем Y над $T : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$. Очевидно, что это косое произведение наследует свойство ОДД базы. В общем случае назовем $T' : X_{\mathcal{A}'} \to X_{\mathcal{A}'}$ *π-произведением*.

Класс хороших последовательностей в смысле теоремы 2 для π-произведении уже, чем для базы, но если последовательность хороша для π-произведения и удовлетворяет для базы условиям теоремы 2, то по замечанию, следующему за теоремой 2, π-произведение слабо перемешивает. Взятие π-произведения (формальное) может улучшить свойства базы, например, «разрушить» цикличность, увеличить шансы на ОДД. Так, отправляясь от циклической подстановки $\begin{smallmatrix} 1\to 1 & 2 \\ 2\to 1 & 2 \end{smallmatrix}$ (которой, правда, соответствует 2-адический автоморфизм), мы можем построить косое произведение со слоем $Y = (1, 2)$. Если, обозначая образующую $\mathfrak{S}_2$ через V, выбрать: $\pi(1, 1) = \pi(1, 2) = \pi(2, 1) = e$,

$\pi(2,2) = V$, мы получим известную подстановку Рудина – Шапиро с лебеговской компонентой спектра (очевидно, со свойством ОДД):

$$A_{(1,1)} = (1,1)(2,1)$$
$$A_{(1,2)} = (1,2)(2,2)$$
$$A_{(2,1)} = (1,1)(2,2)$$
$$A_{(2,2)} = (1,2)(2,1).$$

Взяв в качестве базовой циклическую подстановку $1 \to 1\ 1$, можно построить π-произведение со слоем $(1,2)$. Если положить $\pi(1,1) = e$, $\pi(1,2) = V$, то получим подстановку Морса

$$A_{(1,1)} = (1,1)(1,2), \quad A_{(1,2)} = (1,2)(1,1).$$

Эта подстановка имеет дискретную и непрерывную компоненты. Множество π-произведений над подстановками вида $1 \to 1\,1 \ldots 1$ совпадает с множеством автоматов в смысле [15], гл. V.

Обозначим через $f_{\mathcal{A}}$ характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$. Сейчас мы проведем несложные выкладки, показывающие, что $f_{\mathcal{A}}$ делит $f_{\mathcal{A}'}$, и выразим частное $f_{\mathcal{A}'}/f_{\mathcal{A}}$ как характеристический полином некоторой матрицы, что полезно для построения примеров. Матрица $G_{\mathcal{A}'}$ является блочной и имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & \ldots & a_{1m}^{ij} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{ij} & \ldots & a_{mm}^{ij} \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

причем для любого r_0

$$\sum_{l=1}^{m} a_{lr_0}^{ij} = g_{ij} \tag{1}$$

и для любого l_0

$$\sum_{r=1}^{m} a_{l_0 r}^{ij} = g_{ij}. \tag{2}$$

Матрица $G_{\mathcal{A}'}(t) = G_{\mathcal{A}} - tI$ тоже блочная, с блоками $A_{ij}(t)$, равенства (1) и (2) для нее тоже имеют место с заменой g_{ii} на $g_{ii}(t) = g_{ii} - t$. При $i \neq j$, $g_{ij}(t) = g_{ij}$.

Легко осуществить над столбцами и строками $G_{\mathcal{A}'}(t)$ такие преобразования, чтобы в каждом блоке $A_{ij}(t)$ были выполнены следующие:

(1) прибавление всех столбцов (кроме m-го) к m-му:

$$\begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{m1}(t) & \dots & g_{ij}(t) \end{pmatrix}.$$

(2) прибавление всех строк к последней:

$$\begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{(m-1)1}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ g_{ij}(t) & \dots & mg_{ij}(t) \end{pmatrix}.$$

(3) вычитание из всех строк последней, деленной на m:

$$\begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{(m-1)1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & 0 \\ g_{ij}(t) & \dots & mg_{ij}(t) \end{pmatrix}.$$

(4) вычитание из всех столбцов последнего, деленного на m:

$$\begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{1\,m-1} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{m-1\,1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{m-1\,m-1} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & mg_{ij}(t) \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $f_{\mathcal{A}}$ делит $f_{\mathcal{A}'}$, и что

$$f_{\mathcal{A}'} = m^n |G_{\mathcal{A}}(t)|\,|D(t)| = m^n f_{\mathcal{A}} |D(t)|,$$

где

$$D(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & \dots & C_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(t) & \dots & C_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

причем

$$C_{ij}(t) = \begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{1\,m-1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{m-1\,1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{m-1\,m-1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что если $i \neq j$, то $C_{ij}(t)$ не зависит от t. Если $i = j$, то

$$C_{ij}(t) = C_{ij} + t \begin{pmatrix} -\frac{m-1}{m} \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ +\frac{1}{m} - \frac{m-1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{m} & \dots & -\frac{m-1}{m} \end{pmatrix} = C_{ij} + tF_m.$$

Необходимо осуществить такие преобразования над строками и столбцами и домножение строк или столбцов на m, чтобы F_m преобразовались в $-I$. Можно выполнить их таким образом, и использовать множитель m^n, чтобы каждая клетка

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} C^{ij}_{11} & \dots & C^{ij}_{1\,m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C^{ij}_{m-1\,1} & \dots & C^{ij}_{m-1\,m-1} \end{pmatrix}$$

имела следующие элементы:

$$\begin{aligned} &C^{ij}_{11} = g_{ij} - ma^{ij}_{1m}; \quad C^{ij}_{1k} = (a^{ij}_{1k} - a^{ij}_{1m})m; \quad k > 1, \\ &C^{ij}_{l1} = a^{ij}_{1m} - a^{ij}_{lm}; \quad l < 1, \\ &C^{ij}_{lk} = a^{ij}_{lk} + a^{ij}_{lm} - a^{ij}_{lm} - a^{ij}_{lm}; \quad k > 1. \end{aligned}$$

Блочная матрица

$$D' = \begin{pmatrix} C'_{11} & \dots & C'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C'_{n1} & \dots & C'_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет характеристический полином, равный $f_{\mathcal{A}'}/f_{\mathcal{A}}$. Обозначим этот полином через $f_{\mathcal{A}/\mathcal{A}'}$. При $m = 2$ матрицы C'_{ij} одномерны. Можно выбрать

$$C'_{ij} = a^{ij}_{11} - a^{ij}_{12}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ определяет слабо перемешивающую подстановку из [11]:

$$\begin{smallmatrix} 1\to 112 \\ 2\to 1222 \end{smallmatrix}, \quad G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зафиксировав $m = 2$, выберем такую D', чтобы корнем $f_{\mathcal{A}'/\mathcal{A}}$ было число Пизо. Например,

$$D' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве соответствующего $\mathcal{A}'$ можно взять

$$A_{(1,1)} = (1,2)(1,2)(2,1), \quad A_{(1,2)} = (1,1)(1,1)(2,2),$$
$$A_{(2,1)} = (1,1)(2,2)(2,1)(2,1)(2,2),$$
$$A_{(2,2)} = (1,2)(2,1)(2,2)(2,2)(2,1).$$

Из вышесказанного следует, что косое произведение слабо перемешивает, хотя среди корней $f'_{\mathcal{A}}$ есть число Пизо, ведь последовательность $|\omega^l_{\mathcal{A}}(2)|$ хороша для $\mathcal{A}'$.

§6. Доказательство теоремы 1

Доказательство будет производиться для случая адического стационарного автоморфизма без кратных дуг (т.е. $\pi_{ij} = 0$ или 1). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Доказательство теорем такого типа для подстановок см. в [15].

Утверждение (а).

Заметим, что набор слов $\{y_i\}$ и совокупность пар можно изменить таким образом, чтобы условие (а) по-прежнему выполнялось с некоторой постоянной функцией пары (x, y). Опишем это изменение. Пусть

$$N_0 = \operatorname*{Max}_{(x,y)\in\Delta\cup\Delta_c} N_{x,y},$$

где $N_{x,y}$ исходная функция. К исходному множеству пар Δ добавим множество Δ' пар слов вида $(\omega^k_M(x), \omega^k_M(y))$, где $(x, y) \in \Delta \cup \Delta_C$, $1 \leqslant k \leqslant N_{x,y}$. Мы включим эти новые слова в набор $\{y_i\}$, отождествив в нем затем одинаковые слова, если таковые появятся. Теперь можно считать, что $N_{x,y}$ тождественно равно N_0, сохранив прежнее Δ_C и рассматривая $\Delta \cup \Delta'$ в качестве нового Δ.

Зафиксировав некоторое $b \in C$, выберем L_0 такое, что при $L > L_0$ для каждого $a \subset Z$ символ b встречается хотя бы дважды в слове $\omega^L_M(a)$. Пусть $U_1 \dots U_r$ такое подслово $\omega^L_M(a)$, что U_1 — первое вхождение b в $\omega^L_M(a)$, а U_r — последнее. Обозначим слово $U_1 \dots U_{r-1}$ через $X^{a,b}_L$, а слово $U_2 \dots U_r$ через $Y^{a,b}_L$. Ясно, что слова $X^{a,b}_L$ и $Y^{a,b}_L$ одной номенклатуры. Из условия (а) и из постоянства $N_{x,y}$ следует, что для

любого $\varepsilon > 0$ найдется такое K, что при $q > K$ для любых $a \in Z$ и $L > L_0$ доля символов, стоящих на одинаковых местах в словах $\omega_M^q(X_L^{a,b})$ и $\omega_M^q(Y_L^{a,b})$ и не совпадающих между собой, меньше ε. Причем существует такое C_1, что в качестве K можно взять $[|C_1 \ln \varepsilon|]$. Мы воспользуемся достаточным условием дискретности спектра [16], из которого следует, что если для сохраняющего меру автоморфизма $T : (\mathcal{X}, \mu) \to (\mathcal{X}, \mu)$ существует последовательность разбиений $\xi_m \to \xi$ и рекуррентная последовательность натуральных чисел $p_n \to \infty$, такие, что для любых k и любых $C' \in \xi_k$

$$\sum_n \mu(T^{p_n} C' \Delta C') < \infty,$$

то спектр T дискретен. Для проверки выполнения этого условия возьмем в качестве ξ_m разбиения пространства путей Ω_M на множества следующего вида:

$$C' \in \xi_m \Leftrightarrow (\exists a_1, \dots, a_m \in Z;\ M_{a_i a_{i+1}} = 1;\\ C' = \{\{x_i\} \in \Omega_M;\, x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m\}).$$

В качестве p_l возьмем $\operatorname{card}\{\{x_i\}_1^l;\, M_{x_i x_{i+1}} = 1,\, x_l = b\}$. Последовательность p_l, очевидно, рекуррентна.

Для произвольного натурального S и $a \in Z$ обозначим через $V(a, S)$ множество $\{\{x_i\} \in \Omega_M;\, x_S = a\}$. Из примитивности M следует, что для некоторого $C_2 > 0$ при любых $a \in Z$, $\varepsilon > 0$ и q, и при $L > [|C_2 \ln \varepsilon|]$ имеем:

$$|\omega_M^q(X_L^{a,b})|/|\omega_M^{q+L}(a)| = |\omega_M^q(Y_L^{a,b})|/|\omega_M^{q+L}(a)| > 1 - \varepsilon.$$

По определению ω_M каждому пути $a_1 a_2$, $M_{a_1 a_2} = 1$, можно поставить в соответствие пару (a_2, n_1), где n_1 — номер символа a_1 в слове $\omega_M(a_2)$, а каждому пути вида $a_1 a_2 a_3$ — тройку (a_3, n_2, n_1), где n_2 — номер a_2 в слове $\omega_M(a_3)$; n_1 — номер пути $a_1 a_2 a_3$ при перечислении, отвечающем упорядочению путей длины 2, заканчивающихся в a_3, равный номеру символа слова $\omega_M^2(a_3)$, совпадающего с a_1, и т.д. — т.е. мы пути длины n с концом в a_{n+1} приводим во взаимно-однозначное соответствие с символами слова $\omega_M^r(a_{n+1})$.

Рассматривая $X_L^{a,b}$ и $Y_L^{a,b}$ как подслова слова $\omega_M^r(a)$, замечаем, что совпадение символов, стоящих на одинаковых местах в словах $\omega_M^q(X_L^{a,b})$ и $\omega_M^q(Y_L^{a,b})$, означает, что для любого $L' > L + q$ и некоторого слова вида $Z_1 \dots Z_{q+L+1}$, $M_{Z_i Z_{i+1}} = 1$, $Z_{q+L+1} = a$, для любого пути

вида $x_1 \dots x_{L'-L-q} Z_1 \dots Z_{q+L+1} x_{L'+2} \dots \in \Omega_M$, его образ под действием $T_{p_L - L+1}$ тоже начинается с $x_1 \dots x_{L'-L-q} Z_1$. Соответствие между нашими словами вида $Z_1 \dots Z_{q+L+1}$ и символами слова $\omega_M^q(X_L^{a,b})$ (всегда равными Z_1) описано выше.

Теперь ясно, что для любого m найдутся $C_3, C_4 > 0$, $C_4 < 1$, и натуральное S_m, такие, что для $C' \in \xi_m$, $a \in Z$, и $l > 0$,

$$\mu(T^{p_l}(C' \cap V(a, l + S_m) \Delta (C' \cap V(a, l + S_m)) < C_3 C_4'.$$

Поскольку $\bigcup_{a \in Z} V(a, l + S_m) = \Omega_M$, утверждение доказано.

Утверждение (b).

Предположим, что T имеет дискретный спектр, и докажем, что в этом случае не может выполняться условие утверждения (b). Пусть $\{U_j', e^{i2\pi\lambda_j}\}$ — перечень собственных функции и собственных значении, им соответствующих. Пусть P_1 и P_2 — пути, участвующие в определении символов c и d из пункта (b). Тогда $N_m(P_1, P_2)$ — хорошая рекуррентная последовательность (§3.4). Можно доказать ([12], аналог для подстановок в [8]), что для каждого j имеет место сходимость $e^{2\pi i N_M(P_1,P_2)\lambda_j} \to 1$ при $m \to \infty$. Из предположения о дискретности спектра следует, что для любого $f \in L^2(\Omega_M)$ имеет место сходимость по норме:

$$U_T^{N_m(P_1,P_2)} f \to f,$$

где U_T — унитарный оператор, сопряженный с T.

Пусть $b_1, \dots, b_l$, $c = b_1$, $b_l = a_l$ — образ P_1 при адическом отображении, $b_1', \dots, b_l'$, $d = b_1'$, $b_l' = a_l$ — образ P_2. Обозначим через R_m множество путей вида $x_1 \dots x_m b_1 \dots b_l x_{m+l+1} \dots \in \Omega_M$, через R_m' — множество путей вида $x_1 \dots x_m b_1' \dots b_l' x_{m+l+1} \dots \in \Omega_M$. Тогда

$$T^{N_m(P_1,P_2)} R_m = R_m', \quad \mu(R_m) > 0;$$

$\mu(R_m)$ не зависит от m (μ — инвариантная мера адического преобразования — является одновременно инвариантной мерой с максимальной энтропией для сдвига в Ω_M).

Из условия (b) легко следует существование константы $g > 0$ и символа $a' \in Z$, таких, что при достаточно больших i в слове $\omega_M^{m_i}(c)$ долю символов, большую чем g, составляют символы, равные a', стоящие на таких местах, на которых в $\omega_M^{m_i}(d)$ стоят символы, отличные от a' (если необходимо, можно вместо последовательности m_i взять ее

подпоследовательность). Но поскольку $\mu(R_{m_i})$ — положительная константа, для характеристической функции χ множества $V(a',1)$ (пункт (a)) имеем

$$\begin{aligned}\|U_T^{N_{m_i}(P_1,P_2)}\chi-\chi\| &= \sqrt{\mu(T^{N_{m_i}(P_1,P_2)}V(a',1)\Delta V(a',1))}\\ &> \sqrt{\mu(T^{N_{m_i}(P_1,P_2)}(Va',1)\cap R_{m_i})\Delta(V(a',1)\cap R_{m_i}))}\\ &> \text{const} > 0,\end{aligned}$$

чем и доказано утверждение (b).

Литература

1. Dekking F. M., Keane V. *Mixing properties of substitutions.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. **42**:1 (1978), 23–33.
2. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., Наука, 1977.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. *Сборник задач по высшей алгебре.* М., Наука, 1977.
4. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М., Наука, 1967.
5. Goodman F.M., de la Harpe P., Jones V.F.R. *Coxeter graphs and towers of algebras.* Mathematical Sciences Research Institute Publications. 14 Springer-Verlag. NY, Berlin, 1989.
6. Gottschalk W.H. *Substitution of minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.
7. Градштейн И.М., Рыжик И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М., Наука, 1971.
8. Host B. *Valeurs propres des systèmes dynamiques définies par des substitutions de longeur variable.* Ergodic Theory Dynamical Systems **6**:4 (1986), 529–540.
9. Kamae T. *A topological invariant of substitution minimal sets.* J. Math. Soc. Japan **24**:2 (1972), 285–305.
10. Ленг С. *Алгебра.* Мир, 1968.
11. Лившиц А.Н. *О спектрах адических преобразований марковских компактов.* УМН, **42**:3 (1987), 189-190.
12. Лившиц А.Н. *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований.* Матем. заметки **44**:6 (1988).
13. Martin J.C. *Substitution minimal flows.* Amer. J. Math. **93**:2 (1971), 503–526.
14. Martin J.C. *Minimal flows arising from substitutions of non-constant length.* Math. Systems Theory **7**:1 (1973), 72–82.
15. Queffélec M. *Substitution dynamical systems — spectral analysis.* Lecture Notes in Mathematics, vol. **1294**. Springer-Verlag, Berlin, New York. 1987.
16. Соломяк Б.М. *Об одной динамической системе с дискретным спектром.* УМН **41**:2 (1986), 209-210.
17. Вершик А.М. *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* ДАН СССР **259**:3 (1981), 526–529.
18. Вершик А.М. *Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории.* Записки научн. сем. ЛОМИ, т. **115** (1982), 72-82.
19. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. *Семинар Софус Ли.* М., ИЛ, 1962.

ОБ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введение

Рассмотрим следующую задачу (фактически являющуюся переформулировкой в терминах теории динамических систем общей задачи о суммировании случайных величин, образующих стационарную в узком смысле последовательность).

Пусть (X, μ) — пространство Лебега и $T : X \to X$ — его метрический автоморфизм. Тогда для любой измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ на нем можно рассмотреть последовательность функций $f_n : f_n(x) = f(T^n x)$; $-\infty < n < +\infty$. Ее можно рассматривать как стационарную последовательность случайных величин. Рассмотрим последовательность величин $S_n : S_n(x) = \sum_0^n f_i(x)$, $0 \leqslant n < +\infty$. Представляет интерес вопрос о том, существует ли последовательность коэффициентов σ_n, такая, что распределения величин $\frac{S_n}{\sigma_n}$ стремятся к некоторому. Частным случаем является изучение достаточно регулярных процессов (например, автоморфизмов Бернулли) с точки зрения центральной предельной теоремы. Вообще говоря, предельное распределение может и не существовать. В этом случае интересен вопрос о том, существуют ли последовательности натуральных чисел n_l и коэффициентов σ_l, такие, что предел имеют распределения S_{n_l}/σ_l. Мы будем предполагать, что в X выделена конечная образующая [1] и, тем самым, T реализован как сдвиг в пространстве двусторонних последовательностей. При этом будем считать, что f зависит лишь от нулевой координаты, то есть заведомо пробегает лишь дискретное множество значений. Таким образом, мы имеем алфавит $Z = \{1, \dots, k\}$ и алфавиты $Z_i = Z$, $-\infty < i <$

Препринт ЛОМИ Р-5-92 (1992).

$+\infty$; $X = \prod_{-\infty}^{+\infty} Z_i$; $T(\{\dots x_{-i}\dots x_0, \dots x_i, \dots\}) = \{y_i\}_{-\infty}^{\infty}$; $y_i = x_{i+1}$, $-\infty < i < +\infty$. . Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — набор вещественных чисел и $f(\{\dots x_{-i}\dots, x_0 \dots x_i, \dots\}) = \alpha_{x_0}$. Пусть $A = u_0 \dots u_m$ — слово над алфавитом Z и $\widetilde{A}$ — соответствующее ему цилиндрическое множество:

$$\widetilde{A} = \{\{\dots x_{-i}\dots, x_0, \dots x_i, \dots\} : x_j = u_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Обозначим через $\Delta(A)$ число $\sum_{i=0}^{m} \alpha_{u_i}$. Тогда дискретная случайная величина ξ_{m+1}, принимающая значения $\Delta(A)$ с вероятностями $\mu(\widetilde{A})$, где A пробегает множество всех слов над Z длины $m+1$, имеет то же распределение, что и S_m. То есть для нашего случая вопрос сводится к изучению ξ_{m+1}. Заметим, что для динамических систем изучение вопроса о возможных предельных распределениях открывает путь к введению новых интересных метрических инвариантов. Особый интерес разброс в распределении $\Delta(A)$ (т.е. величины ξ_{m+1}) приобретает для подстановочных динамических систем ([2], [3], [4] и пр.), например, в связи с теорией фракталей и вопросом о топологическом перемешивании ([5], [6], [7], [8] и пр.). Эти системы очень далеки от регулярности — f_i сильно зависимы между собой. Разброс значений ξ_{m+1} имеет асимптотику $O((m+1)^{\lambda})$, где λ зависит от матрицы подстановки. Тем не менее, характерное для регулярных процессов значение $\lambda = \frac{1}{2}$ тоже встречается, и именно так обстоит дело для изучаемой в данной работе подстановки Рудина – Шапиро ([4], [9], [10] и пр.), имеющей, кстати, двукратную лебеговскую компоненту в спектре. Основой для ее изучения будут методы и важные результаты работ [9] и [10]. Подстановочные системы отличаются от многих других тем, что допускают описание на точечном уровне как минимальные гомеоморфизмы топологических пространств. Видимо, именно поэтому для работ, в которых изучается $\Delta(A)$ ([9], [10], [11], [12], библиография [12] и др.) характерно рассмотрение тех A, которые являются началами некоей выделенной односторонней последовательности. А именно, пусть задан некоторый набор слов $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{k}$ над алфавитом Z. Определим отображение подстановки:

$$\omega_{\mathcal{A}} : \bigcup_{i=1}^{\infty} Z^i \to \bigcup_{i=1}^{\infty} Z^i : \omega_{\mathcal{A}}(v_1 \dots v_p) = A_{v_1} \dots A_{v_p},$$

где в правой части стоит соединение слов. Если для простоты предположить, что A_1 начинается с 1, то определено $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1)$ — бесконечное слово, являющееся односторонней последовательностью.

Пусть $G_{\mathcal{A}} = \{g_{ij}\}$, где g_{ij} — число вхождений символа j в слово A_i — матрица подстановки. Пусть $G_{\mathcal{A}}$ примитивна и $\theta_1 > \theta_2$ — два ее наибольших собственных значения. Оказывается ([11], [12] и пр.), что в широком классе случаев, если математическое ожидание f равно 0, то для слов-начал $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1)$ $\Delta(A)$ имеет асимптотику $O(|A|^{\lambda})$, где $|A|$ — длина A, а $\lambda = \frac{\log \theta_2}{\log \theta_1}$. Для подстановок с переменной длиной слова вопрос о предельных распределениях, в общем случае, видимо, весьма сложен. Для (хорошо изученной) подстановки Рудина – Шапиро для некоторых $\{n_k\}$ некоторая информация о предельных распределениях может быть получена. Заметим, что в [10] для слов вышеописанного типа получены некоторые результаты о распределении последовательности значений $\Delta(A)$, не являющиеся непосредственно результатами о распределениях сумм случайных величин рассматриваемого типа.

§1. Подстановка Рудина – Шапиро и суммирование коэффициентов Рудина – Шапиро

Подстановке Рудина – Шапиро соответствует алфавит $Z = \{1, \dots, 4\}$ и набор слов $\mathcal{A} = \{13, 43, 12, 42\}$. Для определения f полагаем $\alpha_i = \tau_i$, $\tau_1 = \tau_3 = 1$; $\tau_2 = \tau_4 = -1$. Пусть $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1) = v_0, v_1 \dots$. Рассмотрим последовательность $a(n) = \tau_{v_n}$ ([4] и пр.). Это и есть замечательная последовательность коэффициентов Рудина – Шапиро, возникшая впервые в работах [13], [14], посвященных проблеме равномерной минимизации тригонометрических сумм $\sum \varepsilon_n e^{int}$, где $\varepsilon_n = \pm 1$, но впоследствии получившая многочисленные и разнообразные применения в совершенно иных областях. Коэффициент $a(n)$ может быть интерпретирован как $(-1)^{r(n)}$, где $r(n)$ — число вхождений слова 11 в двоичной записи числа n ([4], [9] и пр.). Иначе говоря, пусть двоичная запись n выглядит как соединение $A_1 B_1 \dots A_m B_m$, где все слова A_i, B_i кроме, может быть, B_m — непусты, B_i состоят из одних нулей, A_i — из одних единиц. Тогда имеем: $r_n = \sum_{i=1}^{m} (|A_i| - 1)$. Заметим, что такое определение не удается распространить на бесконечные 2-адические числа. Если, тем не менее, бесконечное 2-адическое число X не есть $\dots 11 \dots 1$, то, если обозначить через $v_n(X)$ число, образуемое первыми n цифрами X, то существует такое N, что для $n > N$ $a(v_n(X) + 1)/a(v_n(X))$ не зависит от n . Обозначим это число через $b(X)$. Оно имеет следующую интерпретацию в теории косых произведений над динамическими системами: динамическая система, порожденная подстановкой Рудина – Шапиро ([4], [15] и пр.) в соответствии с общей теоремой [4], может быть представлена как косое произведение над одометром или, иначе, стационарным адиче-

ским преобразованием с матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, причем, соответствующий коцикл есть в точности $b(X)$. То есть, если одометр представить как преобразование $T : Z_2 \to Z_2$, где Z_2 — множество 2-адических чисел $T(\dots, x_0) = (\dots, 0, 0, 1) + (\dots, x_0)$, то динамическая система, соответствующая подстановке Рудина – Шапиро, метрически изоморфна $T_b : \{-1, 1\} \times Z_2 \to \{-1, 1\} \times Z_2$, $T_b(u, X) = (b(X)u, TX)$. Легко проверить (как в соответствии с определением $a(x)$, так и в соответствии с представлением подстановочной системы в виде косого произведения), что

$$b(X) = -1 \Leftrightarrow X = \begin{cases} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{cases}$$

В работе [9] изучалась асимптотика сумм $S(n) = \sum_0^n a(k)$. В [9] доказано, что $\sqrt{0,6} < \frac{S(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{6}$, причем значения оцениваемого выражения всюду плотны в $[\sqrt{0,6}, \sqrt{6}]$ Для последовательностей $m_k = (5 \cdot 2^{2k} - 2)/3$ и $n_k = 2(2^{2k+2} - 1)/3$ доказано, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S(m_k)}{\sqrt{m_k}} = \sqrt{0,6}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{S(n_k)}{\sqrt{n_k}} = \sqrt{6}.$$

Мы будем искать предельное распределение именно для последовательности n_k. То есть при каждом k мы будем изучать распределение μ_k значений $\frac{S(n+n_k)-S(n)}{2^{k-1}}$, $0 \leqslant n < \infty$. Будет доказана сходимость μ_k к предельному распределению μ[16] и описан алгоритм его вычисления. Поскольку наша подстановочная динамическая система строго эргодична, μ и будет соответствующим предельным распределением для наших сумм случайных величин. В наших выкладках мы будем пользоваться многими формулами из [9], в том числе следующими:

$$S(4n + 3) = 2S(n),\ S(4n + 1) = 2S(n), \quad 0 \leqslant n < \infty, \tag{1}$$

[16]Факт более грубый для широкого класса последовательностей $\{n_k\}$.

и формулами, составляющими предложение 5 [9]:

$$\begin{array}{ll} S(n+2^{2k})-S(n)=2^k, & 0\leqslant n\leqslant 2^{2k-1}-1,\\ S(n+2^{2k})+S(n)=3\cdot 2^k, & 2^{2k-1}-1\leqslant n\leqslant 2^{2k}-1,\\ S(n+2^{2k+1})-S(n)=2^{k+1}, & 0\leqslant n\leqslant 2^{2k}-1,\\ S(n+2^{2k+1})+S(n)=2^{k+2}, & 2^{2k}-1\leqslant n\leqslant 2^{2k+1}-1. \end{array}$$

Из последних может быть получена формула для $S(n)$ в терминах рассмотренного выше представления двоичной записи n (легче проверить, что она удовлетворяет этим соотношениям, что она верна при $n=0,1$ и что соотношения однозначно определяют $S(n)$ по $S(0)$ и $S(1)$). Рассмотрим функцию $\sigma(c,b)$, определенную для целых $0\leqslant c\leqslant b$:

$$\sigma(c,b)=\begin{cases} 2^{\frac{b}{2}+1}, & c \text{ нечетно, } b \text{ четно}\\ 2^{\frac{b+1}{2}}, & c \text{ нечетно, } b \text{ нечетно}\\ 2^{\frac{b}{2}+1}-2^{c/2}, & c \text{ четно, } b \text{ четно}\\ 2^{\frac{b+1}{2}}+2^{c/2}, & c \text{ четно, } b \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть двоичная запись числа n есть $u_k\dots u_0$ и серии единиц (в том числе длины 1) суть $u_{b_i}\dots u_{c_i}$, $1\leqslant i\leqslant p$; $c_i\leqslant b_i<c_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant p-1$. Пусть $v_i=\sum\limits_{j=i}^{p}(b_j-c_j-1)$. Тогда

$$S(n)=(-1)^{v_1}+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{v_i+1}\sigma(c_i,b_i)+\sigma(c_p,b_p). \tag{2}$$

Заметим, что $(-1)^{v_i+1}=a\big(\big[\frac{n}{2^{b_i+1}}\big]\big)$ — коэффициенты Рудина – Шапиро числа, образованного соответствующим куском двоичной записи n. Формула (2) дает представление об асимптотике и с ней удобно сверяться при проверке выкладок и получаемых соотношений.

§2. Модельные задачи о предельных распределениях

Для облегчения понимания смысла дальнейших выкладок мы рассмотрим ряд модельных задач на нахождение предельных распределений последовательностей случайных величин и их совокупностей, заданных производящими функциями [16] (возможно, решавшихся ранее в какой либо иной связи), и докажем некоторые простые теоремы существования и единственности. Первое из рассматриваемых

ниже бесконечных произведений изучалось в [17] не с точки зрения предельных распределений.

Пусть $f(t) = 1+t+t^2$, а полиномы $g_n(t)$ определяются следующими соотношениями: $g_0(t) = 1$

$$g_{n+1}(t) = f(t)g_n(t^2). \tag{3}$$

Пусть $g_n(t) = q_0^n + \ldots + q_{2^{n+1}-2}^n t^{2^{n+1}-2}$.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ дискретную меру ν_n: $\nu_n\big(\{\frac{l}{2^{n+1}}\}\big) = \frac{q_l^n}{3^n}$, $0 \leqslant l \leqslant 2^{n+1}-2$. Докажем, что последовательность мер ν_n слабо сходится к некоей непрерывной мере ν. Легко понять, как мера ν_{n+1} получается из ν_n. А именно, для произвольного отрезка $[e,f]$ имеем

$$\nu_{n+1}([e,f]) = \big(\frac{1}{3}(\delta(0)+\delta(\frac{1}{2})+\delta(1)) * \nu_n\big)([2e,2f]).$$

Это соотношение интересно тем, что значениями $\nu_n([0,\frac{1}{2}])$ и $\nu_n(\{0\})$ однозначно определяются значения ν_{n+k-1} на отрезках $[0,2^{-k}]$, $(2^{-k},2\cdot 2^{-k}]$, $\ldots$, $((2^k-1)2^{-k},1]$ и являются, конечно, непрерывными функциями от $\nu_n([0,\frac{1}{2}])$ и $\nu_n(\{0\})$. Поэтому достаточно доказать сходимость последовательности значений $\nu_k([0,\frac{1}{2}])$ и $\nu_n(\{0\})$. Но если $\nu_n([0,\frac{1}{2}]) = u$, $\nu_n(\{0\}) = v$, $1 \geqslant u \geqslant v$, то имеем, в соответствии с нашим рекуррентным соотношением, $\nu_{n+1}([0,\frac{1}{2}]) = \frac{1+u+v}{3}$, $\nu_{n+1}(\{0\}) = \frac{v}{3}$. Отсюда с очевидностью следует, что $\nu_n([0,\frac{1}{2}]) \to \frac{1}{2}$, $\nu_n(\{0\}) \to 0$.

Заметим, что так как

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2^k-1} \nu_{n+1}\Big(\Big(\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\Big]\Big) \leqslant \frac{2}{3} \max_{0\leqslant j\leqslant 2^{k-1}-1} \nu_n\Big(\Big(\frac{j}{2^{k-1}},\frac{j+1}{2^{k-1}}\Big]\Big)$$

(ибо при каждом i

$$\nu_{n+1}\Big(\Big(\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\Big]\Big) = \frac{1}{3}\left(\nu_n\Big(\Big(\frac{j_1}{2^{k-1}},\frac{j_1+1}{2^{k-1}}\Big]\Big) + \nu_n\Big(\Big(\frac{j_2}{2^{k-1}},\frac{j_2+1}{2^{k-1}}\Big]\Big)\right)$$

или слагаемое всего одно) — то есть предельная мера непрерывна. Заметим, что если рассматривать ν_n как меры на прямой, то для их преобразований Фурье верно:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{3}\Big(1+e^{i\pi\frac{x}{2}}+e^{i\pi x}\Big)F_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\varphi_n(x)F_n\left(\frac{x}{2}\right).$$

То есть (в том числе для целых x) $F_\infty(x) = \prod_0^\infty \frac{1}{3}\varphi\big(\frac{x}{2^k}\big)$, чем и определен ряд Фурье предельного распределения, рассмотренного как мера на окружности. Из этого, заметим, тоже следует существование и единственность предельного распределения. Рассмотрим уравнение (3) с $f(t) = t^{-1} + 1 + 2t^2$. Аналогичное рассмотрение приведет нас к последовательности мер ν_n на отрезке $[-\frac{1}{2}, 1]$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению

$$\nu_{n+1}([e,f]) = \frac{1}{4}\Big(\Big(\Big(\delta(c) + 2\delta(1) + \delta\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big) * \nu_n\Big)([2e, 2f])$$

(конечно, $\nu_n\big(\frac{l}{2^{n+1}}\big) = \frac{q_{l,n}}{l^n}$, $1 - 2^n \leqslant l \leqslant 2^{n+1} - 2$), иллюстрируемому рисунком 1.

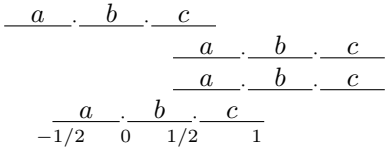


Рис. 1

Дальнейшие рассуждения таковы же, как для предыдущего случая, только коэффициент $2/3$ в доказательстве непрерывности заменяется на коэффициент $3/4$.

Для предельного распределения, очевидно,

$$a = \frac{b+2a}{4}; \quad b = \frac{b+2c+2a}{4}; \quad c = \frac{b+c}{2}.$$

То есть, $b = 2a = c$, $a = \frac{1}{5}$. Если бы $g_0(t)$ было не 1, а иным многочленом $p_0 + p_1 t + \ldots + p_s t^s$, то предельная мера удовлетворяла бы соотношению $\nu^* = \big(\sum_{i=0}^{s} p_i \delta\big(\frac{1}{2}\big)\big) * \nu$. Нас же в дальнейшем будет интересовать не случай полиномов, а полиномиальных матриц.

Пусть $f = (f_1, f_2)$ — полиномиальный вектор, а $A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ — полиномиальная матрица. Рассмотрим последовательность полиномиальных векторов $f_n : f_0 = f; f_{n+1} = A(t) f_n(t^2)$. Необходимо для компонент векторов f_n по аналогии с предыдущими рассмотрениями выбрать отрезки и проверить сходимость на них к предельным распределениям. Рассмотрим сначала частный случай, причем, отвлекаясь от векторов, будем изучать только матрицы.

Пусть $A(t) = \begin{pmatrix} t+1 & \frac{1}{t}+t \\ 1+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$. Рассмотрим последовательность полиномиальных матриц $B_n(t)$: $B_0(t) = E$, $B_{n+1}(t) = A(t)B_n(t^2)$.

Пусть $B_n(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^n(t) & b_{12}^n(t) \\ b_{21}^n(t) & b_{22}^n(t) \end{pmatrix}$, где $b_{ij}^n(t) = p_{s_n(i,j)}^n t^{s_n(i,j)} + \ldots + p_{s_n(i,j)}^n t^{y_n(i,j)}$. Верно ли, что меры $\nu_{ij}^n : \nu_{ij}^n = \big(b_{ij}^n(1)\big)^{-1} \sum\limits_{k=s_n(i,j)}^{y_n(i,j)} p_n^k \delta\big(\frac{k}{2^n}\big)$ сходятся к предельным на некоторых отрезках $[x^{ij},\ y^{ij}]$? Прежде всего надо понять, какие значения должны принимать x^{ij}, y^{ij}. Имеем: $B_{n+1}(t) = B_n(t)\, A(t^{2n})$, стало быть:

$$\begin{aligned}
\nu_{11}^{n+1}([e,f]) =& (b_{11}^{n+1}(1))^{-1}\big(b_{11}^n(1)\big(\big(\delta\Big(\frac{1}{2}\Big) + \delta(0)\big) * \nu_{11}^n\big)([2e,2f]) + \\
& b_{12}^n(1)\big(\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) + \delta(0)\big) * \nu_{12}^n\big)([2e,2f])\big); \\
\nu_{12}^{n+1}([e,f]) =& (b_{12}^{n+1}(1))^{-1}\big(b_{11}^n(1)\big)\big(\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) + \delta\big(\frac{1}{2}\big)\big) * \nu_{11}^n\big)([2e,2f]) + \\
& b_{12}^n(1)\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) * \nu_{12}^n\big)([2e,2f])\big); \\
\nu_{21}^{n+1}([e,f]) =& (b_{21}^{n+1}(1))^{-1}\big(b_{21}^n(1)\big(\big(\delta\Big(\frac{1}{2}\Big) + \delta(0)\big) * \nu_{21}^n\big)([2e,2f]) + \\
& b_{22}^n(1)\big(\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) + \delta(0)\big) * \nu_{22}^n\big)([2e,2f])\big); \\
\nu_{22}^{n+1}([e,f]) =& (b_{22}^{n+1}(1))^{-1}\big(b_{21}^n(1)\big)\big(\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) + \delta\Big(\frac{1}{2}\Big)\big) * \nu_{21}^n\big)([2e,2f]) + \\
& b_{22}^n(1)\big(\delta\Big(-\frac{1}{2}\Big) * \nu_{22}^n\big)([2e,2f]\big). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Поскольку все $b_{ij}^n(1)$ — не нули, имеем соотношения для x^{ij} и y^{ij}:

$$\begin{aligned}
y^{11} &= \frac{1}{2}\max\big(y^{11} + \frac{1}{2}, y^{12}\big); \quad y^{21} = \frac{1}{2}\max\big(y^{21} + \frac{1}{2}, y^{22}\big); \\
y^{12} &= \frac{1}{2}\max\big(y^{11} + \frac{1}{2}, y^{12} - \frac{1}{2}\big); \quad y^{22} = \frac{1}{2}\max\big(y^{21} + \frac{1}{2}, y^{22} - \frac{1}{2}\big); \\
x^{11} &= \frac{1}{2}\min\big(x^{11}, x^{12} - \frac{1}{2}\big); \quad x^{21} = \frac{1}{2}\min\big(x^{21}, x^{22} - \frac{1}{2}\big); \\
x^{12} &= \frac{1}{2}\min\big(x^{11} - \frac{1}{2}, x^{12} - \frac{1}{2}\big); \quad x^{22} = \frac{1}{2}\min\big(x^{21} - \frac{1}{2}, x^{22} - \frac{1}{2}\big). \qquad (5)
\end{aligned}$$

(как в одномерном случае, мы перешли к решению систем (4) с произвольной фиксацией $\nu_{ij}^0 > 0$). Общие подходы (в том числе, алгоритмический) к решению подобных систем неравенств будут описаны ниже. Сейчас просто приведем решение $x^{ij} = -\frac{1}{2}$, $y^{ij} = \frac{1}{2}$; $1 \leqslant i,j \leqslant 2$.

Для доказательства существования предельных мер для последовательностей $\nu_{11}^n, \nu_{12}^n, \nu_{21}^n, \nu_{22}^n$ заметим сначала, что существуют пределы $b_{ik}^n(1)/b_{ij}^{n+1}(1)$. Действительно, $B_n(1) = A(1)^n = E \cdot A(1)^n$. Поскольку $A(1)$ — примитивная матрица (в данном случае попросту положительная), для ее действия справа существует единственный положительный собственный вектор-строка, отвечающий наибольшему по модулю (положительному) собственному числу λ — по теореме Перрона – Фробениуса (будет использована ее версия, приведенная в [18], предложение 6.3.). Пусть этот вектор φ имеет координаты (φ_1, φ_2). Тогда очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{ik}^n(1)}{b_{ij}^{n+1}(1)} = \frac{\varphi_k}{\lambda\varphi_j}$. В данном случае имеем:

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \Big(1, \frac{\lambda}{2} - 1\Big) = \Big(1, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\Big) = (1, \omega_1);$$
$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sqrt{17}+1}{4} = \omega_2.$$

Очевидно, что нас интересуют лишь предельные меры для строки ν_{11}^n, ν_{12}^n, поскольку, если из наших соотношений должны по аналогии с одномерным случаем следовать существование и единственность предельных мер ν_{ij}, то $\nu_{11} = \nu_{12}$; $\nu_{12} = \nu_{22}$.

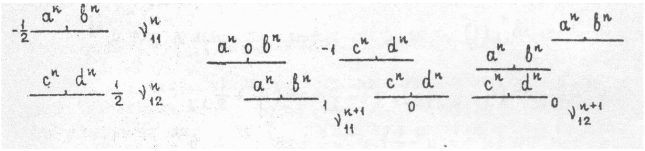


Рис. 2

Компоненты мер, отвечающие соотношению (4), представлены на рис. 2. Пусть

$$\nu_{11}^n\Big(\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\Big) = \Delta_1^n; \quad \nu_{12}^n\Big(\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\Big) = \Delta_2^n;$$
$$\nu_{11}^n\Big(\Big[-\frac{1}{2}, 0\Big]\Big) = a^k; \quad 1 - a^n = b^n;$$
$$\nu_{12}^n\Big(\Big[-\frac{1}{2}, 0\Big]\Big) = c^n; \quad 1 - c^n = d^n.$$

Тогда для некоторого β, $0 < \beta < 1$, имеем:

$$
\begin{aligned}
a^{n+1} &= \frac{a^n + \Delta_1^n}{\lambda} + \frac{(d^n + 2c^n)\omega_1}{\lambda} + \chi_n^a,\\
b^{n+1} &= \frac{2b^n + a^n - \Delta_1^n}{\lambda} + \frac{d^n\omega_1}{\lambda} + \chi_n^b,\\
c^{n+1} &= \frac{(a^n + b^n + \Delta_1^n)\omega_2}{\lambda} + \frac{c^n + d^n}{\lambda} + \chi_n^c,\\
d^{n+1} &= \frac{(a^n + b^n - \Delta_1)\omega_2}{\lambda} + \chi_n^d,
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_1^{n+1} = \frac{\omega_1\Delta_2^n}{\lambda}, \quad \Delta_2^{n+1} = \frac{\omega_1\Delta_1^n + \Delta_2^n}{\lambda}, \quad \text{где} \quad \chi_n^{(\cdot)} < D\beta^n. \tag{6}
$$

Очевидно, что $\Delta_n^i \to 0$ и достаточно усмотреть наличие положительного решения у соответствующей однородной системы. Но поскольку $a^n + b^n = c^n + d^n = 1$, имеем: $d^n \to \frac{\omega_2}{\lambda}$, $c^n \to \frac{\omega_2+1}{\lambda}$,

$$
d^n + 2c^n = c^n + 1 \to 1 + \frac{\omega_2 + 1}{\lambda} \quad \text{и} \quad a_n \to \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)^{-1}\Big(1 + \frac{\omega_2 + 1}{\lambda}\Big)\frac{\omega_1}{\lambda} = \frac{1}{2}.
$$

Таков же предел b_n. Доказательство слабой сходимости последовательностей ν_{11}^n, ν_{12}^n завершается так же, как в одномерном случае. Непрерывность предельных мер можно доказывать по аналогии с одномерным случаем: из рисунка 2 и уравнений (6) видно, что для любых натуральных n и k

$$
\max_{j=1,2;0\leqslant i\leqslant 2^k-1} \nu_{1j}^{n+1}\Big(\Big(\frac{i}{2^k} - \frac{1}{2}, \frac{i+1}{2^k} - \frac{1}{2}\Big]\Big) \leqslant
$$

$$
\frac{2 + \omega_1}{\lambda} \max_{\substack{j=1,2\\ 0\leqslant i\leqslant 2^{k-1}-1}} \nu_{1j}^n\Big(\Big(\frac{i}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}, \frac{i+1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}\Big)\Big).
$$

По аналогии с одномерным случаем заметим, что и в этом случае (и вообще всегда, когда матрица $A(1)$ примитивна) существование и единственность предельных распределений можно получить с помощью гармонического анализа.

Поскольку наша ближайшая цель не обобщения и не развитие данного аппарата, а непосредственное его применение к исследованию коэффициентов Рудина – Шапиро, ограничимся одной общей теоремой существования и единственности.

ТЕОРЕМА. Пусть $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *и* $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *— две вещественные матрицы, причем* $c_{ij} \leqslant b_{ij}, (i,j) \in D \subset [1,\dots,n]\times[1,\dots,n]$, *где* D *— такое множество пар индексов, что для любого* j *существует* i, *такое, что* $(i,j) \in D$ *(можно считать, что только для таких* (i,j) *определены* c_{ij}, b_{ij}*). Тогда существуют и единственны векторы* $u = \{u_1,\dots,u_n\}$ *и* $v = \{v_1,\dots,v_n\}$, *такие, что*

$$u_j = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(i,j)\in D}} (u_i + b_{ij})/2; \quad v_j = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(i,j)\in D}} (v_i + c_{ij})/2; \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для вектора u. Рассмотрим множество F таких векторов $u' = \{u'_1,\dots,u'_n\}$, что $u'_j \geqslant \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(i,j)\in D}} (u'_i + b_{ij})/2$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Очевидно, что F непустое замкнутое множество. Следовательно, существует такой $u^* \in F$, $u^* = \{u^*_1,\dots,u^*_n\}$, на котором принимает минимальное значение функция $S(u') = \sum\limits_{j=1}^{n} u'_j$. Очевидно, что он удовлетворяет нашим требованиям. Действительно, предположим, что для какого-то j : $u^*_j > \max\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(i,j)\in D}} (u^*_i + b_{ij})/2 = E$. Тогда ясно, что вектор $u^{**} = \{u^*_1,\dots,u^*_{j-1},E,u^*_{j+1},\dots,u^*_n\}$ лежит в F, что противоречит определению u^*. Существование доказано.

Докажем теперь единственность. Назовем совокупность индексов $i = i_0, i_1, \dots, i_l, i_{l+1} = j$ (i,j,l,D)-цепочкой, если $(i_k, i_{k+1}) \in D$, $0 \leqslant k \leqslant l$.

В правую часть соотношения (7) подставим вместо их выражения в соответствии с (7). Имеем:

$$u_j = \max_{\substack{1\leqslant k,i\leqslant n\\(k,i)\in D,\,(i,j)\in D}} \left(\frac{u_k}{4} + \frac{b_{ki}}{4} + \frac{b_{ij}}{2}\right) =$$

$$\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \exists\, i|\,(k,i)\in D,(i,j)\in D}} \left(\frac{u_k}{4} + \max_{i\ |\ \substack{(k,i)\in D,\\(i,j)\in D}} \left(\frac{b_{ki}}{4} + \frac{b_{ij}}{2}\right)\right) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\frac{u_k}{4} + b'_{kj}\right).$$

Продолжая так же дальше и учитывая, что все u_i ограничены сверху, мы получим последовательность матриц $\{b^{(l)}_{ki}\}$, таких, что для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ имеем:

$$|u_j - \max_{k|\exists(k,j,l,D)-\text{цепочка}} b^{(l)}_{kj}| < \varepsilon_n,$$

чем и доказана единственность. На самом деле, для u_j может быть получено «конечное» выражение. Действительно, если $\{u_i\}$ удовлетворяют соотношению (7), то для каждого j найдется $i(j)$, такое, что $u_j = (u_{i(j)} + b_{i(j)j})/2$ (выделим одно из них, если их окажется несколько). Очевидно, найдутся такие s, $k \leqslant n$, что $\underbrace{i(i(i\dots}_{k}\underbrace{(i(i(\dots}_{s}(j))\dots) = i(i(\dots(j))\dots) = i_s(j)$. Очевидно, что итерациями можно для $u_{i(j)}$ получить уравнение вида

$$u_{i_s(j)}2^{-k} + d = u_{i_s(j)}; \quad (1 - 2^{-k})^{-1}d = u_{i_s(j)}$$

и далее выразить u_j через $u_{i_s(j)}$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет для любой полиномиальной матрицы с выделенным подмножеством индексов D, соответствующим на деле ненулевым полиномам, строить наши «отрезки» (могущие, конечно, вырождаться в точки). Поскольку существование имеет место, сходимость для полиномиальной матрицы естественного итерационного процесса при любом выборе начального вектора может быть доказана так же, как доказывалась единственность. Действительно, фактически для матрицы B построен вектор

$$B^\infty = \{b_l^{(\infty)}\}; \quad b_l^{(\infty)} = \sup_{\substack{\{i_s\}_{-\infty}^{0} \\ i_0 = l,\ (i_k, i_{k+1}) \in D}} \sum_{k=-\infty}^{-1} b_{i_k i_{k+1}} 2^k \tag{8}$$

(аналогично для c, и доказано, что для $b_l^{(\infty)}$ выполнено (7).

В случае же полиномиальной матрицы $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{l}$, $a_{ij}(t) = t^{\lambda_{ij}} r_{\lambda_{ij}} + \dots + t^{\lambda'_{ij}} r_{\lambda'_{ij}}$ при построении матриц $B_n(t)$ по вышеописанному правилу $B_{n+1}(t) = A(t)B_n(t^2)$, $B_0(t) = E$ будем иметь для $s_n(i,j)$ и $y_n(i,j)$ следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(i,k) &= \max_{\substack{j \mid (j,k) \in D \\ (i,j) \in D}} (2^n \lambda'_{jk} + y_n(i,j)), \\ s_{n+1}(i,k) &= \min_{\substack{j \mid (i,k) \in D \\ (i,j) \in D}} (2^n \lambda_{jk} + s_n(i,j)). \end{aligned} \tag{9}$$

То есть,

$$\frac{y_{n+1}(i,k)}{2^{k+1}} = \max_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ (i,i_1) \in D, \dots, (i_n,k) \in D}} (\lambda'_{ii_1} 2^{-n-1} + \lambda'_{i_1 i_2} 2^{-n} + \dots + \lambda'_{i_n k} 2^{-1}).$$

Отсюда ясно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}(i,k)}{2^{n+1}}$ не зависит от i и вычисляется согласно выражению (8) с $b_{ij}=\lambda'_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$ и, стало быть, нахождение этого предела эквивалентно решению системы (7).

Применим теперь результаты о матрицах к полиномиальным векторам. Пусть $f_0=f=\{f_1^0(t),\dots,f_l^0(t)\}$ — полиномиальный вектор и, по аналогии с двумерным случаем, $f_{n+1}(t)=A(t)f_n(t^2)$. Пусть $f_n(t)=\{f_1^n(t),\dots,f_l^n(t)\}$, где $f_i^n(t)=\sum\limits_{m=h(i,n)}^{g(i,n)}p_{m,i,n}t^m$.

Существуют ли и, если да, то каковы предельные меры для последовательностей мер

$$\mu_i^*=\Big(\sum_m\delta\Big(\frac{m}{2^n}\Big)p_{m,i,n}\Big)f_i^n(1)^{-1}?$$

Имеем: $f_{n+1}(t)=B_{n+1}(t)f_0(t^{2^{n+1}})$. Сведем задачу о мерах к задаче о мерах ν_{ij}^n. Ясно, что

$$\mu_i^n=\Big(\sum_{j=1}^l b_{ij}^n(1)\nu_{ij}^n*\mu_j^0\Big)\Big(\sum_{j=1}^l b_{ij}^n(1)f_j^0(1)\Big)^{-1}.$$

Поскольку в разложение каждой строки единичной матрицы собственный вектор $(\varphi_1,\dots,\varphi_l)$ теоремы Перрона – Фробениуса входит с ненулевым коэффициентом (что в двумерном случае было очевидным, а в общем случае вытекает из утверждения [18]), то, очевидно, из существования пределов ν_{ij} последовательностей мер ν_{ij}^n следует, что

$$\mu_i^n\to\mu_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^l\varphi_j\nu_{ij}*\mu_j^0}{\sum\limits_{j=1}^l\varphi_jf_j(1)}. \tag{10}$$

Мы отвлекаемся здесь от того обстоятельства, что в наших задачах ν_{ij} не зависит от i.

§3. Вычисления для последовательности Рудина – Шапиро

Сейчас мы рассмотрим задачу о распределениях μ_k значений последовательности $(s(n+n_k)-s(n))2^{1-k}$; $0\leqslant n\leqslant\infty$. Имеем в двоичной записи: $n_k=\underbrace{1010\dots10}_k$. Мы будем изучать рекуррентные соотношения, связывающие μ_k и некоторые их компоненты, которые мы выделим,

при различных n. Пусть двоичная запись n имеет вид $\dots b_2b_1a_1a_0$, а запись n_k+n вид $\dots d_2d_1c_1c_0$. Мы будем говорить, что имеет место

ситуация α, если для некоторого m $d_{2m}\dots d_1 = 101\dots1$ или для некоторого m $d_{2m+1}\dots d_1 = 001\dots1$,

ситуация β, если для некоторого m $d_{2m}\dots d_1 = 001\dots1$ или для некоторого m $d_{2m+1}\dots d_1 = 101\dots1$,

$$\begin{aligned}
&\text{ситуация } \gamma, \quad \text{если} \quad d_1d_0 = 10,\\
&\text{ситуация } \delta, \quad \text{если} \quad d_1d_0 = 00,\\
&\text{ситуация } \varepsilon, \quad \text{если} \quad c_1c_0 = 00,\\
&\text{ситуация } \theta, \quad \text{если} \quad c_1c_0 = 10,\\
&\text{ситуация } \lambda, \quad \text{если} \quad c_1c_0 = 01,\\
&\text{ситуация } \omega, \quad \text{если} \quad c_1c_0 = 11.
\end{aligned}$$

Мы будем также рассматривать «сложные» ситуации типа $\alpha\theta$, а также типа $xyzt$, где $z = a(n)$, $t = a(n+n_k)$, $x \in \{\varepsilon,\theta,\lambda,\omega\}$, $y \in \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Обозначим для произвольной ситуации $F = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ и произвольного натурального k через $G_{F,k}$ множество таких n, что для нашей пары $(n, n+n_k)$ имеет место ситуация F. Допустим, что при данном k для каждой F мы доказали, что $\Delta_k(n) = (s(n+n_k) - s(n))2^{1-k}$ имеет распределения $\mu_{F,k}$, когда n пробегает $G_{F,k}$. Попробуем доказать существование $\mu_{F,k+1}$ и выразить вектор мер $\{\mu_{F,k+1}\}$ через вектор $\{\mu_{F,k}\}$. Легко подметить следующее обстоятельство: если $0 \leqslant l \leqslant 3$ и если для некоторого n имеет место ситуация F, то l и F однозначно определяют ситуацию для $4n+l$, а также число $\Delta_{k+1}(4n+b) - \Delta_k(n)$, $x(4n+l)$ определяется через l.

Что касается остальных параметров, то надо учесть, что поскольку $4n+l = \dots b_2b_1a_1a_0uv$, то $\dots b_2b_1a_1a_0$ и есть аналог $\dots b_2b_1$ для n, $n_{k+1} = 4n_k + 2$, аналог $\dots d_2d_1$ для нового числа есть попросту $d_2d_1c_1c_0$ или двоичная запись $1 + \dots d_2d_1c_1c_0$ в зависимости от l (был перенос или нет). Параметрами F, l полностью регулируются также и изменения коэффициентов Рудина – Шапиро и Δ_k. Ниже будет приведена таблица соответствующих изменений параметров и значений $2^k(\Delta_{k+1}(4n+l) - \Delta_k(n))$, но предварительно — две вспомогательные таблицы.

Пусть для некоторого v имеем $v = 8p+4q+r$, где $q = 0,1$; $0 \leqslant r \leqslant 3$. Пусть при этом $v+4 = 8p' + 4q' + r$, где $q' = 0,1$. Нас интересует соотношение между $a(v+4)$ и $a(2p'+q')$, между $a(v)$ и $a(2p+q)$, зависимость от $q, r, a(2p+q)$ разности $s(v) - 2s(2p+q) = \delta_1$ и зависимость от $q', r, a(2p'+q')$ разности $s(v+4) - 2s(2p+q) = \delta_2$.

Итак, таблица 1 — это таблица пар значений $\frac{a(v+4)}{a(2p'+q')}$ и $\frac{\delta_2}{a(2p'+q')}$ в зависимости от q' и r (для случаев , когда перенос имел место);

таблица 2 — таблица пар $\frac{a(v)}{a(2p+q)}$ и $\frac{\delta_1}{a(2p+q)}$ в зависимости от q и r (для случаев, когда переноса не было).

Таблица 1

0′00	1 1	0′01	1 2	0′10	1 3	0′11	−1 2
1′00	1 1	1′01	1 2	1′10	−1 1	1′11	1 2

Таблица 2

0′00	1 –1	0′01	1 0	0′10	1 1	0′11	–1 0
1′00	1 –1	1′01	1 0	1′10	–1 –1	1′11	1 0

Наличие соответствующих зависимостей и правильность таблиц могут быть проверены с помощью [9, Satz 3], а также с помощью формулы (2). Обозначим $a(n)$ через a, $a(n+n_k)$ — через b.

Таблица 3

l $x(4n+l)$	$x(n)$	$b_2b_1a_1a_0$ $d_2d_1c_1c_0$ для $4n+l$	$y(n)$	$a(4n+l)$ $a(4n+l+n_{k+1})$	$2^k(\Delta_{k+1}$ $(4n+l)-\Delta_k(n))$	$y(4n+l)$
0	ε	$\frac{0000}{1010}$	α	a_b	$a+b$	γ
	θ	$\frac{10000}{0010}$	α	a_b	$a+b$	δ
ε	λ	$\frac{0100}{1110}$	α	a_{-b}	$a-b$	α
	ω	$\frac{1100}{0110}$	α	a_{-b}	$a-b$	β
			β	a_b	$a+b$	γ
			β	a_b	$a+b$	δ
			β	a_{-b}	$a-b$	β
			β	a_{-b}	$a-b$	β
			γ	a_b	$a+b$	γ

			γ	a_b	$a+b$	δ
			γ	a_{-b}	$a-b$	α
			γ	a_{-b}	$a-b$	α
			δ	a_b	$a+b$	γ
			δ	a_b	$a+b$	δ
			δ	a_{-b}	$a-b$	β
			δ	a_b	$a-b$	α
2	ε	$\frac{0010}{1100}$	α	a_{-b}	$-a-b$	α
θ	θ	$\frac{1010}{0100}$	α	a_b	$-a+b$	β
	λ	$\frac{0110}{0000}$	α	$-a_b$	$a+b$	δ
	ω	$\frac{1110}{1000}$	α	$-a_{-b}$	$a-b$	γ
			β	$-a_b$	$-a-b$	β
			β	a_b	$-a+b$	β
			β	$-a_{-b}$	$a-b$	δ
			β	$-a_{-b}$	$a-b$	γ
			γ	a_{-b}	$-a-b$	α
			γ	a_b	$-a+b$	α
			γ	$-a_b$	$+a+b$	δ
			γ	$-a_b$	$+a+b$	γ
			δ	a_{-b}	$-a-b$	β
			δ	a_b	$-a+b$	α
			δ	$-a_{-b}$	$+a-b$	δ
			δ	$-a_b$	$+a+b$	γ
1	ε	$\frac{0001}{1011}$	α	a_{-b}	0	γ
λ	θ	$\frac{1001}{0011}$	α	a_{-b}	0	δ
	λ	$\frac{0101}{1111}$	α	a_b	0	α
	ω	$\frac{1101}{0111}$	α	a_b	0	β

			β	a_{-b}	0	γ
			β	a_b	0	δ
			β	a_b	0	β
			β	a_b	0	β
			γ	a_{-b}	0	γ
			γ	a_{-b}	0	δ
			γ	a_b	0	β
			γ	a_b	0	α
			δ	a_{-b}	0	γ
			δ	a_{-b}	0	δ
			δ	a_b	0	β
			δ	a_b	0	α
3	ε	$\frac{0011}{1101}$	α	$-a_{-b}$	$-2b$	α
ω	θ	$\frac{1011}{0101}$	α	$-a_b$	$2b$	β
	λ	$\frac{0111}{0001}$	α	a_b	$2b$	δ
	ω	$\frac{1111}{1001}$	α	a_{-b}	$-2b$	γ
			β	$-a_{-b}$	$-2b$	β
			β	$-a_b$	$2b$	β
			β	a_{-b}	$2b$	δ
			β	a_{-b}	$-2b$	γ
			γ	$-a_{-b}$	$-2b$	α
			γ	$-a_b$	$2b$	α
			γ	a_b	$2b$	δ
			γ	a_b	$2b$	γ
			δ	$-a_{-b}$	$-2b$	β
			δ	$-a_b$	$2b$	α
			δ	a_{-b}	$-2b$	δ
			δ	a_b	$2b$	γ

Понятно, что таблицы 1 и 2 существенно облегчают составление таблицы 3. То обстоятельство, что величина $2^k(\Delta_{k+1}(4n+l)-\Delta_k(n))$ однозначно определяется параметрами F и l и, тем самым, как явствует из таблицы 3, параметрами старой и новой ситуации, показывает, что мы имеем дело с задачей, которую можно решать методами предыдущего параграфа с той разницей, что результатом решения должен быть 64-мерный вектор мер, из которого получится распределение, являющееся окончательным результатом. То есть задача аналогична модельной матричной задаче, рассматривавшейся в предыдущем параграфе. Исходный полиномиальный вектор — аналог $f_0 = f$ будет описан ниже (для него существование распределений будет очевидным). Полиномиальную же матрицу A можно составить (с выделением множества D) на основании таблицы 3. Для ситуаций F и F' соответствующий элемент матрицы $A(t')$ окажется ненулевым ($(F', F) \in D$), если для некоторой строки таблицы 3 первый и последний элемент суть параметры x и y ситуации F' (индексирующей строку $A(t')$), второй и четвертый суть параметры x и y ситуации F (индексирующей столбец), пятый — выражает соотношение между параметрами z и t двух ситуаций. При этом $a_{F'F}(t') = t'^{g_{F'F}}$, где $g_{F'F} = 2^k(\Delta_{k+1}(4n+l)-\Delta_k(n))$, $(F'F) \in D$. Мы будем выражать $g_{F'F}$ через параметры z и t ситуации F', потому что, как показывает рассмотрение таблицы 3, $g_{F'F}$ только от них и зависит. Таблица 4, приводимая ниже, является матрицей 16×16 (индексируемой параметрами x и y ситуаций F' и F), описывающей соотношение между их параметрами z и t. Все $g_{F'F}(t')$ полностью определяются этой матрицей.

Справа приведены выражения значений $g_{F'F} = g_{F'}$ через $z(F')$ и $t(F')$. Элемент $\mp$, стоящий, скажем, на пересечении строки $\omega\alpha$ и столбца $\theta\gamma$, интерпретируется следующим образом:

$$a_{(\omega,\alpha,1,1)(\theta,\gamma,-1,1)}(t') = t'^2; \quad a_{(\omega,\alpha,1,-1)(\theta,\gamma,-1,-1)}(t') = t'^{-2},$$

$$a_{(\omega,\alpha,-1,1)(\theta,\gamma,1,1)}(t') = t'^2; \quad a_{(\omega,\alpha,-1,-1)(\theta,\gamma,1,-1)}(t') = t'^{-2} = t'^{2t},$$

$$(x,y)(F') = (\omega,\alpha)\&(x,y)(F) = (\theta,\gamma) \to z(F') = -z(F)\&t(F') = t(F).$$

Наша матрица примитивна. Это может быть проверено непосредственно или иначе, с помощью учета природы этой матрицы. А именно, пусть $m = m_1 4^{r+s} + m_2$, где $m_2 < 4^s, m_1 > 64$ натуральные. Тогда, если r достаточно велико, то для произвольного натурального k параметры x и y ситуаций $F_k(m_1)$ и $F_{k+s+r}(m)$ не зависят один от других,

Таблица 4

	$\varepsilon\alpha$	$\varepsilon\beta$	$\varepsilon\gamma$	$\varepsilon\delta$	$\theta\alpha$	$\theta\beta$	$\theta\gamma$	$\theta\delta$	$\lambda\alpha$	$\lambda\beta$	$\lambda\gamma$	$\lambda\delta$	$\omega\alpha$	$\omega\beta$	$\omega\gamma$	$\omega\delta$	
$\varepsilon\alpha$									$-$		$\pm$				$\pm$	$\pm$	$t+z$
$\varepsilon\beta$										$\pm$		$\pm$	$\pm$	$\pm$			$t+z$
$\varepsilon\gamma$	$\dot{+}$	$\dot{+}$	$\dot{+}$	$\dot{+}$													$t+z$
$\varepsilon\delta$					$\dot{+}$	$\dot{+}$	$\dot{+}$	$\dot{+}$									$t+z$
$\theta\alpha$	$\pm$		$\pm$				$\dot{+}$	$\dot{+}$									$t-z$
$\theta\beta$		$\pm$		$\pm$	$\dot{+}$	$\dot{+}$											$t-z$
$\theta\gamma$													$\dot{-}$	$\dot{-}$	$\mp$	$\mp$	$t-z$
$\theta\delta$									$\mp$	$\dot{-}$	$\mp$	$\dot{-}$					$t-z$
$\lambda\alpha$									$\dot{+}$		$\dot{+}$				$\dot{+}$	$\dot{+}$	0
$\lambda\beta$										$\dot{+}$		$\dot{+}$	$\dot{+}$	$\dot{+}$			0
$\lambda\gamma$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$													0
$\lambda\delta$					$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$									0
$\omega\alpha$	$\dot{-}$		$\dot{-}$				$\mp$	$\mp$									$2t$
$\omega\beta$		$\dot{-}$		$\dot{-}$	$\mp$	$\mp$											$2t$
$\omega\gamma$													$\pm$	$\pm$	$\dot{+}$	$\dot{+}$	$2t$
$\omega\delta$									$\dot{+}$	$\pm$	$\dot{+}$	$\pm$					$2t$

«коррекцию» же параметров z и t ситуации $F_{k+s+r}(m)$ можно осуществить заменой нескольких из $2r$ нулей единицами:

$$\begin{array}{lll} 10101010101 & 0101010101 & 10101010101 \\ \underline{00001100000} & \underline{0000110000} & \underline{00000010000} \\ 10110110101 & 0110000101 & 10101100101 \end{array}$$

Легко видеть, что матрица $\frac{1}{4}A(1)$ бистохастическая. Примитивность ее облегчает программирование вычисления отрезков — диагональные элементы матрицы A дают информацию о том, какие точки заведомо лежат в отрезках. С использованием этой информации потребовалось 20 итераций на основе соотношений (7). Нахождение 64 отрезков осуществлялось на компьютере IBM с помощью программы на языке PASCAL версии TP5. Заметим, что вычисление мер малых двоичных отрезков существенно упрощается в связи с тем, что для матрицы $A(1)$ собственный вектор-строка теоремы Перрона – Фробе-

ниуса [18] состоит из одних единиц. Алгоритм нахождения предельных распределений (итерационное решение системы уравнений, аналогичное (6)), тоже был реализован. Программа работает не слишком быстро, но любая желаемая точность в итоге достигается.

Но если эти предельные распределения найдены, это не значит, что задача решена. Ведь для каждой ситуации нужно знать вектор $\{\mu_{F,1}\}$. Его нахождение можно существенно упростить, обратившись к интерпретации коэффициентов Рудина – Шапиро с помощью подстановки Шапиро – Рудина (см. §1). Если, в соответствии с обозначениями этого параграфа §1, $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1) = v_0, v_1, \ldots$, то, как нетрудно понять из нашего определения параметров ситуаций, для любого натурального n ситуация $F(n)$ и значение $\Delta_1(n)$ определяются совокупностью символов $v_{4k} \ldots v_{4k+11}$, где $4k \leqslant n \leqslant 4k+3$. Именно, $x(F)$ определяется остатком от деления n на $4 : 0-\varepsilon,\ 1-\lambda,\ 2-\theta,\ 3-\omega$. $\tau(F)$ определяется парой символов $v_k v_{k+1}$, если $x(F) = \varepsilon$ или λ, и парой символов $v_{k+1}v_{k+2}$, если $x(F) = \theta$ или ω, по следующему единому правилу, сопоставляющему паре символов значение y:

$$y = y(u, u'); \quad y(24) = y(31) = \alpha; \quad y(21) = y(34) = \beta;$$
$$y(12) = y(43) = \gamma; \quad y(13) = y(42) = \delta.$$

На самом деле зависит еще от четности k (нечетности α и β, делимости на $4-\delta$), но оказывается, что для подстановки Рудина – Шапиро все определяется самой парой u, u'. α отличается от β отношением $\tau(u')/\tau(u)$. Для β оно есть -1. Заметим еще, что символы v_k, v_{k+1}, v_{k+2} рассматривались здесь только потому, что

$$\omega_{\mathcal{A}}^{2}(v_k v_{k+1} v_{k+2}) = v_{4k} \ldots v_{4k+11}; \quad z(n) = \tau_{v_n},$$
$$t(n) = \tau_{v_{n+2}}; \quad \Delta_1(n) = \tau_{v_{n+1}} + \tau_{v_{n+2}}.$$

Далее, поскольку динамическая система, порождаемая подстановкой Рудина – Шапиро, одноэргодична, наши распределения $\mu_{F,1}$ вполне определяются мерами цилиндрических множеств в пространстве этой динамической системы [4] , отвечающих различным сочетаниям «F' — значение Δ_1». Перебор ситуаций, результаты которого приводятся ниже, упрощается тем обстоятельством, что имеется 8 двухбуквенных допустимых слов с мерами цилиндрических множеств, равными $1/8$; 16 трехбуквенных слов с мерами $1/16$, причем, если $v_n = 1$ или 4, то $v_{n\pm1} = 2$ или 3 и наоборот.

Таблица 5. $\Delta_1(x,y,z,t)$

	$-1\ \ -1$	$-1\ \ 1$	$1\ \ -1$	$1\ \ 1$
$\varepsilon\alpha$		0	0	
$\lambda\alpha$	0			0
$\theta\alpha$	0	2	-2	0
$\omega\alpha$	-2	2	-2	2
$\varepsilon\beta$		0	0	
$\lambda\beta$	0			0
$\theta\beta$	0	2	-2	0
$\omega\beta$	-2	2	-2	2
$\varepsilon\gamma$	-2			2
$\lambda\gamma$		0	0	
$\theta\gamma$	0	2	-2	0
$\omega\gamma$	-2	2	-2	2
$\varepsilon\delta$	-2			2
$\lambda\delta$		0	0	
$\theta\delta$	0	2	-2	0
$\omega\delta$	-2	2	-2	2

Вероятности для каждой из заполненных клеток, отвечающих ситуациям, возможным при $k = 1$, суть $1/\ 64$, если клетка находится в полностью заполненной строке, и $1/32$, если нет. Таким образом, мы видим, что Δ_1 однозначно определяется ситуацией: $\mu_{F,1}$ — δ-мера. По таблице 5 получаем исходный полиномиальный вектор $\{f_F(t')\} : f_F = p(F)t'^{\Delta_1(F)}$, где p — вероятность ситуации. Например, $f_{\lambda,\alpha,-1,1} = \frac{1}{64}t'^2$; $f_{\varepsilon,\gamma,-1,1} = \frac{1}{32}t'^{-2}$. Из бистохастичности матрицы $A(1)/4$ тривиальным образом следует применимость формулы (10), в которой в качестве вектора $\{\mu_i^0\}$ может быть взят вектор $\{f_F(1)\}$. Для нашей исходной задачи представляет интерес сумма μ_i с коэффициентами, отвечающими предельным вероятностям ситуаций, т.е.

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=1}^{l} \mu_j^n f_j^n(1)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{l} f_j^n(1)\Big)^{-1}.$$

В нашем случае имеем $\mu = \frac{1}{64}\sum\limits_F \mu_F$, где по формуле (10) $\mu_{F'} =$

$\sum\limits_{\{F'\}} \nu_{F'F}\mu_f^0$ (чем отнюдь, впрочем, не гарантируется отсутствие какого-либо более простого представления для μ, ибо таковые иногда появляются в задачах, решаемых с помощью подобной схемы).

Рассмотрим, отвлекаясь от нашей основной задачи, простейший случай, легко укладывающийся в схему рассуждений [9], [10]. Пусть рассматривается последовательность мер $4^{-1-k}\sum\limits_{i=0}^{2^{2k+2}} \delta_{\frac{s(i)}{2^{k+1}}}$. Имеет ли она слабый предел (отсутствие такового для последовательности $n^{-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\delta_{\frac{s(i)}{\sqrt{i}}}$ доказано в [10])? Ответ положительный: из результатов [9] и рассуждений, идентичных доказательству [9, Satz 22] вытекает, что

$$\#\{n : 0 \leqslant n \leqslant 2^{2k+2}-1 \,|\, v = s(n)\} = \begin{cases} v & 0 < v \leqslant 2^{k+1}, \\ 2^{k+2} - v2^{k+2} & -1 \geqslant v > 2^{k+1} \end{cases}$$

(заметим, что согласно [9, Satz 9] $\#\{n : 0 \leqslant n \leqslant 2^{2k+1}-1 \,|\, 2^{k+1} = s(n)\} = 2^k$). Отсюда следует существование на отрезке [0,2] предельного распределения с плотностью

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Но по нашей схеме ее тоже возможно было бы решать. Разрешим двоичным записям чисел начинаться с нулей. Ситуация F_k будет описываться тремя параметрами x, y, z. Ситуация будет приписываться каждому натуральному числу $n : 0 \leqslant n \leqslant 4^{1+k}$. Пусть $d_{2k+1}\dots d_0$ — двоичная запись n. Мы говорим, что

$$x(F_k(n)) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } d_1d_0 = 0\ 0, \\ \theta, & \text{если } d_1d_0 = 0\ 1, \\ \lambda, & \text{если } d_1d_0 = 1\ 0, \\ \omega, & \text{если } d_1d_0 = 1\ 1, \end{cases}$$

$$y(F_k(n)) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_2 = 0, \\ 1 & \text{если } d_2 = 1, \quad z = a(n). \end{cases}$$

По аналогии с таблицей 4 может быть составлена таблица 6.

Смысл ее таков же, как смысл таблицы 4, но в качестве $g_{F'F}$ здесь берется $s(d_{2k+1}\dots d_1d_0) - 2s(d_{2k+1}\dots d_2)$. 16 отрезков здесь могут быть

Таблица 6.

	$\varepsilon 0$	$\varepsilon 1$	$\theta 0$	$\theta 1$	$\lambda 0$	$\lambda 1$	$\omega 0$	$\omega 1$	
$\varepsilon 0$	+	+	+	+					$-z$
$\varepsilon 1$					+	+	+	+	z
$\theta 0$	+	+	+	+					z
$\theta 1$					−	−	−	−	$-z$
$\lambda 0$	+	+	+	+					0
$\lambda 1$					+	+	+	+	0
$\omega 0$	−	−	−	−					0
$\omega 1$					+	+	+	+	0

найдены без применения ЭВМ, ибо сразу ясно, что многие из них будут одинаковы или противоположны ($[a,b]$ и $[-b,-a]$). Отрезок есть $[-1,1]$, если $x=\varepsilon$ или $x=\theta$, и либо $[-z,0]$, либо $[0,-z]$ в противном случае. Далее можно было бы находить меры различных отрезков. Ту же матрицу, но иной начальный вектор имеет задача о мерах $2^{-(2k+1)}\sum\limits_{i=0}^{2^{2k+1}}\delta_{\frac{s(i)}{2^{k+1}}}$, где ответ еще проще: $\varphi(x)=2x$, $(0\leqslant x\leqslant i)$.

Если же рассматривать только что изученные подпоследовательности в качестве n_k для нашей основной задачи, то решение аналогично, но к параметрам ситуации F_k (рассматриваемой теперь уже, конечно, для всего натурального ряда) добавляется $t:\ t(F_k(n))=a(n+n_k)$ с очевидным изменением $g_{F'F}$. Разумеется, обе задачи допускают «косвенные» решения из тех же соображений с результатами такого же типа, имеющие, впрочем, представления, уже чуть более громоздкие. Заметим также, что одномерная модельная задача §2 с $f(t)=(t^l+1)^k$ тоже имеет простое решение.[17]

Литература

1. Рохлин В. А., *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* Успехи мат. наук **22**:5 (1967), 3–56.
2. Gottschalk W. H., *Substitution minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **109**:3 (1963), 467–491.
3. Лившиц А. Н., *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований.* Мат. заметки **44**:6 (1988), 785–793.

[17]Препринт содержит в качестве приложения листинг программы нахождения отрезков и предельных распределений. В настоящем сборнике это приложение опущено. *Прим. ред.*

4. Queffélec M., *Substitution dynamical systems — spectral analysis.* Lecture Notes Math., vol. **1294** (1987).
5. Dekking F. M., *Recurrent sets.* Advances in Math. **44** (1982), 78–104.
6. Dekking F. M., Keane M., *Mixing properties of substitutions.* ZFW **42** (1978), 23–33.
7. Лившиц А. Н., *Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса подстановок.* ПОМИ РАН, препринт Р-10-91.
8. Rauzy G., Sequences defined by iterated morphisms. In: Sequences (Naples/Positano, 1988), 275–286. Springer, New York–Berlin, 1990.
9. Brillhart J., Morton P., *Über Summen von Rudin–Shapiroschen Koeffizienten.* Illinois J. Math. **22**:1 (1978), 126–148.
10. Brillhart J., Erdös P., Morton P., *On sums of Rudin–Shapiro coefficients II.* Pacific J. of Mathematics **107**:1 (1983) 39–70.
11. Dumont J.-M., Thomas A., *Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theoretical computer science **65**:2 (1989), 153–169.
12. Dumont J.-M., Thomas A., *Digital sum problem and substitutions on a finite alphabet.* J. Number Theory **39**:3 (1991), 351–366.
13. Rudin W., *Some theorems on Fourier coefficients.* Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 855–859.
14. Shapiro H. S., *Extremal problems for polynomials and power series.* Master's Thesis, MIT, Cambridge, Mass, 1951.
15. Vershik A. M., Livshits A. N., *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics.* In: Adv. in Soviet. Math., Repres. Theory and Dynamical Systems **9** (1992), 185–204.
16. Розанов Ю. В., Прохоров Ю. А., Теория вероятностей. Изд. «Наука», Москва, 1973.
17. Carlitz J., *Single variable Bell polynomials. Seminario Matematico de Barselona.* Collectanea Mathematica, **14** (1962), 3-25.
18. Рюэль Д., *Статистическая механика. Строгие результаты.* «Мир», Москва, 1971.

ОБ ОДНОЙ СЛАБОПЕРЕМЕШИВАЮЩЕЙ ПОДСТАНОВКЕ

Многие вопросы о спектре, в основном, решены для динамических систем, порожденных обобщенными последовательностями Морса ([1, 2, 3] и др.) и подстановками с постоянной длиной слова ([4, 5] и др.). Комбинаторное изучение подстановок с непостоянной длиной слова представляется значительно более сложным. Некоторые условия дискретности, наличия смешанного спектра, слабого перемешивания имеются в работах [5, 7, 8, 9] и в других работах.

В данной работе рассматривается пример, для которого приводится информация о корреляционных функциях (подобно примеру [5, стр. 132]; метод позволяет, конечно, её уточнять). Для некоторой последовательности с помощью обобщенного адического представления вычисляется энтропия по Кушниренко [9]. Для этой подстановки совсем легко видеть, что выполняется свойство LB[18](это, впрочем, верно для всех подстановочных автоморфизмов как преобразований конечного ранга [10] и, как показал Р. Нюрнберг [6], это верно для обобщенных последовательностей Морса).

§1. Корреляции и свойство LB

Рассмотрим подстановку $\theta : \theta(1) = 221;\ \theta(2) = 1$ над алфавитом $\{1, 2\}$. Ей отвечает эргодический автоморфизм

$$T_\theta : (X_\theta, \mu_\theta) \to (X_\theta, \mu_\theta)$$

([7, 9]). Имеем:

$$|\theta^n(\{1\})| = \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n, \quad l_n = |\theta^n(\{2\})| = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n.$$

Депонировано в ВИНИТИ, № 035-4708 (1989). Английский перевод: Advances in Soviet Mathematics, **9** (1992), 241–251.

[18]loosely Bernoulli. (*Прим. ред.*)

Из этого следует [7, 9], что T_θ — слабое перемешивание. Рассмотрим функцию

$$f : X_\theta \to R, \quad f(\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}) = 2x_0 - 3 = \begin{cases} 1, & x_0 = 2, \\ -1, & x_0 = 1, \end{cases}$$

и зададимся вопросом о корреляционной последовательности

$$K_m = \int\limits_{X_\theta} f(x) f(T_\theta^m x) d\mu_\theta$$

и отвечающей ей спектральной мере. Будут вычислены K_{l_m} при $m \geqslant 3$. Разумеется, для любой допустимой (то есть, лежащей в X_θ) последовательности $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ имеет место соотношение

$$K_{l_m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{k=n} (2x_k - 3)(2x_{k+l_m} - 3).$$

Рассмотрим последовательность пар $(\{x_k, x_{k+l_m}\})_{k=-\infty}^{\infty}$. Она единственным образом разбивается на куски вида

$$\{\{x_v, x_{v+l_m}\}, \dots, \{x_{v+s}, x_{v+s+l_m}\}\} : v, s < \infty,$$

такие, что, если через A обозначить слово $x_v \dots x_{v+s}$, а через B слово $x_{v+l_m} \dots x_{v+s+l_m}$, то либо $A = B = \theta^m(2)$, либо $A = \theta^m(21)$ и $B = \theta^m(12)$, либо $A = \theta^m(2111)$ и $B = \theta^m(1112)$. Ранее такое разбиение использовалось для проверки дискретности спектра ([5, 8] и более поздние работы).

Исследуем второй и третий случаи, основываясь на том, что если слово Y имеет вид $22X1$, то $\theta(Y) = 1|1\theta(X)21|1$, а если $Y = 1X22$, то $\theta(Y) = 22|1\theta(X)|11$, где $|$ — знак соединения слов. Имеем:

$$\theta^3(21) = 1|1\theta(1)|22|(1\theta(1)\theta^2(1)), \quad \theta^3(12) = 22|1\theta(1)|1|(1\theta(1)\theta^2(1)).$$

Обозначим слово $1\theta(1)\dots\theta^k(1)$ через D_k. Имеем

$$\theta^n(12) = 22D_{n-2}1D_{n-1}, \quad \theta^n(21) = 1D_{n-2}22D_{n-1}$$

при нечетных n и, наоборот,

$$\theta^n(12) = 1D_{n-2}22D_{n-1}, \quad \theta^n(21) = 22D_{n-2}1D_{n-1}$$

для четных n. Для третьего случая аналогично при $n > 2$ имеем

$$\theta^n(1112) = 22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-1},$$
$$\theta^n(2111) = 1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-1}$$

при нечетных n и наоборот при четных n.

Заметим при этом, что и во втором и в третьем случае компоненты типа D_{n-2}, D_{n-1} одного слова либо сдвинуты относительно компонент другого на одну позицию, либо не сдвинуты. Заметим также, что если для произвольного слова B_0 над $\{1, 2\}$ обозначить через $\lambda(B_0)$ число

$$\sum_{i=1}^{k-1}(2b_i - 3)(2b_{i+1} - 3) \quad (B_0 = b_1 \dots b_k),$$

то $\lambda(D_l) = 0$ при четном l и $= 1$ при нечетном l. Для проверки надо убедиться в том, что при любом l' : $\lambda(\theta^{2l'+1}(1)|\theta^{2l'+2}(1)) = 1$, и в том, что слово в скобках начинается с 2 и кончается 1. Это доказывается по индукции с учетом выражения для $\lambda(\theta^2(b_1 \dots b_k))$:

$$\lambda(\theta^2(b_1)|\theta^2(b_2)|\dots) = \sum_{i=1}^{k}\lambda(\theta^2(b_i)) + \sum_{i=1}^{k-1} q(b_i, b_{i+1}),$$

где $q(2,2) = -1$, $q(1,1) = 1$, $q(1,2) = -1$, $q(2,1) = 1$, $\lambda(\theta^2(b)) = 0$, $b = 1, 2$.

Теперь уже простая выкладка приводит к выражению для среднего по допустимой последовательности:

$$K_{l_m} = \frac{2}{3} + \frac{c_m}{2^{m+3}}, \quad \text{где} \quad c_m = \begin{cases} -21\frac{1}{3}, & \text{если } m \text{ четно,} \\ -26\frac{2}{3}, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Подобная информация об иной подстановке приводится в [5] (стр. 132).

Свойство LB доказывается следующим образом. Пусть $\bar{f}$ — расстояние, входящее в определение свойства LB [6]. Легко проверить, что $\bar{f}(\theta^n(22), \theta^n(1)) \to 0$ при $n \to \infty$. Построим произвольную последовательность a_n натуральных чисел, такую, что $a_n \to \infty$ и $n2^{-a_n} \to \infty$. При достаточно большом n любые два допустимых слова длины n можно, отбросив в каждом два куска длины $o(n)$, разбить на блоки вида $\theta^{a_n}(22)$ и $\theta^{a_n}(1)$, чем и завершается доказательство.

§2. Энтропия по Кушниренко

Теперь на основании свойства слов $\theta^n(1112)$, $\theta^n(2111)$, $\theta^n(12)$ и $\theta^n(21)$, замеченного в предыдущем параграфе, осуществим вычисление энтропии по Кушниренко для последовательности вида $n_k = |\theta^{2k}(2)|$. Энтропия по Кушниренко определяется следующим образом [10].

Пусть(X, μ, T) — динамическая система с инвариантной мерой μ в пространстве Лебега X, $A = \{n_1, \dots, n_k, \dots\}$ — последовательность целых чисел. Для произвольного измеримого разбиения ξ в пространстве X с $H(\xi) < \infty$ положим

$$h_A(T, \xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{m} H(T^{n_1}\xi \cdot T^{n_2}\xi \cdots T^{n_m}\xi) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} H(\xi_m),$$
$$h_A(T) = \sup_{\xi:\, H(\xi)<\infty} h_A(T, \xi).$$

Эффективно h_A вычисляется с помощью следующего утверждения (лемма 2 из [15]). Пусть

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n \leqslant \ldots, \quad H(\xi_i) < \infty, \quad \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i = \varepsilon$$

(ε — разбиение на отдельные точки). Тогда для любых A и T:

$$h_A(T) = \lim_{k\to\infty} h_A(T, \xi_k).$$

В ряде работ A-энтропия успешно и плодотворно вычислялась для обобщенных последовательностей Морса и подстановок с постоянной длиной слова. Вычислялся и ее топологический аналог ([11, 12, 13, 14] и др.).

Пусть A — последовательность $n_k = |\theta^{2k}(2)|$, $k = 1, 2, \dots$. Мы покажем, что A-энтропия автоморфизма T_θ равна $1\frac{2}{3} - \log_2 \sqrt{3}$.

Обозначим через Y слово 11122, через W — слово 122. Заметим, что каждая допустимая последовательность a имеет вид $\dots V_{-1}^a V_0^a V_1^a \dots$, где V_i^a равны W или Y и нулевая координата лежит в V_0^a. Заметим также, что

$$1\theta^2(Y) = YYYWW1, \quad 1\theta^2(W) = YWW1,$$
$$W1|\theta^2(Y) = WYYYW|W1, \quad W1|\theta^2(W) = WYW|W1.$$

Из этого следует, что если обозначить через θ^0 подстановку над алфавитом $\{W^0, Y^0\}$

$$\theta^0(Y^0) = W^0Y^0Y^0Y^0W^0, \quad \theta^0(W^0) = W^0Y^0W^0,$$

то ее пространство допустимых последовательностей X_{θ^0} в точности совпадает с пространством последовательностей вида $\{x_i^a\}_{i=-\infty}^{\infty}$, где $a \in X_\theta$ и

$$x_i^a = \begin{cases} W^0, \text{ если } V_i^a = W, \\ Y^0, \text{ если } V_i^a = Y. \end{cases}$$

Через T_{θ^0} обозначим подстановочный автоморфизм $X_{\theta^0} \to X_{\theta^0}$. То есть можно рассматривать T_θ как специальный автоморфизм над T_{θ^0}. Для любого слова $B = a_1 \dots a_k$ над $\{W^0, Y^0\}$ обозначим через B^θ слово-соединение $a_1^\theta \dots a_k^\theta$ над $\{1, 2\}$, где слово $a_i^\theta = W$, если $a_i = W^0$, и $a_i^\theta = Y$, если $a_i = Y^0$. Имеем, например, $W1\theta^2(Y) = (\theta^0(Y^0))^\theta W1$. По аналогии с §1 и [8, 5, 9], для оценки действия сдвигов на $-n_k$ мы должны рассматривать блочные пары слов $\begin{pmatrix} Y \\ 21112 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} W \\ 212 \end{pmatrix}$ и θ^k от них (также блочные). Поскольку речь идет о словах, применим обозначения: $B_1^{-1}B_2$ для B_3, если $B_1B_3 = B_2$, и $B_2B_1^{-1}$ для B_3, если $B_2 = B_3B_1$. На множества всех слов над $\{1, 2\}$, кроме слова 2, определено отображение θ^*:

$$\theta^*(B) = W1\theta^2(B)(W1)^{-1}.$$

Итерации θ^* от наших блочных пар слов тоже являются однозначно определяемыми блоками, из которых состоит $\begin{pmatrix} a \\ T^{-n_k}a \end{pmatrix}$ для произвольного допустимого a. Имеем для слова C над $\{W^0, Y^0\}$:

$$(\theta^0 C)^\theta = \theta^*(C^\theta). \tag{1}$$

$$\theta^* \begin{pmatrix} Y \\ 21112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WYYYW \\ WtttW \end{pmatrix}, \quad \theta^* \begin{pmatrix} W \\ 212 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WYW \\ WtW \end{pmatrix},$$

где $t = 12211$. Итерируя θ^* далее, мы видим, что основными блоками для пары $\begin{pmatrix} a \\ T^{-n_k}a \end{pmatrix}$ можно взять $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}W \\ \theta^{*k-1}W \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}y \\ \theta^{*k-1}t \end{pmatrix}$. По индукции легко увидим, что вторая пара имеет вид

$$\begin{pmatrix} C_k1C_k22 \\ C_k22C_k1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C_{k+1} = 1122\theta^2(C_k),\ C_1 = 1.$$

Первое из C_k обозначим через C_k^1, второе через C_k^2. Для уяснения структуры этих блоков заметим, что все C_k^i из блочных $\theta^{*k-1}Y$ являются подсловами C_{k+1}^i из блочных пар $\theta^{*k}Y$ (серединная единица $\theta^{*k}Y$ является таковой для одной из компонент $\theta^{*k-1}(\theta^*Y) = \theta^{*k-1}(WYYYW)$). Далее будет использована очевидная оценка для энтропии. Мы предполагаем, что ξ — конечное разбиение. Через ξ_m обозначается произведение $T^{n_1}\xi\cdots T^{n_m}\xi$ из определения энтропии $h_A(T,\xi)$. Для любого измеримого множества U и любого разбиения $\eta = \{V_1, V_2, \dots\}$ обозначим $-\sum\limits_i \mu(U\cap V_i)\log_2\mu(U\cap V_i)$ через $H(\eta|_U)$. Разумеется,

$$H(\eta|_U) + H(\eta|_{X-U}) = H(\eta\vee\{U, X-U\}).$$

Предложение 1. Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что

1) *если G_m — последовательность множеств меры $< \varepsilon$, то*

$$\left|\frac{1}{m}H(\xi_m) - \frac{1}{m}H(\xi_m|_{X-G_m})\right| < \delta;$$

2) *если ω_m^1 и ω_m^2 — последовательности измеримых разбиений, таких, что $H(\omega_j^i) < C_j$, где $C_j = o(j)$, и ξ_m^* — последовательность измеримых разбиений, таких, что $\omega_m^1\vee\xi_m|_{X-G_m} = \omega_m^2\vee\xi_m^*|_{X-G_m}$, то*

$$\frac{1}{m}H(\xi_m|_{X-G_m}) - \frac{1}{m}H(\xi_m^*|_{X-G_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Утверждение 2) вытекает из того, что

$$H(\omega_m^i|_{X-G_m}) < C_m - (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon).$$

Для произвольного слова B обозначим через $[B]$ цилиндрическое множество, ему отвечающее. Пусть

$$\xi_s = ([\theta^{2s}(2)], T[\theta^{2s}(2)], \dots,$$
$$T^{|\theta^{2s}(2)|-1}[\theta^{2s}(2)], [\theta^{2s}(1)], \dots, T^{|\theta^{2s}(1)|-1}[\theta^{2s}(1)]).$$

Зафиксируем $s > 0$ и вычислим $h_A(T,\xi_s)$, которая, оказывается, не зависит от s. Последовательность ξ_s, естественно, удовлетворяет нашим требованиям: $h_A(T) = \lim h_A(\xi_k, T)$. Назовем слово $\theta^{2s}(1)$ или

$\theta^{2s}(2)$ l-хорошо расположенным в допустимой последовательности, если при любом $m \geqslant l$ это слово полностью лежит в каком-либо C_m из $\theta^{*m-1}Y$ или в каком-либо $\theta^{*m-1}W$ на расстоянии, не меньшем 2 от его границы. Для каждого ε найдется $l_0 = l_0(s, \varepsilon)$, такое, что l_0-хорошо расположенные слова покрывают долю, бóльшую $1 - \varepsilon$, от любой допустимой последовательности.

Рассмотрим множество F_ε допустимых последовательностей, нулевая координата которых находится в l_0-хорошо расположенном слове. Тогда $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, и A-энтропия не изменится, если последовательность будет начинаться с $n_{l_0+1} : n_{l_0+1}, n_{l_0+2}, \dots$.

Если $a \in F_\varepsilon \cap G$, где G — одно из множеств ξ_s, то для каждого $k \geqslant l_0$ либо $a \in T^{n_k}G$ (нулевая координата в C_k^1), либо $a \in T^{n_k-1}G$ (нулевая координата в C_k^2). Из предложения 1 вытекает, что выбор между этими двумя возможностями и определяет $h_A(T, \xi_s)$ (т. е. она не зависит от s и заведомо $\leqslant 1$). Точнее, каждой точке $a \in F_\varepsilon$ отвечает индексирующая последовательность $I^a = (I^a_{l_0}, I^a_{l_0+1}, \dots)$, где $I_k = 0$, если $a \in T^{n_k}G$, и $I_k = 1$, если $a \in T^{n_k-1}G$. Пусть H_p^ε — энтропия распределения, индуцированного мерой μ на множестве p-отрезков I^a вида $(I^a_{l_0+1}, \dots, I^a_{l_0+p})$. Имеем:

$$h_A(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{p \to \infty} p^{-1} H_p^\varepsilon.$$

Пусть, как уже говорилось, система (T_θ, X_θ) представлена как специальный автоморфизм над $(T_{\theta^0}, X_{\theta^0})$ с функцией $f : X_{\theta^0} \to N$, определяемой просто номером нулевой координаты точки X_θ в содержащем ее слове W или Y.

Если $(T^1_{\mathcal{A}}, \Omega^1_{\mathcal{A}})$ — обобщенное адическое представление [9] $(T_{\theta^0}, X_{\theta^0})$, то перенесем функцию f на $\Omega^1_{\mathcal{A}}$: $f^*(\omega) = f(\varphi^{-1}(\omega))$ при $\omega \in \varphi\Omega^1_{\mathcal{A}}$, где φ — это отображение из X_{θ^0} в $\Omega^1_{\mathcal{A}}$, которое устанавливает изоморфизм между T_{θ^0} и адическим преобразованием. Впрочем, в данном случае f^* продолжается очевидным образом на все $\Omega^1_{\mathcal{A}}$. Соответствующий специальный автоморфизм метрически изоморфен (T_θ, X_θ). Для точек ω (за исключением множества малой меры, лежащего, по модулю множества нулевой меры, в проекции на $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ образа $X_\theta \setminus F_\varepsilon$) адическое представление ω определяет индексирующую последовательность, общую для всех $a \in X_\theta$, вида

$$(\varphi^{-1}(\omega), k) : \ 0 \leqslant k \leqslant f(\omega) - 1.$$

Из свойств блочных пар и расположения C_k^i в $\theta^{*k-1}Y$ вытекает следующее правило.

Предложение 2. Пусть $\omega = x_0^{(j_0)} \cdots x_m^{(j_m)} \cdots$ *и* $a = (\varphi^{-1}(\omega), k) \in F_\varepsilon$. *Тогда если* $x_m = W^0$, *то* $I^a_{m+1} = 0$. *Если* $x_m = Y^0$, *то пусть* $m' > 1$ — *максимальное* $r < m$, *такое, что* $x_r^{(i_r)} \neq Y^{0(2)}$. *Если,* $x_{m'}^{(j_{m'})} = Y^{0(3)}$ *или* $W^{0(2)}$, *то* $I^a_{m+1} = 1$; *в противном случае* (*если не все* $x_r^{(j_r)}$ *равны* $W^{0(2)}$ *при* $1 \leqslant r \leqslant m$) $I^a_{m+1} = 0$.

С учетом предложения 1 и того, что мера в $\Omega^1_{\mathcal{A}}$— центральная [14], задача сводится к счету путей в $\Omega^1_{\mathcal{A}}$, отвечающих каждой индексирующей последовательности. Поскольку мы начинаем с m_{l_0+1}, нас интересуют отрезки $x_{l_0}^{(j_{l_0})}, \ldots, x_{l_0+p-1}^{(j_{l_0+p-1})}$. Индексирующая последовательность длины p (удобно отсчитывать ее в направлении, обратном росту индекса r в $x_r^{(j_r)}$: первая серия длины p соответствует

$$x_{l_0+p-1}^{(j_{l_0+p-1})}, x_{l_0+p-2}^{(j_{l_0+p-2})}, \ldots, x_{l_0+p-m}^{(j_{l_0+p-m})},$$

и т. д.), представляется в виде последовательности серии из нулей и единиц, т. е.

$$p = m_1 + k_1 + \ldots + m_r + k_r,$$

где m_i — длины серий из 1, k_i из нулей; все m_i, k_i кроме, может быть, m_1 и k_r, больше 0. Число возможных кусков вида $x_{l_0}^{(j_{l_0})} \ldots x_{l_0+p-1}^{(j_{l_0+p-1})}$, отвечающих $(m_1, \ldots, k_r)$, обозначим через $F(m_1, k_1, \ldots, m_r, k_r)$ (при неопределенности, возникающей, если $x_{l_0}^{(j_{l_0}} = Y^{0(2)}$, засчитываем кусок с коэффициентом 0.5 для каждой, из двух, индексирующей последовательности, для которой он возможен). Мы докажем, что существует функция от двух натуральных переменных $\pi(m, n)$ и две функции $\pi^1(m, n)$ и $\pi^2(m, n)$ от неотрицательных целых аргументов, такие, что

$$F(m_1, k_1, \ldots, m_r, k_r) = \pi^1(m_1, k_1)\pi^2(m_r, k_r) \prod_{i=2}^{r-1} \pi(m_i, k_i).$$

Если $i > 1$, то на $\sum_{j<i}(m_j + k_j) + 1 (= E + 1)$ месте в индексирующей последовательности стоит 1, а $x_{l_0+p-1-E}^{(j_{l_0+p-1-E})}$ определяется однозначно по x_{l_0+p-E}: равно $Y^{0(1)}$, если $x_{l_0+p-E} = Y^0$, и равно $W^{0(1)}$, если $x_{l_0+p-E} = W^0$. Сочетания

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ & Y^{0(2)} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ & Y^{0(2)} \end{matrix}$$

невозможны, потому что оба сочетания выглядят как

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ Y^0 & Y^{0(2)} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ Y^0 & Y^{0(2)} \end{matrix},$$

и при последующем выяснении «неоднозначности», связанной с $Y^{0(2)}$ по предложению 2, появится противоречие. Отсюда уже следует существование π^1, π^2, π, и представление $F(m_1, k_1, \dots, m_r, k_r)$ вычисляется непосредственно: $\pi(m, n) = 2^m \cdot 3^{n-1}$; соответствующие серии длины $m+n$ имеют вид $b_1^1 \dots b_m^1 b_1^0 \dots b_n^0$, где $b_1^1 = Y^{0(1)}$, $b_i^1 = Y^{0(2)}$ или $Y^{0(3)}$ $(1 < i \leqslant m)$; b_1^0 есть $W^{0(2)}$ или $Y^{0(3)}$, а при $1 < i \leqslant n$, b_i^0 есть W^0 или $Y^{0(1)}$ или $Y^{0(2)}$ (если $b_{i-1}^0 = W^0$ и если $b_{i-1}^0 = Y^0$, имеются три возможности). Из предложения 1 следует, что концевые эффекты и функции π^1 и π^2 несущественны и комбинаторным ядром вычисления энтропии является следующая задача.

Задача. Каждому набору R натуральных чисел m_1, $k_1, \dots, m_r$, k_r сопоставим числа

$$\pi(R) = \prod_{i=1}^{r} \pi(m_i, k_i) \quad \textit{и} \quad \Sigma(R) = \sum_{i=1}^{r} m_i + \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Для каждого натурального n рассмотрим сумму

$$\sigma(n) = \sum_{R \mid \Sigma(R)=n} \pi(R)$$

и вероятностный вектор

$$P_n = \left\{ \frac{\pi(R)}{\sigma(n)} \;\middle|\; R : \Sigma(R) = n \right\}.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} H(n)$, где $H(n)$ — энтропия P_n.

Решение таково. Положим

$$\sigma_1(n) = \sum_{R \mid \Sigma(R)=n;\, r=1} \pi(R), \quad P_n^1 = \left\{ \frac{\pi(R)}{\sigma(n)} \;\middle|\; R : \Sigma(R) = n;\, r = 1 \right\},$$

и пусть $h_1(n)$ — энтропия P_n^1.

При $n \geqslant 4$ следующие рекуррентные соотношение очевидны:

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sum_{k=2}^{n-2} \sigma_1(k)\sigma(n-k).$$

Это позволяет ввести распределение

$$P_n^2 = \left\{ \frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)}, \frac{\sigma_1(2)\sigma(n-2)}{\sigma(n)}, \dots, \frac{\sigma_1(n-2)\sigma(2)}{\sigma(n)} \right\}.$$

Его энтропию обозначим через $h_2(n)$. Имеем:

$$H(n) = h_1(n)\frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)} + \sum_{k=2}^{n-2} \big(h_1(k) + H(n-k)\big)\frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)} + h_2(n). \quad (2)$$

Очевидно, что P_2^1 и P_3^1 тривиальны: $\sigma(3) = \sigma_1(3)$, $\sigma(2) = \sigma_1(2)$ и

$$\sigma_1(n) = \sum_{m=1}^{n-1} 2^m 3^{n-m-1} = 2(3^{n-1} - 2^{n-1}).$$

Стало быть, $\sigma_1(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sigma_1(n+2) = 5\sigma_1(n+1) - 6\sigma_1(n).$$

Легко написать вытекающее из него рекуррентное соотношение для $\sigma(n)$:

$$\sigma(n+2) = 5\sigma(n+1) - 4\sigma(n),$$

и, вычислив $\sigma(4)$, получить формулу

$$\sigma(n) = \frac{2}{3}(4^{n-1} - 1).$$

Распределения P_n^1, продолженные в бесконечность нулями, стремятся экспоненциально в метрике l^1 к распределению

$$\left\{ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2, \dots, \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, \dots \right\};$$

а распределения P_n^2 — к распределению

$$\left\{ \frac{\sigma_1(2)}{16}, \frac{\sigma_1(3)}{64}, \dots, \frac{\sigma_1(m)}{4^m}, \dots \right\};$$

$h_2(n)$ стремятся к константе h_2.

Если предположить, что мы уже вычислили энтропию h_A и, что асимптотически оказалось $H(n) - H(n-k) - h_A k = o(k)$ равномерно по n, и стремится к 0 при фиксированном k, то в соответствии с формулой (2) и вышесказанным оказалось бы:

$$h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)}{4^k} = h_A \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{\sigma_1(k)}{4^k};$$

$$h_A = \frac{(h_2 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} h_1(k)\sigma_1(k)/4^k)}{\sum\limits_{k=2}^{\infty} k\sigma_1(k)/4^k}. \tag{3}$$

Для того, чтобы «оправдать» этот результат строгим рассуждением, получим рекуррентное соотношение для $q_n = H(n) - H(n-1)$ и докажем, что q_n экспоненциально стремятся к константе. Обозначим через D_n последовательность

$$h_2(n) + h_1(n)\frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)} + \sum_{k=2}^{n-2} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)}.$$

Из вышесказанного ясно, что она экспоненциально стремится к константе, а из (2) — что линейная функция от n мажорирует $H(n)$. Далее,

$$\frac{\sigma(n-k)}{\sigma(n)} - \frac{\sigma(n-1-k)}{\sigma(n-1)} < \frac{1}{4^{n-2}-1}.$$

Поэтому из (2) следует, что

$$q_n = D_n - D_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-3} q_{n-k}\frac{\sigma(n-k) = s_1(k)}{\sigma(n)} + E_n,$$

где E_n экспоненциально сходится к 0. Очевидно, что последовательность q_n ограничена. Пусть $\mathcal{Q}(z)$ — производящая функция: $\mathcal{Q}(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} q_n z^n$, и пусть

$$\mathcal{Q}^0(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k} z^k = \frac{z^2}{(4-3z)(2-z)}$$

при $|z| < 4/3$, $\mathcal{Q}^0(1) = 1$. Имеем, по доказанному, что ряд

$$\mathcal{Q}(z) - \mathcal{Q}(z)\mathcal{Q}^0(z) = \mathcal{Q}(z)(1 - \mathcal{Q}^0(z))$$

имеет коэффициенты, экспоненциально стремящиеся к 0. Но для каждого ряда вида $z^l/(1 - \mathcal{Q}^0(z))$ коэффициенты экспоненциально стремятся к константе $1/6$. Таким образом, мы доказали формулу для h_A. Преобразуем ее. Имеем, по определению:

$$h_1(k) = -\sum_{R \mid \Sigma(R)=k} \frac{\pi(R)\log_2 \pi(R)}{\sigma_1(k)} + \log_2 \sigma_1(k),$$

$$h_2 = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k} \log_2 \frac{\sigma_1(k)}{4^k},$$

$$h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)}{4^k} =$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{R \mid \Sigma(R)=k} \frac{\pi(R)\log_2 \pi(R)}{4^k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \log_2 4 \cdot \sigma_1(k)}{4^k},$$

$$h_A = \log_2 4 - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{R \mid \Sigma(R)=k} \frac{\pi(R)\log_2 \pi(R)}{4^k} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\sigma_1(k)}{4^k} \right)^{-1}.$$

Вычислим знаменатель:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \cdot 2\,(3^{k-1} - 2^{k-1})}{4^k} = 6.$$

Найдем числитель:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 4^{-k} \left(\sum_{m=1}^{k-1} 2^m 3^{k-m-1} (m \log_2 2 + (k-m-1)\log_2 3) \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{2^m 3^{k-m-1}}{4^k} m(\log_2 2 - \log_2 3)$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\cdot 3^k \cdot \log_2 3}{4^k} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Меняя порядок суммирования, для первой суммы имеем:

$$\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m m\,(\log_2 2-\log_2 3)\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = 2(\log_2 2-\log_2 3).$$

Для второй суммы получаем значение $5\log_2 3$. Итак,

$$h_A = 2-\frac{2\log_2 2+3\log_2 3}{6} = 1\frac{2}{3}-\log_2\sqrt{3}.$$

Заметим, что если бы $\pi(m,n)$ была тождественной единицей, то в формуле (3) для h_A оба вхождения 4^k заменились бы на 2^k, и получилось бы для h_A ожидаемое значение 1.

Литература

1. M. Keane, *Generalized Morse sequences*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **10** (1968), 335–353.
2. J. Kwiatkowski, *Spectral isomorphism of Morse dynamical systems*. Bull. Acad. Pol. Sc. **29** (1981), 105–114.
3. J. Kwiatkowski, *Metric and spectral isomorphisms of Morse dynamical systems*, Ergodic Theory and Related Topics, Proceedings of the conference held in Vitte (1981), 141–146, Hiddensee (GDR), October 19-23.
4. F. M. Dekking, *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **41** (1978), 221–239.
5. M. Queffélec, *Substitution dynamical systems — spectral analysis*, Lecture Notes in Math., **1294**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1987).
6. R. Nürnberg, *All generalized Morse sequences are loosely Bernoulli*, Math. Z. **182**:3 (1983), 403–407.
7. B. Host, *Valeurs propers des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longeur variable*, Ergodic Theory Dynamical Systems **6** (1986), 529–540.
8. P. Michel, *Coincidence values and spectra of substitutions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **42** (1978), 205–207.
9. А. Н. Лившиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*, Матем. заметки **44**:6(1988), 785–793.
10. А. Г. Кушниренко, *О метрических инвариантах типа энтропии*, УМН, **22**:5 (1967), 57–65.
11. F. M. Dekking, *Some examples of sequence entropy as an isomorphism invariant*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 167–183.
12. M. Lemańczyk, *The sequence entropy for Morse shifts and some counterexamples*, Studia Math. **82** (1985), 221–41.
13. T. N. T. Goodman, *Topological sequence entropy*, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1974), 331.
14. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор*. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., **26**, ВИНИТИ, М., 1985, 3–56.
15. D. S. Ornstein, D. I. Rudolf, and B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Mem. Amer. Math. Soc. **262** (1982), 1–116.

ON A CLASS OF STATIONARY SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

The subject of this report is the well known concept of deterministic (even algorithmic) investigation and modelling of stationary in the narrow sense sequences of random variables-sequences, arising from symbolic dynamical systems with invariant, probability measures. For some interesting particular cases we shall discuss the hierarchical method of construction of special sequences and the limit distributions of sums of coordinate random variables.

Let (X, μ) be the Lebesgue space [13] and $T : X \to X$ its metric isomorphism. For any measurable function $f : X \to R$ we can consider the sequence of functions $f_n(x) = f(T^n x)$. If we treat X as a space of elementary events, then we get a sequence of random variables. For example, if X is the space of both side infinite sequences of elements of some alphabet $D = \{1, \dots, k\}$, $1 \leqslant k < \infty : X = \{\dots x_{-l} \dots x_0 \dots x_k \dots\}$, f depends only on the zero coordinate, T is a shift, and μ is a Bernoulli measure, then we have the standard situation of independent random variables for which the central limit theorem is fulfilled. For deterministic automorphisms with positive entropy (as follows from the Sinai's results [13]) we can choose f in such a way that we shall obtain again a sequence of independent random variables. For example, we can take an automorphism of a compact commutative group. Usually, the isomorphisms of dynamical systems are rather complicated even if we have some symbolic representation (for example, the Markov representation) for our deterministic transformation. So we cannot build f effectively. If independence is not argued then the class of functions obeying the central limit theorem

In: *Probability Theory and Mathematical Statistics. Papers from the Semester on Probability and Mathematical Statistics held at the Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, 1993*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1996, pp. 81–88.

is much wider for the K-systems [13] and, as it was proved by Barton and Denker in [1], such functions exist for every ergodic automorphism.

Now we shall discuss some class of the closed shift-invariant sets of sequences possessing (like fractals) the properties of self-similarity and, more generally, the classes of sets of sequences admitting some hierarchical representation. In the first case our dynamical systems will be strictly ergodic and have the zero entropy [11].

Now we give the definition of substitutional minimal set. Let $Z_* = \{u_i\}_{i=1}^k$ be an alphabet and $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^k$ a collection of words in it. Let $\omega_{\mathcal{A}} : \cup Z_*^l \to \cup Z_*^l$ be the map defined as follows: $\omega_{\mathcal{A}}(u_{i_1} \dots u_{i_s}) = A_{i_1} \dots A_{i_s}$ (the concatenation of words). Denote by $G_{\mathcal{A}}$ the matrix (g_{ij}) where g_{ij} is the number of appearances of u_j in A_i. We shall suppose that $G_{\mathcal{A}}$ is primitive. Using $\omega_{\mathcal{A}}$ one can define the closed shift invariant set $X_{\mathcal{A}}$ of sequences in Z_*. There are various definitions of it [11, 12, 15]. Here we give a definition which is analogous to one of the invariant set of a topological Markov chain, by means of the list of allowed subwords of a sequence. So $X_{\mathcal{A}} = \{\{x_i\}_{l=-\infty}^{\infty} |$ for any $m < n$ there exist $q \leqslant k$, s, l, p with $p - l = m - n$ such that $\omega_{\mathcal{A}}^s(u_q) = u_{i_1} \dots u_{i_{p-1}} x_m \dots x_n u_{i_{l+1}} \dots \}$.

Since the primitiveness of $G_{\mathcal{A}}$ guarantees its minimality [11], our list is small enough (one cannot exclude any word from it). Here we shall not discuss in detail the structure of all sequences (typical and belonging to the residual set). We notice that if some properties of unique decoding (about which some results are obtained) are fulfilled, then for every typical sequence there exists a representation by some hierarchical structure and the typical realizations of a one-sided topological Markov chain can be assigned to all these structures. As was mentioned, $X_{\mathcal{A}}$ is a strictly ergodic set. The subword complexity of its sequences is majorized by a linear function. The dependence between the coordinate random variables is rather strong. These shift dynamical systems never mix. More explicitly, the following takes place [4, 11]. Let $\mathfrak{A}(m, n)$ be the σ-algebra of sets depending on corresponding coordinates. Then there exist sequences m_n, $l_n \to \infty$ of numbers and $A_n \in X_{\mathcal{A}}$ of measurable sets such that

$$\mu(A_n) \to 0; \quad A_n \in \mathfrak{A}(0, m_n); \quad \mu(T_{\mathcal{A}}^{l_t} A_n \cap A_n) > C\mu(A_n)$$

for every n, $t > n$.

Now we introduce a more complicated representation of the substitutional minimal set, suitable for all primitive substitutions, not depending (together with so called adic representation [7, 14, 15], in which still transformation is not a homeomorphism of a Cantor set) on the unicity of decoding and having some technical advantages (for example, when studying general hierarchies).

Now we are introducing the notion of so-called structurized admissible sequence, but firstly we introduce the auxiliary one of structurized sequence. It is defined as a pair $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$ (where for every l S_x^l is a sequence of elements of Z_* : $S_x^l = \{u_{i_{r,x}^l}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ and $\{n_{r,x}^l\}$ is a sequence of integer numbers such that:

1) If $l_1 < l_2$, then $\{n_{r,x}^{l_2}\} \subset \{n_{r,x}^{l_1}\}$ in natural sense; if $-\infty < r_1 < r_2 < \infty$, then $n_{r_1,x}^l < n_{r_2,x}^l$ for any $l \geqslant 0$;
2) $n_{-1,x}^l + 1 \leqslant 0 \leqslant n_{0,x}^l$ for any $l \geqslant 0$;
3) $u_{i_{n_{r+1,x}^l}^0} \dots u_i 0_{n_{r+1,x}^l} = \omega_{\mathcal{A}}^l(u_{i_{r+1,x}^l}); \; l \geqslant 0, \; -\infty < r < \infty$;
4) If for some r, Δ, ρ accordingly with 1) $n_{\rho,x}^l = n_{r,x}^{l+1}$, $n_{\rho+\Delta}^l = n_{r+1,x}^{l+1}$, then $\omega_{\mathcal{A}}(u_{r+1,x}^{i+1}) = u_{i_{p+1,x}^l} \dots u_{i_{\rho+\Delta,x}^l}$.

Of course, 4) implies 3). Evidently, $n_{r,x}^0 = r$ for every r, x^s. We can define the shift $(T_{\mathcal{A}}^s)^q$ (for any integer q) of x^s.

At first, for every $l \geqslant 0$, denote by $H(l,q)$ such p that $n_{p-1,x}^l + 1 \leqslant 1 \leqslant n_{p,x}^l$ (for example, $H(0,q) = q$). Denote by $\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ the sequence $\{n_{r+H(l,q),x}^l - q\}_{r=-\infty}^{\infty}$ and by $(T_{\mathcal{A}}^s)^q x^s$ the pair

$$\{\{T_{\mathcal{A}}^{H(l,q)}\{S_x^l\}\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^{l,q}\}\}_{l=0}^{\infty}\},$$

where $T_{\mathcal{A}}$ is the ordinary shift of a sequence. It is easy to check 1)–4) for $(T_{\mathcal{A}}^s)^q X^s$. Notice that by 1)– 4) the knowledge of $S_x^{l_k}$, $n_{0,x}^{l_k}$ for some $l_k \to \infty$ uniquely determines x^s. Using it, we introduce some class of concrete structurized sequences.

The quadruple (i_0, j_0, m_0, n_0) is called generating [15] if there exist the numbers p, q, t, v and the words w, w', w_1, w_1' such that u_p, u_q are j_0-th and (j_0+1)-th symbols of $\omega_{\mathcal{A}}(u_{i_0})$,

$$\omega_{\mathcal{A}}^{m_0} u_p = w u_t, \; \omega_{\mathcal{A}}^{m_0} u_q = u_v w', \; \omega_{\mathcal{A}}^{n_0} u_t = w_1 u_t, \; \omega_{\mathcal{A}}^{n_0} u_v = u_v w_1'.$$

Starting with such a quadruple, we define the structurized sequence $x^s(i_0, j_0, m_0, n_0)$ as $\{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}\}$ such that all $S_x^{in_0}$ are identical:

$$S_x^{in_0}(-\infty, 0) = \omega_{\mathcal{A}}^{n_0 \infty}(u_t)(\text{past});$$
$$S_x^{in_0}(1, \infty) = \omega_{\mathcal{A}}^{n_0 \infty}(u_v)(\text{future}), \; 0 \leqslant i < \infty,$$

and $n_{0,x}^l = 0$ for all l. Structurized sequence is called structurized admissible if additionally the following is fulfilled:

5) Three possibilities take place:

a) $n^l_{-1,x} \to -\infty$, $n^l_{0,x} \to \infty$ as $l \to \infty$;

b) there exist h, l such that $n^l_{-1,x} = h < 0$ for all $l > L$: in this case for some generating quadruple we have $x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} x^s(i_0, j_0, m_0, n_0)$;

c) there exist h, l such that $n^l_{0,x} = h \geqslant 0$ for all $l > L$: in this case for some generating quadruple we have $x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} x^s(i_0, j_0, m_0, n_0)$ too.

The space $X^s_{\mathcal{A}}$ of all structurized admissible sequences with the natural topology is a Cantor set and the shift $T^s_{\mathcal{A}}$ is a homeomorphism. The natural projection $p : X^s_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}, p(x^s) = S^0_x$, is a surjection. If $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ is primitive, the shift $T^s_{\mathcal{A}}$ is strictly ergodic. Here we exhibit the natural expressions of the measures of some cylindric sets in $X^s_{\mathcal{A}}$. These expressions are suitable for $X_{\mathcal{A}}$. Let $(\mu_i)_{u_i \in Z_*}$ be the normalized eigenvector-row of $G_{\mathcal{A}}$ corresponding to the Perron–Frobeunius eigenvalue λ. It is known [11] that $\mu(\{\{x_i\} \in X_{\mathcal{A}} | x_0 = u_s\}) = \mu_s$. Denote

$$\frac{\mu_a}{\lambda^n} = P_{a,n}; \quad \omega^n_{\mathcal{A}}(a) = b^{n,a}_1 \dots b^{n,a}_{l(n,a)}, \quad a \in Z_*;$$
$$C_{A,l} = \{x^s = \{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\} :$$
$$n^l_{0,x} = 0, u_{i^l_{0,x}} u_{i^l_{1,x}} \dots u_{i^l_{|A|-l,x}} = A\},$$

where A is an admissible word. For $n \geqslant 1$ we have

$$\omega^n_{\mathcal{A}}(a) = \omega^{n-1}_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}}(a)) = \omega^{n-1}_{\mathcal{A}}(b^{1,a}_1) \dots \omega^{n-1}_{\mathcal{A}}(b^{1,a}_{l(1,a)})$$
$$= b^{n,a}_1 \dots b^{n,a}_{l_1(n,a)} b^{n,a}_{l_1(n,a)+1} \dots b^{n,a}_{l_2(n,a)} \dots b^{n,a}_{l_{l(1,a)}(n,a)},$$
$$n^A_a = \min\{n : \exists s : b^{n,a}_s \dots b^{n,a}_{s-1+|A|} = A\}$$

(if A is admissible, then for some a (so for all a) we have $n^A_a < \infty$),

$$t(a,n,A) = \begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad n < n^A_a, \\ \#\{s : b^{n,a}_s \dots b_{s-1+|A|} = A\} \quad \text{if} \quad n = n^A_a, \\ \#\{s : b^{n,a}_s \dots b_{s-1+|A|} \models A; \exists r : l_r(n,a) \notin [s, s-1+|A|]\} \text{ if } n > n^A_a. \end{cases}$$

Further,

$$\mu(C_{A,l}) = \sum_{a,n} t(a,n,A) P_{a,n+l}. \tag{1}$$

(1) Taking into account the periodicity of functions $t(a,n,A)$ in n, we can simplify this formula.

Proof of formula (1). Since the shift is defined, we can count the frequencies in order to calculate the measures. By definition, it is easy to see that $p \circ T_{\mathcal{A}}^s = T_{\mathcal{A}} \circ p$. So, by item 3) of the definition of structurized sequence, if we want to calculate $\mu(\{x^s : i_{0,x}^0 = f\})$ for some $f \in [1, k]$, we have, like in [11], to calculate the frequencies of u_f in the words $\omega_{\mathcal{A}}^l(g)$, $1 \leqslant g \leqslant k$, and the limits for each g and $l \to \infty$. These limits are all equal to μ_f [11], because for any nonnegative nonzero k-vector-row P we have

$$\frac{P_i^t}{\sum\limits_j P_j^t} \underset{t\to\infty}{\to} \mu_i,$$

where $\{P_i^t\} = PG_{\mathcal{A}}^t$. Now we can calculate the frequency of the event $(i_{0,x}^l = f)$. Since the frequencies of u_f-s in S_x^l are μ_f-s as well (one can prove it analogously to the above by multiple application of 4)), we see that the frequency of appearances of $(i_{0,x}^l = f)$ on any trajectory of $T_{\mathcal{A}}^s$ is equal to

$$\frac{\mu_f |\omega_{\mathcal{A}}^l(u_f)|}{\sum\limits_j \mu_j |\omega_{\mathcal{A}}^l(u_j)|} = \frac{\mu_f |\omega_{\mathcal{A}}^l(u_f)|}{\lambda^l} = P_{f,l|\omega_{\mathcal{A}}^l(u_f)|},$$

since

$$\sum_j \mu_j |\omega_{\mathcal{A}}^l(u_j)| = \sum_j \sum_i \mu_j (G^l)_{ji} = \sum_i \sum_j \mu_j (G^l)_{ji} = \sum_i \lambda^l \mu_i = \lambda^l.$$

So $\mu(\{x^s : i_{0,x}^0 = f, n_{0,x}^l = 0\}) = P_{f,l}$. Denote by $X_{\mathcal{A}}^{'s}$ the set of such $x^s \in X_{\mathcal{A}}^s$ for which the possibility 5a) takes place. The set $x_{\mathcal{A}}^s \setminus X_{\mathcal{A}}^{'s}$ is countable, so $\mu(X_{\mathcal{A}}^{'s}) = 1$. For an arbitrary $x^s \in X_{\mathcal{A}}^s$ we introduce the sequences $\{n_{r,x}^{l,m}\}$, l, $m \geqslant 0$, defined by the equalities $n^l_{n_{r,x}^{l,m}, x} = n_{r,x}^{l+m}$ for all $r : -\infty < r < \infty$. We have

$$C_{A,l} \cap X_{\mathcal{A}}^{'s} = \bigcup_{m,u_j} C_{A,l}^{m,j},$$

where

$$C_{A,l}^{m,j} = \left\{ x_s \in C_{A,l} \cap X_{\mathcal{A}}^{'s} | m = \min\{p : n_{0,x}^{l,p} \geqslant |A|, i_{0,x}^{l,p} \geqslant |A|, i_{r,x}^{l+m} = j\} \right\}.$$

It is evident that all the sets $C_{A,l}^{m,j}$ are pairwise disjoint, and that

$$\mu(C_{A,l}^{m,j}) = t(u_j, m, A) P_{u_j, m+l},$$

because the word $u_{i^l}{}_{n^{l,m}_{-1,x}+1,x} \dots u_{i^l}{}_{n^{l,m}_{0,x},x}$ is simply $\omega^m_{\mathcal{A}}(j)$ and for every available v

$$\mu(\{x^s \in C^{m,j}_{A,l} : n^{l,m}_{-1,x} = -v\}) = P_{u_j,m+l}.$$

The formula is proved.

It is evident that there exist n_0, T such that for $n > n_0$ we have $t(a, n+T, A) = t(a, n, A)$. Let

$$q(a, A) = \mu_a \sum_{i=n_0+1}^{n_0+T} \lambda^{-i} t(a, i, A),$$

then

$$\mu(C_{A,l}) = \sum_{a, n \leqslant n_0} t(a, n, A) P_{a,n+l} + \frac{\lambda^{T-l}}{\lambda^T - 1} \sum_a q(a, A).$$

Now we introduce the "nonstationary" substitution. Let

$$Z_* = \{Z^i_*\}^\infty_{i=0} = \{\{u^i_j\}^{r_i}_{j=1}\}^\infty_{i=0}$$

be the sequence of alphabets, $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}^\infty_{i=0}$ the sequence of collections of words; $\mathcal{A}_i = \{A^i_j\}^{r_{i+1}}_{j=1}$, A^i_j's the words in Z^i_*. Let ω be the map

$$\bigcup_{i>0} \bigcup_{l>0} (Z^i_*)^l \to \bigcup_{i \geqslant 0} \bigcup_{l>0} (Z^i_*)^l,$$

defined as follows: if $A = u^i_{j_1} \dots u^i_{j_s}$ is a word in Z^i_* then $\omega_{\mathcal{A}}(A) = A^{i-1}_{j_1} \dots A^{i-1}_{j_s}$.

For every $i \geqslant 0$ we (analogously to the definition of Markov compact [7, 14, 15]) introduce the matrix G_i $(r_{i+1} \times r_i)$, where $g_{j_1 j_2}$ is the number of appearances of $u^i_{j_2}$ in the word $A^i_{j_1}$. For this sequence we shall suppose the condition analogous to primitivity to be fulfilled: there exists a sequence $0 = i_0 < i_1 < \dots$ such that every matrix ${}^tG_{i_s}\ {}^tG_{i_s+1} \dots {}^tG_{i_{s+1}-1}$ has only positive elements.

Structurized sequence is a pair $x^s = \{\{S^l_x\}^\infty_{l=0},\ \{\{n^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\}$ (where, for every l, $S^l_x = \{u^l_{i^l_{r,x}}\}^\infty_{r=-\infty}$ is a sequence of elements of Z^l_* and $\{n^l_{r,x}\}$ is a sequence of integer numbers) such that the conditions 1)–4) (formulated identically to those introduced above) are fulfilled. All remarks to 1)–4) are carried without changes but the definition of generating quadruple is not available here.

The structurized sequence x^s is called extremal if $n^l_{0,x} = 0$ for every l and there exist $l_1 > l$ and $r \leqslant r_{l_1}$ such that $\omega_{\mathcal{A}}^{l_1-l}(u^{l_1}_r) = B u^l_{i^l_{0,x}} u^l_{i^l_{1,x}} C$, where B and C are some words, may be empty.

Now we say that structurized sequence is a structurized admissible sequence if the condition 5) is fulfilled which differs from the condition 5) above only in items b) and c) (their common part). In both items there must be: in this case for some extremal sequence $y^s \in Y^s$ we have $x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} y^s$. Using the recent results in a topological dynamic on Cantor sets [6], one can prove that this construction provides a representation for every minimal homeomorphism of a Cantor set. An important particular case corresponds to the notion of TAG-system which is well known in logic. In this case we have $Z^1_* = Z^2_* = \ldots \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \ldots$. The measures of cylinders are calculated by the same rules as previous but here we denote

$$P_{u^1_m,n} = \frac{\mu_{u^1_j} \lambda^{1-n}}{\sum\limits_j \mu_{u^1_j} |A^0_j|},$$

where (μ_a) is the normalized eigenvector-row of the matrix G_1, $n > 1$. G. Rauzy [12] has considered the example with

$$Z^1_* = (1, 2, 3);\ \mathcal{A}^1_* = (13, 13223, 1323);\ Z^0_* = (1, 2);\ \mathcal{A}^0_* = (1, 122, 12).$$

This system turned to be closely related to the rotation on the circle by

$$\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$$

and was used in evaluating the deviations of sums of mentioned random variables.

Now we return to ordinary substitutions.

When evaluating such sums for the general primitive substitution, we can choose a suitable individual trajectory and change spatial averages by temporal ones (for example, calculating joint distributions). Let f have zero average: $\sum \mu_a f(a) = 0$. What are the deviations of $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$? The results of Dumont and Thomas [5] about the sums over the trajectories of fixed points of some substitutions together with recurrence properties of substitutional dynamical systems imply the following statement.

Let $G_{\mathcal{A}}$ have the eigenvalues $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$;

$$\lambda > \lambda_1 > \max_{2 \leqslant i \leqslant k-1} |\lambda_i|.$$

By [5], the behaviour of our sums can be described by some fractal function F_f. If $F_f \not\equiv 0$, then there exist some numbers $c_1 > c_2 > 0$, $c_3 > c_4 > 0$, N_0 such that if $n > N_0$, then

$$c_1 B_n > \max_x \sum_{i=1}^{n} f_i(x) > c_2 B_n > -c_4 B_n > \min_x \sum_{i=1}^{n} f_i(x) > -c_3 B_n,$$

where $B_n = (\log_\lambda n)^\alpha n^\beta$; $\beta = \log_\lambda \lambda_1$; $\alpha + 1$ is the multiplicity of the λ_1 in the minimal polynomial of $G_{\mathcal{A}}$. For the system considered by Rauzy, the asymptotic is logarithmic.

For some sequences $n_p \to \infty$ there exist the limit distributions for the sums $B_{n_p}^{-1} \sum_{i=1}^{n_p} f_i(x)$. The following is true [10] in the setting of the theorem by Dumont and Thomas.

Theorem. Let l be the greatest common divisor of all such l' that, for some u_i, $\omega_{\mathcal{A}}^{l'} u_i = ABC$ where $AC = u_i$. Then if $n_p/\lambda^{pl} \underset{p\to\infty}{\to} \alpha$, where α is real number, then the distributions of $B_{n_p}^{-1} \sum_{i=1}^{n_p} f_i(x)$ tend weakly to some distribution depending only on α.

This distribution admits an expression in terms of fractal functions by Dumont and Thomas. But this expression does not simplify the calculation of the measures of concrete intervals. For concrete substitutions it is possible to get other expressions, which give in particular cases the desirable result.

Consider an important case of the Rudin–Shapiro substitution: $Z_* = \{1, 2, 3, 4\}$; $\mathcal{A} = \{13, 43, 12, 42\}$. Put $f(\{z_i\}_{-\infty}^{\infty}) = \tau_{z_0}$, where $\tau_1 = \tau_3 = 1$; $\tau_2 = \tau_4 = -1$. For $\{n_p\}$, take the sequence obeying the recurrence $n_{p+1} = a_p + 4n_p$, where $n_1 = a_0$ and a_i are arbitrary "digits": $0 \leqslant a_p \leqslant 3$. It satisfies the conditions of our theorem ($l = 2$) and all limit distributions can be obtained using such sequences.

For an individual trajectory, we can choose that of (one-sided variant) sequence $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1) = x_0, \dots$, so τ_{x_i}-s turn to be the well-known Rudin–Shapiro coefficients [11], sums of which and fractal function were studied in [2, 3] and in other works. In the "temporal" variant for fixed p we shall study the distribution of sums

$$\sigma_n^p = 2^{-p} \sum_{i=n+1}^{n+n_p} \tau_{x_i}$$

(we have changed B_{n_p} with 2^p).

Now we exhibit another representation of our distributions. Let $R(t)$ be the ring of polynomials with real coefficients; M_i, $i = 0, 1, 2, 3$, be the module over this ring:

$$M_i = R(t)e_1^i \oplus R(t)e_2^i \ldots \oplus R(t)e_{64}^i.$$

There exist homomorphisms $h_{ij} : M_i \to M_j$, vectors $m_i \in M_i$ (for some particular cases h_{ij} and m_i are exhibited in [8]) and for any $i = 0, \ldots, 3$ the partition of N into 64 sets corresponding to some properties of binary expansions to which the generators of M_i are assigned, such that for any n the vector v_n in one of M_i is distinguished so that $v_i = m_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, and $v_{a_p+4n_p} = h_{a_{p-1}a_p} v^*_{n_p}$, where $v^*_{n_p}(t) = v_{n_p}(t^2)$. Each polynomial-component of v_{n_p}, divided by the value for $t = 1$, can be treated as the generating function of distribution of σ_n^p for n ranging over the sets which were assigned to corresponding $e_j^{a_p}$, so only the frequencies of situations are to be calculated, what is easy for every $p < \infty$. If the sequence a_p is periodic, this method [8, 9] allows to calculate in the explicit form the measures of binary intervals using the explicitly specified auxiliary lumped Markov chains or recurrences. Another method, using the results of [3], is possible for such $\{n_p\}$ that $n_p = 0$ for large p. Here we describe the argument for the cases $n_{p+1} = 4^p$, $p = 0, 1, \ldots$, and $n_{p+1} = 2 \cdot 4^p$, $p = 0, 1, \ldots$.

The calculation in [9] is based on the fact that if $n = k \cdot 2^l + c$, where $0 \leqslant c < 2^l$, then

$$A_n^l = \tau_{x_{n+2^l}} - \tau_{x_n} = \begin{cases} a(c)(a(k+1) - a(k)) & \text{if } 0 \leqslant c < 2^{l-1}, \\ a(c)(a(2k+3) - a(2k+1)) & \text{if } 2^{l-1} \leqslant c < 2^l. \end{cases}$$

As we study the distributions of sums like

$$D + \sum_{n=0}^{r} A_n^l, \quad \text{where} \quad D = \sum_{i=0}^{2^l-1} \tau_{x_i},$$

so we have to consider different types of k and for every case study the sums $\sum\limits_{n=q2^{l-1}}^{i+q2^{l-1}} a(n)$ with corresponding q, what is almost identical to considerations of [3] where the following is proved: for any natural n there exist strictly n numbers m such that $\sum\limits_{i=0}^{m} \tau_{x_i} = n$.

The resulting expressions are the following ones. If $n_{p+1} = 4^p$, then the limit distribution have a continuous and a discrete components: continuous with density

$$\begin{cases} (x+3)/32 & \text{if} \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ 3/16 & \text{if} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)/32 & \text{if} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

and the discrete component $(\delta(1) + \delta(-1))/4$. If $n_{p+1} = 2 \cdot 4^p$, then the density is

$$\begin{cases} (x+4)/64 & \text{if} \quad -4 \leqslant x \leqslant -2, \\ (x+8)/64 & \text{if} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ (8-x)/64 & \text{if} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ (4-x)/64 & \text{if} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

and the discrete component is $(\delta(2) + 2\delta(0) + \delta(-2))/8$.

References

1. R. Barton, and M. Denker, *On the central limit theorem for dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **302**:2 (1987), 155–170.
2. J. Brillhart, P. Erdös, and P. Morton, *On sums of Rudin-Shapiro coefficients*. Pacific. J. Math. **107**:1 (1983), 39–70.
3. J. Brillhart, and P. Morton, *Uber summen von Rudin-Shapiroschen koiffizienten*, III. J. Math. **22**:1 (1978), 126–148.
4. F. M. Dekking, and F. M. Keane, *Mixing properties of substitutions*, Z. Warscheinlichkeits Theor. verw. Geb. **42** (1978), 23–33.
5. J.-M. Dumont, and A. Thomas, *Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theor. Comput. Sci. **65**:2 (1989), 153–169.
6. R. H. Herman, I. E. Putnam, and C. F. Skau, *Ordered Brattely diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Intern. J. Math. **3** (1992), 827-864.
7. A. N. Livshits, *On the construction of Markov compacta*, St. Petersburg Math. J. **3** (1992), 137–146.
8. A. N. Livshits, *On certain stationary sequence of random variables*. Preprint POMI P-5-92 (1992).
9. A. N. Livshits, *On the limit distributions and asymptotic behavior of the extremal values of some sequences of random variables*, Zap. Nauchn. Senim. POMI **216** (1994). (Russian)
10. A. N. Livshits, *On the sums of coordinate random variables for certain class of substitutional dynamical systems*, Zap. Nauchn. Semin. POMI **216** (1994). (Russian)
11. M. Queffélec, *Substitutional dynamical systems – spectral analysis*, Lect. Notes in Math. 1294 (1987).
12. Rauzy G., *Sequences defined by iterated morphisms*. In: Sequences (Naples/Positano, 1988), 275–286. Springer, New York–Berlin, 1990.

13. V. A. Rohlin, *Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure*, Uspekhi. Mat. Nauk **22**:5 (1967), 3–56. (Russian)
14. A. M. Vershik, *A theorem on Markov approximation in ergodic theory*, Zap Nauchn. Semin. LOMI **115** (1982), 195–206. (Russian)
15. A. M. Vershik, and A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics*, in: Advances in Soviet. Math., Repres. Theory and Dynamical Syst. **9** (1992), 185–204.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОДСТАНОВОЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Целью настоящей работы является продолжение изучения некоторых важных классов подстановочных динамических систем.

§1. Подстановки с чисто дискретным спектром

Прежде всего, напомним основные определения, связанные с подстановочными динамическими системами (см. [1], [2] и библиографии). Пусть $Z_* = \{1, \dots, n\}$ — конечный алфавит, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ — набор слов в этом алфавите. Введем $n \times n$-матрицу $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij}$, элементы которой g_{ij} суть числа вхождений символов j в слова A_i. Будем требовать, чтобы матрица $G_{\mathcal{A}}$ была примитивной. Определим отображение $\omega_{\mathcal{A}} : U_{k>0} Z_*^k \to U_{k>0} Z$ следующим образом: $\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \dots a_k) = A_{a_1} \dots A_{ak}$, где в правой части стоит конкатенация слов. Подстановкой называется сужение $\omega_{\mathcal{A}}|Z_*$. Подстановка порождает топологическую динамическую систему — замкнутое инвариантное относительно сдвига множество в пространстве двусторонних последовательностей, которое допускает много различных описаний (не во всех случаях эквивалентных). Для некоторых из них существенным является понятие порождающей четверки. Порождающей четверкой назовем такую четверку натуральных чисел (i, j, m, n'), $i \leqslant n$, $j + 1 \leqslant |a_i|$, что существуют такие символы $a, b, c, d \in Z_*$, что: 1) c и d являются, соответственно, j и $j + 1$ символами слов A_i; 2) слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(c)$ кончается на a и слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(d)$ начинается с b; 3) $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)$ кончается на a и $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b)$ начинается с b.

В данном изложении будет использоваться концепция структурированной допустимой последовательности, принятие которой упрощает некоторые технические вопросы. Эта концепция выработана также

Препринт ПОМИ No. 13/1994

и для нестационарного случая и весьма полезна при описании иерархической структуры допустимых последовательностей и работе с ней.

Итак, предположим, что фиксированы такие Z_*, $\mathcal{A}$, что $G_{\mathcal{A}}$ – примитивна, и определено отображение $\omega_{\mathcal{A}}$.

Будут описаны вполне несвязный бикомпакт $X^s_{\mathcal{A}}$ — множество допустимых структурированных последовательностей и его гомеоморфизм $T^s_{\mathcal{A}} : X^s_{\mathcal{A}} \to X^s_{\mathcal{A}}$. Предварительно введем вспомогательное понятие структурированной последовательности. Она определяется как пара $x^s = \{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\}$, где для каждого l S^l_x — последовательность элементов Z_*, $S^l_x = \{i^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}$ и $\{n^l_{r,x}\}$ — последовательность таких целых чисел, что:

1) если $l_1 < l_2$, то $\{n^{l_2}_{r,x}\} \subset \{n^{l_1}_{r,x}\}$ в естественном смысле; если $r_1 < r_2$, то для каждого $l \geqslant 0$ $n^l_{r_1,x} < n^l_{r_2,x}$,

2) $n^l_{-1,x} + 1 \leqslant 0 \leqslant n^0_{0,x}$ для каждого $l \geqslant 0$,

3) $i^0_{n'_r+1,x} \dots i^0_{n'_{r+1}+1,x} = \omega^l_{\mathcal{A}}(i^l_{r+1,x})$, $l \geqslant 0$, $-\infty < r < \infty$,

4) если для некоторых r, Δ, r' в соответствии с 1) мы имеем $n^l_{r',x} = n^{l+1}_{r,x}$, $n^l_{r'+\Delta} = n^{l+1}_{r+1,x}$, то $\omega_{\mathcal{A}}(i^{l+1}_{r+1,x}) = i^l_{r'+1,x} \dots i^l_{r'+\Delta,x}$.

Очевидно, что из 4) следует 3). Ясно также, что $n^0_{r,x} = r$ для любых r, x^s. Для множества структурированных последовательностей с естественно определяемыми слабой топологией и соответствующей ей метрикой может быть определена группа гомеоморфизмов (вообще говоря не минимальных), которая будет обозначаться тоже $\{(T^s_{\mathcal{A}})^q\}^\infty_{q=-\infty}$. Сначала опишем метрику. Пусть ρ — метрика, соответствующая слабой сходимости в пространствах последовательностей элементов Z_* или множества целых чисел $\rho(\{a_i\}^\infty_{i=-\infty}, \{b_i\}^\infty_{i=-\infty}) = \exp(-\max\{r : a_i = b_i,\ -r \leqslant i \leqslant r\}$, а $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 \dots, \sum \rho_i < \infty$ — последовательность положительных вещественных чисел. Имеем $d(x^s_1, x^s_2) = \sum\limits^\infty_{l=0} \rho_l \rho(S^l_{x_1}, S^l_{x_2}) + \sum\limits^\infty_{l=0} \rho_l \rho(\{n^l_{r,x_1}\}^\infty_{r=-\infty}, \{n^l_{r,x_2}\}^\infty_{r=-\infty})$. Для любого $l \geqslant 0$ обозначим через $H(l,q)$ такое p, что $n^l_{p-1,x} + 1 \leqslant q \leqslant n^l_{p,x}$ (например, $H(0,q) = q$). Через $\{n^{l,q}_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}$ обозначим последовательность $\{n_{r+H(l,q),x} - q\}^\infty_{r=-\infty}$ и через $(T^s_{\mathcal{A}})^q x^s$ — пару $\{\{T^{H(l,q)} S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^{l,q}_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\}$, где T — обычный сдвиг последовательности элементов Z_*. Легко проверить, что для $(T^s_{\mathcal{A}})^q x^s$ выполнены условия 1)–4). Заметим, что в соответствии с 1)–4) знание $S^{l_k}_x$, $n^{l_k}_{0,x}$ для некоторой последовательности $l_k \to \infty$ однозначно определяет x^s. Пользуясь этим, мы построим некоторый класс конкретных структурированных последовательностей.

Пусть (i, j, m, n') — некоторая порождающая четверка. Определим

структурированную последовательность $x^s(i,j,m,n')$ как $\{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty},\{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, где все $n_{0,x}^l = 0$, а все S_x^{in} одинаковы и равны той последовательности $x(i,j,m,n') = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, которая ранее использовалась при построении нашего замкнутого инвариантного множества (см., например, [1], [2]). Эту последовательность можно обозначить $\omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(b)$, где нумерация такова, что $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(b)$.

Структурированная последовательность называется допустимой структурированной последовательностью, если дополнительно выполнено следующее условие:

5) Имеют место три возможности: а) $n_{-1,x}^l \to -\infty$, $n_{0,x}^l \to \infty$ при $l \to \infty$;

б) существуют такие h, L, что $n_{-1,x}^l = h < 0$ для всех $l > L$ — в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T_{\mathcal{A}}^s)^{-h} x^s(i,j,m,n');$$

в) существуют такие h, L, что $n_{0,x}^l = h \geqslant 0$ для всех $l > L$ — в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T_{\mathcal{A}}^s)^{-h} x^s(i,j,m,n').$$

В случае примитивности $G_{\mathcal{A}}$ наша динамическая система строго эргодична.

Для произвольных l, $q \geqslant 0$ определим последовательность $\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ равенствами $n_{n_{r,\omega,x}^{l,q}}^l = n_{r,x}^{l+q}$ для всех $r : -\infty < r < \infty$. В этом случае, если зафиксировать q, пара

$$x_q^s = \{\{s_x^{q+l}\}_{l=0}^{\infty}, \quad \{\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\},$$

как легко понять, окажется допустимой структурированной последовательностью. Ниже формулируется и доказывается достаточное условие чистой дискретности спектра подстановочной динамической системы, ранее приводившееся в [3] и доказанное там для адического преобразования. В доказательстве, приводимом здесь, используется формализм структурированных последовательностей.

Пусть $\omega_{\mathcal{A}}$ — примитивная подстановка. Символы u, $v \in Z_*$ называются эквивалентными, если при каждом $m > 0$ $|\omega_{\mathcal{A}}^m(u)| = |\omega_{\mathcal{A}}^m(v)|$. Тем самым, алфавит Z_* разбит на классы эквивалентных символов. Пусть C — один из таких классов. Множество таких допустимых блоков вида $x_1, \ldots, x_l$, что x_1, $x_l \in C$ и $x_2, \ldots x_{l-1} \notin C$, конечно. Это

следует, например, из компактности $X^s_{\mathcal{A}}$ и минимальности $T^s_{\mathcal{A}}$. Будем называть такие блоки C–блоками.

Если два слова одинаковой длины в алфавите Z_* : $A = a_1 \dots a_k$ и $B = b_1 \dots b_k$ таковы, что существует такая перестановка π множества $\{1, \dots k\}$, что символы a_i и $b_{\pi(i)}$ эквивалентны при каждом $i \in \{1, \dots, k\}$, то эти слова будут называться словами эквивалентной номенклатуры.

Пара слов $(E, D) = (E(F), D(F))$ будет называться C-первичной парой базовых слов, если $E = x_1 \dots x_{l-1}$, $D = x_2, \dots, x_l$, где $x_1, \dots, x_l$ — C-блок F. Множество C-первичных пар базовых слов будет обозначаться через Δ_C.

Теорема 1. Предположим, что в алфавите Z_* выделено множество Δ пар слов эквивалентной номенклатуры, причем для любой пары $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta_C$ (при некотором фиксированном C) существует такое натуральное $N_{X,Y}$, что для некоторых $X_1, \dots, X_s$, $Y_1, \dots, Y_s$ имеет место $\omega^{N_{X,Y}}_{\mathcal{A}}(X) = X_1 \dots X_s$, $\omega^{N_{X,Y}}_{\mathcal{A}}(Y) = Y_1 \dots Y_s$ и при каждом $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ пара $(X_i, Y_i) \in \Delta \cup \Delta_C$ и хотя бы для одного i $X_i = Y_i$. Тогда спектр автоморфизма $T^s_{\mathcal{A}}$ чисто дискретен.

Доказательство. Прежде всего, легко видеть, что набор слов Δ может быть изменен таким образом, чтобы условие теоремы выполнялось с некоторой постоянной функцией пары $N_{X,Y}$. Пусть $N = \max_{(X,Y)\in\Delta\cup\Delta_C} N_{X,Y}$, где $N_{X,Y}$ — исходная функция. Рассмотрим множество пар слов эквивалентной номенклатуры

$$\Delta' = \cup_{(X,Y)\in\Delta\cup\Delta_C}\{(\omega^k_{\mathcal{A}}(X), \omega^k_{\mathcal{A}}(Y)) | k = 1, \dots, N_{(X,Y)}\}.$$

Теперь можно считать, что $N_{X,Y} \equiv N$, если в качестве нового Δ взять $\Delta \cup \Delta'$. В самом деле, для набора $\Delta \cup \Delta'$ можно доказать по индукции, что при любом $m \geqslant 0$ если $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta'$, то $\omega^m_{\mathcal{A}}(X) = X'_1 \dots X'_{s'}$, $\omega^m_{\mathcal{A}}(Y) = Y'_1 \dots Y'_{s'}$, где при любом $i \in [1, s']$, $(X'_i, Y'_i) \in \Delta \cup \Delta'$. По индукции можно доказать, (учитывая, что пара (X_i, Y_i) с $X_i = Y_i$ из формулировки теоремы лежит в Δ), что если $m \geqslant N_{X,Y}$, где $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta_C$ и рассматривается старое значение $N_{X,Y}$, то для одного из i имеем $X'_i = Y'_i$, откуда вытекает требуемое.

Будет использовано достаточное условие дискретности спектра оператора, соответствующего динамической системе [4], [5], из которого следует, что если для сохраняющего меру автоморфизма $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ существуют такая последовательность разбиений $\xi_m \nearrow \varepsilon$ (ε — разбиение на точки $\mod 0$) и такая рекуррентная последовательность натуральных чисел $q_n \to \infty$, что для любого k и для любого

элемента C' разбиения ξ_k имеет место $\Sigma_{l^\mu}(T^{ql}C' \cap C') < \infty$, то спектр оператора U_T дискретен.

Для проверки выполнения этого условия в качестве ξ_m возьмем разбиение $X^S_{\mathcal{A}}$ на множества следующего вида:

$$C' \in \xi_m \Leftrightarrow (\exists a \in Z_*, q : 0 \leqslant q \leqslant |\omega^m_{\mathcal{A}}(a)| - 1 : C' = \{\{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\} \mid i^m_{0,x} = a, n^m_{0,x} = q\}.$$

Зафиксируем какую либо точку x^s пространства $X^s_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим для $m' > m$ введенную выше допустимую структурированную последовательность $x^s_{m'}$, $x^s_{m'} = \{\{S^{m'+l}_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^{l,m'}_{r,x}\}\}^\infty_{l=0}\}$ и ее траекторию $\{(T^s_{\mathcal{A}})^v x^s_{m'}\}^\infty_{v=-\infty}$. Обозначим при каждом $v (T^s_{\mathcal{A}})^v x^s_{m'}$ через $\{\{S^l_{x(v,m')}\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x(v,m')}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\}$ и рассмотрим последовательность $\{u_v\}^\infty_{v=-\infty} : u_v = i^0_{0,x(v,m)}$. Пусть подпоследовательность $\{u_{v_k}\}^\infty_{k=-\infty}$ есть перечень всех вхождений в нашу последовательность символов класса C. Зафиксировав $b \in C$, выберем в качестве q_l последовательность $|\omega^l_{\mathcal{A}}(b)|$ (не зависящую от выбора b). Рассмотрим теперь траекторию точки $x^s_{\mathcal{A}}$ под действием $T^s_{\mathcal{A}}$, связанную с траекторией $x^s_{m'}$, так же, как связаны траектории интегрального автоморфизма (см. §2) и базового. По эргодической теореме имеем $\mu((T^s_{\mathcal{A}})^{q_l} C' \cup C' = Fr((T^s_{\mathcal{A}})^t x^s \in C' \& (T^s_{\mathcal{A}})^{t+q_l} x^s \in C') = FrB_{l,C'}$. Изучим $B_{m',C'}$, для чего рассмотрим все пары слов $(X_k, Y_k) = (u_{v_k} \dots u_{v_{k+1}-1}, u_{v_{k+1}} \dots u_{v_{k+1}}) \in \Delta_C$. Пусть $\omega^{m'-m}_{\mathcal{A}}(X_k) = f^{m',k}_1 \dots f^{m',k}_{\phi_k}, \omega^{m'-m}_{\mathcal{A}}(Y_k) = g^{m',k}_1 \dots g^{m',k}_{\phi_k}$. Ясно, что v является функцией от t, как для интегрального автоморфизма, если считать траектории связанными соответствующим образом. Если же наряду с этими двумя траекториями рассматривать траекторию x^s_m под действием $T^s_{\mathcal{A}}$, то и ее время v' можно считать локально постоянной функцией от t. Событие $B_{m',C'}$ наступает при таких t, при которых для некоторого k имеем: $v_k \leqslant v(v'(t)) < v_{k+1} \cdot v'(t)$ таково, что $i^m_{0,T^t_{\mathcal{A}}x} = f^{m',k}_d = a = g^{m',k}_d$, $1 \leqslant d \leqslant \phi_k$ и $n^m_{0,T^t_{\mathcal{A}}x^s} = q$. Теперь мера $B_{m',C'}$ может быть подсчитана. Пусть $\{\Gamma_i\}^R_{i=1}$ перечень всех C-блоков. С каждым C-блоком Γ свяжем три величины: $\mu_\Gamma = \mu\{x^s = \{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^\infty_{r=-\infty}\}^\infty_{l=0}\} : n^0_{0,x} = 0, i^0_{0x} \dots i^0_{|\Gamma|-1}, x = \Gamma\}$ и, обозначая через $f^{\Gamma,m'}_1 \dots f^{\Gamma,m'}_{\phi_{\Gamma,m'}}$ и $g^{\Gamma,m'}_1 \dots g^{\Gamma,m'}_{\phi_{\Gamma,m'}}$, соответственно, слова $\omega^{m'-m}_{\mathcal{A}}(E(\Gamma))$ и $\omega^{m'-m}_{\mathcal{A}}(D(\Gamma))$ (где (E, D) — C-первичная пара базовых слов) $H^{C',m'}_\Gamma = \#\{i | 1 \leqslant i \leqslant \phi_{\Gamma,m'}, f^{\Gamma,m'}_i = a\}$, а также $L^{C',m'}_\Gamma = \#\{i | 1 \leqslant i \leqslant \phi_{\Gamma,m'}, f^{\Gamma,m'}_i = g^{\Gamma,m'}_i = a\}$. Сопоставляя наши три

траектории и вычисляя частоты, получим

$$\mu C' = \frac{\Sigma_\Gamma \mu_\Gamma H_\Gamma^{C',m'}}{\Sigma_\Gamma \mu_\Gamma |\omega_{\mathcal{A}}^{m'} E(\Gamma)|}, \quad \mu B_{m',C'} = \frac{\Sigma_\Gamma \mu_\Gamma L_\Gamma^{C',m'}}{\Sigma_\Gamma \mu_\Gamma |\omega_{\mathcal{A}}^{m'} E(\Gamma)|}.$$

Заметим, что в первом выражении левая часть не зависит от m', во втором – зависит.

Вследствие постоянства $N_{X,Y}$ мы с легкостью выводим из условия теоремы, что $\frac{H_\Gamma^{C',m'}}{L_\Gamma^{C',m'}} = 1 + o(1)$, причем убывание остаточного члена — экспоненциальное, а отсюда видно, что экспоненциально убывает и разность $\mu C' - \mu B_{m',C'}$. Теорема доказана.

§2. Интегральные автоморфизмы над подстановочными и стационарными адическими динамическими системами

Приведем определение марковского компакта (см. [2]). Пусть r_1, $r_2, \dots$ последовательность натуральных чисел, $r_i \geqslant 1$, $1 < i < \infty$, D_1, $D_2, \dots$ – последовательность конечных множеств: $D_i = \{d_j^i\}_{j=1}^{r_i}$. Пусть, далее, M_1, $M_2, \dots$ – последовательность матриц, элементы которых суть нули или единицы. Можно использовать два способа обозначения элементов матрицы

$$M_i = (m_{uv}^i)_{u \in D_i, v \in D_{i+1}}; m_{uv}^i = M_i(u, v).$$

Марковским компактом называется пространство Y таких последовательностей $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \in D_i$, $1 \leqslant i < \infty$, что $m_{x_i x_{i+1}}^i$ при всех i, снабжённое слабой топологией. Элементы Y называются иначе путями. Введём две функции L, $B : \bigcup_{i=2}^{\infty} D_i \to \{1, \dots\}$, определяемые следующим образом: если $x \in D_i$, то $L(x)$ это число (предполагается, всегда положительное) таких $u \in D_{i-1}$, что $m_{ux}^{i-1} = 1$, а $B(x)$ это число таких последовательностей $x_1, \dots, x_i$, что $m_{x_j x_j+1}^j = 1$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$ и $x_i = x$. Множество таких последовательностей обозначим через $E(x)$, то есть $B(x) = \#E(x)$. Для каждой последовательности $x_1, \dots, x_i$, $x_l \in D_l$, $1 \leqslant l \leqslant i$, обозначим через $C(\{x_1, \dots, x_l\})$ множество $\{x \in Y | x = \{x_1', x_2', \dots\}$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2, \dots, x_l' = x_l\}$. Если $D_1 = D$, $M_1 = M$ и выполнено условие

St) существуют такие биекции $\pi_s : D \to D_s$, $s = 1 \dots \infty$, что если для некоторых $u_1 \in D_{s_1}$, $v_1 \in D_{s_1+1}$, $u_2 \in D_{s_2}$, $v_2 \in D_{s_2+1}$ существуют такие u, $v \in D$, что $\pi_{s_1}(u) = u_1$, $\pi_{s_1+1}(u) = v_1$, $\pi_{s_2}(u) = u_2$, $\pi_{s_2+1}(u) =$

v_2, то $M_{s_1}(u_1, v_1) = M_{s_2}(u_2, v_2)$,
то марковский компакт Y называется стационарным и обозначается $Y_{D,M}$, поскольку на деле только от этих параметров и зависит.

Если множества D_i вполне упорядочены (упорядочения $\prec_i$ естественным образом согласованы с биекциями π_s), то имеется естественное частичное упорядочение $\prec$ на $Y : \{x_1, x_2 \dots\} \prec \{y_1, y_2, \dots\}$, если для некоторого I $x_I \underset{I}{\prec} y_I$ и $x_i = y_i$ при $i > 1$. Пусть $K_1(Y, \prec)$ — множество максимальных элементов Y, $K_2(Y, \prec)$ — множество минимальных элементов.

Определим теперь адическое преобразование U, связанное с Y (понятие преобразование в общем случае несколько условно, потому что U не всюду определено). По определению нашего упорядочения очевидно, что если $x \in Y \setminus K_1$, то существует и единственно такое $y \succ x$, что если $z \succ y$, то $z \succeq y$ для всякого $z \in Y$. Положим $Ux = y$. Подобным же образом определяется U^{-1} на $Y \setminus K_2$. При наших предположениях очевидно, что $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Сужения отображений U и U^{-1} на множество $Y' = Y \setminus \big(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} U^{-i} K_1 \bigcup \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} U^i K_2 \big)$ являются взаимнооднозначными преобразованиями этого множества — гомеоморфизмами в его относительной топологии.

Между некоторыми классами подстановочных и стационарных адических преобразований имеются канонические взаимно-однозначные соответствия ([1], [2]), позволяющие, сообразно ситуации, выбирать более удобный язык. Соответствия для нестационарного случая изучаются в [6].

Рассмотрим стационарное адическое преобразование U, действующее в марковском компакте $Y_{(D,M)}$. Пусть $f : Y_{(D,M)} \to Z_+$ — непрерывная функция. Пусть $V = V(Y_{(D,M)}, f)$ естественным образом топологизированное пространство пар (y, m), $1 \leqslant m \leqslant f(y)$ и U_f — преобразование, действующее в V следующим образом: если $m < f(y)$, то $U_f((y, m)) = (y, m + 1)$, если $m = f(y)$ и в точке y определено U, то $U_f((y, m)) = (U(y), 1)$. Мы предполагаем, как и ранее, что матрица M примитивна и, следовательно, преобразование U строго эргодично (всюду плотность траекторий и полутраекторий и единственность борелевской инвариантной нормированной меры). С точки зрения эргодической теории преобразование U_f является интегральным автоморфизмом, построенным по автоморфизму U и функции f [7]. Сформулируем несколько простых (или известных для более общих случаев) утверждений.

1) U_f строго эргодично.

2) Если μ_f — инвариантная мера U_f, A — измеримое множество в $Y_{(D,M)}$, и μ — центральная мера в $Y_{(D,M)}$, то $\mu_f(\{x,1), x \in A\}\} = \mu(A)\big(\int\limits_{Y(D,M)} f d\mu\big)^{-1}$.

3) Существуют: функция $\phi : D \to Z_+$, функция $f' = f_\phi, f'(\{y_1, \dots\}) = \phi(y_1)$ и биективное отображение (гомеоморфизм) $Q : V(Y_{(D,M)}, f) \to V(Y_{(D,M)}, f')$, для которых $U_{f'} \circ Q : Q \circ U_f$ всюду, где это равенство имеет смысл.

Объясним, почему имеет место утверждение 3. Пусть $m = \sup f$. Тогда существует набор таких конечных последовательностей $G_{i,k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant b_m > 0$, $G_{ik} = \{x_l^{i,k}\}_{l=1}^{s(i,k)}$, что $M(x_l^{i,k}, x_{l+1}^{i,k}) = 1$, если $1 \leqslant l < s(i,k)$ и $f^{-1}(\{i\}) = \cup_k C(G_{i,k})$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $S \geqslant \max_{i,k} s(i,k) + 1$. Можно считать, что $C(G_{i_1,k_1}) \cap C(G_{i_2,k_2}) \neq \emptyset \Leftrightarrow (i_1 = i_2)\&(k_1 = k_2)$. Для всякой последовательности $F = \{x_l\}_{l=1}^S$, допустимой в вышеописанном смысле, существует и единственна такая пара (i,k), что $\{x_l\}_{l=1}^{s(i,k)} = G_{ik}$ или $C(F) \subset C(G_{ik})$. Рассмотрим пространство состояний $D_S = D$. Пусть $d \in D_S$. Определим $f'(d)$ как $\Sigma_{F \in E(d)} i(F)$, где для каждого $FC(F) \subset C(G_{i(F),k})$. Если теперь $(y,m) \in V(Y_{(D,M)}, f)$, $y = \{y_i\}_{i=1}^\infty$, то положим $Q(y,m) = (\{y_{S+i-1}\}_{i=1}^\infty, m')$, где $m' = \Sigma_{G \in E(ys), G \prec \{y_i\}_{i=1}^S} i(G) + m$, где $\prec$ — естественное упорядочение на множестве $E(ys)$. То, что отображение Q удовлетворяет требованиям утверждения 3, вытекает с очевидностью из определения U. Если $f \equiv 1$, то U_f изоморфно U с тождественным Q. Если $\pi : D_1 \to D_s$ — биекция из условия St, а $\phi(d) = B(\pi_s d)$, то U_{f_ϕ} изоморфно U, ибо, как видно из построения, Q, $U_{f'}$ изоморфно U_{f_ϕ}, где $f \equiv 1$.

В дальнейших рассмотрениях мы будем использовать только функции вида f_ϕ. Вопрос о слабом перемешивании наших интегральных автоморфизмов изучался в [8].

Условие чистой дискретности спектра для этого случая тоже может быть сформулировано (на сей раз в терминах подстановок). Если $T_{\mathcal{A}}^s : X_{\mathcal{A}}^s \to X_{\mathcal{A}}^s$ — подстановочная динамическая система, то для любой непрерывной функции $f : X_{\mathcal{A}}^s \to Z_+$ может быть построен интегральный автоморфизм $T^s\mathcal{A}$, $f : V \to V$, где $V = V(X_{\mathcal{A}}^s, f)$ определяется совершенно аналогично $V(Y_{(D,M)}, f)$. Если Z_* — алфавит подстановки $\omega_{\mathcal{A}}$, то произвольной функции $\phi : Z_* \to Z_+$ соответствует функция $f_\phi : X_{\mathcal{A}}^s \to Z_+$, $f_\phi(x^s) = \phi(i_{0,x}^0)$, где $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^\infty, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\}$, $S_x^l = \{i_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty$. По аналогии со случаем адического преобразования и здесь легко видеть, что $T_{\mathcal{A},f}^s$ строго эргодично, что меры множеств в V вычисляются с помощью формулы

утверждения 2, и что для широкого класса подстановок существуют такие функция $\phi : Z_* \to Z_+ (\phi = \phi(f))$ и гомеоморфизм $Q : X^s_{\mathcal{A}} \to X^s_{\mathcal{A}}$, что $T^s\mathcal{A}$, $f_\phi \circ Q = Q \circ T^s_{\mathcal{A},f}$. Если $a_1 \dots a_r$ — слово в Z_*, то обозначим через $\phi(a_1 \dots a_r)$ число $\Sigma_{i=1}^r \phi(a_i)$.

Предложение. Допустим, что выполнены условия теоремы 1 о достаточности условия дискретности спектра. Допустим, далее, что $\phi : Z_* \to Z_+$ такова, что если допустимые слова в Z_* v_1 и v_2 имеют эквивалентную номенклатуру, то $\phi(v1) = \phi(v_2)$. Тогда автоморфизм $T^s_{\mathcal{A},f_\phi}$ имеет чисто дискретный спектр.

Доказывается предложение вполне аналогично теореме 1. Анализируя доказательство теоремы 1, мы видим, что достаточно получить следующее: если пара слов $(E, D) \in \Delta_c$, то при каждом $m \in Z_+$ имеем $\omega^m_{\mathcal{A}}(E) = v_0^m u_1^m v_1^m \dots u_{s(m)}^m v_{s(m)}^m$, $\omega^m_{\mathcal{A}}(D) = v_0^m u_1^{'m} v_1^m \dots u_{s(m)}^{'m} v_{s(m)}^m$, где пары $(u_i^m, u_i^{'m}) \in \Delta \cup \Delta_c, \phi(u_i^m) = \phi(u_i^{'m})1 \leqslant i \leqslant s(m)$ и $\frac{\Sigma_i \phi(u_i^m)}{\phi(\omega^m_{\mathcal{A}}(E))} < Kr^m$, $0 < r < 1$, $K > 0$ – константы. Но это видно из условия предложения и доказательства теоремы 1, в котором получены такие представления с оценкой для $\frac{\Sigma_i |(u_i^m)|}{|(\omega^m_{\mathcal{A}}(E))|} < Kr^m$.

Спектральная теория интегральных автоморфизмов над подстановочными динамическими может быть применена к изучению спектров самих подстановочных динамических систем. Можно заметить, что в доказательстве достаточности условия чистой дискретности спектра использовалась рекуррентная последовательность, которая в общем случае не обязана быть ни хорошей (определение в [3], см. также [1]), ни линейной комбинацией хороших. Поэтому при проверке выполнения этого условия можно «упустить» подстановку с дискретным спектром. Простейший пример — циклическая подстановка. $A = (12341, 234, 12, 34)$. Можно все же сделать так, чтобы последовательность оказалась хорошей. Существуют такие символ $a \in Z_*$ и натуральное p, что $\omega^p_{\mathcal{A}}(a) = a \dots$. Обозначим через Z_{**} множество таких допустимых слов $a_1 \dots a_k$, что $a_1 = a$, слово $a_1 \dots a_k a$ — допустимо и $a_i \neq a$, $1 < i \leqslant k$. Определим функцию $\phi : Z_{**} \to Z_+$, $\phi(A) = |A| = k$. Определим набор слов $\mathcal{A}_a = \{B_i\}_{i=1}^{\#Z_{**}}$, где $B_i = A^i \dots A^i_{s(i)}$, если $\omega^p_{\mathcal{A}}(A_i) = A^i_1 \dots A^i_{s(i)}$ — соединение слов из $Z_{*}*$. Ясно, что подстановка $\omega_{\mathcal{A}_a}$ — примитивна.

Учитывая отношение эквивалентности на Z_*, используемое в достаточном условии дискретности спектра, введем отношение эквивалентности на $(Z_{**})^*$: элементы $(Z_{**})^*$ $B_1, B_2, B_1 = A^1_1 \dots A^1_{l(1)}$, $B_2 = A^2_1 \dots A^2_{l(2)}$ будут называться словами эквивалентной номен-

клатуры, если допустимые слова — конкатенации в Z_* $A_1^1 \dots A_{l(1)}^1$, $A_1^2 \dots A_{l(2)}^2$ имеют эквивалентную номенклатуру (имеется в виду эквивалентность слов, фигурирующая в формулировке теоремы 1) в смысле старого определения. Заметим теперь, что динамическая система $T_{\mathcal{A}}^s$ метрически изоморфна системе $T_{\mathcal{A}_a, f_\phi}^s$, что под эквивалентностью в достаточном условии дискретности спектра можно подразумевать ту, которая только что, и что последнее предложение применимо, поскольку функция ϕ удовлетворяет его условию. Для нашей циклической подстановки можно взять $p = 1$, $a = 1$. Имеем: $Z_{**} = \{A\}$, $A = 1234$, $\mathcal{A}_a = \{AAA\}$, $\phi(A) = 4$. Можно привести пример нециклической подстановки с непостоянной длиной слова: $\mathcal{A} = \{12, 31, 2423, 242\}$. Легко проверить, что ни одна из последовательностей вида $|\omega_{\mathcal{A}}^m(b)|$, $b \in Z_*$, не является хорошей или линейной комбинацией таковых. Берем $p = 2$, $a = 2$. Имеем $Z_{**} = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha = 24$, $\beta = 231$, $\mathcal{A}_a = \{\alpha\beta\beta\alpha\beta, \alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\beta\beta\}$. Выполненность условий предложения легко проверяется.

§3. Топологическое перемешивание и оценки эксцесса

Пусть $T : X \to X$ — гомеоморфизм топологического пространства X. Динамическая система, порождаемая этим гомеоморфизмом, называется топологически перемешивающей, если для любых двух открытых множеств U и V найдется n, такое что если $N > n$, то $t^N U \cap V \neq \varnothing$.

В [9], [10], [11] изучался вопрос о топологическом перемешивании для подстановочных динамических систем. Мы будем рассматривать подстановочные динамические системы над алфавитом из двух символов $Z_* = \{1, 2\}$. Будут выделяться динамические системы, обладающие следующими свойствами.

Свойство 1. При любом n $|\omega_{\mathcal{A}}^n(1)|$ и $|\omega_{\mathcal{A}}^n(2)|$ взаимно-просты.

Свойство 2. Пусть μ_1 — мера цилиндрического множества $\tilde{1}$ для подстановочной динамической системы. Обозначим через $v(n)$ число $\max\{|A|_1 - \mu_1 n| \, |A| = n$ и A — допустимо$\}$, через $u(n)$ — $\max\{\mu_1 n - |A|_1 | |A| = n$ и A — допустимо$\}$. Тогда $v(n) \to \infty$ и $u(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Свойство 3. Существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(1) = E_1 a_1 D_1 b_1$, $\omega_{\mathcal{A}}^k(2) = E_2 a_2 D_2 b_2$, где a_i, $b_i \in Z_*$, $|D_1 b_1| = |D_2 b_2|$, $|D_2 b_2|_1 = |D_2 b_2|_1$, и либо $a_1 = a_2$, либо $a_1 = b_2 \& a_2 = b_1$.

Замечание. Вместо равенств $|D_1b_1| = |D_2b_2|$, $|D_2b_2|_1 = |D_2b_2|_1$ можно требовать их аналогов для начал слов. Величину $|A|_1 - \mu_1|A|$, упоминаемую в формулировке свойства 2, принято называть эксцессом слова A.

Теорема 2. Если подстановочная динамическая система обладает свойствами 1), 2), 3)*, то она топологически перемешивает.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого M > 0 существует такое натуральное N_M, что при любом $n > N_M$ найдется такое допустимое слово $a_1^{n,M} \dots a_{n+|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M}$, что $a_1^{n,M} \dots a_{|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M} = a_{n+1}^{n,M} \dots a_{n+|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M} = \omega_{\mathcal{A}}^M(2)$. Ясно, что в последней формулировке можно всюду заменить $\omega_{\mathcal{A}}^M(2)$ на $\omega_{\mathcal{A}}^M(1)$, а также требовать, чтобы при любом $n > N^M$ выполнялось либо одно, либо другое.

Если $a_1 = a_2$, то достаточно показать, что найдется такое N'_M, что для всякого $n > N'_M$ существует такое допустимое слово U_n^M, что $|\omega_{\mathcal{A}}^{k+M}(U_n^M)| = n$. Действительно в этом случае для некоторого символа $c^* \in Z_*$ слово c^*U_n и, значит, слово $\omega_{\mathcal{A}}^k(c^*U_n^M)$ будет допустимым. Ясно, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(U_n^M) = Ra_xD_xb_x$ и $\omega_{\mathcal{A}}^k(c^*) = E_ya_yD_yb_y$. Очевидно, что можно взять N'_M в качестве N_M и слово $\omega_{\mathcal{A}}^M(a_yD_yb_yRa_x)$ в качестве V_n^M.

Существование N'_M доказывается (по аналогии с [10]) следующим образом. От слова U_n^M требуется, чтобы

$$|U_n^M|_1|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + |U_n^M|_2|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| = n.$$

По свойству 1) существуют такие целые $X, Y(X_n^M, Y_n^M)$, что $|X| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|$, $|Y| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)|$ и $X|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + Y|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| = 1$. Для произвольного n рассмотрим числа

$$\alpha_n^M = \left[\frac{\mu_1 n}{\mu_1|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + (1-\mu_1)|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|}\right]$$

и

$$\beta_n^M = \left[\frac{(1-\mu_1) n}{\mu_1|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + (1-\mu_1)|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|}\right]$$

Имеем $\alpha_n^M|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + \beta_n^M|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| - n = R_n^M$, где $|R_n^M| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|$. Но по свойству 2 ясно, что при достаточно больших n существуют допустимые слова U_n^M с $|U_n^M|_1 = \alpha_n^M - XR_n^M$, $|U_n^M|_2 = \beta_n^M - YR_n^M$, чем и доказана теорема для случая $a_1 = a_2$. Заметим, что

свойство 2 в полном объеме не нужно. Достаточно требование лишь в одной из последовательностей $u(n)$, $v(n)$ – легко изменить соответствующим образом выбор α_n^M, β_n^M.

Прежде чем рассматривать второй случай, сделаем одно тривиальное замечание. Поскольку все допустимые последовательности для нашей подстановки апериодичны (это следует, например, из свойства 2), имеет место следующее. Если существует допустимое слово U с $|U| = s$, $|U|_1 = t$, то существует допустимое слово вида $cVf, e, f \in Z_*$, $e \neq f$, $|Vf| = s$, $|Vf|_1 = t$.

Существование N'_M для этого случая доказывается так же как и для предыдущего. По нашему замечанию можно считать, что для некоторых γ, $\delta \in Z_*$ слово $\gamma\Omega\delta$ — допустимо $U_n^M = \Omega\delta$, $\gamma \neq \delta$. В этом случае имеем: $\omega_{\mathcal{A}}^k(\gamma\Omega\delta) = E_\gamma a_\gamma D_\gamma b_\gamma \omega_{\mathcal{A}}^k(\Omega) E_\delta a_\delta D_\delta b_\delta$, $a_\gamma = b_\delta$, так что $|\omega_{\mathcal{A}}^M(D_\gamma b_\gamma \omega_{\mathcal{A}}^k(\Omega) E_\delta a_\delta D_\delta b_\delta)| = n + |\omega_{\mathcal{A}}^M(D_\gamma b_\gamma)|$ и мы видим, что можно взять $N'_M + |\omega_{\mathcal{A}}^M(D_\gamma b_\gamma)|$ в качестве N_M. Теорема доказана.

Примеры. $\mathcal{A} = \{112, 12222\}$ [11], $\mathcal{A} = \{112, 22221\}$. Можно рассмотреть случай $\mathcal{A} = \{121, 22212\}$, не подпадающий под формулировку теоремы. Подстановка не обладает свойством 3). Это доказывается по индукции следующим образом. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при $n = k$. Имеем $\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(1) = \omega_{\mathcal{A}}^k(1)\omega_{\mathcal{A}}^k(21)$, $\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(2) = \omega_{\mathcal{A}}^k(2)\omega_{\mathcal{A}}^k(2)\omega_{\mathcal{A}}^k(2)\omega_{\mathcal{A}}^k(12)$. Ясно, что задача сведется к случаю $n = k$, если мы докажем, что для любого k:

1) если существует такая четверка непустых слов $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, D$, что $|A| = |C|$, $|A|_1 = |C|_1$, $AB = \omega_{\mathcal{A}}^k(12)$, $CD = \omega_{\mathcal{A}}^k(21)$, то существует такой набор целых чисел $0 \leqslant r_1 < r_2 \ldots < r_{k-1}$, что $B = \omega_{\mathcal{A}}^{r_1}(12) \ldots \omega_{\mathcal{A}}^{r_{k-1}}(12)$, $D = \omega_{\mathcal{A}}^{r_1}(21) \ldots \omega_{\mathcal{A}}^{r_{k-1}}(21)$, $A = \ldots 2$, $C = \ldots 1$,

2) если $\omega_{\mathcal{A}}^k(12) = a_1 \ldots a_s$, $\omega_{\mathcal{A}}^k(21) = b_1 \ldots b_s$, то для любого i, $0 \leqslant i \leqslant s$, $|a_1 \ldots a_i|_2 \leqslant |b_1 \ldots b_i|_2$.

Доказываться это вспомогательное утверждение будет тоже по индукции. Допустим, что $|b_1 \ldots b_i|_2 - |a_1 \ldots a_i|_2 = l_i$. Тогда существуют такие слова U_i, V_i, W_i, что $\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \ldots a_i) = U_i$, $\omega_{\mathcal{A}}(b_1 \ldots b_i) = V_i W_i$, $|U_i| = |V_i|$. Ясно, что $|W_i| = 2l_i$, $|V_i| - |U_i| = l_i + |W_i|_1$. Если $l_i = 0$, то для подслов U_i, V_i слов $\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(12)$, $\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(21)$ доказываемые утверждения верны, кроме того, $a_{i+1} = 1$, $b_{i+1} = 2$. Тогда для пар слов $(\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \ldots a_i)1, \omega_{\mathcal{A}}(b_1 \ldots b_i)2)$, $(\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \ldots a_i)12, \omega_{\mathcal{A}}(b_1 \ldots b_i)22)$ они также верны. Если $l_i \geqslant 1$, то ясно, что $|V_i| - |U_i| \geqslant 2$ и для любых возможных значений a_{i+1} и любых четверок таких непустых слов R_1, S_1, R_2, S_2, что $R_1 S_1 = \omega_{\mathcal{A}}(a_{i+1})$, $V_i R_2 S_2 = \omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(21)$, $|R_1| = |R_2|$ имеет место $|\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \ldots a_i) R_1|_2 \leqslant |V_i R_2|_2$, причем равенство возможно в единствен-

ном случае $l_i = 1$, $a_{i+1} = b_i = 2$, $b_{i+1} = 1$. Но тогда $|a_1 \dots a_{i+1}|_2 = |b_1 \dots b_{i+1}|_2$ и $U_i R_1 12 = \omega_{\mathcal{A}}(a_1 \dots a_{i+1})$, $V_i R_2 21 = \omega_{\mathcal{A}}(b_1 \dots b_{i+1})$, то есть для этого случая наше утверждение тоже верно. Поскольку все возможные варианты рассмотрены, индукционный переход завершен. Заметим, что таким же способом можно убедиться в том, что не имеет место аналог свойства 3) для начал слов $\omega^n_{\mathcal{A}}(1), \omega^n_{\mathcal{A}}(2)$.

Здесь, тем не менее, тоже имеет место топологическое перемешивание. Пусть $C = 12$. В этом случае имеем $\omega_{\mathcal{A}}(C) = CC22C$, $\omega_{\mathcal{A}}(2) = 222C$. Обозначим $Z^C = \{2, C\}$, $\mathcal{A} = \{222C, CC22C\}$. Достаточно доказать, что для любого M найдётся такое N_M, что для любого $n > N_M$ найдётся такое допустимое слово подстановки $\omega_{\mathcal{A}_C} U^M_n$, что $|U^M_n|_2 |\omega^M_{\mathcal{A}}(2)| + |U^M_n|_C |\omega^M_{\mathcal{A}}(12)| = n$. Из структуры допустимых слов $\omega_{\mathcal{A}}$ видно, что это точная переформулировка условия топологического перемешивания. Существование же N_M вытекает из взаимной простоты $|\omega^M_{\mathcal{A}}(2)|$ и $|\omega^M_{\mathcal{A}}(12)|$ и свойства 2 для подстановки $\omega_{\mathcal{A}^C}$.

Свойство 2 для всех наших примеров может быть доказано с помощью результатов [10]. В [10] показано, как получать подобные утверждения с помощью оценок и применения компьютера. Заметим, что рассуждения типа приведенных выше могут дать более простое доказательство результата [9] о топологическом перемешивании для $A = \{001, 11100\}$. В самом деле, по леммам 5 и 6 [9] существует такое $c > 0$, что если $0 < 2M - N < c \lg M$, то существует допустимое слово B с $|B|_0 = 2M$, $|B|_1 = N$. Но поскольку для $\omega_{\mathcal{A}}$ имеет место свойство 3 с $k = 2$, то достаточно доказать, что для любого l существует такое N_l, что уравнение $M|\omega^{l+2}_{\mathcal{A}}(00)| + N|\omega^{l+2}_{\mathcal{A}}(1)|$ с $n > N_l$ всегда имеет решение, для которого $0 < 2M - N < c \lg M$. А это вполне аналогично вышедоказанному.

Основой доказательства того, что подстановка обладает свойством 2, может служить следующий результат J. M. Dumont и A. Thomas [12].

Теорема. Пусть σ — подстановка с примитивной матрицей M, второе по величине собственное число которой $\theta_2 < \theta$ (где θ — собственное число Перрона–Фробениуса) — вещественное, превосходящее 1 и модуль остальных собственных чисел. Пусть θ_2 имеет порядок $\alpha + 1$ в минимальном многочлене матрицы M и $\beta = \log_2 \theta_2$. Тогда для произвольного отображения f алфавита σ в R, такого, что его значения образуют вектор, ортогональный собственному подпространству M, отвечающему θ, и любой неподвижной точки $\sigma\{u_i\}_{i \geqslant 1}$ существует такая вещественная функция $F_f \in C[1, +\infty]$,

что для всех $x \in [1, +\infty]$ $F_f(\theta x) = F_f(x)$ *и*

$$S^f(N) = \sum_{1 \le i \le N} f(u_i)$$
$$= (\log_\theta N)^\alpha N^\beta F_f(N) + o(\psi(N)), \quad \text{где} \quad \psi(N) = O((\log_\theta N)^\alpha N^\beta),$$

причем, если $F_f \not\equiv 0$, *то* F_f *нигде не дифференцируема. Функция* ψ *зависит от матрицы* M.

Сейчас будет доказана

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия теоремы и $F_f \not\equiv 0$. *Тогда существуют такие константы* $a > 0$, $b > 0$, $N_0 > 0$, *что если* $n > N_0$, *то* $\inf_N(S^f(N+n) - S^f(N)) < -a(\log_\theta n)^\alpha n^\beta < b(\log_\theta n)^\alpha n^\beta < \sup_N(S^f(N+n) - S^f(N))$.

Доказательство. Мы будем использовать следующий
Факт. Пусть на отрезке $[u, v]$ задана непрерывная функция $h(x)$. Тогда найдётся такое δ, что если $\Delta < \delta$, то существует такое $x = x(\Delta)$: $u < x < x + \delta < v$, что $\frac{h(x+\Delta)-h(x)}{\Delta} = \frac{h(v)-h(u)}{v-u}$. Факт очевиден (простейший случай $x \in (u, v) \to h(x) > 0 \& h(u) = h(v)$). Функция F_f не является константой, ибо нигде не дифференцируема. Не ограничивая общности, можно считать, что существуют такие x_1, $x_2 > 0$, что $F_f(x_1) < F_f(x_2)$ и $F_f > 0$ на $[x_1, x_2]$. Обозначим $\frac{F_f(x_2)-F_f(x_1)}{x_2-x_1}$ через ε_1 и, задавшись некоторым $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, обозначим $\varepsilon_1 - \varepsilon$ через ε_0. Применив факт к промежутку $[x_1, x_2]$ и функции F_f, получим $x(\Delta)$ для каждого Δ. Очевидно, кроме того, что существует такое ε_2, что если $\delta > \Delta > \frac{\delta}{\theta}$, то $[x(\Delta) - \varepsilon_2, x(\Delta) + \Delta + \varepsilon_2] \subset [u, v]$ и при $x \in [x(\Delta) - \varepsilon_2, x(\Delta) + \varepsilon_2]$ имеем $\frac{F_f(x_0+\Delta)-F_f(x_0)}{\Delta} > \varepsilon_0$. Если целое l настолько велико, что $\theta^l \varepsilon_2 > 1$, то для любого $n > \delta\theta^l$ найдутся такие натуральные $N'(n) = N'$ и l', что $\delta > \frac{n}{\theta^{l'}} > \frac{\delta}{\theta}$, $\frac{N'}{\theta^{l'}} \in \left[x\left(\frac{n}{\theta^{l'}}\right) - \varepsilon_2, x\left(\frac{n}{\theta^{l'}}\right) + \varepsilon_2\right]$, что влечёт $F_f(N'+n) - F_f(N') > \varepsilon_0 \frac{\delta}{\theta}$ (в силу свойств функции F_f). Заметим, что существуют такие c_1, c_2, что $N' \in (c_1 n, c_2 n)$ (можно взять $c_1 = \frac{x(\frac{n}{\theta^{l'}})-\varepsilon_2}{\delta}$, $c_2 = \frac{x(\frac{n}{\theta^{l'}})-\varepsilon_2}{\delta}$). Имеем

$$S^f(N'+n) - S^f(N') = (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta (F_f(N'+n) - F_f(N'))$$
$$+ F_f(N'+n)((\log_\theta(N'+n))^\alpha (N+n)'^\beta$$
$$- (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta + \omega, \tag{1}$$

где при достаточно больших n разность двух остаточных членов ω достаточно мала по модулю (ибо c_1, c_2 — фиксированы). Но второе слагаемое положительно и выражение (1) больше, чем $\frac{\varepsilon_0\delta}{\theta}(\log_\theta N')^\alpha N'^\beta)+\omega$. Стало быть, существование константы b доказано. Существование константы a менее очевидно. Ясно, что из соотношения (1) вытекает существование a, если для любых $0 < c < \sup_x F_f(x)$, $Q > 0$ существуют d, $y \in [1,\theta]$, $d < y$, $\frac{F_f(d)-F_f(y)}{y-d} > Q$, $\min(F_f(d), F_f(y)) > c$, и такие $\Delta : \frac{\delta}{\theta} < \Delta < \delta$ (где δ по Факту соответствует отрезку $[d,y]$), c_1, $c_2 > 0$ (которые, разумеется, велики, если велико Q), что если n достаточно велико, то существуют такие l', $N' \in (c_1 n, c_2 n)$, что $\frac{\Delta}{\theta} < \frac{n}{\theta^{l'}} < \Delta$, $F_f(N'+n) - F_f(N') > Q\frac{\Delta}{\theta}$ и ω в соотношении (1) мала сравнительно с $(\log_\theta N')^\alpha N'^\beta$. Но существование d, y (из которого следует все остальное, ибо можно считать, что $\min(c_1,c_2) > \frac{k}{\Delta}$, где k не зависит от Q, и $(\log_\theta(N'+n))^\alpha (N^+n)'\beta - (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta < (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta\big[\big(1+\frac{\Delta}{k}\big)^\beta\big(1+\frac{\log_\theta\left(1+\frac{\Delta}{k}\right)}{\log_\theta N'}\big)^\alpha - 1\big] < R\Delta(\log_\theta N')^\alpha N'^\beta$, где R тоже не зависит от Q) вытекает из полученного в [12] представления вещественных чисел в подстановочной системе счисления. Пусть $A = \{a\}_{a=1}^m$ — алфавит подстановки σ и $\{u_i\}_{i\geqslant 1} = \sigma^\infty(1)$. Тогда выберем собственный вектор-строку Перрона–Фробениуса матрицы $M\{\varepsilon(j)\}_{j=1}^m : \varepsilon(j) = \lim\limits_{k\to\infty} \theta^{-k}|\sigma^k(j)|$. Существуют такие $\lambda'(j) \in R$, $1 \leqslant j \leqslant m$, что если D — префикс $\sigma^k(1)$ и $x_D^k = \theta^{-k}\sum\limits_{j=1}^m \varepsilon(j)|D|_j$, то $\Phi(x_D^k) = x_D^\beta F_f(x_D^k) = \theta_2^{-k}\sum\limits_{j=1}^m \lambda'(j)|D|_j$.

Ясно, что существует такое k_0, такое l, и такие префиксы D_1, D_2 слова $\sigma^k(1)$, что $\theta^l([x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]) \subset (1,\theta)$. Поскольку при $\lambda'(j) \neq 0$, $\big|\frac{\lambda'(j)}{\varepsilon(j)}\big(\frac{\theta}{\theta_2}\big)^k\big|$ велико при больших k, а точки вида $x_{D'b}^k$ с фиксированным $b \in A$ при достаточно больших k образуют в $[x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]\varepsilon$ — сеть со сколь угодно малыми ε, нам достаточно убедиться в том, что среди λ_j есть отрицательные числа. Но это вытекает из ограниченности Φ на $[x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]$.

Литература

1. А. Н. Лившиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований.* Мат. заметки **44**, No. 6 (1988), 785–793.
2. A. M. Vershik and A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics.* Advances in Soviet Math. Repres. Theory

and Dynamical Systems **9** (1992), 185–204.
3. A. N. Livshits, *Some examples of adic transformations and substitutions*, Selecta Mathematics Sovietica **11** (1992), 83–104.
4. Б. М. Соломяк, *Об одной динамической системе с дискретным спектром*, Успехи мат. наук **41**, вып. 2 (1986), 209–210.
5. B. Solomyak, *On the spectral theory of adic transformation*, Advances of Soviet Mathematics **9** (1992), 217–230.
6. А. Н. Лившиц, *О построении марковских компактов*, Алгебра и анализ **3**, No. 1 (1991), 165–175.
7. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, *Эргодическая теория*. Наука, М., (1980).
8. A. N. Livshits, *On certain sequence of matrices*, POMI Preprint 2 (1994).
9. K. E. Petersen, L. Shapiro, *Induced Flows*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 375–389.
10. F. M. Dekking, M. Keane, *Mixing properties of substitutions*, ZFW **B.42, H.l** (1978), 23–33.
11. А. Н. Лившиц, *Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса, подстановок*, Препринт ПОМИ Р-10-91 (1991).
12. J. M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theoret. Comp. Sci. **65** no. 2 (1989), 153–169.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ И АСИМПТОТИКЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введение

В работе [1] изучались вопросы, связанные с нахождением предельных распределений для некоторых последовательностей сумм координатных случайных величин над строго эргодической системой, порожденной подстановкой Рудина–Шапиро. Целью данной заметки является доказательство неких общих фактов о слабой сходимости распределений, описывавшихся в [1], рассмотрение частных случаев методом, отличным от метода [1], и продолжение изучения общей задачи [1] о матрицах производящих функций случайных величин для получения более прямого описания предельных распределений. Предлагается также простой общий метод, дающий возможность получать оценки эксцесса (иногда достаточные для доказательства топологического перемешивания) для подстановочных динамических систем на основе результатов [2] об асимптотике сумм для неподвижных точек подстановок.

§ 1. Слабая сходимость подпоследовательностей распределений

Рассмотрим класс E последовательностей натуральных чисел

$$E = \left\{ \{n_k\}_{k=0}^{\infty};\ \ 0 \leqslant n_0 \leqslant 3;\ \ n_{k+1} = 4n_k + l_{k+1};\ \ 0 \leqslant l_{k+1} \leqslant 3 \right\}.$$

Пусть, подобно [1], для некоторой $\{n_k\} \in E$ определена последовательность $\{\mu_k\}$ мер на прямой, описывающих распределение значений

Записки научных семинаров ПОМИ, **216** (1994), 86–103

$\frac{S(n+n_k)-S(n)}{2^k}$; $0 \leqslant n < \infty$:

$$\mu_k\{x \leqslant d\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \#\Big\{ l : 0 \leqslant l \leqslant n, \ \frac{S(l+n_k)-S(l)}{2^k} \leqslant d\Big\},$$

где $-\infty < d < \infty$. Существование μ_k следует из (содержащейся, в частности, в [1]) интерпретации $S(n)$ в терминах подстановки Рудина–Шапиро. Ниже будет доказано простое

Предложение 1. Последовательность μ_k слабо сходится к предельной мере $\mu = \mu\big(\{n_k\}\big)$.

Доказательство. Очевидно, что для любых натуральных k и p существуют натуральные $R_{k,p} \leqslant 4^p$, такие что $n_{k+p} = R_{k,p} + 4^p n_k$. Из оценок [3] и свойств рекуррентности подстановочных динамических систем легко выводится (по аналогии с доказательствами линейной оценки сложности) существование константы $C > 0$, такой что при любых n, u и k, таких что $u < 4^{k+1}$, имеет место $\Big| \frac{S(n+u)-S(n)}{2^k} \Big| < C$. Пусть теперь на отрезке $[-C, C]$ задана некая непрерывная функция f с модулем непрерывности ω_f. Оценим разность $\mu_{k+p}(f) - \mu_k(f)$. Имеем по эргодической теореме

$$\mu_{k+p}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 4^p} \sum_{i=0}^{n\cdot 4^p-1} f\Big(\frac{S(i+n_{k+p})-S(i)}{2^{k+p}} \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 4^p} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{4^p-1} f\Big(\frac{S(j\cdot 4^p + R_{k,p} + q + n_k\cdot 4^p) - S(j\cdot 4^p + q)}{2^{k+p}} \Big).$$

Из определения C следует, что аргумент в последнем выражении имеет вид

$$t = \frac{S(j\cdot 4^p + n_k\cdot 4^p - 1 + 4^p) - S(j\cdot 4^p - 1 + 4^p)}{2^{k+p}} + \beta; \qquad |\beta| < \frac{2C}{2^k}.$$

Из свойств функции $S(n)$ ([3, Satz 3]) следует теперь, что

$$t = \beta + \frac{S(j+n_k) - S(i)}{2^k}$$

и, стало быть, $\big|\mu_{k+p}(f) - \mu_k(f)\big| < \omega_f\big(2C/2^k\big)$, откуда и вытекает наше утверждение.

Если каждой последовательности $\{n_k\} \in E$ сопоставить число $h(\{n_k\}) = \lim\limits_{k\to\infty} n_k/4^k$, то получим взаимно однозначное соответствие между E и $[0,4]$ и параметризацию предельных распределений числами из этого отрезка. Попробуем, используя этот параметр, получить непосредственное определение предельной меры, аналогично результатам о предельных распределениях из [1] не использующее меры μ_k.

В [4] введена функция $\lambda(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S([4^n x])}{\sqrt{x}\cdot 2^n}$, изучены ее аналитические свойства и получены некоторые результаты о распределении ее значений. Получено также выражение функции $\lambda(x)\sqrt{x}$ через представление x в четверичной системе счисления. Суммы и фрактальные функции, связанные с коэффициентами Рудина–Шапиро, изучались также и в иных работах. Мы будем пользоваться иным выражением этой функции через двоичное представление, полученным на основе формулы для $S(n)$ из [1]. Формула такова. Рассмотрим функцию $\sigma(c,b)$, определенную для целых $0 \leqslant c \leqslant b$:

$$\sigma(c,b) = \begin{cases} 2^{(b+2)/2}, & c \text{ — нечетно, } b \text{ — четно,} \\ 2^{(b+1)/2}, & c \text{ — нечетно, } b \text{ — нечетно,} \\ 2^{(b+2)/2} - 2^{c/2}, & c \text{ — четно, } b \text{ — четно,} \\ 2^{(b+1)/2} + 2^{c/2}, & c \text{ — четно, } b\text{—нечетно.} \end{cases} \tag{1}$$

Пусть двоичная запись n имеет вид

$$u_k \dots u_0 = 1\dots 10\dots 01\dots 10\dots 01\dots 1\dots ,$$

то есть серии единиц (в том числе единичной длины) суть $u_{b_i}\dots u_{c_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, причем $c_i \leqslant b_i < c_{i+1} - 1$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Определим числа $v_i = \sum\limits_{j=i}^{p} (b_j - c_j)$. Тогда

$$S(n) = (-1)^{v_1} + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{v_{i+1}}\, \sigma(c_i, b_i) + \sigma(c_p, b_p). \tag{2}$$

Для удобства в дальнейших выкладках введем нумерацию b_i, c_i в противоположном направлении. Итак, имеем $b'_i = b_{p+1-i}$, $c'_i = c_{p+1-i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$;

$$v'_i = \sum_{j=1}^{p+1-i} (b'_j - c'_j) \quad \text{и}$$

$$S(n) = \sigma(c'_1, b'_1) + \sum_{i=2}^{p} (-1)^{v'_{i-1}}\, \sigma(c'_i, b'_i) + (-1)^{v'_p}. \tag{3}$$

Распространим теперь функцию σ, пользуясь теми же формулами (1), на все пары целых чисел $c \leqslant b$ и допустим, что двоичная запись произвольного положительного вещественного числа x имеет вид

$$\underset{b'_1}{1}\ldots\underset{c'_1}{1}0\ldots0\underset{b'_k}{1}\ldots\underset{c'_k}{1}0\ldots.$$

В этом случае все v'_i определены и конечны, а

$$\sqrt{x}\,\lambda(x) = \sigma(c'_1, b'_1) + \sum_{i=2}^{p} (-1)^{v'_{i-1}}\,\sigma(c'_i, b'_i),$$

где $p \leqslant \infty$ — число серий из единиц. Это — очевидное следствие определения $\lambda(x)$. Обозначим $\sqrt{x}\,\lambda(x)$ через $\varphi(x)$. Предположим, что $x = n + \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < 1,\ n$ — натуральное. Найдем выражение для $\varphi(x) - S(n)$. Пусть $[c'_1, b'_1], \ldots, [c'_p, b'_p]$ — это серии для x, $p \leqslant \infty$, $[c''_1, b''_1]$, $\ldots, [c''_{p_0}, b''_{p_0}]$ – серии для n. Очевидно, что $b'_i = b''_i$, $1 \leqslant i \leqslant p_0$, $c'_i = c''_i$; $1 \leqslant i \leqslant p_0 - 1$; $c'_{p_0} \leqslant c''_{p_0}$. Имеем:

$$\varphi(x) - S(n) = \sum_{i=p_0+1}^{p} (-1)^{v'_{i-1}}\sigma(c'_i, b'_i) - (-1)^{v''_{p_0}} + \\ + (-1)^{v'_{p_0-1}}\,\sigma(c'_{p_0}, b'_{p_0}) - (-1)^{v''_{p_0-1}}\,\sigma(c''_{p_0}, b''_{p_0}).$$

Но $v'_{p_0-1} = v''_{p_0-1}$. Если $c'_{p_0} = c''_{p_0}$, то $\sigma(c'_{p_0}, b'_{p_0}) - \sigma(c''_{p_0}, b''_{p_0}) = 0$. Если $c'_{p_0} < c''_{p_0}$, то, очевидно $c''_{p_0} = 0$, а по определению $\sigma(c, b)$ (формула (1))

$$\sigma\big(c'_{p_0}, b'_{p_0}\big) - \sigma\big(c''_{p_0}, b''_{p_0}\big) = \sigma\big(c'_{p_0}, b'_{p_0}\big) - \sigma\big(0, b'_{p_0}\big) = (-1)^{b'_{p_0}}\big(u(c'_{p_0}) - u(0)\big),$$

где $u(l)$ есть $-2^{l/2}\Big(\dfrac{1 + (-1)^l}{2}\Big)$. Но $(-1)^{b'_{P_0}}\,u(0)\,(-1)^{v''_{p_0-1}} = (-1)^{v''_{p_0}}$ и в этом случае мы имеем:

$$\varphi(x) - S(n) = \sum_{i=p_0+1}^{p} (-1)^{v'_{i-1}}\,\sigma(c'_i, b'_i) + (-1)^{v''_{p_0}}\,u(c'_{p_0})\,.$$

Сравним это выражение с выражением для

$$\varphi(\alpha) = \sigma\big(c'_{p_0-1}, -1\big) + \sum_{i=p_0+1}^{p} (-1)^{v'_{i-1} - v''_{p_0} - 1}\,\sigma\big(c'_i, b'_i\big).$$

Ясно, что

$$\sigma\big(c'_{p_0},-1\big)=1-u\big(c'_{p_0}\big),\qquad \varphi(\alpha)=1-(-1)^{v''_{p_0}}\big(\varphi(x)-S(n)\big),$$

$$\varphi(x)-S(n)=(-1)^{v''_{p_0}}\big(1-\varphi(\alpha)\big)=a(n)\big(1-\varphi(\alpha)\big).$$

В первом же случае $\big(c'_{p_0}=c''_{p_0}\big)$ мы получили, как легко понять, $a(n)\big(\varphi(\alpha)-1\big)$.

Обозначим через $g_\beta(x)$, $x>0$, функцию $\varphi(x+\beta)-\varphi(x)$. Мы можем теперь доказать следующее весьма естественное утверждение.

Предложение 2. Если $\{n_k\}\in E$ *и* $h\big(\{n_k\}\big)=\beta$, *то для произвольного* w *справедливо равенство*

$$\mu\big(\{n_k\}\big)\big(\{\,x\mid x\leqslant w\,\}\big)=\lim_{T\to\infty}T^{-1}\operatorname{mes}\{\,x\mid g_\beta(x)\leqslant w,\ 0<x\leqslant T\,\}.$$

Доказательство. Для произвольного x в соответствии с высказанным имеет место равенство

$$g_\beta(x)=S\big([x+\beta]\big)-S\big([x]\big)+r_1(x)\big(1-\varphi(\{x\})\big)+r_2(x)\big(1-\varphi(\{x+\beta\})\big),$$

где $r_1(x)=\pm a\big([x]\big)$; $r_2(x)=\pm a\big([\beta+x]\big)$. Пусть $\xi_\beta=\big\{A_1\dots A_{k(\beta)}\big\}$ — разбиение положительного луча в соответствии со значениями вектора $\big(S[x+\beta]-S[x],\,r_1(x),\,r_2(x)\big)$. Нумерация A_i соответствует лексикографическому упорядочению возможных значений вектора. Очевидно, что существуют пределы $\lim\limits_{T\to\infty}T^{-1}\operatorname{mes}\big(A_i\cap[0,T]\big)$. Переход к непрерывному времени никакой особой специфики не вносит; определяющим для влияния дробной части является ее соотношение с числом $1/2$. Отсюда уже следует существование предела, фигурирующего в формулировке предложения. Множества A_i могут быть описаны более точно. Если рассмотреть замыкания всех связных компонент всех сдвигов $\overline{A}_i\cap[n,n+1]-n$ пересечений $\overline{A}_i\cap[n,n+1]$, то среди них будет лишь конечное число различных. Упорядочим их, например, в порядке появления в перечнях для $n=0,1\dots$: $I_i^1,\dots,I_i^{l(i)}$. Тогда существуют такие возрастающие последовательности натуральных чисел $m_{i,r}^j$, $r=1,\dots,l(i)$, $1\leqslant j<\infty$, что $\overline{A}_i=\bigcup\limits_{r,j}\big(I_i^r+m_{i,r}^j\big)$, и, если для произвольного n обозначить через $p_{i,r}(n)$ число $\max\{\,j\mid m_{i,r}^j\leqslant n\,\}$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_{i,r}(n)}{n}$ и достаточно изучать поведение g_β на отрезках.

Далее, если зафиксировано β, то для всякого ε существует такое δ, что если $|\beta' - \beta| < \delta$ и $\xi_{\beta'} = \{A'_1 \dots A'_{k(\beta')}\}$ – соответствующее разбиение, а $\{I'^1_{i'} \dots I'^{l'(i')}_{i'}\}$ — соответствующие системы отрезков, то могут быть выделены номера $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant k(\beta)$ и $1 \leqslant i'_1 < \dots < i'_s \leqslant k(\beta')$ и для каждого $p : 1 \leqslant p \leqslant s$ номера $1 \leqslant j_p^1 < \dots < j_p^{v(p)} \leqslant l(i_p)$ и $1 \leqslant j_p'^1 < \dots < j_p'^{v(p)} \leqslant l'(i'_p)$, такие, что последовательности $m^j_{i_p, j_p^u}$ и $m'^j_{i'_p, j_p'^u}$ совпадают одна с другой при всех p, u, для которых $1 \leqslant p \leqslant s$, $1 \leqslant u < v(p)$, и, кроме того,

$$M + \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant s \\ 1 \leqslant u \leqslant v(p)}} \operatorname{mes}\left(I^{j_p^u}_{i_p} \Delta I'^{j_p'^u}_{i'_p}\right) < \varepsilon,$$

где M — сумма мер всех невыделенных отрезков обеих совокупностей систем. Отсюда, кстати, с очевидностью следует, что если $\beta' \to \beta$, то $\mu_{\beta'}$ слабо сходится к μ_β. Подобным же, на деле, является и то утверждение, которое мы сейчас доказываем. Обозначим через β_k число $n_k/4^k$. Тогда

$$\frac{S(n+n_k) - S(n)}{2^k} = \varphi\Big(\frac{n}{4^k} + \beta_k\Big) - \varphi\Big(\frac{n}{4^k}\Big) + 2^{-k}\big(a(n+n_k) - a(n)\big).$$

Задача для β_k у нас рассматривается с дискретным параметром, но можно и для β_k построить разбиения и системы отрезков по рассмотренной выше схеме, а также, устремляя ε к 0, при больших k выделять отрезки вышеописанным образом. Поскольку разбиение для β фиксировано, можно (при достаточно больших k) считать, что набор выделяемых отрезков включает все отрезки, связанные с β, а на каждом из них g_{β_k} равномерно сходится к g_β, поэтому слабая сходимость соответствующих дискретных распределений к предельному очевидна. Предложение доказано.

§ 2. Рассмотрение случаев $n_r = 2 \cdot 4^r$ и $n_r = 4^r$

Сначала объединим обе последовательности в одну и рассмотрим общий вопрос о распределении значений $u_n^l = S(n+2^l) - S(n)$; $l > 1$. Очевидно, что последовательные разности $\Delta_n^l = u_n^l - u_{n-1}^l$ просто выражаются через $a(i)$, именно, $\Delta_n^l = a(n+2^l) - a(n)$. Мы решаем задачу о распределении сумм

$$S(2^l - 1), \quad S(2^l - 1) + \Delta_0^l, \quad S(2^l - 1) + \Delta_0^l + \Delta_1^l, \ \dots$$

Пусть n есть $k\cdot 2^l+c$, где k — целое, и $0\leqslant c<2^l$. Из определения коэффициентов Рудина–Шапиро $a(n)$ следует, что если $2^{l-1}\leqslant c$, то $a(n)=a(c)\times a(2k+1)$ (проверяется рассмотрением той серии единиц, среди которых расположен старший разряд c) и, следовательно,

$$\Delta_n^l=\begin{cases} a(c)\big(a(k+1)-a(k)\big), & 0\leqslant c<2^{l-1},\\ a(c)\big(a(2k+3)-a(2k+1)\big), & 2^{l-1}\leqslant c<2^l. \end{cases} \tag{4}$$

Имеем также

$$\begin{aligned} u^l_{k\cdot 2^l-1}&=\sum_{i=2^lk}^{2^l(k+1)-1}a(i)=a(k)\sum_{i=0}^{2^{l-1}-1}a(i)+a(2k+1)\sum_{i=2^{l-1}}^{2^l-1}a(i)=\\ &=R_1^l\,a(k)+R_2^l\,a(2k+1)\;=\;a(k)\big(R_1^l+(-1)^kR_2^l\big), \qquad (5)\\ u^l_{k\cdot 2^l+2^{l-1}-1}&=R_2^l\,(-1)^k\,a(k)+R_1^l\,a(k+1), \end{aligned}$$

ибо, как известно, $a(2k+1)=(-1)^k\,a(k)$.

Таким образом, знание $a(k)$, $a(k+1)$ и четности k определяет значения u_i^l при $k\cdot 2^l-1\leqslant i<(k+1)\cdot 2^l-1$. Поскольку второе из выражений (4) есть $a(c)\big((-1)^{k+1}a(k+1)-(-1)^ka(k)\big)$, ясно, что при любом k одно из этих выражений есть тождественный 0. Рассмотрим две меры:

$$\mu_1^l=\sum_{i=0}^{2^{l-1}-1}\delta_{\rho(i)}\quad\text{и}\quad\mu_2^l=\sum_{i=2^{l-1}}^{2^l-1}\delta_{S(i)-S(2^{l-1}-1)}.$$

Далее, для произвольной меры μ и чисел α,β введем обозначение $\mu_{\alpha,\beta}:\mu_{\alpha,\beta}(A)=\mu(A/\alpha-\beta)$, где A — произвольное измеримое множество (будем считать, что $\mu_{0,\beta}=\delta(0)$ при любом β). Легко видеть, что все меры вида $\sum\limits_{i=k\cdot 2^l-1}^{(k+1)\cdot 2^l-2}\delta_{u_i^l}$ суть $2^{l-1}\delta(x)+\mu_k'$, где μ_k' суть $\mu^l_{1\,\alpha,\beta}$ или $\mu^l_{2\,\alpha,\beta}$, где $\alpha=\pm2$, $\beta=\pm R_1^l\pm R_2^l$. Составим для μ_k' соответствующую таблицу на основе соотношений (4) и (5).

Изучение двумерных распределений координат для динамической системы в пространстве последовательностей, порожденной подстановкой Рудина–Шапиро (см. [1]), показывает, что вероятность каждой из 8 представленных в таблице 1 ситуаций есть $1/8$. Если обозначить через μ^l сумму мер, фигурирующих в таблице, то нашей задачей является изучение мер $\frac{1}{2^{l+3}}\,\mu^l_{2^{-r},0}$, где $r=l/2$ при l четном и $(l-1)/2$

Таблица 1

	k четно	k нечетно
$a(k)=-1 \;\&\; a(k+1)=-1$	$\mu_{2\ 2,-R_1^l-R_2^l}^{\ l}$	$\mu_{2\ -2,-R_1^l+R_2^l}^{\ l}$
$a(k)=-1 \;\&\; a(k+1)=\ 1$	$\mu_{1\ 2,-R_1^l-R_2^l}^{\ l}$	$\mu_{1\ \ 2,-R_1^l+R_2^l}^{\ l}$
$a(k)=\ 1 \;\&\; a(k+1)=-1$	$\mu_{1\ -2,\ R_1^l+R_2^l}^{\ l}$	$\mu_{1\ -2,\ R_1^l-R_2^l}^{\ l}$
$a(k)=\ 1 \;\&\; a(k+1)=\ 1$	$\mu_{2\ -2,\ R_1^l+R_2^l}^{\ l}$	$\mu_{2\ \ 2,\ R_1^l-R_2^l}^{\ l}$

при l нечетном (непрерывные меры накапливаются "половину времени"). Необходимая информация о R_i^l имеется в [3], а о μ_1^l, μ_2^l — приводится ниже (соответствующие факты получены в [1] на основе результатов [3]). Будем теперь отдельно рассматривать случаи четного и нечетного l.

I. l четное; $R_1^l = 2^r$, $R_2^l = 0$. Простое применение рассуждений доказательства Satz 22 [3] дает в нашем случае:

$$\begin{aligned}
\#\{\, n : 0 \leqslant n \leqslant 2^{l-1}-1 \mid S(n)=v\,\} &= \begin{cases} v, & 0<v<2^r, \\ 2^{r-1}, & v=2^r; \end{cases} \\
\#\{\, n : 2^{l-1} \leqslant n \leqslant 2^{\,l}-1 \mid S(n)=v\,\} &= \begin{cases} 2^{r+1}-v, & 2^r<v\leqslant 2^{r+1}-1, \\ 2^{r-1}, & v=2^r. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

Мы здесь пользуемся принципом замены пространственных средних временными при нахождении предельных распределений. Поэтому ясно, что обращение в 0 какого-либо из выражений (4) соответствует добавлению к табличным мерам δ-мер с некими коэффициентами. Разумеется, эти δ-меры имеют вид либо $\delta_{u^l_{k\cdot 2^l-1}}$ либо $\delta_{u^l_{k\cdot 2^l+2^{l-1}-1}}$.

Составим соответствующую таблицу (годную и для нечетных l). В ней будут стоять числа, интерпретируемые следующим образом: числу v соответствует $2^{l-1}\delta_v$ (см. (5)).

Вклад в предельную меру для четного l получится $\dfrac{\delta(1)+\delta(-1)}{4}$.

Заменим теперь каждую меру в табл. 1 соответствующей предельной мерой (вкладом в итоговую), обозначив предварительно через μ_1^* меру на отрезке $[0,1]$ с плотностью $2x$, через μ_2^* — меру на отрезке $[0,1]$ с плотностью $2(1-x)$. Имеем:

Суммарная же непрерывная компонента есть мера на отрезке $[-3,3]$

Таблица 2

	k четно	k нечетно
$a(k)=-1\ \ \&\ \ a(k+1)=-1$	$-R_1^l-R_2^l$	$-R_1^l+R_2^l$
$a(k)=-1\ \ \&\ \ a(k+1)=\ \ 1$	$R_1^l-R_2^l$	$R_1^l+R_2^l$
$a(k)=\ \ 1\ \ \&\ \ a(k+1)=-1$	$-R_1^l+R_2^l$	$-R_1^l-R_2^l$
$a(k)=\ \ 1\ \ \&\ \ a(k+1)=\ \ 1$	$R_1^l+R_2^l$	$R_1^l-R_2^l$

Таблица 3

$\mu_2^{*}\ \ {}_{2,-1}$	$\mu_2^{*}\ {}_{-2,-1}$
$\mu_1^{*}\ \ {}_{2,-1}$	$\mu_1^{*}\ \ {}_{2,-1}$
$\mu_1^{*}\ {}_{-2,\ \ 1}$	$\mu_1^{*}\ {}_{-2,\ \ 1}$
$\mu_2^{*}\ {}_{-2,\ \ 1}$	$\mu_2^{*}\ \ {}_{2,\ \ 1}$

с плотностью

$$\rho_1(x)=\begin{cases}(x+3)/8, & -3\leqslant x\leqslant -1,\\ 3/16, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ (3-x)/8, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

II. l — нечетное $R_1=R_2=2^r$. Дискретная компонента, как явствует из таблицы 2, есть $\big(\delta(-2)+2\delta(0)+\delta(2)\big)/8$.

$$\#\Big\{n:0\leqslant n\leqslant 2^{l-1}-1\ \Big|\ S(n)=v\Big\}=\begin{cases}v, & 0<v\leqslant 2^r,\\ 2^{r+1}-v, & 2^r<v<2^{r+1},\end{cases}$$

$$\#\Big\{n:2^{l-1}\leqslant n\leqslant 2^{l}-1\ \Big|\ S(n)=v\Big\}=\begin{cases}2v-2^{r+1}, & 2^r<v<2^{r+1},\\ 2^r, & v=2^{r+1};\end{cases}$$

μ_1^{*} — мера на $[0{,}2]$ с плотностью x на $[0,1]$, $2-x$ на $[1,2]$, μ_2^{*} — мера на $[0{,}1]$ с плотностью $2x$. Вклады в непрерывную компоненту меры представлены в таблице 4.

Результирующая мера сосредоточена на отрезке $[-4,4]$ и плотность ее:

$$\rho_2(x)=\begin{cases}\dfrac{4-|x|}{64}, & 2<|x|\leqslant 4,\\ \dfrac{3}{32}\ +\ \dfrac{2-|x|}{64}, & 0\leqslant |x|\leqslant 2.\end{cases}$$

Таблица 4

$\mu_2^*{}_{\,2,-2}$	$\mu_2^*{}_{\,-2,0}$
$\mu_1^*{}_{\,2,-2}$	$\mu_1^*{}_{\,2,0}$
$\mu_1^*{}_{\,-2,\ 2}$	$\mu_1^*{}_{\,-2,0}$
$\mu_2^*{}_{\,-2,\ 2}$	$\mu_2^*{}_{\,2,0}$

Полезно заодно рассмотреть и общий случай $n_r = S \cdot 4^r$, где S – некоторое фиксированное натуральное число. Имеем (для произвольного $l > 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=2^l k}^{2^l(k+S)-1} a(i) &= R_1 \sum_{j=k}^{k+S-1} a(j) + R_2 \sum_{j=k}^{k+S-1} (-1)^j a(j), \\ \sum_{i=2^{l-1}+2^l k}^{2^{l-1}+2^l(k+S)-1} a(i) &= R_1 \sum_{j=k+1}^{k+S} a(j) + R_2 \sum_{j=k}^{k+S-1} (-1)^j a(j). \end{aligned} \tag{7}$$

В нашем случае ($l = 2r$, S может быть четным), конечно, $R_2 = 0$. Аналог формулы (4):

$$\delta_{n,S}^l = a(n + S \cdot 2^l) - a(n) =$$

$$= \begin{cases} a(c)\big(a(k+S) - a(k)\big) = u_1\, a(c); & 0 \leqslant c < 2^{l-1}, \\ a(c)\big((-1)^{k+S} a(k+S) - (-1)^k\, a(k)\big) = u_2\, a(c); & 2^{l-1} \leqslant c < 2^l. \end{cases} \tag{8}$$

При фиксированном S введем меру μ_S на множестве E троек чисел $\big\{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha = \pm 1;\ \beta = \pm 1;\ \gamma = -2, 0, 2\big\}$ равенством

$$\mu_S(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{P}\left(a(k) = \alpha;\, a(k+S) = \beta;\, u_2 = \gamma\right) = \mathbf{P}\left(A_{\alpha,\beta,\gamma}\right).$$

Для каждого набора $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$ определим на множестве целых чисел вероятностную меру $\nu_{\alpha,\beta,\gamma}$, отвечающую распределению значений $\sum_{j=k}^{k+S-1} a(j)$ при условии $A_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Имеем для искомой меры выражение:

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in E} \mu_S(\alpha, \beta, \gamma)\, \nu_{\alpha,\beta,\gamma} * \left(\mu^*_{1\,\beta-\alpha,0} + \delta_{\beta-\alpha} * \mu^*_{2\,\gamma,0}\right), \tag{9}$$

где обозначение $\mu_i^*,\ i=1,2$, соответствует рассмотренному выше случаю $S=1$.

§ 3. Марковское представление для предельных мер

В [1] мы изучали последовательности матриц производящих функций вероятностных распределений, строившиеся следующим образом. Пусть $A(t)$ — полиномиальная матрица, такая, что все коэффициенты всех полиномов неотрицательны, а числовая матрица $A(1)$ примитивна. Пусть последовательность полиномиальных матриц $B(t)$; $B_0(t)=E$ определена рекуррентным соотношением $B_{n+1}(t)=A(t)\,B_n(t^2)$, $B_n(t)=\bigl\{b_{ij}^n(t)\bigr\}_{i,j=1}^N$;

$$b_{i,j}^n(t)=p_{s_n(i,j)}^n\,t^{s_n(i,j)}+\dots+p_{y_n(i,j)}^n\,t^{y_n(i,j)}.$$

Рассматривались меры ν_{ij}^n,

$$\nu_{ij}^n=\bigl(b_{ij}^n(1)\bigr)^{-1}\sum_{k=s_n(i,j)}^{y_n(i,j)}p_k^n\,\delta\bigl(k/2^n\bigr).$$

Утверждалось, что эти вероятностные меры слабо сходятся к предельным. Доказательства (методами гармонического анализа и иными) были проведены для частных случаев (в целях упрощения). Получившаяся матрица мер (а на самом деле строка мер, поскольку от номера столбца предельная мера не зависит), как оказалось, удовлетворяет определенным соотношениям (в двумерном частном случае представленных в [1] системой (4)). Здесь мы, пользуясь этими соотношениями, получим выражения для значений мер на двоичных отрезках. Если меры не окажутся непрерывными, то под ν_i будут подразумеваться их непрерывные компоненты.

Поскольку $A(t)=B_1(t)$, мы можем рассматривать меры $\mu_{ij}=b_{ij}^1(1)\,\nu_{ij}^1$ как меры, соответствующие матрице $A(t)$ как матрице производящих функций. Итак, имеем вектор предельных мер ν_i, такой, что для любого отрезка $[e,f]$:

$$\varphi_j\,\nu_j\bigl([e,f]\bigr)=\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^N\varphi_i\,\mu_{ij}*\nu_i\right)\bigl([2e,2f]\bigr);\qquad 1\leqslant j\leqslant N,\qquad(10)$$

где λ — собственное число Перрона–Фробениуса и $\{\varphi_i\}$ — соответствующий собственный вектор-строка матрицы $A(1)$.

Если для каждой меры ν_i обозначим через $[a_i, b_i]$ пересечение всех замкнутых отрезков ν_i полной меры, то справедливы следующие соотношения, вытекающие очевидным образом из (10):

$$\max_i \left(b_i + \frac{y_1(i,j)}{2} \right) = 2b_j, \qquad \min_i \left(a_i + \frac{s_1(i,j)}{2} \right) = 2a_j. \tag{11}$$

А из этого, в свою очередь, следует, что все a_i и b_i рациональны ([1], § 2). Возьмем такое максимальное число τ, что $1/(2\tau)$, все $k_i = (b_i - a_i)/\tau$ и a_i/τ — целочисленны.

Рассмотрим всевозможные отрезки вида $\big[a_i + k\tau,\, a_i + (k+1)\tau\big]$, $0 \leqslant k \leqslant k_i - 1;\ 1 \leqslant i \leqslant N$, и, не отождествляя совпадающие, если такие найдутся, занумеруем их соответствующими парами (i,k). Число этих отрезков, равное $\sum\limits_{i=1}^{N} k_i$, обозначим через N^*, множество — через M.

Пусть v — некоторое натуральное число и $u_1 \dots u_v$ — произвольная последовательность нулей и единиц. Обозначим через $\mu_{(i,k),u_1,\dots,u_v}$ меру $\nu_i\Big\{ x \in \big[a_i + k\tau,\, a_i + (k+1)\tau\big],$ двоичное разложение $\dfrac{x - a_i}{\tau} - k$ начинается с $u_1 \dots u_v \Big\}$. Система (10) позволяет получить все значения $\mu_{(i,k),u_1,\dots,u_v}$ последовательно для $v = 1, 2, \dots$. Имеем две матрицы $A_0 = \Big\{ a^0_{(i_1,k_1)\,(i_2,k_2)} \Big\}$ и $A_1 = \Big\{ a^1_{(i_1,k_1)\,(i_2,k_2)} \Big\}$ (их вид полностью определяется коэффициентами системы (10), то есть числами $\lambda, \{\varphi_i\}$ и дискретными мерами $\{\mu_{ij}\}$), такие что

$$\mu_{(i,k),\varkappa} = \sum_{(i_1,k_1)} a^{\varkappa}_{(i,k)\,(i_1,k_1)}\, \mu_{(i_1,k_1)}, \qquad \varkappa = 0, 1. \tag{12}$$

Дальнейшие применения системы (10) показывают с очевидностью, что и для любого набора $\alpha = u_1, \dots, u_v$ нулей и единиц существует (и естественным образом строится) такая матрица $A_\alpha = \Big\{ a^\alpha_{(i_1,k_1)\,(i_2,k_2)} \Big\}$, что

$$\mu_{(i,k),\alpha} = \sum_{(i_1,k_1) \in M} a^{\alpha}_{(i,k)\,(i_1,k_1)}\, \mu_{(i_1,k_1)}.$$

Выразим матрицу A_α через A_0 и A_1. Из (10) вытекает следующее простое замечание: если $\alpha' = \alpha\beta$ — соединение слов из 0 и 1, то

$$\mu_{(i,k),\alpha'} = \sum_{(i_1,k_1)} a^{\alpha}_{(i,k)\,(i_1,k_1)}\, \mu_{(i_1,k_1),\beta}.$$

Поэтому $\{\mu_{(i,k),\alpha 0}\} = A_\alpha\{\mu_{(i_1,k_1),0}\} = A_\alpha A_0\{\mu_{(i_1,k_1)}\}$. Так что $A_{\alpha 0} = A_\alpha A_0$. Аналогично $A_\alpha = A_\alpha A_1$. Таким образом, если $\alpha = u_1 \dots u_v$, то $A_\alpha = A_{u_1} \dots A_{u_v}$ и набор чисел $\{\mu_{i,k}\}$ в сочетании с матрицами полностью определяет все меры ν_i. Из (12) следует, что вектор-столбец $\{\mu_{(i,k)}\}$ инвариантен относительно матрицы $A_0 + A_1$. Если предполагать, что эта матрица примитивна, то последнее свойство вектора $\{\mu_{(i,k)}\}$ однозначно его определяет (ν_i нормированы).

Вычислим меры цилиндрических множеств (мы теперь изучаем меры в пространстве $\{(i,k)\} \times \dots \times \{0,1\} \times \dots = \{\{s, u_1, \dots\}\}$) вида $\{ s', u_1, \dots \mid u_{p+1} \dots u_{p+k} = B,\ s' = s = (i,k) \} = C^s_{B,p}$, где $p \geqslant 0$ и B — слово из нулей и единиц длины k. Разумеется, можно представлять дело таким образом, как если бы была задана мера μ на объединении N^* непересекающихся абстрактных отрезков длины τ, сужения которой на соответствующие подмножества суть ν_i, причем конечномерные распределения $\mu_{(i,k),u_1,\dots,u_v}$ согласованы. Рассмотрим вектор $\{\mu C^s_{B,p}\}_{s=(i,k)\in M} = \{\nu_{i(s)} C^s_{B,p}\}_{s\in M}$, где B и p фиксированы. Из доказанного выше следует, что $\{\mu C^s_{B,p}\} = (A_0 + A_1)^p A_B \times \{\mu_{(i,k)}\}$. Обозначим, продолжая предполагать примитивность, через $\{l_{(i,k)}\}$ некоторый инвариантный вектор-строку матрицы $A_0 + A_1$. Согласно теореме Перрона–Фробениуса в формулировке [6] имеем для произвольного вектора ξ :

$$\lim_{n\to\infty} (A_0 + A_1)^p \xi = \big(\{l_{(i,k)}\}, \xi\big) \frac{\{\mu_{(i,k)}\}}{(\{l_{(i,k)}\}, \{\mu_{(i,k)}\})},$$

где круглые скобки означают скалярные произведения. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} \{\mu C^{(i,k)}_{B,p}\} = \big(\{l_{(i,k)}\}, A_B\{\mu_{(i,k)}\}\big) \frac{\{\mu_{(i,k)}\}}{(\{l_{(i,k)}\}, \{\mu_{(i,k)}\})}. \qquad (13)$$

Очевидно, что в $\{0,1\} \times \{0,1\} \dots$ может быть введена инвариантная относительно сдвига вероятностная мера μ^*, такая что

$$\mu^*\Big(\bigcup_s C^s_{B,p}\Big) = \frac{(\{l_s\}, A_B\{\mu_s\})}{(\{l_s\}, \{\mu_s\})}, \quad \text{а для каждой пары} \quad (i,k)$$

$$\lim_{p\to\infty} \mu C^{(i,k)}_{B,p} = \mu_{(i,k)} \cdot \mu^*\Big(\bigcup_s C^s_{B,0}\Big).$$

Прямое произведение мер, описываемое правой частью последней формулы, конечно, эквивалентно мере μ, что вытекает из равномерной ограниченности сверху и снизу отношений мер для цилиндров

вида $C_{B,0}$. Легко понять, что сдвиг в пространстве с мерой μ^* перемешивает, чем облегчается проверка сингулярности, если матрицы A_0 и A_1 известны.

Рассмотрим теперь блочную матрицу $\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$. Матрицы такого типа встречаются в различных задачах. Например, в работе [5], посвященной построению C^*-алгебр с теми или иными свойствами, такая матрица (точнее матрица $2m \times 2n$ с 2×2-блоками вида $\begin{pmatrix} p_{ij} & q_{ij} \\ q_{ij} & p_{ij} \end{pmatrix}$) называется дважды симметрической (определение 6.2.3), а естественный аналог матрицы $A_0 + A_1$ — ее симметрическим коллапсом.

Инвариантные векторы строка и столбец нашей блочной матрицы суть, соответственно, $\{\mu_{(i,k)}\}\{\mu_{(i,k)}\}$ и $\{l_{(i,k)}\}\{l_{(i,k)}\}$. Вспомним формулу, выражающую меру с максимальной энтропией для топологической цепи Маркова ([7, 8] и пр.). Если пространство состояний т.м.ц. есть $[1 : n]$, а матрица кратностей дуг есть (h_{ij}), то мера произвольного цилиндра, отвечающего слову $i_1 \dots i_k$, есть $\theta^{1-k}\varphi^*_{i_1}\varphi_{i_k} \prod_{j=1}^{k-1} h_{i_j,i_{j+1}}$, где θ — максимальное собственное число матрицы кратностей, $\{\varphi^*_i\}_1^n$ – собственный вектор-строка, $\{\varphi_i\}_1^n$ – собственный вектор-столбец, такие что $(\{\varphi^*_i\}, \{\varphi_i\}) = 1$. Заметим здесь же, что центральная мера адического стационарного преобразования марковского компакта, описываемого этой матрицей, имеет те же переходные вероятности $p_{ij} = h_{ij}\,\varphi_j/\theta\varphi_i$, но начальное распределение есть нормализованный вектор-столбец ([7] и пр.). Пусть теперь $\Omega = \left\{\{\omega_i\}_1^\infty\right\}$ — пространство односторонних последовательностей чисел $1, \dots, 2N^*$. Введем на нем меру η, конечномерные распределения которой выражаются через матрицу $\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$ и ее собственные векторы $\{\varphi_i\}_1^{2N^*}$, $\{\varphi^*_i\}_1^{2N^*}$, пропорциональные $\{\mu_{(i,k)}\}_1^{N^*}\{\mu_{(i,k)}\}$ и $\{l_{(i,k)}\}_1^{N^*}\{l_{(i,k)}\}$, по тем же формулам, по которым конечномерные распределения меры с максимальной энтропией выражаются через матрицу $\{h_{ij}\}$ и ее собственные векторы Перрона–Фробениуса. Разумеется, это будет лишь формальный аналог т.м.ц., поскольку матрица $\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$ не обязана быть целочисленной и даже рациональной. Для описания естественного соответствия между множествами вида $C_{B,0}$ и подмножествами Ω введем события

$$V_1^m = (1 \leqslant \omega_m \leqslant N^*) \cap (1 \leqslant \omega_{m+1} \leqslant N^*);$$
$$V_2^m = (N^* + 1 \leqslant \omega_m \leqslant 2N^*) \cap (N^* + 1 \leqslant \omega_{m+1} \leqslant 2N^*);$$

$$V_3^m = (1 \leqslant \omega_m \leqslant N^*) \cap (N^* + 1 \leqslant \omega_{m+1} \leqslant 2N^*);$$
$$V_4^m = (N^* + 1 \leqslant \omega_m \leqslant 2N^*) \cap (1 \leqslant \omega_{m+1} \leqslant N^*);$$
$$U_0^m = V_1^m \vee V_2^m; \quad U_1^m = V_3^m \vee V_4^m.$$

Для произвольного слова B из нулей и единиц $B = b_1 \dots b_v$ обозначим через U_B событие $U_{b_1}^1 \wedge \dots \wedge U_{b_v}^v$. Из определения $U_{b_i}^m$ следует, что U_B является объединением не более чем 2^v пересечений v_i^m. На самом же деле каждое U_B состоит ровно из двух таких пересечений, например, $U_{1011} = (V_3^1 \wedge V_2^2 \wedge V_4^3 \wedge V_3^4) \vee (V_4^1 \wedge V_1^2 \wedge V_3^3 \wedge V_4^4)$. Отметим, что если зафиксировать $a = 0, 1$ и $b : 2a < b \leqslant 2a + 2$ и каждой двоичной последовательности $U = c_1 \dots c_{n-1} a$ сопоставить одно из двух отвечающих ей событий, а именно $V_{i_1(u)}^1 \dots V_{i_{n-1}(u)}^{n-1} V_b^n$, то при перечислении последовательностей U в естественном порядке четности $i_1(u)$ будут образовывать отрезок последовательности Морса. Из определений непосредственно вытекает

Предложение 3. Для любого двоичного слова B имеем

$$\mu^* C_{B,p} = \eta U_B.$$

Фактически мы нашли конечномерные распределения для процесса с укрупненными состояниями [9]. Пользуясь системой (10), нетрудно написать выражение для матриц A_0, A_1 :

если $r^0_{(i,k)(i_1,k_1)} = 2a_i + 2k\tau - a_{i_1} - k_1\tau \in \left[\frac{y_1(i_1,i)}{2}, \frac{s_1(i_1,i)}{2} \right]$,

то $a^0_{(i,k)(i_1,k_1)} = \frac{\varphi_{i_1}}{\varphi_i \lambda} p^1_{2r^0_{(i,k)(i_1,k_1)}}$,

если $r^1_{(i,k)(i_1,k_1)} = 2a_i + (2k+1)\tau - a_{i_1} - k_1\tau \in \left[\frac{y_1(i_1,i)}{2}, \frac{s(i_1,i)}{2} \right]$,

то $a^1_{(i,k)(i_1,k_1)} = \frac{\varphi_{i_1}}{\varphi_i \lambda} p^1_{2r^1_{(i,k)(i_1,k_1)}}$.

Остальные коэффициенты матриц равны 0.

Рассмотрим теперь в качестве примера полиномиальную матрицу $A(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t^{-1}+t \\ 1+t^{-1} & t^{-1} \end{pmatrix}$ из [1]. В [1] путем решения системы, аналогичной (11), были фактически найдены a_i, b_i (заметим, что в силу единственности решения (11) можно считать, что отрезки $[a_i, b_i]$ минимальны в описывавшемся здесь смысле, если выбран масштаб). Имеем $a_1 = a_2 = -1/2$; $b_1 = b_2 = 1/2$. В качестве τ можно взять $1/2$. Имеем $r^0_{(i,k)(i_1,k_1)} = \frac{-1 + 2k - k_1}{2}$. Кроме того, выражение для элемента $a^0_{(i,k)(i_1,k_1)}$ обращается в 0:

при $i = 1$, $i_1 = 1$ — если $2k \neq k_1 + 1$, $k_1 + 2$;

при $i = 1,\ i_1 = 2$ — если $2k \neq k_1,\ k_1 + 1$;
при $i = 2,\ i_1 = 1$ — если $2k \neq k_1,\ k_1 + 2$;
при $i = 2,\ i_1 = 2$ — если $2k \neq k_1$.
Все ненулевые $P^s_{2r^s_{(i,k)(i_1,k_1)}}$ здесь равны 1. Имеем матрицу A_0:

	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	0	0	ω_1/λ	0
$(1,1)$	$1/\lambda$	$1/\lambda$	0	ω_1/λ
$(2,0)$	ω_2/λ	0	$1/\lambda$	0
$(2,1)$	ω_2/λ	0	0	0

Аналогична матрица A_1:

	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$1/\lambda$	0	ω_1/λ	ω_1/λ
$(1,1)$	0	$1/\lambda$	0	0
$(2,0)$	0	ω_2/λ	0	$1/\lambda$
$(2,1)$	0	ω_2/λ	0	0

Здесь $(1, \omega_1) = \left(1, (\sqrt{17} - 1)/4\right)$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = (3 + \sqrt{17})/2$ матрицы $A(1)$, $\omega_2 = \omega_1^{-1}$.

§ 4. Оценка эксцесса для подстановок

Здесь для общей примитивной подстановки, матрица которой имеет два собственных числа > 1, будет получено простое следствие оценок [2], которое в общем случае не влечет топологическое перемешивание (соответствующеее алгоритмическое изучение асимптотики эксцесса для допустимых слов специального вида требует довольно сложных рассмотрений), но для частного случая, рассмотренного в [9], на самом деле идентично доказывавшемуся там иными методами "факту 2". В [2] получен следующий результат.

Теорема. Пусть σ — подстановка с примитивной матрицей M, второе по величине собственное число которой $\theta_2 < \theta$ (где θ — собственное число Перрона–Фробениуса) — вещественное, превосходящее 1 и модули остальных собственных чисел. Пусть собственное число θ_2 имеет порядок $\alpha+1$ в минимальном многочлене матрицы M и $\beta = \log_\theta \theta_2$. Тогда для произвольного отображения f алфавита σ в R, такого, что его значения образуют вектор, ортогональный к собственному подпространству M, отвечающему θ, и любой неподвижной точки σ $\{u_i\}_{i\geqslant 1}$ существует такая вещественная функция $F_f \in C\big([1,+\infty]\big)$, что для всех $x \in [1,+\infty)$ $F_f(\theta x) = F_f(x)$ и

$$S^f(N) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} f(u_i) = (\log_\theta N)^\alpha N^\beta F_f(N) + O\big(\Psi(N)\big),$$

где $\Psi = o\big((\log N)^\alpha N^\beta\big)$.

Мы предположим, что F_f не является константой, это, впрочем, вытекает из недифференцируемости, доказанной там же, для случая, когда $F_f \not\equiv 0$, и покажем, что существуют константы $a, b, N_0 > 0$, такие что если $n > N_0$, то

$$\inf_N \big(S^{(f)}(N+n) - S^f(N)\big) < -a n^\beta (\log_\theta n)^\alpha < \\ < b n^\beta (\log_\theta n^\alpha) < \sup_N \big(S^{(f)}(N+n) - S^f(N)\big).$$

Лемма. Пусть на отрезке $[u,v]$ задана непрерывная функция $h(x)$. Тогда найдется такое δ, что если $\Delta < \delta$, то существует такое x, что $u < x < x+\delta < v$ и $\dfrac{h(x+\Delta)-h(x)}{\Delta} = \dfrac{h(v)-h(u)}{v-u}$.

Лемма очевидна (простейший случай: $x \in (u,v) \Rightarrow h(x) > 0 = h(v) = h(v)$).

Из нашего предположения о функции F_f и ее свойств вытекает, что существуют $x_1 < x_2$; $x_1 > 1$, такие что F_f знакопостоянна в промежутке $[x_1, x_2]$ (не ограничивая общности, можно считать, что $F_f > 0$ на $[x_1, x_2]$) и $F_f(x_1) < F_f(x_2)$. Задавшись $\varepsilon < \dfrac{F_f(x_2) - F_f(x_1)}{x_2 - x_1} = \varepsilon_1$ и, обозначив $\varepsilon_1 - \varepsilon$ через ε_0, имеем по лемме, примененной к F_f и $[x_1, x_2]$: существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что если n достаточно велико, то существуют такие натуральные $l, N', N' \in (c_1 n, c_2 n)$, что $\delta/\theta \leqslant n/\theta^l < \delta$, $F_f(N'+n) - F_f(N') > \varepsilon_0 \delta/\theta$, $\Psi(N')$ достаточно мало в сравнении с $S^f(N')$ и $S^f(N'+n)$ и

$$S^f(N'+n) - S^f(N') = (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta \big(F_f(N'+n) - F_f(N')\big) + \\ + F_f(N'+n)\left((\log_\theta(N'+n))^\alpha (N'+n)^\beta - (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta\right) + \omega, \quad (14)$$

где ω достаточно мало, а второе слагаемое положительно, чем доказано существование константы b.

Доказательство существования константы a (подвергшееся изменениям при корректуре) связано с дополнительными трудностями. Ясно, что из (14) вытекает существование a, если для любых $0 < c < \sup\limits_x F_f(x)$, $A > 0$ существуют: $d, y \in [1, \theta]$; $d < y$, $\dfrac{F_f(d) - F_f(y)}{y - d} > A$, $\inf\limits_{x \in [d,y]} F_f(x) > c$, $\Delta < \delta$ (δ соответствует по лемме отрезку (d, y)), $c_1, c_2 > 0$ такие, что если n достаточно велико, то существуют такие l, N', $N' \in (c_1 n,\, c_2 n)$, что

$$\Delta/\theta < n/\theta^l < \Delta, F_f(N' + n) - F(N') > A\Delta/\theta,$$

$\big|\Psi(N')\big|$ — достаточно малое число в сравнении с $S^f(N')$ и $S^f(N' + n)$ и выполнено (14) с достаточно малым ω. Но существование d, y (влекущее все остальное) вытекает из полученного в [2] представления вещественных чисел в подстановочной системе счисления. А именно, из выражения для приращений функции $\Phi(x) = x^\beta F_f(x)$ на допустимых интервалах ([2], $\mathrm{n}^0\, 4$) в случае $F_f \not\equiv 0$ можно получить существование таких констант $D, E, G > 0$, что при любом натуральном l существует система непересекающихся отрезков $I_1^l, \ldots, I_{v(l)}^l \subset [1, \theta]$; $I_j^l = [u_j^l, v_j^l]$; $(v_j^l - u_j^l) < D\theta^{-l}$; $\big|F_f(v_j^l) - F(u_j^l)\big| > G\theta_2^{-l}$; $j = 1, \ldots, v(l)$; $\sum\limits_j (v_j^l - u_j^l) > E(\theta - 1)$, являющаяся в $[1, \theta]$, $\varepsilon(l)$-сетью с $\varepsilon(l) \underset{l \to \infty}{\to} 0$.

Либо для любого отрезка $J \subset [1, \theta]$ для любого достаточно большого l найдется $I_j^l \subset J$ с $F_f(v_j^l) - F_f(u_j^l) < 0$ (чего достаточно), либо, предполагая при фиксированном c, что для какого-либо A требуемых d, y не существует, мы получим противоречие с ограниченностью F_f.

Требование, предъявляемое к константам c_1, c_2 для этого случая, таково: $\Big(c_1\Delta,\, \dfrac{c_2 + 1}{\theta}\,\Delta\Big) \supset [d, y]$.

Замечание. После того, как данная работа была сдана в редакцию, из печати вышла статья [11]. Оказывается, что уравнение (10) данной статьи является частным случаем условия (2.3) работы [11], т.е. наше семейство мер является самоподобным с точки зрения предложенного в ней определения.

Литература

1. А. Н. Лившиц, *Об одной стационарной последовательности случайных величин.* Препринт ПОМИ, P-5-92 (1992).
2. J. -M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theor. Comput. Sci. **65**, No. 2 (1989) 153–169.

3. J. Brillhart, P. Morton, *Über Summen von Rudin–Shapiroschen Koeffizienten.* Illinois J. Math. **22** (1978) 126–148.
4. J. Brillhart, P. Erdős, P. Morton, *On sums of Rudin–Shapiro coefficients.* II. Pacific J. Math. **107**, No. 1 (1983), 39–70.
5. B. Blackadar, *Symmetries of CAR-algebra.* Ann. Math. **131**, No. 3 (1990), 589–623.
6. Д. Рюэлль, *Статистическая механика. Строгие результаты.* М., Мир, 1971.
7. Sh. Ito, *A construction of transversal flows for maximal Markov-automorhisms.* In: Second Japan–USSR Symposium on Probability Theory, Kyoto, v. 3 (1972).
8. В. М. Алексеев, М. В. Якобсон, *Символическая динамика и гиперболические динамические системы.* (Добавление в кн.: Р. Боуэн, Методы символической динамики, М., Мир, 1979).
9. Дж. Дж. Кемени, Дж. Лори Снелл, *Конечные цепи Маркова.* М., Наука, 1970
10. А. Н. Лившиц, *Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса подстановок.* Препринт ПОМИ, P-10-91 (1991).
11. R. S. Stricharts, *Self-similar measures and their transforms.* III. Indiana Univ. Math. J. **23**, No. 2 (1993) 367–413.

ON A CERTAIN SEQUENCE OF MATRICES

In [1] the matrices

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & \mathbb{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbb{O} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

were considered together with corresponding adic and substitutional dynamical systems. Here, for the case $n \geqslant 4$ we consider more general case (making some corrections concerning the above-mentioned paper).

Keeping the notations and definitions from [1], we first formulate the condition of weak mixing of special automorphisms over substitutional or adic dynamical systems with function depending only on the zero coordinate.

As in [1], consider the adic transformation T_M acting in Markov compact X_M, where $\{1, \dots, n\}$ are the states and M the primitive transition matrix of the adic transformation. Let $f : \{1, \dots, n\} \to N$ be a function and f^* the corresponding map $X_M \to N$, $f^*(\{x_0, \dots\}) = f(x_0)$. Let T_M^f be the special automorphism built by T_M and function f^*. It is easy to prove its strict ergodicity (in the natural sense).

Here we give the definition of good sequences for T_M^f. Let $P_1 = y_0, \dots, y_l$; $P_2 = z_0, \dots, z_l$ be two paths of length l with $y_0 = z_0$; $y_l = z_l$; $P_1 < P_2$. Define the sequences of natural numbers $N_m^f(P_1, P_2)$. For any path $x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_l, x_{m+l+2}, \dots \in X_M$, the path

$$x_0, \dots, x_m, z_0, \dots, z_l, x_{m+l+2}, \dots$$

POMI Preprint № 2/1994

belongs to X_M too and for some K, not depending on $\{x_i\}$, we have

$$(T_M^f)^K(\{x_0,\dots,x_m,y_0,\dots,y_l,x_{m+l+2},\dots\},0) = \\ = (\{x_0,\dots,x_m,z_0,\dots,z_l,x_{m+l+2},\dots\},0)$$

(these are two points of the phase space of the special automorphism). Put $N_m^f(P_1,P_2) = K$. If P_1,P_2 are fixed, $N_m^f(P_1,P_2)$ is a recurrent sequence. The characteristic polynomial of the matrix M is the appropriate polynomial. Call good all the sequences $N_m^f(P_1,P_2)$. The same definition will be used in the case of the generalized adic transformation [2] and corresponding special automorphisms.

For the primitive substitutions with the unicity of admissible decoding [2] over the alphabet $\{1,\dots,n\}$, the function $f:\{1,\dots,n\}\to N$ defines a special automorphism, too. The sequence L_k^f is called good if there exists an admissible sequence of type $a_1,\dots,a_l; a_1 = a_l$ such that if, for any k, $b_1^k\dots b_{s(k)}^k$ denotes the block $w_A^k(a_1\dots a_{l-1})$, then $L_k^f = \sum\limits_{i=1}^{s(k)} f(b_i^k)$. Of course, $L_k^f = (\{c_1,c_2,\dots,c_n\}, G_A^k U_f)$, where $U_f = \{f(1),\dots,f(n)\}$ and $c_i, 1\leqslant i\leqslant n$, is the number of symbols i among $a_1,\dots,a_{l-1}$.

Recall now the definition of the polynomial $g_v(u)$ for a recurrent sequence (the notation is taken from [1]). Let $v = \{v_1,\dots,v_m\}$ be a complex vector, $f(u)$ be the polynomial $a_0u^m + a_1u^{m-1} + \dots + a_m$ having simple roots $u_1,\dots,u_m$. As follows from the theory, there exists a unique polynomial $g_v(u)$ of degree less than m such that the sequence $h_l = \sum\limits_{k=1}^{m} g_v(u_k)(u_kf'(u_k))^{-1}u_k^l$ satisfies the recurrence $a_mh_l + a_{m-1}h_{l+1} + \dots + a_1h_{l+m+1} + a_0h_{l+m} = 0$, $l>0$, and $h_l = v_l$ for $1\leqslant l\leqslant m$. The explicit formula for the polynomial g_v is the following:

$$g_v(u) = \sum_{i=1}^{m} v_ia_{m-i} + u\sum_{i=1}^{m-1} v_ia_{m-i-1} + \\ + u^2\sum_{i=1}^{m-2} v_ia_{m-i-2} + \dots u^{m-1}\sum_{i=1}^{1} v_ia_{1-i}.$$

The formulation of the the weak mixing condition from [1] carries over without changes (together with the remark). Still we give it here.

If $L = \{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a recurrent sequence, the vector $v_L = \{v_1,\dots,v_n\}$ corresponds to it. The polynomial g_{v_L} corresponds in its turn to this vector. Suppose that the roots $t_1,\dots,t_n$ of the polynomial $f_T(t)$ are simple.

THEOREM. Let $L^f = \{L_k^f\}$ be a good sequence and there exist no k_0 such that all $L_k, k > k_0$, have the common divisor > 1 and that no polynomial with integer coefficients exist, constant and irrational on the set $\{t_i | g_{v_l}(t_i) \neq 0 \ \& \ |t_i| \geqslant 1\}$. Then the special automorphism T_A^f possesses the weak mixing.

Analogous is the formulation for adic transformations. The eigenfunctions, if the discrete spectrum exists, are continuous too in the weak topology (natural topology of the phase space of special automorphism). If the recurrent sequence is fixed, then it can satisfy many recurrences. But the set $\{t_i | t_i \neq 0 \ \& \ g_{v_l}(t_i) \neq 0\}$ does not depend on the choice of the recurrence. We shall use this later.

The case considered in [1] did correspond to $f \equiv 1$. The investigation of a concrete good sequence L in [1] led us to the expression of g_{v_L}. We used the admissible sequence nn. Use it here as well.

Recall that for the polynomial $P_n(t) = \det(A_n - tI)$ the roots are $t_k^{(n)} = 2 + 2\cos\alpha_k^n$, where $\alpha_k^n = \pi\frac{n+1-k}{n+1}$. In fact $P_n(t) = U_n(1-\frac{1}{2})$ where the U_n's are the Tchebycheff polynomials of the second kind ([3], 10.11). Now we have $L_l = \sum_{k=1}^n (t_k^{(n)})^l y_k^n \sum_{j=1}^n f(j)\sin j\alpha_k$ (because A_n is symmetric), where y_k^n are the coefficients of the decomposition $e_n = \sum y_k^n X_k^n$, where $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ is the vector-column and X_n^k are the eigenvectors of A_n with $x_{k,j}^n = \sin\left(j\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k, j \leqslant n$. The calculations, almost identical to those of [1], using the same trigonometrical identities and formula for the determinant, lead us to the conclusion that g_{v_L}, up to a constant factor, is given by the formula

$$g_{v_L}(t_k^{(n)}) = c t_k^{(n)} \sum_{j=1}^n f(j)\frac{\sin j\alpha_k^n}{\sin\alpha_k^n}, \quad \text{where every} \quad \frac{\sin j\alpha_k^n}{\sin\alpha_k^n}$$

is of course the polynomial of $t_k^{(n)}$ (the Tchebycheff polynomial of the second kind of $(t_k^{(n)} - 2)$).

Contrary to [1], we suppose here that U_f is such that the second condition of our theorem, concerning the nonexistence of polynomial, is fulfilled. May be, this is always or almost always so. The arguments of [1] help one to check this at least in every concrete case. We shall control the first condition (concerning the divisibility). For the case $f \equiv 1$ (considered in [1]) it is often violated, contrary to the formulation of [1].

We investigate more carefully the polynomials $P_n(t)$ and matrices A_n in order to use their properties described below (maybe all of them are known) in our situation.

There are two cases.

1) n is even. Consider the new basis $(e_1, \dots, e_{n/2}, e'_1, \dots, e'_{n/2})$; $e_j = (0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0)$, $e'_j = (0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0 \underset{n+1-j}{1} 0 \dots 0)$. As it is easy to see, the matrix in this basis is:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \vdots & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} & & \vdots & & & & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & & \mathbb{O} & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \vdots & & & & & & \\ & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 & \vdots & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \vdots & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & \vdots & 2 & 1 & & & & \\ & & & & & & \vdots & 1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} & \\ & & & \mathbb{O} & & & \vdots & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & \vdots & & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & \vdots & & & & & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \} \frac{n}{2} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \} \frac{n}{2} \end{matrix}$$

It follows that $P_n(t) = (P_{\frac{n}{2}}(t) - P_{\frac{n}{2}-1}(t))(P_{\frac{n}{2}}(t) + P_{\frac{n}{2}-1}(t))$. One can still prove this identity trigonometrically as other identities with U_n (what is mentioned in [3]). Denote by A^* the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & 1 & & & \vdots & & \\ & & \ddots & & \vdots & \mathbb{O} & \\ & \mathbb{O} & & 1 & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ & & & & \vdots & & \\ & & \mathbb{O} & & \vdots & \mathbb{O} & \\ & & & & \vdots & & \end{pmatrix} * A'$$

We have that the characteristic polynomial of A^* is $P_{\frac{n}{2}}(t) - P_{\frac{n}{2}-1}(t) = \dots - \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2}t + 1$ (what is easy to check). So, for any f_1 such that U_{f_1}

is the linear combination of e_j's with integer coefficients having g.c.d. 1, by the argument analogous to that in [1], we get that for every $j \leqslant \frac{n}{2}$ the sequence of j-th components of $A^{*l}U_{f_1}$ satisfies our condition concerning the divisibility. Now take arbitrary f_2 with $U_{f_2} \in \operatorname{span}(\{e'_j\})$. For the function $f = f_1 + f_2$, we obtain that the condition on the n-th component for it is satisfied too. Really, for every m $A'^m U_f - A^{*m} U_{f_1} \in \operatorname{span}(\{e'_j\})$. Taking into account the symmetry of the last difference, we conclude that the components of $A'^m U_f$ can have the common divisor > 1 only if the components of A^{*m} have, what is not the case as we have seen. So the g.c.d. is always 1, that implies our assertion in the same way.

2) n is odd, $n = 2k+1$. Consider the basis $(e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k+1})$.

$$e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0);$$

$$e'_j = \begin{cases} (0, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0, \underset{n+1-j}{1}, 0, 0) & j < k+1 \\ (0, \dots, 0, \underset{k+1}{1}, 0, \dots, 0) & j = k+1. \end{cases}$$

The matrix, in this basis, is

$$A' = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
2 & 1 & & & & & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} & & & & & & & \\
 & 1 & \ddots & \ddots & & & & & & \mathbb{O} & & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 & & & & & & & \\
 & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} & \\
 & & \mathbb{O} & & & & & 1 & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \ddots & 2 & 1 & \\
 & & & & & & & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & & & & & & 2 & 2
\end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k+1 \end{array}$$

It follows that $P_n(t) = P_k(t)(P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t))$. Formulas (37), (38) from [3] 10.11 imply this relation too.

The matrix A^* here is analogous to A_k. So some vectors from the $\operatorname{span}(\{e_j\})$ can satisfy our condition considering the matrix A_k. Just like

in the first case, we see that if it is so for some function f_1 with $U_{f_1} \in \operatorname{span}(\{e_i\})$ and f_2 is such that $U_{f_2} \in \operatorname{span}(\{e'_j\})$, then it is so for $f_1 + f_2$. Consider now in both cases the "bad" possibilities $U_f \in \operatorname{span}(\{e'_j\})$ that was the case in [1]. The calculation of $P_k(t) + P_{k-1}(t)$ and $P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t)$ shows that rather often the $(n+1)$-adic discrete component of the spectrum in the first case and the 2-adic component in the second one is guaranteed. It is evident that the d-adic component is guaranteed if our polynomial is $\pm t^n + dg(t)$, where $g(t)$ has integer coefficients. On the other hand, the following trivial lemma (an analog of lemma of [1] and other similar assertion) shows what are the obstacles to occurring of such a component.

Lemma. Let $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n$ be the polynomial with the integer coefficients, such that for some integer matrix A, $f(A) = 0$. Let k, r be the natural numbers such that $K \nmid a_{n-r-1}$ and $K | a_{n-i}$, $0 \leqslant i < r+1$. If for some integer vector a $K | A^s a$, where s is a positive integer, then $K | A^{r+1} a$.

For the calculation of coefficients we use the Tchebycheff polynomials of the first kind $T_n(x)$.

One can easily check (using the recurrence) that

$$P_k(t) = \frac{(1-\frac{t}{2})T_{k+1}(1-\frac{t}{2}) - T_k(1-\frac{t}{2})}{t(\frac{t}{4}-1)}. \tag{1}$$

(1) and recurrences imply that $P_{k-1}(t) = \frac{T_{k+1}(1-\frac{t}{2}) - T_k(1-\frac{t}{2})(1-\frac{t}{2})}{t(\frac{t}{4}-1)}$. So $P_k + P_{k-1} = -\frac{2}{t}(T_{k+1}(1-\frac{t}{2}) - T_k(1-\frac{t}{2}))$. There is a representation of T_m by means of the hypergeometric function $T_m(x) = F(m, -m, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2})$. So

$$T_m\left(1-\frac{t}{2}\right) = F\left(m, -m, \frac{1}{2}, \frac{t}{4}\right) = 1 + \frac{m}{2}\sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s} C_{m+s-1}^{2s-1} (-t)^s,$$

$$P_k(t) + P_{k-1}(t) = t^k(-1)^k + \sum_{s=1}^{k} (-t)^{s-1} \Big(\frac{k+1}{s} C_{k+s}^{2s-1} - \frac{k}{s} C_{k+s-1}^{2s-1} \Big).$$

For many (not for all) values of k all differences are divisible by $2k+1$. It is not the case, for example, for $k = 10, s = 2$. For $P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t)$ we get analogously

$$P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t) = 2T_{k+1}\left(1-\frac{t}{2}\right) = 2 + (1+k)\sum_{s=1}^{k+1} \frac{1}{s} C_{k+s}^{2s-1} (-t)^s.$$

The parity of every coefficient is the same as that of C_{k+s}^{2s-1}. Regardless of a great variety of situation, we see that for many values of $n \geqslant 4$, a lot of weak mixing dynamical systems exists. By simple induction, one can see that this is the case for all $n \neq 2^l - 1, l > 2$. To prove that this is the case only for such n, one must check that if $k + 1 = 2^{l-1}$, then all $\frac{1+k}{s} C_{k+1}^{2s-1}$, $s \leqslant k$, are even. This is evident.

References

1. A. N. Livshits, *Some examples of adic transformations and substitutions.* Selecta Mathematica Sovietica, **11**:1 (1992), 83–104.
2. A. N. Livshits, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and of stationary adic transformations.* Mat. Zametki **44**:6 (1988), 785–793.
3. H. Bateman and G. Erdelyi, *Higher transcendental functions.* Vol. **2**, Moscow, 1974.

О СУММАХ КООРДИНАТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОДСТАНОВОЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе [1] рассматривались примитивные подстановки, имеющие матрицы со спектрами, удовлетворяющими некоторым соотношениям. В [1] получена асимптотика сумм значений некоторых функций от координат для неподвижных точек подстановок из этого класса. Цель данной заметки — доказательство существования предельных распределений для некоторых последовательностей надлежаще нормированных сумм координатных случайных величин, соответствующих этим функциям [2, 3] на фазовом пространстве динамических систем (подстановочных или адических [4]), порожденных подстановками, рассматривавшимися в [1].

Сформулируем результат [1]. Пусть $Z_* = \{u_i\}_{i=1}^k$ — алфавит и $\mathcal{A} = \{A\}_{i=1}^k$ — набор слов в нем, $\omega_{\mathcal{A}} : \bigcup\limits_{l>0} Z_*^l$ — отображение множества (интерпретируемого как множество непустых слов $(Z_*)^+$) в себя: $\omega_{\mathcal{A}}(u_{i_1} \dots u_{i_l}) = A_{i_1} \dots A_{i_l}$. Отображение $\omega_{\mathcal{A}}|_{Z_*}$ называется подстановкой. Ей соответствует матрица $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij}) : g_{ij} = |A_i|_j, 1 \leqslant i, j \leqslant k$, [4]. Предположим, что матрица $G_{\mathcal{A}}$ примитивна и (см. [1]) ее собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (некоторые могут быть кратными) удовлетворяют соотношению $\lambda > \lambda_1 > \max\limits_{\lambda \leqslant i \leqslant s} |\lambda_i|$. Если теперь $f : Z_* \to R$ — такая функция, что $\sum f(i)\mu_i = 0$, где $(\mu_i)_{i=1}^k$ – собственный вектор ${}^tG_{\mathcal{A}}$, отвечающий собственному числу Перрона–Фробениуса λ, $\alpha + 1$ – кратность корня λ_1 минимального многочлена $G_{\mathcal{A}}$, а w, l', i, $1 \leqslant i \leqslant k$, таковы, что $\omega_{\mathcal{A}}^{l'}(u_i) = u_i w$, то существует такая (вещественная, гельдеровская, нигде не дифференцируемая) функция $F_{f,i}(x)$, что если

Записки научных семинаров ПОМИ, **216** (1994), 104–109.

$\omega_{\mathcal{A}}^{l'\cdot\infty}(u_i) = a_0 a_1 \ldots$, то

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(a_j) = N^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} (\log N)^{\alpha} F_{f,i}(N) + \Psi_{f,i}(N),$$

где $\bigl|\Psi_{f,i}(N)\bigr| = o\Bigl(N^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} (\log N)^{\alpha}\Bigr)$ и $F_{f,i}(\lambda^{l'}x) = F_{f,i}(x)$ для любого x.

Зафиксируем теперь произвольное натуральное M и рассмотрим дискретную случайную величину ξ_{M} с конечным множеством значений и вероятностями:

$$P_{M}(\beta) = \mathrm{Fr}\Bigl\{ l \geqslant 0 \;\Big|\; \sum_{j=l}^{j=l+M-1} f(a_j) \times \Bigl(M^{\frac{\log\lambda_1}{\log\lambda}} (\log M)^{\alpha} \Bigr)^{-1} = \beta \Bigr\}.$$

Поскольку матрица $G_{\mathcal{A}}$ примитивна, фигурирующие в определении частоты всегда существуют и не зависят от выбора (i,l), более того, существуют частоты встречи каждого фиксированного слова длины M [5]. Обозначим через H_{M} число $M^{\frac{\log\lambda_1}{\log\lambda}} (\log M)^{\alpha}$ и, для произвольного слова $B = b_1 \ldots b_j$, $f(B) = \sum_{l=1}^{j} f(b_l)$. Вследствие одноэргодичности подстановочных динамических систем ясно, что эта случайная величина и является суммой M координатных случайных величин, связанных с функцией, пропорциональной функции f от нулевой координаты точки фазового пространства подстановочной или адической динамической системы. Эта конструкция упоминается в [2], а для подстановки Рудина–Шапиро дополнительно с рассмотрением более широкого класса случаев разбиралась в [3]. Естественно задаться вопросом, каковы предельные точки множества $\{P_{M}\}$ в слабой топологии. Ответ дается нижеследующей теоремой.

Пусть

$$\begin{aligned} \Pi = \Bigl\{ l \;\Big|\; & \exists\, a \in Z_*,\ w \in (Z_*)^+,\ \omega_{\mathcal{A}}^{l}(a) = aw \\ & \text{или} \quad \exists\, a' \in Z_*,\ w' \in (Z_*)^+ : \omega_{\mathcal{A}}^{l}(a') = w'a' \Bigr\} \end{aligned}$$

и r — наибольший общий делитель всех чисел из Π. Если γ – произвольное положительное число, то последовательность натуральных чисел $M_l \to \infty$ называется последовательностью типа γ, если существует такая последовательность натуральных чисел p_l, что $M_l \lambda^{-rp_l} \to \gamma$ при $l \to \infty$. Очевидно, что если $M_l' \to \infty$, то существуют γ и последовательность натуральных чисел l_k, такие, что $\{M_{l_k}'\}$ – последовательность типа γ, стало быть, наша теорема, как будет видно из ее формулировки, полностью описывает предельные точки множества $\{P_{M}\}$.

Теорема. Если $\{M_k\}$ — последовательность типа γ, то последовательность распределений P_{M_k} слабо сходится. Предельное распределение зависит только от γ.

Доказательство. Пусть $r' \in \Pi$. Предположим, что для некоторого a' имеем $\omega_{\mathcal{A}}^{r'}(a') = w'a'$ (случай $\omega_{\mathcal{A}}^{r'}(a) = aw$ рассматривается аналогично). Рассмотрим последовательность $\dots b_{-s} \dots b_{-1} = \omega_{\mathcal{A}}^{r'^{\infty}}(a')$. Вполне аналогично теореме из [1] можно доказать существование такой функции $F_{f,i}^*$, что

$$\sum_{j=-N}^{-1} f(b_j) = H_N F_{f,i'}^*(N) + \Psi_{f,i'}^*(N),$$

$$\text{где} \quad |\Psi_{f,i'}^*(N)| = o(H_N), \quad F_{f,i}^*(\lambda^{r'} x) = F_{f,i}^*(x).$$

Очевидно, существует такое натуральное R, что если для некоторого $M > 1$ верно $M = \gamma_0 \lambda^{lr'}$, $1 \leqslant \gamma_0 < \lambda^{r'}$, то $M < \left|\omega_{\mathcal{A}}^{(l+R)r'} a\right|$ для любого $a \in Z_*$. Зафиксируем такое R. Обозначим $(l+R)r'$ через $q = q(M)$. Введем теперь две системы дискретных мер на прямой $\{\overline{P}^{\,r'}_{M,b}\}$, $\{\overline{P}^{\,r'}_{M,bb'}\}$, $b, b' \in Z_*$:

$$\overline{P}^{\,r'}_{M,b}(\beta) = \frac{\#\{(w, w', w'') : \omega_{\mathcal{A}}^q(b) = ww'w'',\ |w'| = M,\ f(w') = \beta\}}{\left|\omega_{\mathcal{A}}^q(b)\right| - M + 1},$$

$$\overline{P}^{\,r'}_{M,bb'}(\beta) =$$

$$\frac{\#\{\,(w, v, v', w') : v, v' \text{ непусты}; |v| + |v'| = M,\ f(vv') = \beta, wv = \omega_{\mathcal{A}}^q(b); v'w' = \omega_{\mathcal{A}}^q(b')\,\}}{M - 1}.$$

Известно [5], что частота встречи символа b в $\omega_{\mathcal{A}}^{r'^{\infty}}(a')$ равна μ_b. Обозначим через $\mathrm{Fr}(bb')$ частоту встречи пары bb' в последовательности $\omega_{\mathcal{A}}^{r'^{\infty}}(a')$ (эта частота такова же для любой траектории или полутраектории динамической системы). Пусть

$$D_M = \sum_{u_i \in Z_*} \mu_i \Big(\left|\omega_{\mathcal{A}}^q(u_i)\right| - M + 1 \Big) + (M-1) \sum_{b,b' \in Z_*} \mathrm{Fr}(bb') =$$

$$= \sum \mu_i \left|\omega_{\mathcal{A}}^q(u_i)\right| = \lambda^q.$$

Для вероятностной меры P_{M}, соответствующей случайной величине ξ_{M}, имеем (предполагая, что B — множество на прямой)

$$P_{M}\big(H_{M}^{-1}B\big) = D_{M}^{-1}\Bigg(\sum_{u_i\in Z_*} \mu_i\Big(\big|\,\omega_{\mathcal{A}}^{q}(u_i)\big| - M + 1\Big)\,\overline{P}^{\,r'}_{M,u_i}(B) + \\ + (M-1)\sum_{b,b'\in Z_*} \mathrm{Fr}\,(bb')\,\overline{P}^{\,r'}_{M,bb'}(B)\Bigg). \quad (1)$$

Равенство (1) следует из того, что

$$\ldots b_{-s}\ldots b_{-1} = \omega_{\mathcal{A}}^{r'\infty}(a') = \ldots\omega_{\mathcal{A}}^{q}(c_{-s})\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{q}(c_{-1}),$$

где для последовательности $\ldots c_{-s}\ldots c_{-1}$ соответствующие частоты те же, что и в формуле (1), правая часть которой соответствует перечислению возможных вариантов расположения в словах $\omega_{\mathcal{A}}^{q}(c_{-i})$ символов $a_l\ldots a_{l+M-1}$ из определения ξ_{M}. Пусть φ – финитная непрерывная функция на прямой с модулем непрерывности $\Omega(\delta)$. Обозначим $\overline{\Psi}^{\,*}_{f,i'}(N) = \sup\limits_{0<x<N}\big|\Psi^{*}_{f,i'}(x)\big|$. Мы предполагаем, что $\mathrm{Fr}\,(bb') > 0$.

Лемма. Существуют такие непрерывные функции $g_{b}^{r'}(x)$, $g_{bb'}^{r'}(x)$, определенные на отрезке $[1,\lambda^{r'})$, что имеют место неравенства:

$$\Bigg|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\big(H_{M}^{-1}x\big)\,d\overline{P}^{\,r'}_{M,b} - g_{b}^{r'}(\gamma_0)\Bigg| \leqslant \\ \leqslant \Omega\Big(\frac{c_1\,\overline{\Psi}^{\,*}_{f,i'}(c_2\,M)}{H_{M}}\Big) + \Omega\Big(\frac{c_3}{\log M}\Big) + c_4\,\frac{H_{M}}{M} + c_5\,\Omega\Big(\frac{c_6}{M}\Big),$$

$$\Bigg|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\big(H_{M}^{-1}x\big)\,d\overline{P}^{\,r'}_{M,bb'} - g_{bb'}^{r'}(\gamma_0)\Bigg| \leqslant \\ \leqslant \Omega\Big(\frac{c_1^{*}\,\overline{\Psi}^{\,*}_{f,i'}(c_2^{*}\,M)}{H_{M}}\Big) + \Omega\Big(\frac{c_3^{*}}{\log M}\Big) + c_4^{*}\,\frac{H_{M}}{M} + c_5^{*}\,\Omega\Big(\frac{c_6^{*}}{M}\Big).$$

где $c_1,\ldots,c_6$; $c_1^{*},\ldots,c_6^{*}$ — некоторые константы.

Доказательство. Докажем существование $g_{bb'}$ и вторую оценку. Рассмотрение первого случая аналогично. Выберем наименьший номер $j>1$, для которого $c_{-j-1}\,c_{-j} = bb'$. Обозначим через $T_q = T_{q(M)}$

сумму $\sum\limits_{p=-j}^{-1} \bigl|\omega_{\mathcal{A}}^{q}(c_p)\bigr|$. Тогда

$$I_{M} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\bigl(H_{M}^{-1}x\bigr)\, d\overline{P}_{M,bb'}^{\,r'} = \\ = \frac{1}{M-1} \sum_{t=-T_q-M+1}^{-T_q-1} \varphi\biggl(H_{m}^{-1} \sum_{t'=t}^{t'=t+M-1} f(b_{t'})\biggr).$$

Поскольку j не зависит от q, существует такая константа $E>0$, что $T_q + M < EM$. Но

$$\sum_{t'=t}^{t'=t+M-1} f(b_{t'}) = \sum_{t'=t}^{t'=-1} f(b_{t'}) - \sum_{t'=t+M}^{t'=-1} f(b_{t'}) = \\ = H_{-t}\, F_{f,i'}^{*}(-t) - H_{-t-M}\, F_{f,i'}^{*}(-t-M) + \Psi_{f,i'}^{*}(-t) - \Psi_{f,i'}^{*}(-t-M).$$

Отсюда

$$\biggl| I_{M} - \frac{1}{M-1} \sum_{t=-T_q-M+1}^{t=-T_q-1} \varphi\biggl(\frac{H_{-t}}{H_{M}}\, F_{f,i'}^{*}(-t) - \frac{H_{-t-M}}{H_{M}}\, F_{f,i'}^{*}(-t-M)\biggr)\biggr| \leqslant \\ \leqslant \Omega\biggl(\frac{c_1^{*}\,\overline{\Psi}_{f,i'}^{*}(c_2^{*}M)}{H_{M}}\biggr).$$

Далее,

$$\biggl| \frac{H_{-t}}{H_{M}} - \biggl(\frac{-t}{M}\biggr)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}}\biggr| + \biggl| \frac{H_{-t-M}}{H_{M}} - \biggl(-\frac{t}{M}-1\biggr)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}}\biggr| < c_3^{*}\,(\log M)^{-1}.$$

Величина $T_q/\lambda^{lr'}$ имеет предел Q при $l\to\infty$ и отклонение от него имеет порядок H_{T_q}/T_q, или, что то же самое, H_{M}/M, потому что при фиксированном c последовательность $\bigl|\omega_{\mathcal{A}}^{q}(c)\bigr|$ является рекуррентной, причем соответствующий полином является характеристическим полиномом $G_{\mathcal{A}}$. Далее, по свойствам функции $F_{f,i'}^{*}$ имеем: $F_{f,i'}^{*}(-t) = F_{f,i'}^{*}\Bigl(-\frac{t}{\lambda^{lr'}}\Bigr)$. Таким образом, дело свелось к сумме

$$\frac{1}{M-1} \sum_{t=-T_q-M+1}^{-T_q-1} \varphi\biggl(\Bigl(\frac{-t}{M}\Bigr)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} F_{f,i'}^{*}\Bigl(\frac{-t}{\lambda^{lr'}}\Bigr) - \Bigl(-\frac{t}{M}-1\Bigr)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} F_{f,i'}^{*}\Bigl(-\frac{t}{\lambda^{lr'}} - \frac{M}{\lambda^{lr'}}\Bigr)\biggr).$$

Ее, с погрешностью, грубо оцениваемой последним слагаемым в лемме, можно заменить интегралом

$$I(\gamma_0) = \int\limits_{-Q-\gamma_0}^{-Q} \varphi\left(\left(\frac{-y}{\gamma_0}\right)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} F^*_{f,i'}(-y) - \left(-\frac{y}{\gamma_0} - 1\right)^{\frac{\lg\lambda_1}{\lg\lambda}} F^*_{f,i'}(-y-\gamma_0)\right) dy, \quad (2)$$

который и берется в качестве значения функции $g^{r'}_{bb'}(\gamma_0)$.

Для первого случая из формулировки леммы несколько изменяются пределы интегрирования. Если обозначить через $j' > 1$ наименьший номер, для которого $c_{-j'} = b$, через T'_q — сумму $\sum\limits_{p=-j+1}^{-1} \left|\omega^q_{\mathcal{A}}(c_p)\right|$, через Q' — $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{T'_q}{\lambda^{lr'}}$, через Δ — $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{|\omega^q_{\mathcal{A}}(b)|}{\lambda^{lr'}}$, получим для $g^{r'}_b(\gamma_0)$ интеграл от $-Q' - \Delta$ до $-Q' - \gamma_0$. Лемма доказана.

Из формулы (2) видно, что модуль непрерывности функций $g^{r'}_{bb'}(\gamma_0)$ ($g^{r'}_b(\gamma_0)$) может быть естественным образом промажорирован функцией, которую легко выразить через модули непрерывности φ и $F^*_{f,i'}$.

Теперь, пользуясь формулой (1) и тем, что коэффициенты в правой части (1) при больших M также близки к значениям некоторых функций от γ_0, можно легко доказать следующее утверждение: существуют такие положительные последовательность δ_M ($\delta_M \to 0$ при $M \to \infty$) и функция $\delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), что если $r' \in \Pi$ и $M_2/M_1 = (1+\varepsilon)\lambda^{r'l'}$, $l' > 0$ — целое, $M_1 > M$, то

$$\left| \int \varphi\, dP_{M_1} - \int \varphi\, dP_{M_2} \right| < \delta_M + \delta(\varepsilon).$$

Поскольку r является наибольшим общим делителем конечного набора элементов Π, теорема доказана.

Литература

1. J.-M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*. Theor. Comput. Sci. **65**:2 (1989), 153–169.
2. А. Н. Лившиц, *Об одной стационарной последовательности случайных величин*. Препринт ПОМИ P-5-92, 1992.
3. А. Н. Лившиц, *О предельных распределениях и асимптотике экстремальных значений для некоторых последовательностей случайных величин*. Зап. научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 104–109.
4. А. Н. Лившиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*. Матем. заметки **44**:6 (1988), 785–793.
5. M. Queffélec, *Substitution dynamical systems — spectral analysis*. Lect. Notes Math. **1294** (1987).

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДЕКОДИРУЕМОСТИ ДОПУСТИМЫХ СЛОВ ПРИМИТИВНЫХ ПОДСТАНОВОК

Пусть $Z_* = \{1, \dots, n\}$ — алфавит и $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ — набор слов в нем. Определены подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ и матрица $G_{\mathcal{A}}$ (см. [1]), про которую предполагается, что она примитивна. В теории динамических систем с помощью $\omega_{\mathcal{A}}$ определяется некоторое пространство последовательностей, конечные отрезки которых имеют линейную асимптотику сложности, благодаря чему вопросы о кодировании – декодировании для последовательностей из такого пространства и их конечных подслов оказываются весьма специфическими. Эти вопросы о кодировании – декодировании рассматривались рядом авторов, предлагавших и использовавших различные определения при изучении подстановочных динамических систем а также изучавших вопрос о том, для каких подстановок те или иные свойства декодирования имеют место [1–7]. Цель данной заметки — продолжение таких исследований с помощью концепции пространства структурированных последовательностей, для которого, в применении к теории динамических систем, вопрос о декодировании не стоит (так же, как и для адического представления подстановочных динамических систем [1, 7]). Будет предложено описание (в терминах наборов допустимых слов) классов подстановок, для которых не выполнены некоторые сильные условия декодирования — то есть такие, которые для нужд эргодической теории и для построения самого пространства допустимых последовательностей с однозначно определяемой иерархической структурой оказались избыточными, но могут представлять интерес сами по себе.

Сначала приведем определения пространств допустимых последовательностей и структурированных допустимых последовательностей. Первое пространство имеет различные определения. Наиболее

Записки научных семинаров ПОМИ, **223** (1995), 127–136.

простое из встречающихся в литературе выглядит следующим образом: $X_{\mathcal{A}} = \{x = \{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \mid$ для любых конечных $p, q, p \leqslant q$ существуют такие $k, r, s \in N, l \in Z_*$, что $x(p,q) = (\omega_{\mathcal{A}}^k(l))(r,s)\}$, где для любого конечного или бесконечного слова A с пронумерованными символами $A = a_v \dots a_{v+t-1}$ $A(m,n)$ означает $a_m \dots a_n, v \leqslant m \leqslant n \leqslant v+t-1$. В [8] такое определение используется при изучении спектра соответствующих динамических систем.

Если $v > -\infty$, то через A° обозначим слово $B = b_1 \dots b_t$, $b_i = a_{v+i-1}, 1 \leqslant i \leqslant t$. Мы предполагаем в нашем определении, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(A^\circ) = \omega_{\mathcal{A}}^k(A^\circ)^\circ$. Вообще, если в слове D не фиксируется нумерация символов, то по умолчанию будем предполагать, что $D = D^\circ$. Слово D с пронумерованными символами назовем допустимым, если найдутся такие m, l, r, s, $m \in Z_*$, что $D^\circ = (\omega_{\mathcal{A}}^l(m))(r,s)^\circ$. Последовательность (бесконечное слово) $x = \{b_j\}_{j=u}^{v}$ называется допустимой, если для любых конечных целых $t_1, t_2, u \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant v$ слово $x(t_1, t_2)$ — допустимо. Ясно, что это определение эквивалентно обычному при $u = -\infty$, $v = \infty$, и легко видеть, что если x допустима, то существует такая допустимая последовательность $y = \{y_i\}$, что $x = y(u, v)$.

Для того, чтобы определить второе пространство, введем сначала понятие (обобщенной) структурированной последовательности (см., например, [9]).

Итак, предположим, что фиксированы такие Z_* и $\mathcal{A}$, что $G_{\mathcal{A}}$ — примитивна, и определено отображение $\omega_{\mathcal{A}}$. Структурированная последовательность определяется как пара

$$x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\},$$

где для каждого l последовательность $S_x^l = \{i_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}$ есть последовательность элементов Z_*, а $\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}$ — последовательность таких целых чисел, что:

1) если $l_1 < l_2$, то $\{n_{r,x}^{l_2}\}_{r=-\infty}^{\infty} \subset \{n_{r,x}^{l_1}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ в естественном смысле, если $r_1 < r_2$, то для каждого $l \geqslant 0$ $n_{r_1,x}^l < n_{r_2,x}^l$,

2) $n_{-1,x}^l \leqslant 0 \leqslant n_{0,x}^0$ для каждого $l \geqslant 0$,

3) $i_{n_r^l+1,x}^0 \dots i_{n_{r+1}^l+1,x}^0 = \omega_{\mathcal{A}}^l(i_{r+1,x}^l), l \geqslant 0, -\infty < r < \infty$,

4) если для некоторых r, Δ, r' в соответствии с 1) мы имеем $n_{r',x}^l = n_{r,x}^{l+1}$, $n_{r'+\Delta}^l = n_{r+1,x}^{l+1}$, то $\omega_{\mathcal{A}}(i_{r+1,x}^{l+1}) = i_{r'+1,x}^l \dots i_{r'+\Delta,x}^l$.

Очевидно, что из 4) следует 3). Ясно также, что $n_{r,x}^0 = r$ для любых r, x^s. На множестве структурированных последовательностей с естественно определяемыми слабой топологией и соответствующей ей

метрикой действует группа гомеоморфизмов (вообще говоря не минимальных), которая будет обозначаться $\{(T^s_{\mathcal{A}})^q\}^{\infty}_{q=-\infty}$. Сначала опишем метрику. Пусть ρ — метрика, соответствующая слабой сходимости в пространствах последовательностей элементов Z_* или множества целых чисел:

$$\rho(\{a_i\}^{\infty}_{i=-\infty}, \{b_i\}^{\infty}_{i=-\infty}) = \exp(\min\{-r : a_i = b_i,\ -r \leqslant i \leqslant r),$$

$\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 \ldots, \sum \rho_i < \infty$ — последовательность положительных вещественных чисел. Имеем $d(x^s_1, x^s_2) = \sum^{\infty}_{l=0} \rho_l \rho(S^l_{x_1}, S^l_{x_2}) + \sum^{\infty}_{l=0} \rho_l \rho(\{n^l_{r,x_1}\}^{\infty}_{r=-\infty}), \{n^l_{r,x_2}\}^{\infty}_{r=-\infty})$. Для любого $l \geqslant 0$ обозначим через $H(l,q)$ такое p, что $n^l_{p-1,x} + 1 \leqslant q \leqslant n^l_{p,x}$(например, $H(0,q) = q$). Через $\{n^{l,q}_{r,x}\}^{\infty}_{r=-\infty}$ обозначим последовательность $\{n^l_{r+H(l,q),x} - q\}^{\infty}_{r=-\infty}$ и через $(T^s_{\mathcal{A}})^q x^s$ — пару $\{\{T^{H(l,q)} S^l_x\}^{\infty}_{l=0}, \{\{n^{l,q}_{r,x}\}^{\infty}_{r=-\infty}\}^{\infty}_{l=0}\}$, где T — обычный сдвиг последовательности элементов Z_*. Легко проверить, что для структурированной последовательности $(T^s_{\mathcal{A}})^q x^s$ выполнены условия 1)–4). Заметим, что в соответствии с 1)–4) знание $S^{l_k}_x, n^{l_k}_{0,x}$ для некоторой последовательности $l_k \to \infty$ однозначно определяет x^s. Пользуясь этим, мы введем некоторый класс конкретных структурированных последовательностей–последовательностей, определяемых с помощью порождающих четверок

Порождающей четверкой [1] называется такая четверка натуральных чисел $(i,j,m,n'), i \leqslant n, j+1 \leqslant |a_i|$, что существуют такие символы $a,b,c,d \in Z_*$, что: 1) c и d являются, соответственно, j и $j+1$ символами слова A_i; 2) слово $\omega^m_{\mathcal{A}}(c)$ кончается на a и слово $\omega^m_{\mathcal{A}}(d)$ начинается с b; 3) $\omega^{n'}_{\mathcal{A}}(a)$ кончается на a и $\omega^{n'}_{\mathcal{A}}(b)$ начинается с b. Порождающие четверки существуют для любой подстановки.

Пусть (i,j,m,n') — некоторая порождающая четверка. Определим структурированную последовательность $x^s(i,j,m,n')$ как $\{\{S^l_x\}^{\infty}_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^{\infty}_{r=-\infty}\}^{\infty}_{l=0}\}$, где все $n^l_{0,x} = 0$ а все $S^{in'}_x$ одинаковы и равны той последовательности (отображению $x^{\infty} : (-\infty, \infty) \to Z_*$), которая была построена в определении $X_{\mathcal{A}}$ из [1] (аналогичном соответствующему определению [10]). Если предполагать, что нумерация — естественная, то можно эту последовательность обозначить $\omega^{n'\infty}_{\mathcal{A}}(a)\omega^{n'\infty}_{\mathcal{A}}(b) = x(i,j,m,n'), \omega^{n'\infty}_{\mathcal{A}}(b)^{\circ} = x(i,j,m,n')(1,\infty)$.

Структурированная последовательность $x^s = \{\{S^l_x\}^{\infty}_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}^{\infty}_{r=-\infty}\}^{\infty}_{l=0}\}$ называется допустимой структурированной последовательностью, если дополнительно выполнено следующее условие:

5) Имеют место три возможности:

а) $n^l_{-1,x} \to -\infty, n^l_{0,x} \to \infty$ при $l \to \infty$,

б) существуют такие h, L, что $n^l_{0,x} = h \geqslant 0$ для всех $l > L$-в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} x^s(i, j, m, n'),$$

в) существуют такие h, L, что $n^l_{0,x} = h \geqslant 0$ для всех $l > L$ — в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} x^s(i, j, m, n').$$

Пространство всех допустимых структурированных последовательностей со слабой топологией является вполне несвязным компактом. Обозначим его через $X^s_{\mathcal{A}}$, определенный выше гомеоморфизм «сдвига» — также через $T^s_{\mathcal{A}}$.

Естественная проекция $p : X^s_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}(p(x^s) = S^0_x)$ является сюръекцией. В случае примитивности $G_{\mathcal{A}}$ наша динамическая система строго эргодична. Теперь приведем определения цикличности, распознаваемости, детерминированности и ОДД [1–7].

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется циклической, если $X_{\mathcal{A}}$ состоит из единственной периодической траектории $T_{\mathcal{A}}$. Слово $w \in (Z_*)^+$ (автоматически допустимое) называется определенным (детерминированным), если для любой такой пары допустимых слов $j^1_0 B'_1 j^1_1 = B_1,\ j^2_0 B'_2 j^2_1 = B_2$ и таких натуральных чисел

$$m^l_j, 1 \leqslant l, j \leqslant 2, \text{что } \omega_{\mathcal{A}}(B_l)(m^l_1, m^l_2)^\circ = w^\circ$$

и $m^l_1 \leqslant |\omega_{\mathcal{A}} j^l_0| < |\omega_{\mathcal{A}}(j^l_0 B'_l)| < m^l_2 \leqslant |\omega_{\mathcal{A}}(B_l)|, 1 \leqslant l \leqslant 2$, имеют место равенства $B'_1 = B'_2, |\omega_{\mathcal{A}} j^1_0| - m^1_1 = |\omega_{\mathcal{A}} j^2_0| - m^2_1$.

При этом, заметим, возмóжно, что $m^1_1 = m^2_1 = 1, j^1_0 \neq j^2_0$.

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется определенной, если существует такое N, что каждое допустимое слово $A \in \Sigma^+$ с $|A| > N$ определенно.

В [4] дается определение детерминированности порядка k. Детерминированность порядка k есть не что иное, как детерминированность относительно $\omega^k_{\mathcal{A}}$.

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется распознаваемой, если существует такое k, что если для некоторых натуральных чисел r,s,t и допустимого A выполнены следующие 3 условия:

1) $|\omega_{\mathcal{A}}(A)| \geqslant \max(r + k, s + k)$,

2) $(\omega_{\mathcal{A}}(A))(r + 1, r + k)^\circ = (\omega_{\mathcal{A}}(A))(s + 1, s + k)^\circ$,

3) $|\omega_{\mathcal{A}}(A(1,t))| = r$,
то существует такое $t' \geqslant 0$, что $|\omega_{\mathcal{A}}(A(1,t'))| = s$.

Подстановка называется ОДД (свойство однозначности допустимого декодирования) [1], если для всякого $x \in X_{\mathcal{A}}$ существует в точности одна последовательность $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in X_{\mathcal{A}}$, для которой найдется такая последовательность чисел $\{n_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$, $-\infty < \cdots < n_{-l} < 0 \leqslant n_0 < \cdots < \infty$, что $x(n_{r-1}+1, n_r) = \omega_{\mathcal{A}} y_r$; $-\infty < r < \infty$.

Свойство ОДД в точности эквивалентно биективности выше определявшейся проекции p. Заметим, кроме того, что если $x = p(x^s)$ для некоторого $x^s \in X_h^s$,то $y = S_x^1$ и последовательность $n_{r,x}^1$ является той (одной из тех) последовательностью $\{n_r\}$, о которой говорится в определении ОДД.

В [6] введено понятие двусторонней распознаваемости и доказано, что любая нециклическая примитивная подстановка двусторонне распознаваема. Из этой теоремы можно вывести утверждение о том, что любая примитивная нециклическая подстановка — ОДД, или получить это утверждение несущественным изменением доказательства. В [6] доказано также некоторое условие нераспознаваемости. Ниже доказывается иное условие нераспознаваемости для ОДД-подстановок, формулируется аналогичное условие недетерминированности (неопределенности). Заметим, что изучение неоднозначностей иерархического представления слов представляет самостоятельный интерес. В конце работы вводится дополнительное определение сильной детерминированности и доказывается некоторый критерий сильного детерминизма.

Теорема 1. ОДД-подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ нераспознаваема тогда и только тогда, когда существует набор допустимых слов M, M_1, M_2, X, Y, D_1, D_2, W_1, W_2, символы $e_1, e_2 \in Z_*, \omega_{\mathcal{A}}(e_1) \neq \omega_{\mathcal{A}}(e_2)$ и натуральное число T, для которых имеет место следующее: слова $W_1 e_1 X$ и $W_2 e_2 Y$ допустимы,

$$\omega_{\mathcal{A}}^T(W_1 e_1 X) = D_1 W_1 e_1 X M,$$
$$\omega_{\mathcal{A}}^T(W_2 e_2 Y) = D_2 W_2 e_2 Y M, \quad M \neq \lambda,$$
$$M_1 \omega_{\mathcal{A}} e_1 = M_2 \omega_{\mathcal{A}} e_2, \quad \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y).$$

Теорема 2. ОДД-подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ не определенна тогда и только тогда, когда для некоторого набора, состоящего из допустимых слов M, M_1, M_2 , X, X', Y, Y', D_1, D_2, D, W_1, W_2, символов $e_1, e_1', e_2, e_2' \in Z_*, e_1 \neq e_2$ и натурального числа T имеет место либо

(i) *слова* $W_1e_1'e_1X$ *и* $W_2e_2'e_2y$ *допустимы,*

$$\omega_{\mathcal{A}}^T(W_1e_1'e_1X) = D_1W_1e_1'e_1XM, \quad \omega_{\mathcal{A}}^T(W_2e_1'e_2Y) = D_2W_2e_2'e_2YM,$$

$$M \neq \lambda, \quad \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y), \quad \omega_{\mathcal{A}}(e_1'e_1) = X'D,$$
$$\omega_{\mathcal{A}}(e_2'e_2) = Y'D, |D| > \min(|\omega_{\mathcal{A}}e_1|, |\omega_{\mathcal{A}}e_2|),$$

либо

(ii) *слова* $Xe_1e_1'W_1$ *и* $Ye_2e_2'W_2$ *допустимы,*

$$\omega_{\mathcal{A}}^T(Xe_1e_1'W_1) = MXe_1e_1'W_1D_1, \quad \omega_{\mathcal{A}}^T(Ye_2e_2'W_2) = MYe_2e_2'W_2D_2,$$

$$M \neq \lambda, \quad \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y),$$
$$\omega_{\mathcal{A}}(e_1e_1') = DX', \ \omega_{\mathcal{A}}(e_2e_2') = DY', \ |D| > \min(|\omega_{\mathcal{A}}e_1|, |\omega_{\mathcal{A}}e_2|).$$

Мы будем доказывать лишь теорему 1, поскольку доказательство теоремы 2 отличается малосущественными изменениями.

Доказательство теоремы 1. Достаточность доказывается просто. Предположим, что такой набор существует,

$$\omega_{\mathcal{A}}^{Tl}(W_1e_1X) = \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}D_1 \dots \omega_{\mathcal{A}}^TD_1D_1W_1e_1XM \dots \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M$$

и

$$\omega_{\mathcal{A}}^{Tl}(W_2e_2Y) = \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}D_2 \dots D_2W_2e_2YM \dots \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M.$$

Пусть Ω — произвольное допустимое слово вида

$$\dots W_1e_1X \dots W_2e_2Y \dots$$

(его существование очевидно и связано со свойствами рекуррентности). Предполагая, что условие распознаваемости выполнено для некоторого k, выберем l таким, что $|M \dots \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M| > k$ и возьмем слово $h^{Tl}\Omega$ в качестве A. Рассмотрим подслова

$$\omega_{\mathcal{A}}(e_1XM \dots \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M) = a_1^1 \dots a_{r_1}^1$$

и

$$\omega_{\mathcal{A}}(e_2YM \dots \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M) = a_1^2 \dots a_{r_2}^2$$

слова $\omega_{\mathcal{A}}(A)$ Рассмотрение начала $a_1^j \dots a_k^j$ длины k меньшего из этих слов и слова $a_{r_{3-j}-r_j+1}^{3-j} \dots a_{r_{3-j}-r_j+k}^{3-j}$ приводит к противоречию с определением распознаваемости.

Переходим к доказательству необходимости. Предположим, что наша подстановка не распознаваема. Тогда существует последовательность наборов $(A_l, r_l, s_l, k_l, t_l, t'_l, u_l)$, где A_l — допустимые слова, $k_l \to \infty$,

$$|\omega_{\mathcal{A}}(A_l)| \geqslant \max(r_k + k_l, s_l + k_l),$$
$$(\omega_{\mathcal{A}} A)(r_l + 1, r_l + k_l)^\circ = (\omega_{\mathcal{A}} A)(s_l + 1, s_l + k_l)^\circ,$$
$$|\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, t_l))| = r_l,$$
$$|\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, t'_l))| + u_l = s_l < |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, t'_l + 1))|, \quad u_l > 0.$$

Могут представиться две возможности:

1) существуют такие последовательности натуральных чисел $f_l, g_l, k'_l \to \infty$, что при каждом l имеет место следующее:

$$|\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, f_l + h))| - r_l = |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, g_l + h))| - s_l, h = 1, \dots, k'_l \qquad (1)$$

2) таких последовательностей не существует.

Мы будем изучать первую возможность, ибо очевидно, что в противном случае можно выбрать последовательность $l_k \to \infty$ и в словах $(\omega_{\mathcal{A}}(A_l))(r_l + 1, r_l + k_l)$ можно изменить нумерацию символов таким образом, чтобы получить в качестве слабого предела допустимую бесконечную в обе стороны последовательность, не удовлетворяющую условию ОДД, что противоречит нашему основному предположению.

При каждом l обозначим через m_l такое неотрицательное целое число, для которого (1) выполнено при $h = 1 - m_l, 2 - m_l, \dots, 1$ и не выполнено при $h = -m_l$.

Предположим, не ограничивая общности, что $|\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, f_l - m_l))| - r_l < |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1, g_l - m_l))| - s_l$ для бесконечно многих значений l. Обозначим $B_l = A_l(f_l - m_l, f_l + k'_l), C_l = A_l(g_l - m_l, g_l + k'_l)$. Имеем $\omega_{\mathcal{A}}(B_l(1,1)) = V_l \omega_{\mathcal{A}}(C_l(1,1))$, где V_l-непустое слово, $\omega_{\mathcal{A}}(B_l(r,r)) = \omega_{\mathcal{A}}(C_l(r,r))$, $1 < r \leqslant m_l + k'_l + 1$. Выбирая, если нужно, подпоследовательность l_k и переходя к пределу, получим (как в [6]) такие допустимые слова V, B, C, $|V| > 0$, $B = B(1, \infty)$, $C = C(1, \infty)$, что $\omega_{\mathcal{A}}(B(1,1)) = V \omega_{\mathcal{A}}(C(1,1))$, $\omega_{\mathcal{A}}(B(r,r)) = \omega_{\mathcal{A}}(C(r,r))$, $r > 1$. Ясно, что множество таких $r > 1$, что $B(r,r) \neq C(r,r)$, конечно (если непусто), иначе можно было бы, беря надлежащие сдвиги влево $\omega_{\mathcal{A}}(B)$ и

$\omega_{\mathcal{A}}(C)$, и переходя к пределу, получить противоречие с ОДД. Обозначим $v_1 = 1 + \max\{r \mid B(r,r) \neq C(r,r)\}$. Поскольку B и C допустимы, существуют такие структурированные последовательности x^s и y^s, что $S^0_x(1,\infty) = B, S^0_y(1,\infty) = C$. Зафиксируем какие либо x^s, y^s с этими свойствами. Рассмотрим последовательности $\{n^1_{r,x}\},\ \{n^1_{r,y}\}$. Существуют такие $r^1_1 < \infty$ и $r^1_2 < \infty$, что для любого $t > 0$ $n^1_{t+r^1_1,x} = n^1_{t+r^1_2,y}$ и $i^1_{1+t+r^1_1,x} = i^1_{1+t+r^1_2,y}$, иначе, рассматривая $x^s_1,\ y^s_1$, мы снова получили бы противоречие с ОДД. Каждому r^1_1 соответствует ровно одно такое r^1_2, что эти условия выполняются(ибо подстановка нециклична), и зависимость по той же причине монотонна. Будем считать, что взято минимальное возможное r^1_1. Продолжая действовать таким же образом, получим такие последовательности $r^l_1, r^l_2,\ l = 1, 2\ldots$, что для любых $l, t > 0$ $n^l_{t+r^l_1,x} = n^l_{t+r^l_2,y}$ и $i^l_{1+t+r^l_1,x} = i^l_{1+t+r^l_2,y}$ но $i^l_{1+r^l_1,x} \neq i^l_{1+r^1_2,y}$. Конечно, при всяком l $n^{l+1}_{1+r^{l+1}_1,x} \geqslant n^l_{1+r^l_1,x},\ n^{l+1}_{1+r^{l+1}_2,y} \geqslant n^l_{1+r^l_2,y}$. Не существует такого L, что $n^l_{1+r^l_1,x} = n^L_{1+r^L_1,x}$ при всех $l \geqslant L$, ибо в этом случае наши последовательности $p(x^s)$ и $p(y^s)$ были бы сдвигами последовательностей вида w_{ab} [10]. Обозначая $Q = n^L_{1+r^L_1,x}$, мы получили бы в этом гипотетическом случае $i^0_{Q,x} = i^0_{Q,y} = a,\ i^0_{Q+1,x} = i^0_{Q+1,y} = b$. Из этого (см., например, [10]) следовало бы $x^s = y^s$, что противоречит определению r^l_1, r^l_2. Обозначим через γ_l максимальное s, для которого $n^l_{1+r^l_1-s,x} \geqslant n^{l-1}_{1+r^{l-1}_1,x}$, через δ_l — максимальное s, для которого $n^l_{1+r^l_2-s,y} \geqslant n^{l-1}_{1+r^{l-1}_2,y}$.

Существует такая константа R, что $\gamma_l, \delta_l \leqslant R,\ 1 \leqslant l < \infty$. В противном случае существовала бы такая последовательность l_k, что $\gamma_{l_k} \to \infty$, откуда, вследствие примитивности подстановки (или вследствие свойств $n^{l-1}_{t+r^{l-1}_1,x}, n^{l-1}_{t+r^{l-1}_2,y}$) вытекало бы, что $\delta_{l_k} \to \infty$ и снова можно было бы, используя допустимые последовательности $\{i^{l_k-1}_{t+r^{l_k-1}_1,x}\}^\infty_{t=2},\ \{i^{l_k}_{t+r^{l_k}_1-\gamma_{l_k},x}\}^\infty_{t=1},\ \{i^{l_k}_{t+r^{l_k}_2-\delta_{l_k},y}\}^\infty_{t=1}$, построить с помощью сдвига и предельного перехода допустимую последовательность, для которой нарушалось бы ОДД. Воспользуемся экспоненциальным ростом последовательностей $|\omega^m_{\mathcal{A}} a|$ и равномерной ограниченностью снизу частного $\frac{|\omega^m_{\mathcal{A}} a|}{|\omega^m_{\mathcal{A}} b|}$. Из этих свойств последовательностей вытекает существование такого натурального числа $h > v_1$, что $n^l_{1+r^l_1-h,x} < n^{l-1}_{1+r^{l-1}_1-h,x} < 0,\ n^l_{1+r^l_2-h,y} < n^{l-1}_{1+r^{l-1}_2-h,y} < 0, 1 \leqslant l$. Рассмотрим теперь для каждого l слова E_l и F_l : $E_l = i^l_{2+r^l_1-h,x} i^l_{3+r^l_1-h,x} \ldots i^l_{1+r^l_1,x}, F_l = i^l_{2+r^l_2-h,y} i^l_{3+r^l_2-h,y} \ldots i^l_{1+r^l_2,y}$. Алгоритм определения $r^l_j,\ j = 1, 2$ подска-

зывает следующее утверждение о последовательности $\{E_l, F_l\}$. Пусть $\omega_{\mathcal{A}}(E_l) = \alpha_1^l \dots \alpha_{p_l}^l$, $\omega_{\mathcal{A}}(F_l) = \beta_1^l \dots \beta_{q_l}^l$. Тогда

$$E_{l-1} = \alpha_{p_l - t_l - h + 1}^l \dots \alpha_{p_l - t_l}^l,\ F_{l-1} = \beta_{q_l - t_l - h + 1}^l \dots \alpha_{q_l - t_l}^l,$$

где $t_l = \min\{t \mid \alpha_{p_l - t}^l \neq \beta_{q_l - t}^l\}$. Может оказаться, что $t_l = 0$. Существует, стало быть, конечное множество

$$H \subset \{(u, v) \in Z_*^+ \times Z_*^+, |u| = |v| = h\}$$

и отображение $\phi : H \to H$, для которых $(E_l, F_l) \in H$, $1 \leqslant l \leqslant \infty$ и $(E_{l-1}, F_{l-1}) = \phi((E_l, F_l))$, $2 \leqslant l \leqslant \infty$. Разумеется, второе обстоятельство имеет место и для $l = 1$ с естественно определяемыми E_0, F_0, $E_0 = i_{v_1 - h, x}^0 \dots i_{v_1 - 1, x}^0$, $F_0 = i_{v_1 - h, y}^0 \dots i_{v_1 - 1, y}^0$. Очевидно, найдется такое T, что $(E_{l+T}, F_{l+T}) = (E_l, F_l)$. Учитывая теперь свойства ранее введенных слов V, B, C, получаем, что в качестве $e_1 X, e_2 Y$ можно взять, соответственно, подслова E_0 и F_0 : $i_{1,x}^0 \dots i_{v_1 - 1, x}^0$ и $i_{1,y}^0 \dots i_{v_1 - 1, y}^0$ с $E_0 = W_1 e_1 X$, $F_0 = W_2 e_2 Y$, в качестве T — найденное нами значение периода. Остальные слова можно получить в соответствии с условиями теоремы (M_1 и M_2 выбираются неоднозначно). Непустота M вытекает из ранее сделанных замечаний о том, что последовательность $n_{1 + r_1^l, x}^l$ не стабилизируется. Доказательство окончено.

Теперь будет рассмотрен класс подстановок, к которому будут предъявляться более сильные требования. Пусть задана примитивная подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$. Слово w назовем сильно детерминированным, если для любых допустимых слов $j_0^1 B_1' j_1^1 = B_1; j_0^2 B_2' j_1^2 = B_2$; и таких натуральных чисел $m_j^l, 1 \leq l, j \leq 2$, что

$$(\omega_{\mathcal{A}} B_l)(m_1^l, m_2^l) = w,$$

$$m_1^l \leq |\omega_{\mathcal{A}} j_0^l| < |\omega_{\mathcal{A}}(j_0^l B_l')| < m_2^l \leq |\omega_{\mathcal{A}} B_l|, \quad 1 \leq l \leq 2,$$

имеют место равенства $B_1 = B_2, |\omega_{\mathcal{A}} j_0^1| - m_1^1 = |\omega_{\mathcal{A}} j_0^2| - m_1^2$. Подстановку $\omega_{\mathcal{A}}$ будем называть сильно детерминированной, если существует такое N, что если $|A| > N, A \in Z_*^+$, то A — сильно детерминировано. Очевидно, что если детерминированная подстановка циклична, то она сильно детерминирована. Класс детерминированных ОДД-подстановок обозначим через ДО, класс сильно детерминированных ОДД-подстановок через СДО. Некоторые утверждения К-теории C^*-алгебр — скрещенных произведений для этого класса выглядят иначе, чем в общем случае — если динамическая система порождена подстановкой $\omega_{\mathcal{A}} \in$ СДО, возможен иной способ вычисления группы размерностей.

Теорема 3. Если $\omega_{\mathcal{A}} \in$ ДО, то $\omega_{\mathcal{A}} \notin$ СДО тогда и только тогда, когда либо

1) *существуют такие слова $U, V, B, C, D, \in Z_*^+$ и символы $i, j \in Z_*, i \neq j$, что слова Ui, Vj-допустимы и для некоторого натурального $T : \omega_{\mathcal{A}}^T(Ui) = CUiB,\ \omega_{\mathcal{A}}^T(Vj) = DVjB$, B непусто, либо*

2) *существуют такие слова $U, V, B, C, D, \in Z_*^+$ и символы $i, j \in Z_*, i \neq j$, что слова iU, jV — допустимы и для некоторого натурального $T : \omega_{\mathcal{A}}^T(iU) = BiUC,\ \omega_{\mathcal{A}}^T(jV) = BjVD$, B непусто.*

Доказательство. Утверждение «тогда» доказывается просто. Рассмотрим, например, случай 1). Как и в доказательстве теоремы 1 убеждаемся в допустимости бесконечных слов $UiB\omega_{\mathcal{A}}^T(B) \ldots\ \omega_{\mathcal{A}}^{lT}(B) \ldots$ и $VjB\omega_{\mathcal{A}}^T(B) \ldots \omega_{\mathcal{A}}^{lT}(B) \ldots$. Обозначим их через UiG и VjG. Пусть при $k = 0, \ldots, T$ имеем $\omega_{\mathcal{A}}^k(i) = R_k i_k, \omega_{\mathcal{A}}^k(j) = R'_k j_k$ Очевидно, найдется такое k, $0 \leq k \leq T-1$, что $i_k \neq j_k, i_{k+1} = j_{k+1}$, откуда следует, что $\omega_{\mathcal{A}} \notin$ СДО, ведь слова $i_k\omega_{\mathcal{A}}^k(G)$ и $j_k\omega_{\mathcal{A}}^k(G)$-допустимы.

Докажем утверждение «только тогда». Могут представиться две возможности:

1) существуют такие $i, j \in Z_*, i \neq j, l \in Z_*, A, B \in Z_*^+$, бесконечное слово G, что iG, jG - допустимы, $\omega_{\mathcal{A}}(i) = Al, \omega_{\mathcal{A}}(j) = Bl$,

2) существуют такие $i, j \in Z_*, i \neq j, l \in Z_*, A, B \in Z_*^+$, бесконечное слово G, что Gi, Gj - допустимы, $\omega_{\mathcal{A}}(i) = lA, \omega_{\mathcal{A}}(j) = lB$.

Мы будем рассматривать только первый случай. Если $i', j' \in Z_*, i' \neq j'$, то обозначим через $L(i', j')$ множество пар слов $\{(U, V), \exists G', |G'| = \infty$, слова $Vi'G'$ и $Uj'G'$ - допустимы $\}$. Тогда из ОДД следует, что существует такая константа R, что если $i', j' \in Z_*, i' \neq j', (U, V) \in L(i', j')$ и для некоторого B имеет место

$\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B$, то $|B| < R$. А из этого, в свою очередь, следует существование такой константы R' , что если $|U| = |V| > R'; i', j' \in Z_*, i' \neq j', (U, V) \in L(i', j')$ и для некоторого B имеет место $\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B$, то $|\omega_{\mathcal{A}}(Ui')| - |B| > |Ui'|, |\omega_{\mathcal{A}}(Vj')| - |B| > |Vj'|$.

Но из ранее сказанного вытекает, что для любого $M \in N$ непусто множество $\{(U, V) \mid \exists i', j' \in Z_*, i' \neq j' : (U, V) \in L(i', j'), |U|, |V| \geqslant M\}$. Зафиксируем $M > R'$. Обозначим через $L^M(i', j')$ множество $\{(Ui', Vj') \mid (U, V) \in L(i', j'), |U| = |V| = M\}$. Если $(Ui', Vj') \in L^M(i', j')$ то положим

$$l(Ui', Vj') = \max\{l \mid \exists B : \omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B,\ |B| = l\} \geqslant 0.$$

Введем отображение

$$\phi : \cup_{(i',j')\in Z_*\times Z_*, i'\neq j'} L^M(i',j') \to \cup_{(i',j')\in Z_*\times Z_*, i'\neq j'} L^M(i',j'), \phi((Ui',Vj')) = (D,E),$$

где $\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = FDB, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = GEB, |B| = l(Ui',Vj'), |D| = |E| = M+1$.

В рассматриваемом нами случае существуют, конечно, такие слова U,V, что UiG, VjG-допустимы, $|U| = |V| = M$. Из этого следует (при наших предположениях об $\omega_{\mathcal{A}}$), что существуют такие слова U_1, V_1, G_1, P_1, Q_1 и символы $i_1, j_1, i_1 \neq j_1$, что $U_1 i_1 G_1$ и $V_1 j_1 G_1$-допустимы, $|U_1| = |V_1| = M$ и $\omega_{\mathcal{A}}(U_1 i_1 G_1) = P_1 UiG; \omega_{\mathcal{A}}(V_1 j_1 G_1) = Q_1 VjG$. Ясно , что $(Ui, Vj) = \phi((U_1 i_1, V_1 j_1))$. Действуя таким же образом, найдем такие пары $(U_2 i_2, V_2 j_2)$, что $(U_1 i_1, V_1 j_1) = \phi((U_2 i_2, V_2 j_2))$ и т.д. Очевидно, что найдется такое T, что $(Ui, Vj) = (U_T i_T, V_T j_T)$, причем $l(U_T i_T, V_T j_T) = l(Ui, Vj) > 0$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Литература

1. А. Н. Лившиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований.* Мат. заметки **44**:6 (1988), 785–793.
2. J. Martin, *Substitution minimal flows.* Amer. J. of Math. **93** (1971), 503–526.
3. J. Martin, *Minimal flows arising from substitution of nonconstant length.* Math. System Theory **7** (1973), 73–82.
4. B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définies par des substitutions de longueur variable.* Ergodic Theory and dynamical systems **6** (1986), 529–540.
5. M. Queffélec, *Substitutional dynamical systems. Spectral Analysis.* Lecture Notes Math. **1294**, No. 6 (1987).
6. B. Mossé, *Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution.* Theor. Comp. Sci. **99**, No. 2 (1992), 327–334.
7. A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics.* Advances in Soviet Math. Repres. Theory and Dynamical Systems **9** (1992), 185–204.
8. P. Michel, *Coincidence values and spectra of substitutions.* ZFW **42**:3 (1978), 205–227.
9. А. Н. Лившиц, *Некоторые свойства подстановочных динамических систем.* Препринт ПОМИ Р-13-94 (1994).
10. W. H. Gottschalk, *Substitution minimal sets.* Trans. of Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.

SOME APPLICATIONS OF COMPUTER TO INVESTIGATION OF SUBSTITUTIONAL DYNAMICAL SYSTEMS

In [1] and in [2] the question about the topological mixing of substitutional dynamical systems was considered. For some classes of substitutions with growing excess the proof or the new proof of topological mixing was obtained. In [1] for some substitution with property, considered by Dumont-Thomas, computer was applied to proof of the growth of excess. In [2,3] it was proved without the computer for the general substitution with such property. Still for the topological mixing some additive conditions of combinatorial nature were argued. The example, which does not satisfy them, was considered and the other method was used to prove that the topological mixing still takes place. Here we formulate more weak sufficient condition, which is fulfilled, but without computer it would be difficult to convince oneself in it.

For the investigation of dynamical systems such notion as subword complexity is of importance. If represent it as a sum of four parts, defined by beginning and end of subword (studied in [4]), the natural recurrence for these quadruples takes place. The Qbasic-program was elaborated, giving the Tex-file of such recurrent formulas after entering the words of substitution on two symbols, and the program, writing the program, corresponding to these recurrent formulas. These formulas and the computer calculations by them did help author to see, that for many (possibly all) Dumont-Thomas substitutions, not satisfying considered condition, the topological mixing takes place (even growth of excess for one part of sum and other interesting properties). The method of proof is analogous to one of [1].

Записки научных семинаров ПОМИ, **240** (1997), 147–153.

§1. Substitution $1 \to 121$, $2 \to 22212$ and new combinatorial condition

Let $\omega_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$) be the primitive substitution over the alphabet $Z_* = \{1, 2\}$. To it the homeomorphism $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}$ [5] corresponds, which is called the substitutional dynamical system. General homeomorphism $T : X \to X$ is called topological mixing, if for any open sets X, Y there exists such $N > 0$ that for any $n > N$ $T^n U \bigcap V \neq 0$ Our substitutional homeomorphism is strictly ergodic. Let μ be its invariant measure and $\mu_1 = \mu(\widetilde{1})$, where $\widetilde{1}$ is a cylinder. Formulate our sufficient condition of topological mixing.

Fact. Let the primitive substitution $\omega_{\mathcal{A}}$ have 3 following properties.

Property 1. For all $n > 0$ $|\omega^n_{\mathcal{A}}(1)|$ and $|\omega^n_{\mathcal{A}}(2)|$ are relatively simple.

Property 2. Let $v(n)$ stand for $\max\{|A|_1 - \mu_1 n, |A| = n$ and A is admissible$\}$, $u(n)$ stand for $\max\{-|A|_1 + \mu_1 n, |A| = n$ and A is admissible$\}$. Then $v(n) \to \infty$, $u(n) \to \infty$, when $n \to \infty$.

Property 3. There exists such k, that $\omega^k_{\mathcal{A}}(1) = A_1 b_1 C_1 = A_2 b_2 C_2$; $\omega^k_{\mathcal{A}}(2) = D_1 e_1 F_1 = D_2 e_2 F_2$, where either $|C_1| + |C_2| = |F_1| + |F_2|$, , $|C_1|_1 + |C_2|_1 = |F_1|_1 + |F_2|_1$, b_i, e_i are the letters from Z_* (and numbers) and $b_1 + b_2 = e_1 + e_2$ or $|C_1| = |F_1|, |C_1|_1 = |F_1|_1$ and $b_1 = e_1$.
Then it topologically mixes.

The property 3 from [2] is the particular case of this property 3 (if, for example, $e_1 = b_2, e_2 = b_1, |C_2| = |F_2| = \Lambda$).

The proof is mainly analogous to that of [2]. The consideration of second alternative was done in [2]. If the first takes place, we can, without loss of generality, suppose, that $b_1 = e_1, b_2 = e_2$. For any word $1A2$ we have $\omega^k_{\mathcal{A}}(1A2) = A_2 b_2 C_2 \omega^k_{\mathcal{A}}(A) D_2 e_2 F_2$ for any word $2A'1$ we have $\omega^k_{\mathcal{A}}(2A'1) = D_1 e_1 F_1 \omega^k_{\mathcal{A}}(A') A_1 b_1 C_1$. Consider the subword $B = C_2 \omega^k_{\mathcal{A}}(A) D_2 e_2$ of the first word and the subword $B' = F_1 \omega^k_{\mathcal{A}}(A') A_1 b_1$ of second. As $|F_1| - |C_1| = |C_2| - |F_2|$,$|F_1|_1 - |C_1|_1 = |C_2|_1 - |F_2|_1$ we have $|B| = |B'|, |B|_1 = |B'|_1$ if $|A2| = |A'1|, |A2|_1 = |A'1|_1$. Suppose, that for some k' $\omega^{k'}_{\mathcal{A}}(b_2) = U d' V$; $\omega^{k'}_{\mathcal{A}}(b_1) = U' d'' V'; d'' = d' \in Z_*$. Consider the admissible subword $B'^* = d'' V' \omega^{k'}_{\mathcal{A}}(B') (d'' V')^{-1}$ of word $d'' V' \omega^{k'}_{\mathcal{A}}(B')$ and the admissible subword $B^* = d' V \omega^{k'}_{\mathcal{A}}(B) (d' V)^{-1}$ of word $d' V \omega^{k'}_{\mathcal{A}}(B)$. We have $B'^* d''$, $B^* d'$ are admissible. There exist constants m, n, p, q, t, u such, that $|B'^*| = m|A'| + n|A'|_1 + t; |B'^*|_1 = p|A'| + q|A'|_1 + u$ and, as well $|B^*| = m|A| + n|A|_1 + t; |B^*|_1 = p|A| + q|A|_1 + u$, what follows from property 3. But, it is easy to see, like in [2], that for any admissible G there exists admissible Xw,

such that vXw is admissible $w \neq v \in Z_*$ and $|Xw| = |G|, |Xw|_1 = |G|_1$ (it is proved by "moving" the word in admissible sequence). So, we did prove the following: there exist such constants k, k_1, c, d and letter $a \in Z_*$ that given admissible word G we can choose the admissible word H: $|\omega_{\mathcal{A}}^k G| + c = |H|, |\omega_{\mathcal{A}}^k G|_1 + d = |H|_1$ and the word $a\omega_{\mathcal{A}}^{k_1}(H)a$ is admissible. The rest (using the properties 1) and 2)) is analogous to [1] and [2].

In [2] we did prove, that for substitution $\omega_{\mathcal{A}}, \mathcal{A} = (121, 22212)$ the property 3) from [2] does not take place. But it is not the case with property 3) of this work. As calculation did show, such $k, A_i, b_i, C_i, D_i, e_i, F_i$ exist. For example, $\omega_{\mathcal{A}}^4(1) = A_1 2 C_1 = A_2 2 C_2, \omega_{\mathcal{A}}^4(2) = D_1 2 F_1 = D_2 2 F_2$, where $|C_1| = 128, |C_2| = 106, |F_1| = 190, |F_2| = 44$.

That first property takes place, is established for general case in [2]. Of course, in the formulation one can change ends and beginnings of words.

§2. Using the recurrence

Now the other substitution $1 \to 1211\,,\ 2 \to 22212$ with growing excess will be considered, for which this property 3 cannot take place (as calculation did show, too). So, we shall use other method for proving topological mixing. This strategy, possibly, works for the general case of substitutions on two letters with the property of Dumont–Thomas. Let us at first obtain some recurrent relation for general case.

Let $G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ be the matrix of substitution $\omega_{\mathcal{A}}$. It is evident, that if for word $A \in Z_*, |A| > \max(|\omega_{\mathcal{A}}(1)|, |\omega_{\mathcal{A}}(2)|)$, then it is admissible iff there exist letters u, v and admissible words $A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, such that $A = A_1 F_1 B_1; C_1 A_1 F_1 B_1 D_1 = \omega_{\mathcal{A}}(A_2), C_1 A_1 = \omega_{\mathcal{A}}(u), B_1 D_1 = \omega_{\mathcal{A}}(v), A_2 = u A_3 v$, the words C_1, D_1 can be empty. If for given substitution such representation is unique, we have the following recurrence: if $N(i, j, m, k)$ is the number of admissible words of sort $iAj, |iAj|_1 = m, |iAj|_2 = k$, then for m, k large enough we have

$$N(i,j,m,k) = \sum_{\substack{i_1 \in Z_* \\ i_2 \in Z_*}} \sum_{\substack{A,B,C,D \\ AiB = \omega_{\mathcal{A}}(i_1) \\ CjD = \omega_{\mathcal{A}}(i_2)}} N(i_1, i_2, m(A,B,C,D), k(A,B,C,D)), \tag{1}$$

where $G_{\mathcal{A}} * (m(A,B,C,D),\ k(A,B,C,D)) = (m + |A|_1 + |D|_1,\ k + |A|_2 + |D|_2)$ as vectors.

Here is the fragment of the corresponding TeX-file, made by program. The formulas for all possible values of $(m * t_{22} - k * t_{21}) \mod (t_{11} * t_{22} - t_{12} * t_{21})$ are listed separately.

$$y(1) = 1211, y(2) = 22212$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+10}{11},\tfrac{-m*1+k*3+3}{11}) + N(1,2,\tfrac{m*4-k*1-1}{11},\tfrac{-m*1+k*3+3}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(2,1,\tfrac{m*4-k*1-3}{11},\tfrac{-m*1+k*3+9}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+7}{11},\tfrac{-m*1+k*3+1}{11}) + N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+7}{11},\tfrac{-m*1+k*3+1}{11})$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+7}{11},\tfrac{-m*1+k*3+1}{11}) + N(2,2,\tfrac{m*4-k*1-4}{11},\tfrac{-m*1+k*3+12}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+6}{11},\tfrac{-m*1+k*3+4}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+4}{11},\tfrac{-m*1+k*3-1}{11}) + N(2,1,\tfrac{m*4-k*1+4}{11},\tfrac{-m*1+k*3+10}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+3}{11},\tfrac{-m*1+k*3+2}{11}) + N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+14}{11},\tfrac{-m*1+k*3+2}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+2}{11},\tfrac{-m*1+k*3+5}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(2,1,\tfrac{m*4-k*1+1}{11},\tfrac{-m*1+k*3+8}{11})$$
$$N(1,1,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+0}{11},\tfrac{-m*1+k*3+0}{11}) + N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+11}{11},\tfrac{-m*1+k*3+0}{11})$$

$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+10}{11},\tfrac{-m*1+k*3+3}{11}) + N(2,2,\tfrac{m*4-k*1-1}{11},\tfrac{-m*1+k*3+14}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+9}{11},\tfrac{-m*1+k*3+6}{11}) + N(2,2,\tfrac{m*4-k*1-2}{11},\tfrac{-m*1+k*3+17}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+8}{11},\tfrac{-m*1+k*3-2}{11}) + N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+8}{11},\tfrac{-m*1+k*3+9}{11})$$
$$+N(2,2,\tfrac{m*4-k*1-3}{11},\tfrac{-m*1+k*3+9}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+7}{11},\tfrac{-m*1+k*3+1}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+6}{11},\tfrac{-m*1+k*3+4}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+5}{11},\tfrac{-m*1+k*3+7}{11}) + N(2,1,\tfrac{m*4-k*1+5}{11},\tfrac{-m*1+k*3+7}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,1,\tfrac{m*4-k*1+15}{11},\tfrac{-m*1+k*3-1}{11}) + N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+4}{11},\tfrac{-m*1+k*3+10}{11})$$
$$N(1,2,m,k) =$$
$$+N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+3}{11},\tfrac{-m*1+k*3+2}{11}) + N(1,2,\tfrac{m*4-k*1+3}{11},\tfrac{-m*1+k*3+2}{11})$$

$N(1,2,m,k) =$
$+N(1,2,\frac{m*4-k*1+2}{11},\frac{-m*1+k*3+5}{11})$
$N(1,2,m,k) =$
$+N(1,2,\frac{m*4-k*1+1}{11},\frac{-m*1+k*3+8}{11})$
$N(1,2,m,k) =$
$+N(1,1,\frac{m*4-k*1+11}{11},\frac{-m*1+k*3+0}{11}) + N(1,2,\frac{m*4-k*1+0}{11},\frac{-m*1+k*3+0}{11})$
$+N(2,2,\frac{m*4-k*1+0}{11},\frac{-m*1+k*3+11}{11})$

$N(2,1,m,k) =$
$+N(2,1,\frac{m*4-k*1-1}{11},\frac{-m*1+k*3+3}{11}) + N(2,2,\frac{m*4-k*1-1}{11},\frac{-m*1+k*3+3}{11})$
$N(2,1,m,k) =$
$+N(2,1,\frac{m*4-k*1-2}{11},\frac{-m*1+k*3+6}{11}) + N(2,2,\frac{m*4-k*1-2}{11},\frac{-m*1+k*3+6}{11})$

If there are any ambiguities, we may take them into account in any way or use the formalism of structurized sequences, which is described in [2,6] and in some other works of author. Here we can use some variant of it. Considering for simplicity only such substitutions, that $\forall i \in Z_*\ \omega_{\mathcal{A}}(i) = i...i$, we shall mean under the word of length $r > 2$ either the word of first type, or the word of second type: word of first type is defined as the collection $(i \in Z_*, j \in Z_*, m, l, k), k > 0, 0 < m \leqslant |\omega_{\mathcal{A}}^k(i)|, ij -$ admissible word, $0 < l \leqslant |\omega_{\mathcal{A}}^k(j)|, r = m + l, m > |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(i)|$ or $l > |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(j)|$, word of second type is the collection $(i \in Z_*, A, B, m, l, k)$, where A, B-words, $k > 0$ is such that either $|\omega_{\mathcal{A}}^k(1)| \geqslant r > |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(1)|$ or $|\omega_{\mathcal{A}}^k(2)| \geqslant r > |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(2)|$ and $\omega_{\mathcal{A}}(i) = AuBvC, B \neq \Lambda, 0 < m \leqslant |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(u)|, 0 < l \leqslant |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(v)|; r = m + l + |\omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(B)|$. Of course to the word of any type the concrete admissible word naturally corresponds, so we can assign to our "words" the $|\quad|_1$ and $|\quad|_2$, first and last letter.

Introduce instead of $N(i,j,m,k)$ the other number N^{st} — number of collections of both types, i, j, m, k being of the same sence, where the words of first type (i_1, j_1, m, l, k) are counted with the coefficient

$$c(i_1, j_1) = \sum_{i_2} \sum_{\substack{A,C \\ Ai_1j_1C= \\ \omega_{\mathcal{A}}(i_2)}} 1 + \sum_{\substack{\{i_2,j_2\} \\ i_2j_2-\text{admissible} \\ \omega_{\mathcal{A}}(i_2)=...i_1 \\ \omega_{\mathcal{A}}(j_2)=j_1...}} 1,$$

then one can prove, that $N^{st}(i,j,m,k)$ satisfies this recurrence. In every case the results of computer calculations agree with it (for many substitutions) .

We are going to prove for our substitution, using this recurrence, that the diapasons of excesses of appropriate (though other then previous) sets of words with fixed length, are growing too with growth of this length. We study some subsets of sets of admissible words of sort $1A2$, so, if on this set the sufficient diapasons can be realized, we don't need the property 3. What tells us about such words our recurrence? We have

$$N(1,2,m,k) > \sum_{\substack{A,B,C,D \\ A1B=\omega_{\mathcal{A}}(1) \\ C2D=\omega_{\mathcal{A}}(2)}} N(1,2,m(A,B,C,D),k(A,B,C,D)) \qquad (2)$$

Given m,k we apriory are not sure in that the A,D from the list of formula (1) exist, such that $\det(G_{\mathcal{A}})|l.c.d\,(t_{22}*(m+|A|_1+|D|_1)-t_{21}*(k+|A|_2+|D|_2), -t_{12}*(m+|A|_1+|D|_1)+t_{11}*(k+|A|_2+|D|_2))$, what is necessary for us. Still in fact for $N(1,2,m,k)$ it is so even for the members of (2) (and it was computer to prompt it), as is seen from our fragment of TeX-file. Of course, in general case, properties $\det(G_{\mathcal{A}}) \neq 0$, $(t_{11},t_{12}) = 1$ and $(t_{21},t_{22}) = 1$ imply that contemporarily $\det(G_{\mathcal{A}})|(t_{22}*(m+|A|_1+|D|_1)-t_{21}*(k+|A|_2+|D|_2)) = dd$ or not and $\det(G_{\mathcal{A}})|(-t_{12}*(m+|A|_1+|D|_1)+t_{11}*(k+|A|_2+|D|_2)) = uu$ or not. Because, for any integer a,b we have, noting $a*t_{11}+b*t_{12}$ as e and $a*t_{21}+b*t_{22}$ as f, $\det(G_{\mathcal{A}})|(e*dd+f*uu)$. It did allow us to find for every n the large interval $I_n = [u(n),v(n)]$, such that $k \in I_n$ implies $N(1,2,n-k,k) > 0$. We define them in the following way. For $n < 18$ we calculate the sets of all k, such that $N(1,2,n-k,k) > 0$ (they turned to be the intervals). For $n > 17$ we get the intervals, using the lists from recurrence (2). The quickness of calculations was founded on inequality $0 \leqslant u(n+1)-u(n) \leqslant 1, 0 \leqslant v(n+1)-v(n) \leqslant 1$, proved by induction, using special tables, made by computer.

Further strategy is analogous to that of [1]. Though in [1] we consider all the admissible words, and not special subset, the method (described below) can be applied. Denote as ω the number $t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22}$ (we suppose that it is > 0, here it is 1). Let $\theta > \theta_1 > 1$ be the eigenvalues of $G_{\mathcal{A}}$. For any natural N we denote $d_1^N = \frac{\mu(\widetilde{2})*N-u(N))}{N^\beta}$, (where $\beta = \frac{\log_2\theta_1}{\log_2\theta}$), $d_2^N = \frac{v(N)-\mu(\widetilde{2}*N)}{N^\beta}$. For any natural $N_1 < N_2$ we denote $c_1(N_1,N_2) = \min\limits_{N_1\leqslant n\leqslant N_2} d_1^n, c_2(N_1,N_2) = \min\limits_{N_1\leqslant n\leqslant N_2} d_2^n$ We choose some large natural N_1,N_2, such that $N_2 > \theta*N_1+\omega*N_1^\beta c_2(N_1,N_2)$, further we denote as N^* the number $[\theta*N_2-\omega c_1(N_1,N_2)N_2^\beta]$ and prove, that using only the words of sort $\omega_{\mathcal{A}}(A), N_1 \leqslant |A| \leqslant N_2$, which are present in

the list of formula (2) for our substitution, we can estimate from below $c_1(N_2+1,N^*)$ as $c_1(N_1,N_2)-\lambda N_2^{-\beta}$, $c_2(N_2+1,N^*)$ as $c_2(N_1,N_2)(1-\omega c_2(N_1,N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1}\frac{1}{\theta})^{\beta}-\lambda N_2^{-\beta}$, where $\lambda=\det(G_{\mathcal{A}})=t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21}$. Further, iterating the transformation $(N_1,N_2)\to(N_1,N^*)$ we evaluate $c_1(N_1,\infty),c_2(N_2,\infty)$. So, if for some initial N_1,N_2 we shall have such c_1,c_2, that $c_1(N_1,\infty)>0$ and $c_2(N_1,\infty)>0$, then we obtain the proof of the fact, that excess tends to infinity. We took $N_1=535$. Resulting estimates of [1] are the following ones. Denote $\omega c_2(N_1,N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1}\frac{1}{\theta}$ as α, $\theta-\frac{1}{N_2}-\omega c_1(N_1,N_2)N_1^{\beta-1}$ as ν. Then $c_1(N_1,\infty>c_1(N_1,N_2)-\frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\frac{1}{1-\nu^{-\beta}}, c_2(N_1,\infty>c_1(N_1,N_2)-\frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\frac{1}{1-\nu^{-\beta}}+c_2(N_1,N_2)\beta\ln(1-\alpha)\frac{1}{1-\nu^{\beta-1}}$. Calculations did show, that $c_1(N_1,\infty)>0, c_2(N_1,\infty)>0$.

References

1. A. N. Livshits, *The method of proving of topological mixing for certain class of substitutions*, Preprint POMI **P-10-91** (1991).
2. A. N. Livshits, *Some properites of substitutional dynamical systems*, Preprint POMI **13/1994** (1994).
3. A. N. Livshits, *About the limit distributions and asymptotic of extremal values for some sequences of random variables*, Zap. nauchn. semin. POMI **216** (1994), 86–103.
4. F. M. Dekking, M.Keane, *Mixing properties of substitutions*, ZFW **42**:1 (1978), 375–389.
5. A. N. Livshits, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations*, Mat. Zametki **44**:6 (1988), 785–793.
6. A. N. Livshits, *About some properties of decoding for primitive substitutions*, Zap. nauchn. semin. POMI **223** (1995), 127–136.

DECODING OF SEQUENCES GENERATED BY MORPHISMS RELATED TO PRIMITIVE SUBSTITUTIONS

There exists an algorithmic construction producing words, languages and sequences which has many applications in different branches of mathematics and other sciences. It is the so-called morphic generation which is intensively studied nowadays specifically in the theory of formal languages and in symbolic dynamics. In both theories the structure of sequences and the questions of the unicity of decoding (in some senses) are of importance. Here we shall discuss some notions and results in these topics (among which there are new ones).

Let $\Sigma = \{\sigma_i\}$ be a finite alphabet, Σ^* be the free monoid consisting of all the words over Σ (including the void word λ), and $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ be the morphism given by the formula $h(uv) = h(u)h(v)$ for any $u, v \in \Sigma^*$. Starting with any word $w \in \Sigma^+$, we can form the triple $G = (\Sigma, h, w)$ which is called a DOL-system [1] (the pair (Σ, h) is sometimes called a DOL-scheme) and obtain:

1) the sequence of words $S(G) : w, h(w), h^2(w) = h(h(w)), \dots$.

2) the languages $L(G) = \{h^i(w) \,|\, i \geqslant 0\}$.

To the morphism h there corresponds a matrix $\#\Sigma \times \#\Sigma$. Its ij-th element is the number of occurrences of σ_j in the word $h(\sigma_i)$. If otherwise specified, we suppose this matrix to be primitive (i.e., some its degree has only positive elements).

Let $A = \{a_j\}_{j=u}^{v}$ be an arbitrary sequence of symbols from the alphabet Σ, $-\infty \leqslant u \leqslant v \leqslant \infty$. If $u \leqslant p \leqslant q \leqslant v$, then we denote by $A(p, q)$ the word (finite, one-sided) $a_p \dots a_q$. If B is a word, then, in order to obtain $B(p, q)$, we must convert B into a sequence with $u = 1$ for finite and right infinite words or to a sequence with $v = 0$ for left infinite words.

Unpublished manuscript.

Now we present the well known space of two-sided infinite sequences X_h related to the morphism: $X_h = \{x = \{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty} |$ for every finite p, q, $p \leqslant q$, there exist k, l, r, s such that $x(p, q) = (h^k \sigma_l)(r, s)\}$.

It is clear that X_h coincides with the object denoted in [2] by $X_{\mathcal{A}}$ where $\mathcal{A} = \{ha \,|\, a \in \Sigma\}$. X_h is a Cantor set and the shift T_h is its homeomorphism. The elements of X_h are called admissible sequences and the sequence $A = \{a_j\}_{j=u}^{v}$ is called admissible if there exists $x \in X_h$ such that either $A = x$ or the words $A(u, v)$ and $X(u, v)$ are correctly defined and equal. We call the word admissible if its conversion is admissible. Homeomorphism T_h is strictly ergodic and its topological and metric properties depend on the properties of the morphism. In some cases the combinatorial conditions are obtained for the spectrum of such system to be continuous, purely discrete, or mixed (see [3, 4, 5, 2] and bibliographies therein). For combinatorial investigation of morphically generated dynamical systems and of formal languages generated by the DOL-systems, the coding properties of some collections of words are of great importance. In a number of circumstances, various kinds of properties can be treated as coding ones.

Definition [1]. A nonvoid language C in an alphabet Σ is called a code if for any words $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ such that $x_{i_1} \ldots x_{i_m} = x_{j_1} \ldots x_{j_n}$, the equality $x_{i_1} = x_{j_1}$ takes place.

We say that the code C has the delay p from the left if the property "$x_{i_1} \ldots x_{i_p}$ is the prefix of $x_{j_1} \ldots x_{j_n}$" implies $x_{i_1} = x_{j_1}$.

The class of codes among the languages is rather small but it becomes larger if we introduce some restrictions to the classes of possible sequences $\{i_1, \ldots, i_m\}, \{j_1, \ldots, j_n\}$ and of possible "messages" $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$. We will consider the concrete situations of this sort.

In the work [6], the following statement was proved.

Theorem 1. Let h be a homomorphism from Σ^* into Σ^* such that for at least one a in Σ, $h(a) \neq \lambda$. Let $\#\Sigma = m$ and let w_1 and w_2 be the words over Σ. Then the existence of n such that $h^n(w_1) = h^n(w_2)$ is equivalent to $h^{m-1}(w_1) = y^{m-1}(w_2)$.

It implies the following: if the language $\{y^{m-1}(\sigma_i)\}_{\sigma_i \in \Sigma}$ is a code, then every language $\{h^n(\sigma_i)\}_{\sigma_i \in \Sigma}$ for $n > m - 1$ is a code. In the study of dynamical systems, of importance are the properties of these languages and of their union, which is often far from being a code (even with great restrictions corresponding to the supply of admissible words and with taking into account the natural hierarchical relations which must not be treated as ambiguities), the corresponding hierarchical codings of admissible words are related to substitutional systems of numeration [7], but

there are many reasons in the investigation of actual ambiguities (in the known cases, discrete spectrum corresponds to great ambiguities).

In numerous works the notion of local catenativity of DOL systems is studied which provides the example of an ambiguity.

A DOL-system $G = \{\Sigma, h, w\}$ is called locally catenative with cut p and depth n [6,7] if there exists a vector $\langle i_1, \dots, i_k\rangle$ with $\max\{i_1, \dots, i_k\} = n$ such that $h^q w = h^{q-i_1} w \dots h^{q-i_k} w$ for any $q \geqslant p$. Among the l.c. systems the class of standard l.c. systems is distinguished. Let Σ_n denote $\{0, \dots, n-1\}$. Then the DOL-scheme $S = (\Sigma_n, h)$ is called standard if $h(i) = i+1$ $(i = 1, \dots, n-2)$, $h(n-1) = (n-i_1)\dots(n-i_k)$. The importance of this class is clear because of the following statement proved by Kobuchi.

Theorem 2. A DOL-system $G = (\Sigma, h, w)$ is $\langle i_1, \dots, i_k\rangle$-locally catenative if and only if there exists a standard DOL-scheme with a $\langle i_1, \dots, i_k\rangle$-l.c. DOL-system $G' = (\Sigma_n, h', 0)$ and a λ-free homomorphism $\gamma : \Sigma_n^+ \to \Sigma^+$ such that for any x in $S(G')$, $h(\gamma(x)) = \gamma(h'(x))$.

In [7] some types of standard l.c. systems are presented (parallel decomposable, cyclic, semi cyclic) for which the word $w \neq 0$ exists such that (Σ_n, h, w) is l.c.

Another property of DOL-system, which is not compatible with good coding properties, is periodicity. It was intensively studied too. The DOL-system is called periodic if there exist nonnegative i and natural p and e such that $h^{p+i}(w) = (h^i w)^e$ [9]. The coding properties of the DOL-languages for periodic DOL-systems, the properties (from the point of view of the theory of formal languages) of the set of all initial words of periodic DOL-systems [9] given a DOL-scheme, and other questions were studied. For dynamical systems, the next situation is of interest: given a morphism h, there exists a finite admissible word (recall: admissibility means the existence of i, j, k, l such that $w = (h^i \sigma_i)(k, l)$) and the system (Σ, h, w) is periodic. Such substitutions (in symbolic dynamic, this term is often used and means the same as morphism) are called cyclic.

The concept of "decidability" (possibility to check algorithmically some property of a morphism or a system) is of significance for dynamical systems too and some results (for example, the sufficient condition [5] of pure discreetness of spectrum) can be formulated in terms of a concrete algorithm.

Morphically generated sequences and their (symbol-by-symbol) images under some kind of homomorphisms are studied as well in the theory of tag-systems [10], of semi groups, of avoidable patterns, and so on. We note that in [10] the next generalization of morphism is discussed, the

deterministic generalized sequential mapping, iterations of which can be used to simulate the computation of Turing machines.

Now we consider the special questions of coding for substitutional dynamical systems. From the definition of admissible sequence it is easy to deduce that every language $R_l = \{h^l\sigma_i\}_{\sigma_i\in\Sigma}$ can be used to code it, i.e., if $x \in X_h$, then for every l there exists a strictly monotonous infinite bilateral sequence of integers $n^l_{r,x}, -\infty < r < \infty$, such that $n^l_{-1,x} + 1 \leqslant 0 \leqslant n^l_{0,x}$ and for every r there exists $i = i^l(r)$ such that $x(n^l_{r,x}+1, n^l_{r+1,x}) = h^l(\sigma_i)$. One can say more, in spite of non-necessity for some of these codings to be unique: we can choose a (may be non-unique for some cases) hierarchical system of codings, and functions $i_l(r)$ forming a so-called structurized admissible sequence. Before introducing this notion, we shall introduce an auxiliary one, the notion of a general structurized sequence, which is defined as a pair $\{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}\}^\infty_{l=0}\} = x^s$ (where, for every l, $S^l_x = \{\sigma_{i^l_{r,x}}\}^\infty_{r=-\infty}$) such that:

(1) if $l_1 < l_2$, then $\{n^{l_2}_{r,x}\} \subset \{n^{l_1}_{r,x}\}$; if $-\infty < r_1 < r_2 < \infty$, then $n^l_{r,x} < n^l_{r,x}$ for any $l \geqslant 0$;

(2) $n^l_{-1,x} < 0 \leqslant n^l_{0,x}$ for any $l \geqslant 0$;

(3) $\sigma_{i^0_{n^l_{r+1,x}}} \dots \sigma_{i^0_{n^l_{r+1},x}} = h^l(\sigma_{i^l_{r+1,x}}), \quad l \geqslant 0, \quad -\infty < r < \infty$;

(4) if for some r, Δ, and r', according to 1), $n^l_{r',x} = n^{l+1}_{r,x}$, $n^l_{r'+\Delta,x} = n^{l+1}_{r+1,x}$, then $h(\sigma_{i^{l+1}_{r+1,x}}) = \sigma_{i^l_{r'+1,x}} \dots \sigma_{i^l_{r'+\Delta,x}}$.

Of course, (4) implies (3). Evidently, $n^0_{r,x} = r$ for every r, x^s. We can define the shift $(T^s)^q$ (for any integer q) of x^s in the following way. Let for every $l \geqslant 0$ $H(l,q)$ stand for p such that $n^l_{p-1,x}+1 \leqslant q \leqslant n^l_{p,x}$ (for example, $H(0,q) = q$). Denote by $\{n^{l,q}_{r,x}\}$ the sequence $\{n_{r+H(l,q),x} - q\}^\infty_{r=-\infty}$ and by $(T^s)^q x^s$ the pair $\{\{T^{H(l,q)}\{S^l_x\}\}^\infty_{l=0}, \{\{n^{l,q}_{r,x}\}^\infty_{l=0}\}\}$, where T is the ordinary shift of a sequence. It is easy to check (1) – (4) for $(T^s)^q x^s$. Notice that by (1) – (4), the knowledge of $S^{l_k}, n^{l_k}_{0,x}$ for some $l_k \to \infty$ uniquely determines x^s. Basing on this remark we shall present some class of concrete general structurized sequences. A quadruple (i_0, j_0, m_0, n'_0) is called a generating quadruple [2] if the numbers p, q, u, v exist such that σ_p, σ_q are the j_0th and (j_0+1)th symbols of $h\sigma_i, h^{m_0}\sigma_p = w\sigma_u, h^{m_0}\sigma_q = \sigma_v w', h^{n'_0}\sigma_u = w_1\sigma_u, h^{n'_0}\sigma_v = \sigma_v w'_1$. If this is the case, we define $x_s(i_0, j_0, m_0, n'_0)$ as a general structurized sequence $\{\{S^l_x\}^\infty_{l=0}, \{\{n^l_{r,x}\}\}^\infty_{l=0}\}$ such that all $S^{kn'_0}_x$ are identical:

$$S^{kn'_0}_x(-\infty, 0) = h^{n'_0\infty}(\sigma_u); \quad S^{kn'_0}_x(1, \infty) = h^{n'_0\infty}(\sigma_v),), \quad 0 \leqslant k \leqslant \infty,$$

and $n^l_{0,x} = 0$ for all l, what determines $x^s(i_0, j_0, m_0, n'_0)$. Notice that $S^{kn'_0}_x$

is w_{ab} of [11], where $a = \sigma_u, b = \sigma_v$, and that $S^{kn'_0} \in X_h$, what is easy to check.

We say that a general structurized sequence is a structurized admissible sequence if it satisfies the following additional condition.

(5) Three possibilities take place:

a) $n^l_{-1,x} \to \infty,\ n^l_{0,x} \to \infty$, when $l \to \infty$,

b) there exist k, L such that $n^l_{-1,x} = k < 0$ for $l > L$: in this case for some generating quadruple we have

$$x^s = (T^s)^{-k} x^s(i_0, j_0, m_0, n'_0);$$

c) there exist k, L such that $n^l_{0,x} = k \geqslant 0$ for $l > L$: in this case for some generating quadruple we have again

$$x^s = (T^s)^{-k} x^s(i_0, j_0, m_0, n'_0).$$

The space of all structurized admissible sequences with natural metric is a Cantor set. We denote it by X^s_h and the shift homeomorphism by T^s_h. It is easy to see that the projection $p : X^s_h \to X_h,\ p(x^s) = S^0_x$ turns to be surjection. For metric and topological theory, it is interesting, for which h it is bijection. So the coding properties of some words, related with h, are to be studied. We present three definitions of such properties, some of which are adapted here for a more general situation (in our case, only formally). These properties of h are: to be UAD, i.e., to yield a unique admissible decoding [2], to be recognizable [3] (in the recent paper [12], the notion of bilateral recognizability is introduced and investigated) and to be determined ([13, 14]).

We notice that, whatever coding properties of h, the transformation T^s_h is defined correctly (and is metrically isomorphic to its analog appearing as an adic representation [2], which is still not always good from the topological point of view).

The word $w \in \Sigma^+$ is called determined if for any admissible words $\sigma_{j^1_0} B'_1 \sigma_{j^1_1} = B_1$; $\sigma_{j^2_0} B'_2 \sigma_{j^2_1} = B_2$ and natural numbers

$$m^l_j, 1 \leqslant l, j \leqslant 2, \quad \text{such that} \quad (hB_l)(m^l_1, m^l_2) = w$$

and $m^l_1 \leqslant |h\sigma_{j^l_0}| < |h(\sigma_{j^l_0} B'_l)| < m^l_2 \leqslant |hB_l|$, $1 \leqslant l \leqslant 2$, the equalities $B'_1 = B'_2$, $|\sigma_{j^1_0}| - m^1_1 = |h\sigma_{j^2_0}| - m^2_1$ take place.

It is possible that $m^1_1 = m^2_1 = 1$, $j^1_0 \neq j^2_0$.

The morphism h is called determined if there exists such an N that every $A \in \Sigma^+$ is determined whenever $|A| > N$.

In [13] there is a definition of determinism to order k, which is the same as the determinism relative to h^k.

The morphism h is called recognizable if there exists such a k that if for some natural numbers r, s, t and an admissible word A the following 3 conditions

1) $|hA| \geqslant \max(r+k, s+k)$,
2) $(hA)(r+1, r+k) = (hA)(s+1, s+k)$,
3) $|h(A(1,t))| = r$

are fulfilled, then there exists $t' \geqslant 0$ such that $|hA(1,t')| = s$. We can compare this definition with the definition of a code with delay p.

In what follows, we assume the property (p.m.) of the primitivity of the morphism's matrix. Recall that this means the existence of a number l such that for any $a \in \Sigma$, $h^l a$ contains all letters from Σ.

The morphism is called UAD if for any $x \in X_h$ there exists precisely one sequence $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in X_h$ such that there exists a sequence $\{n_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$, $-\infty < \ldots < n_{-l} < 0 \leqslant n_0 < \ldots < \infty$, for which $x(n_{r-1}+1, n_r) = hy_r$; $-\infty < r < \infty$. Note that if $x = p(x^s)$ for some $x^s \in X_h^s$, then the $y = S_x^1$ and $n_{r,x}^1$ are suitable. UAD is just equivalent to the bijectivity of p.

It is easy to see that a determined morphism is UAD, that a noncyclic recognizable morphism is UAD, and that a cyclic morphism is neither UAD nor determined. Still it can be recognizable. The following statement is obvious.

Proposition. A cyclic morphism is recognizable if there exist an admissible word C containing all the letters of Σ and not equal to D^v for any D, $v > 1$, and a collection of natural numbers r, $n_1, \ldots, n_s$, $r \leqslant s$, such that for $m_0 = 0$ and $m_j = \sum_{l=1}^{j} n_l$, $1 \leqslant j \leqslant s$, we have

1) $m_s = |C|$;
2) $h(c(l,l)) = c(m_{(r+l-1) \mod s} + 1, m_{1+(r+l-1) \mod s})$.

For the noncyclic case, the question about the decoding property was considered by several authors (for example, [3, 14]). There are some definitive results for various kinds of decoding in [12]. Particularly, the assertion of the theorem 4 below can be deduced from the result of [12] or be proved almost identically. Still it admits a formulation and some proofs (together with Theorems 5,6) in terms of structurized sequences and substitutional systems of numeration. Here are the formulations of the main results about decoding for substitutions.

Theorem 3. Every noncyclic morphism with primitive matrix is UAD.

Theorem 4. A morphism h with p.m. is nonrecognizable if there exist a collection of admissible words $M, M_1, M_2, X, Y, D_1, D_2, W_1, W_2$, symbols $e_1, e_2 \in \Sigma$ and a natural number T for which the following holds: the words W_1e_1X and W_2e_2Y are admissible, $h^T(W_1e_1X) = D_1W_1e_1XM$, $h^T(W_2e_2Y) = D_2W_2e_2YM$, $M \neq \lambda$, $M_1he_1 = M_2he_2$; $hX = hY$.

Theorem 5. A morphism h with p.m. is not determined if for some collection consisting of admissible words $M, M_1, M_2, X, X', Y, Y'$, D_1, D_2, D, W_1, W_2, symbols $e_1, e_1', e_2, e_2' \in \Sigma$, $e_1 \neq e_2$, and a natural number T either

(i) the words $W_1e_1'e_1X$ and $W_2e_2'e_2y$ are admissible, $h^T(W_1e_1'e_1X) = D_1W_1e_1'e_1XM$, $h^T(W_2e_1'e_2Y) = D_2W_2e_2'e_2YM$ $(M \neq \lambda)$, $h(X) = h(Y)$, $h(e_1'e_1) = X'D$, $h(e_2'e_2) = Y'D$, $|D| > \min(|he_1|, |he_2|)$

or

(ii) the words $Xe_1e_1'W_1$ and $Ye_2e_2'W_2$ are admissible, $h^T(Xe_1e_1'W_1) = MXe_1e_1'W_1D_1$, $h^T(Ye_2e_2'W_2) = MYe_2e_2'W_2D_2$ $(M \neq \lambda)$, $hX = hY$, $h(e_1e_1') = DX'$, $h(e_2e_2') = DY'$, $|D| > \min(|he_1|, |he_2|)$.

Here we prove the sufficiency assertion for Theorem 4. Let such a collection exist. Consider the words

$$h^{Tl}(W_1e_1x) = h^{T(l-1)}D_1 \dots h^TD_1D_1W_1e_1XM \dots h^{T(l-1)}M$$

and

$$h^{Tl}(W_2e_2Y) = h^{T(l-1)}D_2 \dots D_2W_2e_2YM \dots h^{T(l-1)}M.$$

Let Ω be an arbitrary admissible word of the type $\dots W_1e_1x \dots W_2e_2Y \dots$ (its existence is evident and is connected with recurrence properties). Supposing the recognizability condition is fulfilled, choose an l such that $|M \dots h^{T(l-1)}| > k$ and take the word $h^{Tl}\Omega$ as A. Consideration of the subwords $h(e_1XM \dots h^{T(l-1)}M)$ and $h(e_2YM \dots h^{T(l-1)}M)$ leads to contradiction.

It is easy to check the hypotheses of the theorems.

Examples.

1) The morphism $h : h(0) = 101110$, $h(1) = 110$ is not recognizable.

2) The morphism $h : h(1) = 332$, $h(2) = 32$, $h(3) = 122$ is recognizable.

3) The morphism $h : h(1) = 413$, $h(2) = 132$, $h(3) = 24$, $h(4) = 4132$ is cyclic nonrecognizable, the morphism $h' : h'(1) = 213$, $h'(2) = 4$, $h'(3) = 4, h'(4) = 213$ is cyclic and recognizable.

4) Consider the morphism $h : h(1) = 123312$, $h(2) = 123123$, $h(3) = 312123$. The listed words do form a code in the sense of the definition but do not from the point of view of natural two-sided infinite "extension". If we claim as "allowed" the sequences $\{i_k\}_{-\infty}^{\infty}$ with $i_ki_{k+1} \neq 13$;

$-\infty < k < \infty$, then any concatenation $\dots h(i_k)h(i_{k+1})\dots$ with allowed $\dots i_k i_{k+1}\dots$ has an alternative representation $\dots h(i'_k)h(i'_{k+1})\dots$ with allowed $\dots i'_k i'_{k+1}\dots$. Still, by Theorem 3, our morphism is UAD.

References

1. A. Salomaa, *The jewels of formal language theory.* Turku, 1981.
2. A. N. Livshits, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations.* Mat. Notes **44**:6. (1988), 920–925.
3. B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable.* Ergodic Theory Dynamical Systems, **6** (1986), 529–540.
4. M. Queffélec, *Substitutional dynamical systems, spectral analysis.* Lecture Notes in. Math. **1294** (1986).
5. A. N. Livshits, *Some examples of adic transformations and automorphisms of substitutions.* Selecta Mathematica Sovietica **11**, no. 1 (1992), 83–104.
6. A. Ehrenfeucht, G. Rosenberg, *Simplification of homomorphisms.* Information and Control, v. **38**, no 3, (1978), 298–310.
7. J.-M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theoretical Computer Science **65**, no.2 (1989), 153–169.
8. S. Seki, Y. Kobuchi, *On standard locally catenative L-schemes.* Theoretical Computer Science, **83** (1991), 237–248.
9. T. Head, B. Lando, *Regularity of sets of periodic DOL-systems.* Theoretical Computer Science , **48** (1986), 101–108.
10. J. J. Pansiot, *On various classes of infinite words obtained by iterated mappings.* Lecture Notes in Computer Sci. **192** (1985), 188–198.
11. W. H. Gottschalk, *Substitutions minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **109**, (1963), 467–491.
12. B. Mossé, *Puissances des mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution.* Theoretical Computer Science. **99**, vol. 2 (1992), 327–334.
13. J. C. Martin, *Minimal flows arising from substitutions of nonconstant length.* Math. Syst. Theory **7**, no 1 (1973) 73–82.
14. J. C. Martin, *Substitutional minimal flows.* Amer. Journ. of Math. **93**, no 2 (1971), 503–526.

А. Н. Лившиц

Динамические системы, эргодическая теория, формальные языки

Под редакцией А. А. Лодкина

ISBN 978-5-9905649-6-1

Подписано в печать 08.07.2014 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 60x84 1/16. Объем 18 п.л.
Заказ № 1007/14 Тираж 120 экз.
Отпечатано в типографии ООО «Р-КОПИ»
190000, Санкт-Петербург, пер. Гривцова, д. 6 Лит. Б