

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

На правах рукописи

ЛИВШИЦ Александр Нахимович

ПРИМЕНЕНИЯ АДИБЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ,
СПЕКТРАЛЬНЫХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ
СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность: 01.01.01.

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

1995

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение	4
Глава 1. Адический автоморфизм в теории динамических систем и в теории операторных алгебр	11
§1. Адический автоморфизм как динамическая система. Структура ее фазового пространства	11
§2. Связь между адическим представлением и аппроксимациями	17
Глава 2. Стационарные адические преобразования и подстановки. Определения, эквивалентность, теоремы о спектре	21
§1. Стационарные адические преобразования	21
§2. Подстановочные динамические системы	23
§3. Адические представления подстановочных динамических систем	32
§4. Спектральные свойства подстановочных динамических систем и стационарных адических преобразований с примитивными матрицами	37
§5. Интегральные автоморфизмы над подстановочными и стационарными адическими динамическими системами	55
§6. Об одном классе косых произведений	60
§7. Примеры	68

Глава 3. Связь между представлением динамических систем сдвигами и адическими преобразованиями	89
§1. Введение	88
§2. Построение марковского множества	88
§3. Построение минимального марковского компакта	95
Глава 4. Вычисления, связанные с топологическими свойствами, вероятностными и энтропийными характеристиками конкретных подстановочных динамических систем	110
§1. Топологическое перемешивание и оценки эксцесса	110
§2. Изучение предельных распределений для подстановки Рудина – Шапиро	120
§3. Пример вычисления корреляций и энтропии по Кушнirenко	149
Литература	172

ВВЕДЕНИЕ (ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР)

В течение последних десятилетий- времени бурного развития теории динамических систем и операторных алгебр были получены значительные достижения в траекторной теории динамических систем и тесно связанной с ней теории C^* -алгебр – скрещенных произведений. Важным событием как для топологической, так и для метрической теорий оказалось появление общего понятия адического преобразования марковского компакта (что соответствует понятию пространства бесконечных путей упорядоченных диаграмм Браттели), введенного А.М. Вершиком, и реализационных теорем в эргодической теории для произвольного эргодического автоморфизма пространства Лебега [1] и в топологической динамике — для произвольной нульмерной минимальной динамической системы [2]. Представление адическим преобразованием способствовало изучению в метрической теории возможности вложения C^* -алгебры, порожденной оператором, сопряженным с метрическим автоморфизмом, и оператором умножения на функцию из L^∞ в $AF - C^*$ -алгебру [3]. В топологической теории удалось использовать адическое представление для изучения C^* -алгебры – скрещенного произведения, соответствующего динамической системе, и ее $AF - C^*$ -подалгебр а также для вычисления группы размерностей [2], [4], [5]. Эти результаты сразу выявили необходимость изучать комбинаторную структуру марковских компактов, классифицировать их, изучать спектр возможных адических и связанных с ними иерархических представлений для каждой конкретной динамической системы.

Результаты об адическом представлении связаны также с предшествующими результатами по траекторной теории измеримых преобразований и групп таких преобразований а также с результатами, касающимися важной для теории операторных алгебр конструкции "группа-пространство с мерой", впервые описанной в ранней работе Мюррея и

фон Неймана.

Основными проблемами в этих областях были: формулирование и доказательство условий гиперконечности каких либо скрещенных произведений и условий изоморфности таких скрещенных произведений между собой. Связь между изоморфизмом скрещенных произведений и изоморфизмом действий была вскрыта в работах Дая [6], [7]. Дай доказал также траекторную изоморфность любых двух эргодических преобразований, сохраняющих меру, и гиперконечность факторов, построенных по эргодическим сохраняющим меру действиям некоторых классов групп (абелевых, полиномиального роста). В 1976 году Орнштейн и Вейсс [8] доказали гипотезу Дая о том, что любое несингулярное действие аменабельной дискретной группы Γ траекторно эквивалентно действию $\mathbb{Z}$. Кригер [9] доказал, что две алгебры фон Неймана, являющиеся скрещенными произведениями, соответствующими несингулярным эргодическим динамическим системам, изоморфны тогда и только тогда, когда системы траекторно эквивалентны. В то же время, как следует из результатов Конна [10], множество аппроксимативно конечных факторов фон Неймана, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, совпадает с множеством факторов Кригера. Там же доказано, что свойство аппроксимативной конечности в этом случае эквивалентно аменабельности фактора как банаховой алгебры, инъективности и свойству P , соответствующему для алгебр, построенных по отношению эквивалентности, аменабельности этого отношения (см. [10] и [11]). В 1980 году А.Конн, Дж.Фельдман и Б.Вейсс [12] получили важный результат, согласно которому всякое аменабельное отношение эквивалентности порождается одним несингулярным преобразованием, что выявило огромное значение изучения траекторной теории таких преобразований.

Таким образом, развитие траекторной теории стимулировалось запро-

сами различных областей математики. Существеннейшим продвижением также и в этой области, уточнившим представления о характере траекторий и давшим возможность рассматривать вопрос с новой точки зрения, явилось введение А. М. Вершиком понятия адического преобразования и описание связанного с ним нового символического представления, конкурирующего с представлением, получаемым в теории образующих, построенной ранее и оказавшейся чрезвычайно плодотворной. Важно, что доказательство осуществлялось в рамках метрической теории аппроксимационными методами и что полученные результаты оказались значимыми для теории C^* -алгебр, связанных с динамическими системами. В работе [13] были получены результаты о представлении сохраняющего меру действия произвольной аменабельной группы обобщенно- трансверсальными (аппроксимативно-цилиндрическими) преобразованиями марковского компакта а также о реализации сохраняющего меру преобразования как трансверсального с заданным хвостовым разбиением.

В топологической же теории с помощью адического представления 0-мерных систем удалось получить важные результаты о связи между траекторной эквивалентностью, изоморфизмом алгебр – скрещенных произведений и изоморфизмом упорядоченных групп размерностей [5]. Имеются и топологические аналоги представления счетных локально-конечных групп перестановками путей фиксированных длин диаграмм Браттели [5].

Позднее автор настоящей работы установил связь между этой теорией и теорией образующих (что, например, открыло путь к новому доказательству реализационной теоремы) как в общем случае [14], так и для подстановочных динамических систем [15], [16]. Подстановочным динамическим системам естественным образом соответствуют упорядоченные диаграммы Браттели со стационарной схемой ветвления [2], [17],

или, иначе, стационарные адические (трансверсальные) преобразования [15], [16], [18]. Стационарному адическому преобразованию также может быть поставлено в соответствие подстановочное [19], [20]. Разумеется, оба утверждения имеют и нестационарные аналоги.

Важным направлением, тесно связанным с изучением и применением иерархических представлений, является теория аппроксимаций. Эта теория развита в настоящее время для динамических систем, использующих в качестве времени самые различные группы, но даже для случая метрического автоморфизма понятию "аппроксимация периодическими преобразованиями" можно придавать различные смыслы. Одним из первых результатов, легших в основу новой теории, но использованных не только в ней одной (достаточно упомянуть, например, проблему изоморфизма и теорию образующих метрического автоморфизма) явилась лемма Халмوشа – Рохлина: если $T : M \rightarrow M$ — апериодический автоморфизм, то для всякого натурального n и всякого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $A \subset M$, что $T^i A \cap T^j A = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ и $\mu(M \setminus \cup_{i=1}^n T^i A) < \delta$. Одно из определений аппроксимации (аппроксимация первого рода периодическими преобразованиями [21]) выглядит следующим образом. Говорят, что автоморфизм T допускает аппроксимацию первого рода периодическими преобразованиями со скоростью $f(n)$, (где $f(n) > f(n+1) > 0$, $0 < n < \infty$, $f(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), если существуют такие разбиения ξ_n пространства M $\xi_n = \{C_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \dots, q_n$ и такие сохраняющие меру преобразования T_n , что

- 1) $\xi_n \rightarrow \epsilon$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $T_n \xi_n = \xi_n$;
- 3) $\sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_{n,i} \Delta T_n C_{n,i}) < f(q_n)$.

В [21] доказано, что множество автоморфизмов, допускающих циклическую аппроксимацию (дополнительное требование цикличности T_n) со

скоростью $f(n)$, содержит всюду плотное в группе автоморфизмов (со слабой топологией) множество типа G_δ . С помощью метода периодических аппроксимаций получено также много других результатов (и передано старых) о массивности множеств автоморфизмов с теми или иными свойствами (в том числе перемешиваний, автоморфизмов с простым непрерывным спектром, автоморфизмов, являющихся гомеоморфизмами топологических пространств или диффеоморфизмами гладких многообразий). При построении же конкретных примеров динамических систем, удовлетворяющих тем или иным требованиям, часто использовалась такая разновидность метода аппроксимации (близкая к иерархическим методам), как метод разрезаний и складываний, с помощью которого получен, например, перемешивающий автоморфизм аппроксимационного ранга 1 (Орнштейн [22]), что повлияло на появление очень важного и плодотворного метода джойнингов.

Реализация таких автоморфизмов в пространствах последовательностей с иерархической структурой способствовала введению весьма важного класса динамических систем – систем со свойством MSJ (в работе *Rudolf*'а [23]), оказавшихся объектами изучения новой, чрезвычайно содержательной, теории. При надлежащем задании параметров иерархической структуры (весьма сложной) в рамках подмножества этого класса, построенного в [23], оказалось возможным строить весьма интересные примеры. Преобразования, построенные Орнштейном, исследовались также и в иных работах. Например, в работе Бургэйна [24] исследовался его спектральный тип. Бургэйн, используя иерархическое представление такого преобразования, доказал, что его спектральный тип сингулярен по отношению к мере Лебега. Чэконом ранее были построены примеры автоморфизмов с чисто непрерывным спектром, не имеющих квадратных корней (тоже в пространстве последовательностей, имеющих иерархи-

ское строение).

Естественное соответствие между адической реализацией и методом разрезаний и складываний имеется в обзоре [16], где наряду с этим описаны адические реализации упомянутых примеров а также примера небернуллиевской K -системы [25].

Важному вопросу о соотношении между аппроксимационным рангом и спектральной кратностью были посвящены работы целого ряда авторов. При этом (начиная с работы *Del Junco* [26]) использовалось то, что аппроксимационный ранг, независимо от образующей, может быть определен по структуре типичной последовательности. Примером автоморфизма с простым спектром аппроксимационного ранга 2 явился автоморфизм, связанный с подстановкой Морса [27]. Общий результат о соотношении между рангом аппроксимации и спектральной кратностью получен в [28].

Весьма интересными оказались конкретные классы иерархических символических динамических систем, например, подстановочные динамические системы [27], последовательности Теплица [29], [30], обобщенные последовательности Морса [31], [32], [33]. Подстановки (и их аналоги в теории формальных языков – морфизмы) изучаются в самых различных областях математики. Морфическая генерация последовательностей применяется, например, в теории групп и полугрупп, комбинаторике слов (см., например, [34]), в теории фракталов [35], квазикристаллов [36] и пр.

Последовательность Туэ – Морса, порождаемая подстановкой $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$, была известна еще в прошлом веке. В символической динамике ее применил М. Морс при построении рекуррентной незамкнутой геодезической на поверхности отрицательной кривизны [37]. Свойства этой последовательности и различных ее подслов исследовались различными авторами еще в довоенный период. Изучение минимального множе-

ства, порожденного траекторией двусторонней последовательности относительно сдвига (с нахождением, например, топологического централизатора) можно найти в монографии [38]. Систематическое исследование класса подстановочных замкнутых инвариантных множеств (в т.ч. минимальных) было начато в [39], где были даны первые определения и рассмотрена задача о следовом отношении эквивалентности [39] (впоследствии изучавшаяся другими исследователями [40], [41] и пр.). В работе [42] Готтшалк с помощью этого инварианта нашел подстановочный автоморфизм, топологически не изоморфный своему обратному.

Более поздние исследования топологических, метрических, спектральных энтропийных (имеется в виду, конечно, энтропия по Кушниренко) характеристик подстановочных динамических систем оказались тоже весьма содержательными. Для подстановок с постоянной длиной слова задача о спектре решена полностью. Ответ таков [27]: если примитивная подстановка имеет длину q и объем алфавита s , то максимальный спектральный тип порожден $k \leq s$ вероятностными мерами, относительно каждой из которых сохраняющее их преобразование $x \rightarrow qx \pmod{2\pi}$ сильно перемешивает¹ (см. также [43]). О подстановках с переменной длиной слова известно очень мало. Следует отметить, что наряду с подстановочными и адическими системами и соответствующими методами генерации последовательностей существуют иные близкие или несколько более общие методы (см., например, [44–48]). В [16] рассмотрен первый пример адического преобразования с двумерным временем.

Сочетание иерархических и адических представлений динамических систем создает большие удобства при их изучении. Большой интерес при этом представляет рассмотрение различных классов модельных задач.

¹Имеется в виду непрерывная компонента спектра

ГЛАВА 1. АДИЧЕСКИЙ АВТОМОРФИЗМ В ТЕОРИИ

ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР

§1. Адический автоморфизм как динамическая система. Структура её фазового пространства. Дадим определение марковского компакта. Пусть $r_1, r_2, \dots$ последовательность натуральных чисел, $r_i \geq 1$, $1 < i < \infty$, $D_1, D_2, \dots$ – последовательность конечных множеств: $D_i = \{d_j^i\}_{j=1}^{r_i}$. Пусть, далее, $M_1, M_2, \dots$ – последовательность матриц, элементы которых суть нули или единицы. Можно использовать два способа обозначения элементов матрицы.

$$M_i = (m_{uv}^i)_{u \in D_i, v \in D_{i+1}}; m_{uv}^i = M_i(u, v).$$

Марковским компактом называется пространство Y таких последовательностей $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \in D_i$, $1 \leq i < \infty$, что $m_{x_i x_{i+1}}^i$ при всех i , снабжённое слабой топологией. Элементы Y называются иначе путями. Введём две функции $L, B : \cup_{i=2}^{\infty} D_i \rightarrow \{1, \dots\}$ следующим образом : если $x \in D_i$, то $L(x)$ это число (предполагается, всегда положительное) таких $u \in D_{i-1}$, что $m_{ux}^{i-1} = 1$, а $B(x)$ это число таких последовательностей $x_1, \dots, x_i$, что $m_{x_j x_{j+1}}^j = 1$ при $1 \leq j \leq i-1$ и $x_i = x$. Множество таких последовательностей обозначим через $E(x)$. $B(x) = \#E(x)$. Для каждой последовательности $x_1, \dots, x_i$, $x_l \in D_l$, $1 \leq l \leq i$ обозначим через $C(\{x_1, \dots, x_l\})$ множество $\{x \in Y | x = \{x'_1, x'_2, \dots\}, x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_l = x_l\}$.

Потребуем дополнительно от Y , чтобы не существовало таких путей $\{x_1, x_2, \dots\} \in Y$, что $L((x_i)) = 1$ при $i > I$ для некоторого I . Эквивалентное требование :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \min_{x \in D_i} B(x) = \infty.$$

Марковский компакт назовём минимальным, если для любого $i > 0$ и любого $x \in D_i$ существует такое j , что для любого $y \in D_j$ существует путь $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x = x_i, y = x_j$. Эквивалентное определение выглядит так: существует такая последовательность $k_1 < k_2 < \dots$, что матрицы $M_{k_i} M_{k_{i+1}} \dots M_{k_{i+1}-1}$ не имеют нулевых элементов при $i = 1, 2, \dots$ (см. предложение 2 из [1]).

На пространствах состояний D_i определим упорядочения $\prec_i$: $u \prec_i v$, если $u = d_{j_1}^i, v = d_{j_2}^i$, $j_1 < j_2$.

Имеется естественное частичное упорядочение $\prec$ на $Y : \{x_1, x_2, \dots\} \prec \{y_1, y_2, \dots\}$, если для некоторого I $x_I \prec_I y_I$ и $x_i = y_i$ при $i > I$. Пусть $K_1(Y, \prec)$ – множество максимальных элементов Y , $K_2(Y, \prec)$ – множество минимальных элементов.

Определим теперь адическое преобразование U , связанное с Y (понятие преобразование в общем случае условно, потому что U не всюду определено). По определению нашего упорядочения очевидно, что если $x \in Y \setminus K_1$, то существует и единственно такое $y \succ x$, что если $z \succ x$, то $z \succeq y$ для любого $z \in Y$. Положим $Ux = y$. Аналогичным образом определяется U^{-1} на $Y \setminus K_2$. При наших предположениях очевидно, что $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Сужения отображений U и U^{-1} на множество $Y' = Y \setminus (\cup_{i=0}^{\infty} U^{-i} K_1 \cup \cup_{i=0}^{\infty} U^i K_2)$ являются взаимнооднозначными преобразованиями этого множества – гомеоморфизмами в его относительной топологии.

О том, какими подмножествами Y могут быть K_1 и K_2 , известно очень мало. По аналогии с теорией упорядоченных диаграмм Браттели [2] (понятие, как легко понять, эквивалентное обсуждавшемуся выше) марковский компакт естественно называть существенно простым, если $\#K_1 = \#K_2 = 1$ (для соответствующих адических преобразований в [2] вычислялась группа размерностей C^* -алгебры-скрещенного произведения и изучались свойства этой алгебры). В этом случае естественное

продолжение U оказывается гомеоморфизмом Y . Введем понятие обобщённо существенно простого марковского компакта ОСПМК.

Определение. Минимальный марковский компакт Y называется обобщённо существенно простым, если существует такое инъективное отображение $f : K_1 \rightarrow K_2$, что если $x_n \rightarrow x, x_n \in Y, 0 < n < \infty, x \in K_1$, то $U(x_n) \rightarrow f(x)$ в слабой топологии Y .

Ясно, что если условие определения выполнено, то f автоматически оказывается биекцией. Сейчас будет построен (эффективно) пример ОСПМК, для которого K_i имеют мощность континуума. Полагаем $r_1 = 4, r_n = 2^{n+1} + 3$. Можно считать, что для каждого $n > 1$ определены следующие (тривиальным образом строящиеся) отображения ϕ_n (определённое и при $n = 1$)–произвольная биекция $\{d_1^n, \dots, d_{2^n}^n\} \rightarrow \{d_{r_n-2^{n+1}+1}^n, \dots, d_{r_n}^n\}$, $\lambda_n : \{d_1^n, \dots, d_{2^n}^n\} \rightarrow \{d_1^{n-1}, \dots, d_{2^{n-1}}^{n-1}\}$, $\tau_n : \{d_{r_n-2^{n+1}+1}^n, \dots, d_{r_n}^n\} \rightarrow \{d_{r_{n-1}-2^{n-1}+1}^{n-1}, \dots, d_{r_{n-1}}^{n-1}\}$ –такие сюръекции, что для любого k $\#\lambda_n^{-1}(d_k^n) = 2$, если $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ и $\#\tau_n^{-1}(d_k^n) = 2$, если $r_{n-1} - 2^{n-1} < k \leq r_{n-1}$ и, кроме того, $\lambda_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \tau_n, 2 \leq n < \infty$, а также отображение $s_n : D_n \rightarrow D_{n-1} \times D_{n-1}$, удовлетворяющее перечисленным ниже условиям:

- 1) $Im s_n \subset \{d_1^{n-1}, \dots, d_{2^{n-1}}^{n-1}\} \times \{d_{r_{n-1}-2^{n-1}+1}^{n-1}, \dots, d_{r_{n-1}}^{n-1}\}$;
- 2) если $s_n(k) = (a, b)$, $s_n(k+1) = (e, f)$, то $\phi_{n-1}(b) = e, 1 \leq k \leq r_n$;
- 3) $s_n(k) = (\lambda_n(k), r)$, если $1 \leq k \leq 2^n$, $s_n(k) = (r, \tau_n(k))$, если $r_n - 2^n < k$;
- 4) среди пар $s_n(k)$, $2^n < k < r_n - 2^n$ имеется пара вида $(1, v)$ и пара вида (u, r_{n-1}) .

Теперь определим матрицы M_n следующим образом: если $s_{n+1}(k) = (a, b)$, то $M_n(x, k) = 1$ только тогда, когда $a \leq x \leq b$. Легко видеть, что условия 1) и 3) обеспечат континуальность $K_i(K_2 = \{\{d_{v_n}^n\}_{n=1}^\infty \mid v_n \leq 2^n, d_{v_{n-1}}^{n-1} = \lambda_n(d_{v_n}^n), 1 < n < \infty\})$, условие 4)–минимальность U , усло-

ние 2)–обобщённую существенную простоту. Иной вариант построения компакта с продолжением U до гомеоморфизма (без описания матриц) содержится в [2].

В общем случае пара K_1, K_2 выглядит следующим образом. Существуют последовательности множеств $\{F_n\}_{n=1}^\infty, \{G_n\}_{n=1}^\infty, F_n \cup G_n \subset D_n, 1 \leq n < \infty$ и таких сюръекций $\lambda_n : F_n \rightarrow F_{n-1}, \lambda_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$, что если для некоторого n $F_n \cap G_n \neq \emptyset$ и $x \in F_n \cap G_n$, то $\lambda_n(x) \preceq \tau_n(x)$ и не существует бесконечных цепочек $\{x_n\}_L^\infty : x_n \in F_n \cap G_n, x_{n-1} = \lambda_n(x_n) = \tau_n(x_n), L \leq n < \infty$. При этом для K_i имеем следующее описание:

$$K_1 = \{\{g_n\}_{n=1}^\infty \mid g_n \in G_n, g_{n-1} = \tau_n(g_n), 2 \leq n < \infty\},$$

$$K_2 = \{\{f_n\}_{n=1}^\infty \mid f_n \in F_n, f_{n-1} = \lambda_n(f_n), 2 \leq n < \infty\}.$$

Если Y –минимальный марковский компакт, то он обладает ещё одним важным свойством. Существуют такие монотонно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_k\}, \{m_k\}; m_k < n_k < m_{k+1}, 1 \leq k < \infty$, что если обозначить для произвольного $x \in D_k$ $l(u) = \min\{v : M_{n-1}(v, u) = 1\}$, $t(u) = \max\{v : M_{n-1}(v, u) = 1\}$, имеем при каждом k : матрица $M_{n_k} \dots M_{m_{k+1}-1}$ состоит из одних положительных элементов,

$$\underbrace{l \circ l \circ l \dots l}_{n_k - m_k \text{ раз}}(D_{n_k}) = F_{m_k}, \quad \underbrace{t \circ t \circ t \dots t}_{n_k - m_k \text{ раз}}(D_{n_k}) = G_{m_k}.$$

Выбор последовательностей весьма неоднозначен, но если он сделан, то можно считать, что фиксация множеств F_k, G_k не очень ограничивает выбор матриц M_n при $n_k \leq n < m_{k+1}$ (разве лишь в том, что если $x \in F_n$, то $\lambda_n(x) = l(x)$, если $x \in G_n$, то $\tau_n(x) = t(x)$), однако за промежутки времени $m_k \leq n < n_k$ можно, не утрачивая минимальности, согласовать выбор матриц (мы, конечно же, предполагаем, что матрицы не имеют нулевых строк) с фиксацией F_n, G_n .

Мощности множеств K_1, K_2 , как видно из вышеприведенного описания, могут быть самыми различными. Если, например, ([14]) потребовать, чтобы $r_i = 2^i + 1, 1 \leq i < \infty$ и $M_i(d_{j_1}^i, d_{j_2}^{i+1}) = 1$, если либо $j_1 = r_i$, либо $j_2 = r_{i+1}$, либо $j_1 \equiv j_2 \pmod{2^i}, 1 \leq i < \infty$, то мы получим минимальный марковский компакт, у которого K_2 -континуально, K_1 -одноточечно.

Структура минимального марковского компакта может быть описана более детально. Воспользуемся теми обозначениями, которые уже введены.

Введем дополнительно при $s \geq 1$ обозначение $F'_{s,n}$ для множества вершин $\{d_i^n \in D_n \mid \exists d_j^{n+s} \in D_{n+s}, d_i^n = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_s(d_j^{n+s}), \nexists d_j^{n+s+1} \in D^{n+s+1}, d_j^n = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{s+1}(d_j^{n+s+1})\}$, $G'_{s,n}$ -для множества $\{d_i^n \in D_n \mid \exists d_j^{n+s} \in D_{n+s}, d_i^n = \underbrace{l \circ \dots \circ l}_s(d_j^{n+s}), \nexists d_j^{n+s+1} \in D^{n+s+1}, d_j^n = \underbrace{l \circ \dots \circ l}_{s+1}(d_j^{n+s+1})\}$. Эти множества при некоторых n, s могут оказываться пустыми.

Либо множество $\cup_{s=1}^{\infty} G'_{s,n}$ пусто, либо существует такая последовательность натуральных чисел $\{k_s^n\}_{s=1}^{p_n}, p_n < \infty$, что $\cup_{s=1}^{\infty} G'_{s,n} = \cup_{s=1}^{p_n} G'_{k_s^n, n}$. Либо множество $\cup_{s=1}^{\infty} F'_{s,n}$ пусто, либо существует такая последовательность натуральных чисел $\{j_s^n\}_{s=1}^{q_n}, q_n < \infty$, что $\cup_{s=1}^{\infty} F'_{s,n} = \cup_{s=1}^{q_n} F'_{j_s^n, n}$. Имеем $l^{-1}(G'_{k,n-1}) \subset (D_n \setminus lD_{n+1}) \cup \cup_{i < k} G'_{i,n}$ и $l^{-1}(G'_{k,n-1}) \cap G_{k-1,n} \neq \emptyset$, если $k > 1$, и $l(G'_{k,n}) \subset \cup_{s=k+1}^{\infty} G'_{s,n-1} \cup G_{n-1}, n > 1$. Аналогично, $t^{-1}(F'_{k,n-1}) \subset (D_n \setminus tD_{n+1}) \cup \cup_{i < k} F'_{i,n}$ и $t^{-1}(F'_{k,n-1}) \cap F'_{k-1,n} \neq \emptyset$

при $k > 1$ и $t(F'_{k,n}) \subset \cup_{s=k+1}^{\infty} F'_{s,n-1} \cup F_{n-1}, n > 1$. Далее, по определению очевидно, что $\{k_s^n\}_{s=1}^{p_1} \supset \{k_s^{n-1} - 1\}_{\min\{s|k_s^{n-1} > 1\}}^{p_{n-1}}, \{j_s^n\}_{s=1}^{q_1} \supset \{j_s^{n-1} - 1\}_{\min\{s|j_s^{n-1} > 1\}}^{q_{n-1}}$.

Мы фактически описали структуры, связанные со свойствами отображений l и t . Если переходные матрицы естественным образом согласованы со свойствами l и t , $m_{u,v}^n = 1 \Rightarrow l(v) \prec_{n-1} u \prec_{n-1} t(v)$, то для мини-

мальности достаточно , чтобы для любого n нашлось такое k , что если $d_j^{n+k} \in F_{n+k}$ и $d_i^n \in D_n$, то $(M_n \dots M_{n+k_1})_{ij} > 0$.

Градуированный граф, определяемый вершинами $\cup D_n$ и дугами, соответствующими матрицам M_n , появляется в теории $AF-C^*$ -алгебр([49],[17]). Он может рассматриваться как граф ветвления $AF-C^*$ -алгебры.

Для каждой вершины x рассматриваем алгебру матриц $M_{B(x)}(C)$ с комплексными коэффициентами. Обозначим через A_n алгебру $\oplus_{x \in D_n} M_{B(x)}(C)$. Естественные вложения $A_n \rightarrow A_{n+1}$ определяются графом ветвления. $AF-C^*$ -алгебра определяется как пополнение по C^* -норме индуктивного предела этой системы алгебр (рассматриваемых как конечномерные C^* -алгебры). Известно, что каждый нормированный след на $AF-C^*$ -алгебре определяется положительной нормированной мерой на компакте Y , удовлетворяющей важному условию центральности [17]. Центральной мерой называется такая мера μ на Y , что существует такое отображение $v : \cup D_n \rightarrow R$, что для любого набора $\{y_1, \dots, y_n\}, y_i \in D_i, m_{y_i y_{i+1}} = 1, 1 \leq i < n$ имеем $\mu\{\{x_1, \dots\} | x_i = y_i, 1 \leq i \leq n\} = \mu(C\{y_1, \dots, y_n\})$. Очевидно, что мера, инвариантная относительно адического преобразования, центральна. Легко видеть, что верно и обратное утверждение (оно вытекает из наших предположений о марковском компакте). Таким образом, изучение следов адического преобразования сводится к изучению инвариантных мер адического преобразования. Под инвариантной мерой для не всюду определенного адического преобразования имеется в виду такая мера μ , что для любого борелевского множества $B \subset Y$ имеем $\mu(U(B \cap Y')) = \mu B$, где U - адическое преобразование.

§2. Связь между адическим представлением и аппроксимациями.

Существуют два различных подхода к построению адического представления метрического автоморфизма. Один основан на методе кодирования [14], [19] (при фиксации образующей), другой – на методе аппроксимаций в эргодической теории и топологической динамике [1],[2]. Само построение образующей (первоначальное) тоже основано на методе аппроксимаций [21], после чего методами кодирования строятся образующие со специальными свойствами ([51-54] и др.). Естественно, что теория адического преобразования связана с теорией аппроксимаций. В настоящее время в эргодической теории имеется много вариантов определения аппроксимации и ранга аппроксимации. Напомним один из первоначальных.

Эргодическая динамическая система с инвариантной мерой (X, μ, T) в пространстве Лебега называется системой ранга не выше r [28], если для любого конечного измеримого разбиения ξ пространства X и любого ϵ существуют измеримые множества $B_1, \dots, B_r$, натуральные числа $h_1, \dots, h_r$ и такое разбиение $\xi' \prec$

$$\{B_1, TB_1, \dots, T^{h_1-1}B_1, B_2, \dots, T^{h_2-1}B_2, \dots, T^{h_r-1}B_r, X \setminus \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=0}^{h_i-1} T^j B_i\},$$

что $|\xi' - \xi| < \epsilon$, где $|\cdot|$ – обычное расстояние между разбиениями [25].

Пусть ν – центральная мера в марковском компакте $Y = Y(\{D_i\}, \{M_i\})$. Очевидно, что если для некоторой последовательности $\{i_k\}, 0 < i_1 < i_2 < \dots$ имеем $r_{i_k} < r$, то ранг преобразования U не выше r . Если $0 < j < r_i$, то обозначим через C_j^i множество $\{\{x_1, x_2, \dots\} \in Y, x_i = d_j^i\}$. Очевидно теперь, что если существуют такие последовательности чисел $\{i_k\}, 0 < i_1 < i_2 < \dots, \{\epsilon_l\} \searrow 0$ и множеств $\{j_l^k\}_{l=1}^{s_{i_k}} \subset D_{i_k}, s_{i_k} \leq r$, что при каждом k имеем $\sum_{l=1}^{s_{i_k}} \nu C_{j_l^k}^{i_k} > 1 - \epsilon_k$, то ранг u не выше r .

Для дальнейших формулировок введём ряд определений. Во первых, определим для каждого $i > 0$ совокупность отображений $\{\phi_j^i\}_{j=1}^i$, $\phi_j^i : \{(d_p^i, s), 1 \leq p \leq r_i, 1 \leq s \leq B(d_p^i)\} \rightarrow \{\{x_1, \dots, x_j\}, x_l \in D_l, 1 \leq l \leq j, M_l(x_l, x_{l+1}) = 1, 1 \leq l \leq j-1\}$. ϕ_j^i сопоставляет, по определению, каждой паре (d_p^i, s) j -начало s -ого (начиная с минимального по упорядочению, определённого выше) пути среди i -путей, ведущих в d_p^i .

Пусть теперь $H = \{h_i\}_{i=1}^r$ — некоторый набор натуральных чисел. Для произвольного набора натуральных чисел $\{s_i\}_{i=1}^b$ H -разбиением с остатком $\{l_i\}_{i=1}^b$ назовём совокупность F таких четвёрок натуральных чисел (m, n, p, q) , что:

- 1) если $(m, n, p, q) \in F$, то $1 \leq p < q \leq s_n$, $1 \leq m \leq r$ и $1 \leq n \leq b$;
- 2) если $(m_i, n_i, p_i, q_i) \in F$, $i = 1, 2$ и $n_1 = n_2$, то $[p_1, q_1] \cap [p_2, q_2] = \emptyset$;
- 3) если $(m, n, p, q) \in F$, то $q - p + 1 = h_m$;
- 4) для любого $n_0, 1 \leq n_0 \leq b$ имеет место $s_{n_0} - \sum_{(m, n_0, p, q) \in F} (q - p + 1) = l_{n_0}$.

Предположим, что зафиксированы такие последовательности $\{i_k\}$, $i_1 < i_2 < \dots$, $\{j_k\}$, $j_1 < j_2 < \dots$, $\{\epsilon_k\} \searrow 0$, H_k , $H_k = \{h_i^k\}_{i=1}^r$ и для каждого k набору $\{B(d_p^{i_k})\}_{p=1}^{r_{i_k}}$ сопоставлено такое H_k -разбиение F_k с остатком $\{l_p^k\}_{p=1}^{r_{i_k}}$, что

- 1) $\sum_{p=1}^{r_{i_k}} \frac{l_p^k}{B(d_p^{i_k})} \nu C_p^{i_k} < \epsilon_k$;
- 2) для каждого $m, 1 \leq m \leq r$ существует более чем $(1 - \epsilon_k)h_m^k$ таких значений $s, 0 \leq s \leq h_m^k - 1$, что если $(m, n_1, p_2, q_2) \in F_k$ и $(m, n_2, p_2, q_2) \in F_k$, то $\phi_{j_k}^{i_k}((d_{n_1}^{i_k}, p_1 + s)) = \phi_{j_k}^{i_k}((d_{n_2}^{i_k}, p_2 + s))$.

Разумеется, если это условие выполнено для какой либо одной последовательности j_k , то оно выполнено для любой другой с иными i_k и ϵ_k . Условия 1) и 2) в совокупности достаточны для того, чтобы U имело ранг не выше r .

Может быть сформулировано (вместо 1) и 2)) и более слабое условие

3*) (тоже достаточное, но на сей раз уже в некотором смысле необходимое) . Предположим, что заданы $\{i_k\}, \{j_k\}, \{H_k\}, \{F_k\}$ с теми же свойствами и выполнено

3*) для каждого k существует набор пар натуральных чисел $(k u_l^m, k v_l^m)$, удовлетворяющий условиям $k u_l^m \leq r_{j_k}, 1 \leq l \leq s_m^k, k v_{l+1}^m - k v_l^m \geq B(d_{k u_l^m}^{j_k}), 1 \leq l < s_m^k, k v_{s_m^k}^m + B(d_{k u_{s_m^k}^m}^{j_k}) \leq h_m^k, 1 \leq m \leq r$, и такой, что если обозначить через $I s_k$ множество таких шестерок (m, n, p, q, u, v) , что $(m, n, p, q) \in F_k$, для некоторого l $(u, v) = (k u_l^m, k v_l^m)$ и $\phi_{j_k}^{i_k}((d_n^{i_k}, p - 1 + v + s)) = x_1, \dots, x_{j_k-1} d_u^{j_k}, 1 \leq s \leq B(d_u^{j_k})$ и через δ_k - число $1 - \sum_{I s_k} \nu C_n^{i_k} \frac{B(d_u^{j_k})}{B(d_n^{i_k})}$ то $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Если для пары Y, ν существуют такие $\{i_k\}, \{j_k\}, \{H_k\}, \{F_k\}$, что выполнено 3*), то назовем эту пару парой ранга не выше r . Сделанное выше замечание о выборе $\{j_k\}$, конечно, остается в силе.

Предложение. Если U – адическое преобразование, действующее в марковском компакте Y с центральной мерой ν , и как автоморфизм пространства Лебега (Y, ν) имеет ранг не выше r , то пара (Y, ν) имеет ранг не выше r .

Доказательство. Будем считать, что $j_k \equiv k$. Зададимся малым $\epsilon > 0$ и натуральным числом k . Обозначим для любого натурального l через ξ_l разбиение Y на множества $C(\phi_l^l(d_p^l, s)), 1 \leq s < B(d_p^l)$. Естественно, $C(\phi_l^l(d_p^l, s + 1)) = UC(\phi_l^l(d_p^l, s)), 1 \leq s < B(d_p^l)$. Следует также дополнительно требовать малости отношения $\frac{\max_p B(d_p^k)}{\min_q h_q^{\epsilon'}}$, от какового требования можно было бы отказаться, изменив определение набора пар $(k u_l^m, k v_l^m)$ (упразднением последнего неравенства и допущением $v_1^m < 1$) и определение δ_k (изменением числителя для соответствующих случаев). По условию, для любого сколь угодно малого ϵ' найдутся измеримые множества $B_1^{\epsilon'}, \dots, B_r^{\epsilon'}$, а также такие натуральные числа $h_1^{\epsilon'}, \dots, h_r^{\epsilon'}$ и разбиение $\xi_k^{\epsilon'}$, что $|\xi_k - \xi_k^{\epsilon'}| < \epsilon'$ и

$\xi'_k \prec \{B_1^{\epsilon'}, UB_1^{\epsilon'}, \dots, U^{h_1^{\epsilon'}-1} B_1^{\epsilon'}, B_2^{\epsilon'}, UB_2^{\epsilon'}, \dots, U^{h_2^{\epsilon'}-1} B_2^{\epsilon'}, \dots, U^{h_r^{\epsilon'}-1} B_r^{\epsilon'}, Y \setminus \cup_{i=1}^r \cup_{j=0}^{h_i^{\epsilon'}-1} U^j B_i^{\epsilon'}\} = \eta$, причем $\nu(Y \setminus \cup_{i=1}^r \cup_{j=0}^{h_i^{\epsilon'}-1} U^j B_i^{\epsilon'}) < \epsilon$. Далее, для любого ϵ'' найдется такое $i_{\eta}^{\epsilon''}$, что для некоторого разбиения $\eta' \prec \xi_{i_{\eta}^{\epsilon''}}$ имеем $|\eta - \eta'| < \epsilon''$. Можно считать (если ϵ'' достаточно мало), что

$$\eta' = \{E_0^1, \dots, E_{h_1^{\epsilon'}-1}^1, E_0^2, \dots, E_{h_2^{\epsilon'}-1}^2, \dots, E_{h_r^{\epsilon'}-1}^r, Y \setminus \cup_{i=1}^r \cup_{j=0}^{h_i^{\epsilon'}-1} E_j^i\},$$

где меры симметрических разностей с соответствующими множествами ν малы. Если при фиксации η рассматривать сколь угодно малые ϵ''' и соответствующие $i_{\eta}^{\epsilon'''}$, то, очевидно, можно, несущественно изменяя E_j^i , получать $\eta' \prec \xi_{i_{\eta}^{\epsilon'''}}$ в виде

$$\eta' = \{E^1, \dots, U^{h_1^{\epsilon'}-1} E^1, E^2, \dots, U^{h_2^{\epsilon'}-1} E^2, \dots, U^{h_r^{\epsilon'}-1} E^r, Y \setminus \cup_{i=1}^r \cup_{j=0}^{h_i^{\epsilon'}-1} U^j E^i\}$$

с $|\eta - \eta'| < \epsilon''$, где $\epsilon''' = \epsilon'''(\epsilon'', \eta)$. Пользуясь разбиением η' сопоставим набору $\{B(d_{\alpha}^{i_{\eta}^{\epsilon'''}})\}_{\alpha=1}^{r_{i_{\eta}^{\epsilon'''}}}$ H -разбиение $F_{\eta'}$, где $H = \{h_1^{\epsilon'}, \dots, h_r^{\epsilon'}\}$.

Пусть $E^g = \cup_{\alpha=1}^{r_{i_{\eta}^{\epsilon'''}}} \cup_{\beta=1}^{v_{\alpha}^g} C(\phi_{i_{\eta}^{\epsilon'''}}^{i_{\eta}^{\epsilon'''}}(d_{\alpha}^{i_{\eta}^{\epsilon'''}}), s_{\beta}^{\alpha,g}), 1 \leq g \leq r$. Возможность такого представления вытекает из определения ϕ и того, что $\eta' \prec \xi_{i_{\eta}^{\epsilon'''}}$. Можно считать, что при любых возможных α, β, g имеем $s_{\beta}^{\alpha,g} + h_g^{\epsilon'} - 1 \leq B(d_{\beta}^{i_{\eta}^{\epsilon'''}})$. Пусть теперь, по определению, четверка $(m, n, p, q) \in F_{\eta'}$ в том и только в том случае, если для некоторых α, β, g (в сочетании, участвующем в последней формуле) имеем $m = g, n = \alpha, p = s_{\beta}^{\alpha,g}, q = s_{\beta}^{\alpha,g} + h_g^{\epsilon'} - 1$. Теперь ясно, что если, зафиксировав k, ϵ, δ , при построении η' задаться достаточно малыми ϵ', ϵ'' , то, выбрав в качестве i_k число $i_{\eta}^{\epsilon'''}$, в качестве $H_k - \{h_i^{\epsilon'}\}_{i=1}^r$ и, определив набор $\{(k u_l^m, k v_l^m)\}$ в соответствии с соотношением между ξ'_k и η , мы получили бы $\delta_k < \epsilon$. Таким образом, очевидна возможность построения возрастающей последовательности $\{i_k\}$, чем и завершается доказательство предложения.

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНЫЕ АДИЧЕСКИЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПОДСТАНОВКИ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ,
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ, ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРЕ

§1. Стационарные адические преобразования.

Важный класс адических преобразований образуют так называемые стационарные адические преобразования. Стационарным называется адическое преобразование такого марковского компакта, у которого мощности пространств состояний и переходные матрицы (определяемые в соответствии с упорядочениями пространств состояний) не зависят от номера, т.е. можно считать, что $D_1 = D_2 = \dots = D$; $M_1 = M_2 = \dots = M$. О преобразованиях этого типа получена довольно обширная информация, потому что для этого случая оказалось возможным использование результатов, ранее полученных в теории подстановочных преобразований (условия минимальности, одноэргодичности, результаты о спектре динамических систем и пр.). Оказывается, каждой подстановке можно формально сопоставить некоторое стационарное адическое преобразование, каждому стационарному адическому преобразованию можно сопоставить подстановку таким образом, что в широком классе случаев соответствующие динамические системы окажутся метрически изоморфными. То есть речь идет попросту о двух различных представлениях одного и того же объекта. В некоторых случаях использование этих двух представлений дает определенные преимущества.

Очевидно, что минимальность марковского компакта соответствует примитивности матрицы M , т.е. существование такого натурального N , что матрица M^N имеет лишь положительные элементы. Определение, эквивалентное определению адического (трансверсального) преобразования стационарного марковского компакта, впервые появилось, по-видимому, в работе [18]. Там же приводится выражение для мер цилин-

дрических множеств (минимальный стационарный марковский компакт имеет лишь одну центральную меру). Оказалось, что центральная мера на марковском компакте- нестационарная марковская, лишь начальными распределениями отличающаяся от стационарной (инвариантной относительно сдвига) марковской меры с максимальной энтропии, отвечающей топологической марковской цепи с переходной матрицей M .

Выражения эти выглядят следующим образом. Пусть H^c -нормированный собственный вектор- столбец матрицы M , отвечающий ее наибольшему собственному значению λ (положительный собственный вектор примитивной матрицы существует в соответствии с теоремой Перрона- Фробениуса), H^r -нормированный собственный вектор-строка матрицы M , отвечающий тому же собственному значению. Обозначим через μ^c центральную меру, через μ^s -инвариантную относительно сдвига меру с максимальной энтропией. Тогда для любого конечного пути $x_1 \dots x_n, x_i \in D_i, 1 \leq i \leq n$: имеем

$$\mu^{(\cdot)}\{x \in Y \mid x = \{z_1, \cdot\}, z_i = x_i, 1 \leq i \leq n\} = \mu^{(\cdot)}\{x \in Y \mid x = \{z_1, \cdot\}, z_1 = x_1\} \prod_{i=1}^{n-1} P_{x_i x_{i+1}} H_{x_n}^c = P_{x_1}^{(\cdot)} \prod_{i=1}^{n-1} P_{x_i x_{i+1}} H_{x_n}^c$$

,где $P_{x_1}^c = 1; P_{x_1}^s = H_{x_1}^r (H^c, H^r)^{-1}$.

Опишем множества K_1 и K_2 для стационарного случая. Ясно, (мы используем обозначения §1 гл.1), что $\{x_i\} \in K_1$ тогда и только тогда, когда $t(x_{i+1}) = x_i, 1 \leq i < \infty$ — а это в стационарном случае влечет периодичность $\{x_i\}$. Аналогично, $\{x_i\} \in K_2$ тогда и только тогда, когда $l(x_{i+1}) = x_i, 1 \leq i < \infty$ - снова $\{x_i\}$ периодична. Таким образом, оба множества конечны. Очевидно, что каждое из этих множеств инвариантно относительно сдвига в пространстве последовательностей

$\{x_i\}_{i=1}^\infty \in K_j \Rightarrow \{x'_i\} \in K_j, x'_i = x_{i+1}, 1 \leq i < \infty$. Таким образом, мощность каждого множества равна совокупному числу "задействованных" состояний.

Для любой вершины $x \in D^k$ обозначим через $q^t(x)$ конечный путь $\underbrace{t(\dots(t(x)\dots))}_{k-1}, \underbrace{t(\dots(t(x)\dots))}_{k-2}, \dots, x$, через $q^l(x)$ – конечный путь $\underbrace{l(\dots(l(x)\dots))}_{k-1}, \underbrace{l(\dots(l(x)\dots))}_{k-2}, \dots, x$. В D введем отношение $R d_i R d_j \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in Y, x_2 = T(x_1), x_2 = \{d_j, \dots\}, x_1 = \{d_i, \dots\}$.

Определим отображение $\phi : K_1 \rightarrow 2^{K_2} : x \in \phi(a) \Leftrightarrow \forall i > 0 \exists x_1^i, x_2^i \in D_{k_i}, x_1^i R x_2^i, q_t(x_1^i) \rightarrow a, q_l(x_2^i) \rightarrow x$. Под сходимостью имеется в виду сходимость в слабой топологии. С помощью ϕ , надлежащих склеек полутраекторий и добавления новых траекторий можно естественным образом получить пространство, в котором действует настоящий всюду определенный гомеоморфизм. Однако эта конструкция (см. разбор примера в [16]) эквивалентна конструкции, обсуждаемой в следующем параграфе. В терминах отображения ϕ могут быть представлены различные топологические инварианты, в том числе инварианты C^* -алгебр–скрещенных произведений. Для нестационарного случая мы уже рассматривали некоторые возможные ситуации и привели, в частности, пример, для которого ϕ – биекция $K_1 \rightarrow K_2$. Для стационарного случая очевидно, что ϕ всегда инвариантно относительно сдвига $x \in \phi(a) \Leftrightarrow \sigma(x) \in \phi(\sigma(a))$, где σ – сдвиг односторонней топологической цепи Маркова. Вследствие этой инвариантности соответствие ϕ может быть записано очень компактно – на уровне элементов D (если $\{x_i\} \in K_1, \{y_i\} \in K_2$, то для любого n пара (x_n, y_n) однозначно определяет эти два пути)

§2. Подстановочные динамические системы. Опишем теперь иной класс иерархических динамических систем. Пусть $Z_* = \{1, \dots, n\}$ – конечный алфавит, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – набор слов в этом алфавите. Введем

$n \times n$ -матрицу $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij})$, элементы которой g_{ij} суть числа вхождений символов j в слова A_i . Будем требовать, чтобы матрица $G_{\mathcal{A}}$ была примитивной. Определим отображение $\omega_{\mathcal{A}} : \cup_{k \geq 0} Z_*^k \rightarrow \cup_{k \geq 0} Z_*^k$ следующим образом: $\omega_{\mathcal{A}}(a_1 \dots a_k) = A_{a_1} \dots A_{a_k}$, где в правой части стоит конкатенация слов. Подстановкой называется сужение $\omega_{\mathcal{A}}|_{Z_*}$. Подстановка порождает топологическую динамическую систему- замкнутое инвариантное относительно сдвига множество в пространстве двусторонних последовательностей, два описания которого сейчас будут приведены. Первое из них это несколько видоизмененное определение работы [39].

Порождающей четверкой назовем такую четверку натуральных чисел (i, j, m, n') , $i \leq n, j + 1 \leq |a_i|$, что существуют такие символы $a, b, c, d \in Z_*$, что:

- 1) c и d являются, соответственно, j и $j + 1$ символами слова A_i ;
- 2) слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(c)$ кончается на a и слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(d)$ начинается с b ;
- 3) $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)$ кончается на a и $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b)$ начинается с b .

Порождающие четверки существуют для любой подстановки. Любой допустимой паре (i, j) соответствуют порождающие четверки, а при условии выбора минимальных возможных m, n' -единственная порождающая четверка.

Зафиксируем какую либо из порождающих четверок и построим совокупность конечных последовательностей символов. Точнее, будет построена совокупность таких интервалов целых чисел I_k , что $I_k \subset I_{k+1}$, $0 \leq k < \infty$, $\cup I_k = (-\infty, \infty)$ и таких отображений $x_k : I_k \rightarrow Z_*$, что $x^{k+1}|_{I_k} = x^k$, $0 \leq k < \infty$. Для этого рассмотрим последовательность конкатенаций $ab, \omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b), \omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(b), \dots$. В качестве $x^k(r)$ возьмем $r + |\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(a)|$ -ую букву слова $\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(b)$. В силу свойства 3) порождающей четверки очевидно, что наши требования к I_k и x^k удовлетворены. Тем самым, определено такое отображение $x^\infty : (-\infty, \infty) \rightarrow Z_*$, что

$x^\infty \mid_{I_k} = x^k$, или последовательность $x(i, j, m, n')$ элементов Z_* . Обозначим через $X_{\mathcal{A}}$ слабое замыкание множества сдвигов этой последовательности. $X_{\mathcal{A}}$, как легко понять, не зависит при условии примитивности $G_{\mathcal{A}}$ от выбора порождающей четверки. Каждая последовательность из $X_{\mathcal{A}}$ будет называться допустимой.

Может быть дано другое определение нашего замкнутого инвариантного множества (см., например, [55] стр.214)

$$X_{\mathcal{A}} = \{ \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \mid \forall p < q \exists a \in Z_*, m \geq 0 : x_p \dots x_q \text{ есть подслово слова } \omega_{\mathcal{A}}^m(a) \}.$$

Подслова слов вида $\omega_{\mathcal{A}}^m(a)$ тоже будут называться допустимыми словами.

Очевидно, что каждая последовательность из $X_{\mathcal{A}}$ имеет вид $\dots x_{n-k} \dots x_{n_{1-k}} \dots x_{n-1} \dots x_{n_0} \dots x_{n_k} \dots$, где $n_{-1} < 0 \leq n_0$ и для каждого k существует такое $s_k \in Z_*$, что $x_{n_{k-1}+1} \dots x_{n_k} = \omega_{\mathcal{A}}(s_k)$. Мы будем говорить, что подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ обладает свойством ОДД (однозначность допустимого декодирования) в том и только в том случае, когда для каждой допустимой последовательности существует ровно одно представление такого вида с допустимой последовательностью $\{s_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Ранее использовались иные определения однозначной декодируемости допустимых последовательностей, первые из которых специально исследовались в [56] и в [57]. В настоящее время получены результаты (см.[58]) , из которых следует, что для примитивных подстановок единственной альтернативой ОДД является цикличность. Циклической подстановкой называется такая подстановка, для которой $X_{\mathcal{A}}$ состоит из одной периодической траектории. Примеры:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 12 & 1 \rightarrow 13213 \\ 2 \rightarrow 12 & 2 \rightarrow 32 \\ & 3 \rightarrow 21 \end{array} .$$

Для подстановок с постоянной длиной слова критерий цикличности имеется в [41].

Поскольку в нестационарном случае однозначность декодирования- явление более редкое и менее изученное, полезно использование концепции структурированной допустимой последовательности, принятие которой снимает вопрос об однозначности декодирования. Эта концепция выработана также и для нестационарного случая и весьма полезна при описании иерархической структуры допустимых последовательностей и работе с ней.

Итак, предположим, что фиксированы такие Z_* , $\mathcal{A}$, что $G_{\mathcal{A}}$ -примитивна, и определено отображение $\omega_{\mathcal{A}}$.

Будут описаны вполне несвязный бикомпакт $X_{\mathcal{A}}^s$ -множество допустимых структурированных последовательностей и его гомеоморфизм $T_{\mathcal{A}}^s : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}}^s$. Предварительно введем вспомогательное понятие структурированной последовательности. Она определяется как пара $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^\infty, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\}$, где для каждого l S_x^l -последовательность элементов Z_* , $S_x^l = \{i_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty$ и $\{n_{r,x}^l\}$ - последовательность таких целых чисел, что:

1) если $l_1 < l_2$, то $\{n_{r,x}^{l_2}\} \subset \{n_{r,x}^{l_1}\}$ в естественном смысле ; если $r_1 < r_2$, то для каждого $l \geq 0$ $n_{r_1,x}^l < n_{r_2,x}^l$,

2) $n_{-1,x}^l + 1 \leq 0 \leq n_{0,x}^l$ для каждого $l \geq 0$,

3) $i_{n_r^l+1,x}^0 \dots i_{n_{r+1}^l,x}^0 = \omega_{\mathcal{A}}^l(i_{r+1,x}^l), l \geq 0, -\infty < r < \infty$,

4) если для некоторых r, Δ, r' в соответствии с 1) мы имеем $n_{r',x}^l = n_{r,x}^{l+1}$, $n_{r'+\Delta}^l = n_{r+1,x}^{l+1}$, то $\omega_{\mathcal{A}}(i_{r+1,x}^{l+1}) = i_{r'+1,x}^l \dots i_{r'+\Delta,x}^l$.

Очевидно, что из 4) следует 3). Ясно также, что $n_{r,x}^0 = r$ для любых r, x^s . Для множества структурированных последовательностей с естественно определяемыми слабой топологией и соответствующей ей метрикой может быть определена группа гомеоморфизмов (вообще говоря

не минимальных), которая будет обозначаться тоже $\{(T_{\mathcal{A}}^s)^q\}_{q=-\infty}^{\infty}$. Сначала опишем метрику. Пусть ρ -метрика, соответствующая слабой сходимости в пространствах последовательностей элементов Z_* или множества целых чисел $\rho(\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \exp(\min\{-r : a_i = b_i, -r \leq i \leq r\})$, $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 > \dots$, $\sum \rho_i < \infty$ -последовательность положительных вещественных чисел. Имеем $d(x_1^s, x_2^s) = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \rho(S_{x_1}^l, S_{x_2}^l) + \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \rho(\{n_{r,x_1}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}, \{n_{r,x_2}^l\}_{r=-\infty}^{\infty})$. Для любого $l \geq 0$ обозначим через $H(l, q)$ такое p , что $n_{p-1,x}^l + 1 \leq q \leq n_{p,x}^l$ (например, $H(0, q) = q$). Через $\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ обозначим последовательность $\{n_{r+H(l,q),x}^l - q\}_{r=-\infty}^{\infty}$ и через $(T_{\mathcal{A}}^s)^q x^s$ -пару $\{\{T^{H(l,q)} S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, где T -обычный сдвиг последовательности элементов Z_* . Легко проверить, что для $(T_{\mathcal{A}}^s)^q x^s$ выполнены условия 1)–4). Заметим, что в соответствии с 1)–4) знание $S_x^{l_k}, n_{0,x}^{l_k}$ для некоторой последовательности $l_k \rightarrow \infty$ однозначно определяет x^s . Пользуясь этим, мы построим некоторый класс конкретных структурированных последовательностей.

Пусть (i, j, m, n') -некоторая порождающая четверка. Определим структурированную последовательность $x^s(i, j, m, n')$ как $\{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, где все $n_{0,x}^l = 0$, а все $S_x^{in'}$ одинаковы и равны той последовательности (отображению $x^{\infty} : (-\infty, \infty) \rightarrow Z_*$), которая была построена в первом определении $X_{\mathcal{A}}$. Если предполагать, что нумерация- естественная, то можно эту последовательность обозначить $\omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(a) \omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(b) = x(i, j, m, n')$.

Структурированная последовательность называется допустимой структурированной последовательностью, если дополнительно выполнено следующее условие:

5) Имеют место три возможности:

а) $n_{-1,x}^l \rightarrow -\infty, n_{0,x}^l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$;

б) существуют такие h, L , что $n_{-1,x}^l = h < 0$ для всех $l > L$ -в этом

случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T_{\mathcal{A}}^s)^{-h} x^s(i, j, m, n'),$$

в) существуют такие h, L , что $n_{0,x}^l = h \geq 0$ для всех $l > L$ в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T_{\mathcal{A}}^s)^{-h} x^s(i, j, m, n').$$

Естественная проекция $p : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}}(p(x^s) = S_x^0)$ является сюръекцией. В случае ОДД она оказывается биекцией. В случае примитивности $G_{\mathcal{A}}$ наша динамическая система строго эргодична.

Предположим, что задано стационарное адическое преобразование с $D = Z_* = \{1, \dots, n\}$. По матрице M стационарного адического преобразования может быть построена подстановка, которая (если M – примитивна и подстановка окажется ОДД) определяет динамическую систему, метрически изоморфную этому адическому преобразованию. Подстановка определяется следующим образом. В качестве алфавита берется D . Пусть для столбца с номером i $j_1^i < j_2^i < \dots < j_{k_i}^i$ – перечень всех таких j , что $m_{ji} = 1$. Возьмем в качестве слова A_i слово $j_1^i \dots j_{k_i}^i$. Набор слов $\mathcal{A}_M = \{A_i\}$ и определяет нашу подстановку $\omega_{\mathcal{A}_M}$. Имеем ${}^t M = G_{\mathcal{A}_M}$, поэтому M и $G_{\mathcal{A}_M}$ примитивны или нет одновременно. Поскольку в случае ОДД-подстановки $p : X_{\mathcal{A}_M}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}_M}$ есть биекция, мы можем устанавливать соответствие между точками Y и $X_{\mathcal{A}_M}^s$, точнее, между Y' и $X_{\mathcal{A}_M}'^s$, где обозначение $X_{\mathcal{A}_M}'^s$ предлагается использовать для множества точек $X_{\mathcal{A}_M}^s$, удовлетворяющих условию 5а) определения допустимой структурированной последовательности. Соответствие $\phi : X_{\mathcal{A}_M}'^s \rightarrow Y'$ выглядит следующим образом: если $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^\infty, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\}$, то $\phi(x^s)$ есть путь $\dots i_{0,x}^l, \dots, i_{0,x}^1, i_{0,x}^0$. По определению $\mathcal{A}_M, T_{\mathcal{A}_M}^s, U$ ясно, что ϕ -биекция, гомеоморфизм в относительных топологиях, и если $x^s \in X_{\mathcal{A}_M}'^s$, то $\phi(T_{\mathcal{A}_M}^s x^s) = U(\phi x^s)$. То,

что ϕ -метрический изоморфизм, вытекает из строгой эргодичности T и U и того, что множества $X'^s_{\mathcal{A}}$ и Y' являются множествами полной меры в $X^s_{\mathcal{A}_M}$ и Y (дополнениями счетных множеств). Можно доказывать метрическую изоморфность и с помощью подсчета мер цилиндрических множеств. Формулы для U уже приводились. Приведем формулы для мер цилиндрических множеств $X^s_{\mathcal{A}}$. Пусть $(\mu_i)_{i \in Z_*}$ -нормированный собственный вектор- строка матрицы ${}^tG_{\mathcal{A}}$, отвечающий собственному значению Перрона-Фробениуса λ . С помощью подсчета частот можно доказать [27], что $\mu\{\{x_i\} \in X_{\mathcal{A}} \mid x_0 = q\} = \mu_q, 1 \leq q \leq n$, аналогично, $\mu^s\{\{x_i^s\} \in X^s_{\mathcal{A}} \mid i_{0,x}^0 = q\} = \mu_q, 1 \leq q \leq n$, где μ^s -инвариантная мера для $T^s_{\mathcal{A}}$. Введем обозначения :

$$\frac{\mu_a}{\lambda^k} = P_{a,k}; \quad \omega_{\mathcal{A}}^k(a) = b_1^{k,a} \dots b_{l(k,a)}^{k,a}, a \in Z_*$$

$$, C_{A,l} = \{x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^\infty, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\} : n_{0,x}^l = 0, i_{0,x}^l \dots i_{|A|-1,x}^l = A\}$$

, где $A, |A| \geq 1$ - произвольное допустимое слово. Для $k \geq 1$ имеем

$$\omega_{\mathcal{A}}^k = \omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(\omega_{\mathcal{A}}(a)) = \omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(b_1^{1,a}) \dots \omega_{\mathcal{A}}^{k-1}(b_{l(1,a)}^{1,a}) =$$

$$b_1^{k,a} \dots b_{l_1(k,a)}^{k,a} b_{l_1(k,a)+1}^{k,a} \dots b_{l_2(k,a)}^{k,a} \dots b_{l_{l(1,a)}(k,a)}^{k,a}.$$

$n_a^A = \min\{k : \exists q : b_q^{k,a} \dots b_{q-1+|A|}^{k,a} = A\}$ (если A - допустимо, то для некоторого a (а значит и для всех) $n_a^A < \infty$).

$$t(a, k, A) = \begin{cases} 0, & \text{если } k < n_a^A \\ \#\{q : b_q^{k,a} \dots b_{q-1+|A|}^{k,a} = A; \exists r : l_r(k, a) \in [q, q-2+|A|]\}, & \\ \text{если } k \geq n_a^A. & \end{cases}$$

Имеем : $\mu C_{a,l} = P_{a,l}$.

Предложение. Для любого (допустимого) слова $A, |A| > 1$ имеем:

$$\mu(C_{A,l}) = \sum_{a,k} t(a, k, A) P_{a,k+l}.$$

Доказательство. Поскольку сдвиг $T_{\mathcal{A}}^s$ определен, мы можем с целью подсчета мер подсчитывать частоты. По определению легко видеть, что $p \circ T_{\mathcal{A}}^s = T_{\mathcal{A}} \circ p$. В соответствии с определением структурированной последовательности (п.3)) можно, стало быть, для вычисления мер $\mu\{x^s : i_{0,x}^l = f\}$ при $f \in [1, n]$ вычислять (как в [27]) частоты встречи f в словах $\omega_{\mathcal{A}}^l(q), 1 \leq q \leq n$, и их пределы при $l \rightarrow \infty$. Эти пределы равны μ_f [27], поскольку для любого неотрицательного ненулевого вектора-строки P размерности n мы имеем $\frac{P_i^k}{\sum_j P_j^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu_i$, где $\{P_i^k\} = PG_{\mathcal{A}}^k$. Теперь может быть вычислена частота события ($i_{0,f}^l = f$). По аналогии с предыдущим, многократным применением условия 4) определения структурированной последовательности можно получить, что частоты встречи f в S_x^l суть тоже μ_f . Мы видим, что частоты появления событий ($i_{0,x}^l = f$) на любой траектории $T_{\mathcal{A}}^s$ равны частным

$$\frac{\mu_f |\omega_{\mathcal{A}}^l(f)|}{\sum_j \mu_j |\omega_{\mathcal{A}}^l(j)|} = \frac{\mu_f |\omega_{\mathcal{A}}^l(f)|}{\lambda^l} = P_{f,l} |\omega_{\mathcal{A}}^l(f)|,$$

поскольку

$$\sum_j \mu_j |\omega_{\mathcal{A}}^l(j)| = \sum_j \sum_i \mu_j (G^l)_{ji} = \sum_i \sum_j \mu_j (G^l)_{ji} = \sum_i \lambda^l \mu_i = \lambda^l.$$

Если же фиксировать положение начала слова $\omega_{\mathcal{A}}^l(f)$, то есть номер $n_{0,x}^l$, то имеем $\mu\{x^s : i_{0,x}^l = f, n_{0,x}^l = 0\} = P_{f,l}$. Для произвольного $x^s \in X_{\mathcal{A}}^s$ введем последовательности $\{n_{r,x}^{l,m}\}_{r=-\infty}^{\infty}, l, m \geq 0$, определенные равенствами $n_{n_{r,x}^l, x}^l = n_{r,x}^{l+m}$ для всех $r : -\infty < r < \infty$. Заметим попутно, что при любом $m \geq 0$ пара является допустимой структурированной последовательностью. Имеем

$$C_{A,l} \cap X'^s_{\mathcal{A}} = \cup_{m,j} C_{A,l}^{m,j},$$

где $C_{A,l}^{m,j} = \{x_s \in C_{A,l} \cap X'_{\mathcal{A}}^s \mid m = \min\{p : n_{0,x}^{l,p} \geq |A|, i_{r,x}^{l+p} = j\}$. Очевидно, что множества $C_{A,l}^{m,j}$ попарно не пересекаются. Далее, если $x^s \in C_{A,l}^{m,j}$, то слово $i_{n_{-1,x}^{l,m}+1,x}^l \cdots i_{n_{0,x}^{l,m},x}^l$ есть $\omega_{\mathcal{A}}^m(j)$. Обратное неверно: лишь при $t(j, m, A)$ значениях $n_{-1,x}^{l,m}$ последнее условие обеспечивает $x^s \in C_{A,l}^{m,j}$, но, по доказанному, вследствие инвариантности меры относительно $T_{\mathcal{A}}^s$ при каждом фиксированном допустимом значении v номера $n_{-1,x}^{l,m}$ имеем $\mu(\{x^s \in C_{A,l}^{m,j} : n_{-1,x}^{l,m} = v\}) = P_{j,m+l}$, что и доказывает наше предложение. Формула может быть упрощена с учетом периодичности $t(j, m, A)$ как функции от m . Если зафиксировать A , то очевидно, что существуют такие m_0, T , что для $m > m_0$ имеет место равенство $t(j, m, A) = t(j, m + T, A)$ при любом j . Можно добиться даже, чтобы было $b_{l_k(m,j)-|A|}^{m,j} \cdots b_{l_k(m,j)+|A|}^{m,j} = b_{l_k(m+T,j)-|A|}^{m+T,j} \cdots b_{l_k(m+T,j)+|A|}^{m+T,j}$ при $k \in [1, l_1(j) - 1]$ (см. наши обозначения в связи с формулировкой предложения). Обозначим для каждого $j \in Z_*$: $q(j, A) = \mu_j \sum_{i=m_0+1}^{m_0+T} \lambda^{-i} t(j, i, A)$. Имеем

$$\mu^s(C_{A,l}) = \sum_{i \in Z_*, m \leq m_0} t(i, m, A) P_{i,m+l} + \frac{\lambda^{T-l}}{\lambda^T - 1} \sum_j q(j, A).$$

Отсюда вытекает одноэргодичность $T_{\mathcal{A}}^s$; минимальность доказывается так же как и для $T_{\mathcal{A}}$ в случае ОДД (что, в свою очередь, аналогично доказательству для распознаваемых подстановок ([59],[27], и др.), с учетом условий 3) и 4) определения структурированной последовательности. Заметим, что соответствие устанавливалось между адическим преобразованием и $T_{\mathcal{A}_M}^s$, а для этого случая требуется только примитивность матрицы M - условие ОДД не обязано выполняться. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение . Пусть $U_{D,M} : Y \rightarrow Y$ -адическое преобразование с примитивной матрицей M и пространством состояний D и $T_{\mathcal{A}_M}^s : X_{\mathcal{A}_M}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}_M}^s$, построенная по M подстановочная динамическая система. Тогда

$U_{D,M}$ и $T_{\mathcal{A}_M}^s$ метрически изоморфны, более того, существует такая биекция $\phi : X'_{\mathcal{A}_M} \rightarrow Y'$, что $\phi(T_{\mathcal{A}_M}^s x^s) = U_{D,M}(\phi x^s)$. для любой точки $x^s \in X'_{\mathcal{A}_M}$, где $X'_{\mathcal{A}_M}, Y'$ - инвариантные множества полной меры. В случае, если $\omega_{\mathcal{A}_M}$ -ОДД, биекция $\phi \circ p^{-1} |_{X'_{\mathcal{A}_M}}$ осуществляет метрический изоморфизм $U_{D,M}$ и $T_{\mathcal{A}_M}$.

Заметим, что в случае, когда подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ -ОДД, имеем $p(X'^s_{\mathcal{A}}) = X'_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}} \setminus \cup_{i=-\infty}^{\infty} T_{\mathcal{A}}^i(U_{\mathcal{A}})$, где $U_{\mathcal{A}} = \{x(i, j, m, n') \mid (i, j, m, n') - \text{порождающая четверка}\}$.

§3. Адические представления подстановочных динамических систем.

Мы будем рассматривать сначала системы в $X_{\mathcal{A}}^s$. Для каждой такой подстановочной динамической системы будут определены две эквивалентные ей динамические системы: обобщенное адическое преобразование и адическое преобразование.

Для построения обобщенного адического преобразования определим сначала по набору слов $\mathcal{A}$ алфавит отмеченных символов $Z_*^{(m)}$. $Z_*^{(m)}$ определяется как множество таких пар (u, k) , что $u \in Z_*$ и k -такое натуральное число, что существует такое $A \in \mathcal{A}$, что в A имеется не менее k вхождений символа u . Наряду с алфавитом $Z_*^{(m)}$ введем алфавит $Z_{\mathcal{A}} = \{(u, q) : (u, q) : 1 \leq q \leq |A_u|\}$. Имеется естественное отображение $\rho : Z_{\mathcal{A}} \rightarrow Z_*^{(m)}$, $\rho((u, q)) = (v, k')$, если q -ым символом слова A_u является символ v , причем его вхождение с номером k' . Если обозначить через R множество таких троек (u, v, k') , что $(v, k') \in Z_*^{(m)}$ и существует такое q , что $\rho((u, q)) = (v, k')$, то определено отображение $\Phi : R \rightarrow Z_{\mathcal{A}}$, $\Phi((u, v, k')) = (u, q)$ -разумеется, такое q единственно.

Пространство $\Omega_{\mathcal{A}}^1$, в котором будет действовать обобщенное адическое преобразование, определяется как наделенное слабой топологией множество таких односторонних последовательностей $y_0, y_1, \dots, y_i \in Z_*^{(m)}$, что

при каждом $f > 0$ если $y_{f-1} = (u, k)$ и $y_f = (u', k')$, то в слове $A_{u'}$ имеется не менее k вхождений символа u . Преобразование $T_{\mathcal{A}}^1$ будет действовать на подмножестве $\Omega_{\mathcal{A}}^1$, состоящем из таких последовательностей $y = y_0, y_1, \dots = (u_0, k_0), (u_1, k_1), \dots$, что хотя бы для одного $f > 0$ k_{f-1} -ый символ u_{f-1} в слове A_{u_f} не является последним символом слова.

Пусть y такова. Обозначим через $f(y)$ минимальное f с таким свойством. Если $f = 1$ и для некоторого s имеем $\rho((u_1, s)) = (u_0, k_0)$, то берем $T_{\mathcal{A}}^1 y = \rho((u_1, s+1)), (u_1, k_1), (u_2, k_2), \dots$. Если $f > 1$, то в качестве $T_{\mathcal{A}}^1 y$ берем $(u'_1, k'_1)(u'_2, k'_2) \dots (u'_{f-1}, k'_{f-1})(u_f, k_f)(u_{f+1}, k_{f+1}) \dots$, где построение первых f отмеченных символов осуществляется нижеописываемым образом: если для некоторого s (а такое, очевидно, существует) имеем $\rho((u_f, s)) = (u_{f-1}, k_{f-1})$, то берем $(u'_{f-1}, k'_{f-1}) = \rho((u_f, s+1))$, $(u'_{f-2}, k'_{f-2}) = \rho((u'_{f-1}, 1))$ — ясно, что $k'_{f-2} = 1$, $(u'_{f-3}, 1) = \rho((u'_{f-2}, 1))$ (если $f > 2$) и т.д. Таким образом, $T_{\mathcal{A}}^1$ определено. Ясно, что $T_{\mathcal{A}}^{-1}$ определено на множестве таких последовательностей $y = (u_0, k_0), (u_1, k_1), \dots$, что хотя бы для одного $g > 0$ k_{g-1} -ый символ u_{f-1} в слове a_{u_f} не является первым символом слова.

Опишем действие $(T_{\mathcal{A}}^1)^{-1}$. Пусть $g(y)$ -минимальное g с таким свойством. Если $g = 1$ и для некоторого s имеем $\rho((u_1, s)) = (u_0, k_0)$, то $(T_{\mathcal{A}}^1)^{-1} y = \rho((u_1, s-1)), (u_1, k_1), (u_2, k_2) \dots$. Если $g > 1$, то $(T_{\mathcal{A}}^1)^{-1} y = (u''_0, k''_0), \dots (u''_{g-1}, k''_{g-1}), (u_g, k_g), (u_{g+1}, k_{g+1}) \dots$, где построение первых g отмеченных символов осуществляется нижеописываемым образом: если для некоторого s имеем $\rho((u_g, s)) = (u_{g-1}, k_{g-1})$, то $(u'_{g-1}, k'_{g-1}) = \rho((u_g, s-1))$, $(u'_{g-2}, k'_{g-2}) = \rho((u'_{g-1}, |A_{u'_{g-1}}|))$, $(u'_{g-3}, k'_{g-3}) = \rho((u'_{g-2}, |A_{u'_{g-2}}|))$ (если $g > 2$) и т.д. Поскольку $T_{\mathcal{A}}^1$ определено, можно ввести в $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ упорядочение, аналогичное упорядочению в марковском компакте: $y_1 \succ y_2$, если существует такое $l > 0$, что $T_{\mathcal{A}}^{l'} y_2 = y_1$. Порядок может быть определен и на конечных от-

резках последовательностей (конечных путях) с одинаковыми номерами начал и концов и одинаковыми последними отмеченными символами.

$$(u_r, k_r), \dots, (u_{r+t}, k_{r+t}) \succ (u'_r, k'_r), \dots, (u'_{r+t}, k'_{r+t})$$

, если наибольшее из таких t' , что $(u_{r+t'}, k_{r+t'}) \neq (u'_{r+t'}, k'_{r+t'})$ лежит в промежутке $[0, t-1]$ и если для некоторых s, s' имеем $\rho((u_{r+t'+1}, s)) = (u_{r+t'}, k_{r+t'})$, $\rho((u'_{r+t'+1}, s')) = (u'_{r+t'}, k'_{r+t'})$, то $s > s'$. Определим теперь множество $\Omega'^1_{\mathcal{A}}$ как множество таких $(u_0, k_0), \dots$, что для бесконечного множества номеров $f > 0$ имеем: $\rho((u_f, 1)) \neq (u_{f-1}, k_{f-1})$ и для бесконечного множества номеров $g > 0$ имеем: $\rho((u_g, |A_{u_g}|)) \neq (u_{g-1}, k_{g-1})$.

Установим соответствие ϕ^1 между $\Omega'^1_{\mathcal{A}}$ и $X'^s_{\mathcal{A}}$. Если $X'^s_{\mathcal{A}} \ni x^s = \{\{S^l_x\}_{l=0}^\infty, \{\{n^l_{r,x}\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\}$, то $\phi^1(x^s) = (u_0, k_0), (u_1, k_1), \dots$, где для каждого $f \geq 0$ имеем $u_f = i^f_{0,x}$. Что же касается k_f , то их предстоит определить (в случае подстановки, построенной по адическому сдвигу в предыдущем параграфе, каждое k_f однозначно определялось парой (u_f, u_{f+1})). Воспользуемся вспомогательными последовательностями номеров $n^{l,m}_{r,x}$, введенными при подсчете мер цилиндрических множеств. В качестве (u_f, k_f) берем $\rho((u_{f+1}, n^{f,1}_{-1,x}))$, $f \geq 0$. В силу условия 4) определения структурированной последовательности на множестве $X'^s_{\mathcal{A}}$ последовательность пар $(i^{f+1}_{0,x}, n^{f,1}_{-1,x})$ однозначно определяет x^s . С другой стороны, каждой последовательности пар $(v_1, q_1), \dots, v_f \in Z_*$, $q_f \in N$, $1 \leq q_f \leq |A_{v_{f+1}}|$, $0 \leq f < \infty$, такой, что для бесконечного множества номеров f имеем $q_{f_i} < |A_{v_{f+1}}|$ и для бесконечного множества номеров i имеем $q_i > 1$ и при каждом $f > 0$ v_f есть q_f -ая буква слова $A_{v_{f+1}}$, соответствует единственная структурированная последовательность $x^s \in X'^s_{\mathcal{A}}$, такая, что при каждом $f > 0$ $v_f = i^f_{0,x}$, $q_f = n^{f-1,1}_{-1,x}$. Последнее соответствие, конечно, биективно в силу условий 3) и 4) определения структурированной последовательности, но биективность соответствия того же множества

последовательностей пар с $\Omega_{\mathcal{A}}^{\prime 1}$ по правилу $(u_f, k_f) = \rho((v_{f+1}, q_{f+1}, f \geq 0$ очевидна, поэтому биективность ϕ^1 можно считать доказанной. По определению $T_{\mathcal{A}}^s$ и $T_{\mathcal{A}}^1$, как легко видеть, если $x^s \in X_{\mathcal{A}}^{\prime s}$, то $\phi^1(T_{\mathcal{A}}^s x^s) = T_{\mathcal{A}}^1(\phi^1(x^s))$. Впрочем, полезно представить себе, как действует соответствующее преобразование на последнем введенном нами вспомогательном множестве последовательностей пар $(v_1, q_1), \dots$. Обозначим его через Π . Имеем биекцию $\tau : \Pi \rightarrow X_{\mathcal{A}}^{\prime s}$. Мы должны описать действие на Π преобразования $T_{\Pi} = \tau^{-1} \circ T_{\mathcal{A}}^s \circ \tau$. Точно так же действует на Π преобразование $\eta^{-1} \circ T_{\mathcal{A}}^1 \circ \eta$, где через η обозначена описывавшаяся биекция $\Pi \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^{\prime 1}$. Воспользовавшись определением $T_{\mathcal{A}}^s$ (которое легко переводится в рамках $X_{\mathcal{A}}^{\prime s}$ на язык $\{(i_{0,x}^f, n_{-1,x}^{f-1,1})\}$ или определением $T_{\mathcal{A}}^1$ получаем следующее действие: пусть $\beta \in \Pi$ и $f(\beta)$ -такой наименьший номер f , что $q_f < |A_{v_f}|$. Если $f(\beta) = 1$, то $T_{\Pi}(\beta) = (v_1, q_1 + 1), (v_2, q_2), \dots$. Если $f(\beta) > 1$, то $T_{\Pi}(\beta) = (v_1^*, q_1^*), \dots, (v_{f(\beta)-1}^*, q_{f(\beta)-1}^*), (v_{f(\beta)}, q_{f(\beta)} + 1), (v_{f(\beta)+1}, q_{f(\beta)+1}), \dots$, где $v_{f(\beta)-1}^* - q_{f(\beta)} + 1$ -ая буква слова $\omega_{\mathcal{A}}(v_{f(\beta)})$ и при каждом $j < f(\beta) - 1, j > 0$, если такие есть, $v_j^* - 1$ -ая буква слова $\omega_{\mathcal{A}}(v_{j+1}^*, q_1^* = q_2^* = \dots q_{f(\beta)-1}^* = 1$. Прежде чем формулировать итоговый результат об эквивалентности различных представлений подстановочной динамической системы, рассмотрим использованную нами вспомогательную динамическую систему, по описанию которой ясно, что она похожа на адическое преобразование. Следующая лемма вполне очевидна.

Лемма. Рассмотрим множество пар вида $(v, q), v \in Z_*, 1 \leq q \leq |A_v|$ и введем в нем произвольное полное упорядочение $\succ$, удовлетворяющее единственному требованию: если $q_1 < q_2$, то $(v, q_1) \succ (v, q_2)$ для произвольных $v, q_1, q_2, (v, q_1), (v, q_2) \in D^2$. Рассмотрим $\#D^2 \times \#D^2$ -матрицу из 0 и 1 $M^2 = (m_{ij}), m_{(v_1, q_1)(v_2, q_2)} = 1$ тогда и только тогда, когда q_1 -буквой слова A_{v_1} является v_2 . Тогда:

- 1) если $\omega_{\mathcal{A}}$ -примитивна, то M^2 -примитивна;

2) если обозначить через $Y_{\succ}$ -стационарный марковский компакт с пространством состояний D^2 и переходной матрицей M^2 , то действие адического преобразования $U_{\succ}$ на $Y' = \Pi$ совпадает с действием T_{Π} ;

3) если $\succ_1$ и $\succ_2$ -два различных упорядочения D^2 , удовлетворяющих нашему условию, то пары $(Y_{\succ_1}, U_{\succ_1})$ и $(Y_{\succ_2}, U_{\succ_2})$ совпадают.

Обозначим получившееся пространство через $\Omega_{\mathcal{A}}^2$ а преобразование— через $T_{\mathcal{A}}^2 : T_{\mathcal{A}}^2|_{\Omega_{\mathcal{A}}^2} = T_{\Pi}$. Соответствие между $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ и $\Omega_{\mathcal{A}}^2$ было фактически уже определено, когда пары (u_f, q_f) интерпретировались как пары $(u_f, n_{-1,x}^{f-1,1})$. В данном случае оно выглядит так: $\phi_{21} : \Omega_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1$ $\phi_{21}(\{(u_1, q_1), (u_2, q_2), \dots\}) = \rho((u_1, q_1)), \rho((u_2, q_2)), \dots = (u_0, k_0), (u_1, k_1) \dots$. Очевидно (по определению $T_{\mathcal{A}}^1$ и $T_{\mathcal{A}}^2$), что $T_{\mathcal{A}}^2$ определено в точке $x \in \Omega_{\mathcal{A}}^2$ тогда и только тогда, когда $T_{\mathcal{A}}^1$ определено в точке $\phi_{21}(x)$ и $(T_{\mathcal{A}}^1 \circ \phi_{21})(x) = (\phi_{21} \circ T_{\mathcal{A}}^2)(x)$, если $T_{\mathcal{A}}^2$ определено в точке x . Последнее утверждение можно было бы использовать для определения $T_{\mathcal{A}}^1$, поскольку определение $T_{\mathcal{A}}^2$ выглядит проще. Верно следующее утверждение.

Предложение . Отображение $\phi_{21} : \Omega_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1$ является топологическим изоморфизмом динамических систем.

Можно даже описать соответствие цилиндрических множеств. Очевидно, что

$$\phi_{21}([(u_1, q_1), (u_2, q_2), \dots, (u_r, q_r)]) = \bigcup_{k|(u_r, k) \in Z_*^{(m)}} [\rho((u_1, q_1)), \rho((u_2, q_2)), \dots, \rho((u_r, q_r)), (u_r, k)],$$

где $[\cdot]$ — обозначение цилиндрического множества. Для описания прообразов воспользуемся введенным ранее отображением Φ . Имеем

$$\begin{aligned} & \phi_{21}^{-1}[(u_0, k_0), \dots, (u_{r-1}, k_{r-1})] = \\ & \bigcup_{\substack{(u, q) \in Z_{\mathcal{A}} \\ \rho((u, q)) = \\ (u_{r-1}, k_{r-1})}} [\Phi(u_1, u_0, k_0), \Phi(u_2, u_1, k_1), \dots, \Phi(u_{r-1}, u_{r-2}, k_{r-2}), (u, q)]. \end{aligned}$$

§4. Спектральные свойства подстановочных динамических систем и стационарных адических преобразований с примитивными матрицами.

Метрические теории стационарных адических преобразований и подстановочных динамических систем, определенных в пространстве допустимых структурированных последовательностей, как мы видели в предыдущем параграфе, полностью эквивалентны. Выбор представления динамической системы определяется соображениями удобства. Ниже результаты о спектре будут в некоторых случаях формулироваться и доказываться для подстановочных, а в некоторых-для обобщенных адических динамических систем. Наши динамические системы имеют нулевую энтропию и никогда не перемешивают [60].

Напомним определение унитарного оператора, связанного с динамической системой. Пусть $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ -пространство Лебега [50], μ -нормированная мера, $T : X \rightarrow X$ - измеримое mod 0 взаимнооднозначное эргодическое преобразование X с инвариантной мерой μ . Тогда в комплексном гильбертовом пространстве действует унитарный оператор $U_T : (U_T f)(x) = f(Tx)$ для почти всех $x \in X$. Его спектральные свойства метрически инвариантны, более того, по отображению, устанавливающему метрический изоморфизм автоморфизмов пространств Лебега строится линейная изометрия гильбертовых пространств, устанавливающая изоморфизм соответствующих унитарных операторов [61].

Функция $f \in L^2(X, \mu)$ называется собственной функцией динамической системы, соответствующей собственному числу λ , если $U_T f = \lambda f$. Ясно, что $|\lambda| = 1$ и $|f| = \text{const}$ почти всюду. Говорят, что T имеет чисто дискретный спектр, если гильбертово пространство $L^2(X, \mu)$ имеет базис, состоящий из собственных векторов. Если собственные векторы имеются, но не образуют базис, то T имеет смешанный спектр. Если соб-

ственных векторов нет, то спектр–непрерывный, или, что эквивалентно, динамическая система обладает слабым перемешиванием.

Среди подстановочных динамических систем встречаются системы всех этих трех типов. Поскольку стационарные адические динамические системы допускают аппроксимацию периодическими преобразованиями конечного ранга, они имеют конечную спектральную кратность[28]. Так, подстановка Рудина-Шапиро $Z_* = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{13, 43, 12, 42\}$ имеет дискретную компоненту спектра (группа собственных чисел $G = \{e^{2\pi i m/2^k}, m \in Z, k \in N\}$ и двукратную лебеговскую. Имеется в виду обычное описание спектров унитарных операторов в терминах типов спектральных мер [50].

Необходимого и достаточного условия чистой дискретности спектра в комбинаторных терминах для подстановок в настоящее время, по-видимому, не существует, по крайней мере, в недавних работах отмечалось их отсутствие. Некоторые достаточные условия основываются на сходных идеях [55],[62],[41]. Имеются также весьма интересные рассуждения конкретных примеров ([62],[63],[64] и пр.). В то же время следует отметить, что теория подстановочных динамических систем с чисто дискретным спектром оказывается весьма содержательной (несмотря на то, что теория динамических систем с чисто дискретным спектром в целом полностью исчерпывается известной теоремой фон Неймана) в силу того, что представляет интерес сопоставление метрически изоморфных систем, описание групповой структуры в терминах символического представления, перенесение методов этой теории на другие подстановочные динамические системы (в ряде случаев весьма успешное). Ниже формулируется и доказывается более общее достаточное условие, допускающее непосредственную алгоритмизацию (соответствующая программа была разработана и отлажена).

Пусть $\omega_{\mathcal{A}}$ -примитивная подстановка. Символы $u, v \in Z_*$ называются эквивалентными, если при каждом $m > 0$ $|\omega_{\mathcal{A}}^m(u)| = |\omega_{\mathcal{A}}^m(v)|$. Тем самым, алфавит Z_* разбит на классы эквивалентных символов. Пусть C -один из таких классов. Существует конечное множество таких допустимых блоков вида $x_1, \dots, x_l$, что $x_1, x_l \in C$ и $x_2, \dots, x_{l-1} \notin C$. Это следует, например, из компактности $X_{\mathcal{A}}^s$ и минимальности $T_{\mathcal{A}}^s$. Будем называть такие блоки C -блоками.

Если два слова одинаковой длины в алфавите Z_* : $A = a_1 \dots a_k$ и $B = b_1 \dots b_k$ таковы, что существует такая перестановка π множества $\{1, \dots, k\}$, что символы a_i и $b_{\pi(i)}$ эквивалентны при каждом $i \in \{1, \dots, k\}$, то эти слова будут называться словами эквивалентной номенклатуры.

Пара слов $(E, D) = (E(F), D(F))$ будет называться C - первичной парой базовых слов, если $E = x_1 \dots x_{l-1}$, $D = x_2, \dots, x_l$, где $x_1, \dots, x_l$ - C -блок F . Множество C - первичных пар базовых слов будет обозначаться через Δ_C .

Теорема 1. *Предположим, что в алфавите Z_* выделено множество Δ пар слов эквивалентной номенклатуры, причем для любой пары $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta_C$ (при некотором фиксированном C) существует такое натуральное $N_{X,Y}$, что для некоторых $X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_s$ имеет место $\omega_{\mathcal{A}}^{N_{X,Y}}(X) = X_1 \dots X_s, \omega_{\mathcal{A}}^{N_{X,Y}}(Y) = Y_1 \dots Y_s$ и при каждом $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ пара $(X_i, Y_i) \in \Delta \cup \Delta_C$ и хотя бы для одного i $X_i = Y_i$. Тогда спектр автоморфизма $T_{\mathcal{A}}^s$ (в случае ОДД- спектр $T_{\mathcal{A}}$) чисто дискретен.*

Доказательство. Прежде всего, легко видеть, что набор слов Δ может быть изменен таким образом, чтобы условие теоремы выполнялось с некоторой постоянной функцией пары $N_{X,Y}$. Пусть $N = \max_{(X,Y) \in \Delta \cup \Delta_C} N_{X,Y}$, где $N_{X,Y}$ -исходная функция. Рассмотрим множество пар слов эквивалентной номенклатуры $\Delta' = \cup_{(X,Y) \in \Delta \cup \Delta_C} \{(\omega_{\mathcal{A}}^k(X), \omega_{\mathcal{A}}^k(Y)) \mid k = 1, \dots, N_{(X,Y)}\}$. Теперь можно считать, что $N_{X,Y} \equiv N$, если в качестве

нового Δ взять $\Delta \cup \Delta'$. В самом деле, для набора $\Delta \cup \Delta'$ можно доказать по индукции, что при любом $m \geq 0$ если $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta'$, то $\omega_{\mathcal{A}}^m(X) = X'_1 \dots X'_{s'}, \omega_{\mathcal{A}}^m(Y) = Y'_1 \dots Y'_{s'}$, где при любом $i \in [1, s']$, $(X'_i, Y'_i) \in \Delta \cup \Delta'$. По индукции можно доказать, (учитывая, что пара (X_i, Y_i) с $X_i = Y_i$ из формулировки теоремы лежит в Δ), что если $m \geq N_{X,Y}$, где $(X, Y) \in \Delta \cup \Delta_C$ и рассматривается старое значение $N_{X,Y}$, то для одного из i имеем $X'_i = Y'_i$, откуда вытекает требуемое.

Будет использовано достаточное условие дискретности спектра оператора, соответствующего динамической системе [63],[64], из которого следует, что если для сохраняющего меру автоморфизма $T : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ существуют такая последовательность разбиений $\xi_m \nearrow \epsilon$ (ϵ -разбиение на точки mod 0) и такая рекуррентная последовательность натуральных чисел $q_n \rightarrow \infty$, что для любого k и для любого элемента C' разбиения ξ_k имеет место $\sum_l \mu(T^{q_l} C' \Delta C') < \infty$, то спектр оператора U_T дискретен.

Для проверки выполнения этого условия в качестве ξ_m возьмем разбиение $X_{\mathcal{A}}^S$ на множества следующего вида :

$$C' \in \xi_m \Leftrightarrow (\exists a \in Z_*, q : 0 \leq q \leq |\omega_{\mathcal{A}}^m(a)| - 1 :$$

$$C' = \{ \{ \{ S_x^l \}_{l=0}^{\infty}, \{ \{ n_{r,x}^l \}_{r=-\infty}^{\infty} \}_{l=0}^{\infty} \mid i_{0,x}^m = a, n_{0,x}^m = q \}.$$

Зафиксируем какую либо точку x^s пространства $X_{\mathcal{A}}^s$. Рассмотрим для $m' > m$ введенную при доказательстве теоремы о мере цилиндрического множества допустимую структурированную последовательность $x_{m'}^s, x_{m'}^s = \{ \{ S_x^{m'+l} \}_{l=0}^{\infty}, \{ \{ n_{r,x}^{l,m'} \}_{l=0}^{\infty} \}$ и ее траекторию $\{ (T_{\mathcal{A}}^s)^v x_{m'}^s \}_{v=-\infty}^{\infty}$. Обозначим при каждом v $(T_{\mathcal{A}}^s)^v x_{m'}^s$ через $\{ \{ S_{x(v,m')}^l \}_{l=0}^{\infty}, \{ \{ n_{r,x(v,m')}^l \}_{r=-\infty}^{\infty} \}_{l=0}^{\infty} \}$ и рассмотрим последовательность $\{ u_v \}_{v=-\infty}^{\infty} : u_v = i_{0,x(v,m)}^0$. Пусть подпоследовательность $\{ u_{v_k} \}_{k=-\infty}^{\infty}$ есть перечень всех вхождений в нашу последовательность символов клас-

са C . Зафиксировав $b \in C$, выберем в качестве q_l последовательность $|\omega_{\mathcal{A}}^l(b)|$ (не зависящую от выбора b). Рассмотрим теперь траекторию точки $x_{\mathcal{A}}^s$ под действием $T_{\mathcal{A}}^s$, связанную с траекторией x_m^s , так же, как связаны траектории интегрального автоморфизма и базового. По эргодической теореме имеем $\mu((T_{\mathcal{A}}^s)^{q_l} C' \cap C') = Fr((T_{\mathcal{A}}^s)^t x^s \in C' \ \& \ (T_{\mathcal{A}}^s)^{t+q_l} x^s \in C') = Fr B_{l,C'}$. Изучим $B_{m',C'}$, для чего рассмотрим все пары слов $(X_k, Y_k) = (u_{v_k} \dots u_{v_{k+1}-1}, u_{v_k+1} \dots u_{v_{k+1}}) \in \Delta_C$. Пусть $\omega_{\mathcal{A}}^{m'-m}(X_k) = f_1^{m',k} \dots f_{\phi_k}^{m',k}$, $\omega_{\mathcal{A}}^{m'-m}(Y_k) = g_1^{m',k} \dots g_{\phi_k}^{m',k}$. Ясно, что v является функцией от t , как для интегрального автоморфизма, если считать траектории связанными таким образом. Если наряду с этими двумя траекториями рассматривать траекторию x_m^s под действием $T_{\mathcal{A}}^s$, то и ее время v' можно считать локально постоянной функцией от t . Событие $B_{m',C'}$ наступает при таких t , при которых для некоторого k имеем $v_k \leq v(v'(t)) < v_{k+1}$. $v'(t)$ таково, что $i_{0,T_{\mathcal{A}}^t x}^m = f_d^{m',k} = a = g_d^{m',k}$, $1 \leq d \leq \phi_k$ и $n_{0,T_{\mathcal{A}}^t x^s}^m = q$. Теперь мера $B_{m',C'}$ может быть подсчитана. Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^R$ перечень всех C -блоков. С каждым C -блоком Γ свяжем три величины: $\mu_{\Gamma} = \mu C_{\Gamma,0}$ (см. формулы для мер цилиндрических множеств) и, обозначая через $f_1^{\Gamma,m'} \dots f_{\phi_{\Gamma,m'}}^{\Gamma,m'}$ и $g_1^{\Gamma,m'} \dots g_{\phi_{\Gamma,m'}}^{\Gamma,m'}$, соответственно, слова $\omega_{\mathcal{A}}^{m'-m}(E(\Gamma))$ и $\omega_{\mathcal{A}}^{m'-m}(D(\Gamma))$ (где $(E, D) - C$ -первичная пара базовых слов) $H_{\Gamma}^{C',m'} = \#\{i \mid 1 \leq i \leq \phi_{\Gamma,m'}, f_i^{\Gamma,m'} = a\}$ а также $L_{\Gamma}^{C',m'} = \#\{i \mid 1 \leq i \leq \phi_{\Gamma,m'}, f_i^{\Gamma,m'} = g_i^{\Gamma,m'} = a\}$. Сопоставляя наши три траектории и вычисляя частоты, получим

$$\mu_{C'} = \frac{\sum_{\Gamma} \mu_{\Gamma} H_{\Gamma}^{C',m'}}{\sum_{\Gamma} \mu_{\Gamma} |\omega_{\mathcal{A}}^{m'} E(\Gamma)|}, \quad \mu_{B_{m',C'}} = \frac{\sum_{\Gamma} \mu_{\Gamma} L_{\Gamma}^{C',m'}}{\sum_{\Gamma} \mu_{\Gamma} |\omega_{\mathcal{A}}^{m'} E(\Gamma)|}.$$

Заметим, что в первом выражении левая часть не зависит от m' , во втором- зависит.

Вследствие постоянства $N_{X,Y}$ мы с легкостью выводим из условия теоремы, что $\frac{H_{\Gamma}^{C',m'}}{L_{\Gamma}^{C',m'}} = 1 + o(1)$, причем убывание остаточного члена- экспо-

ненциальное, а отсюда видно, что экспоненциально убывает и разность $\mu C' - \mu B_{m', C'}$, чем и доказана теорема.

Если примитивная подстановка ω_A -циклична, то есть все допустимые последовательности периодичны, то рассмотрение динамической системы T_A лишено смысла, ибо X_A -конечно. Динамическую же систему $T_A^s : X_A^s \rightarrow X_A^s$ можно изучать. С помощью условия [63] мы покажем, что эта динамическая система имеет дискретный спектр. Пусть $\{x_l\}_{l=-\infty}^{\infty} \in X_A$ и пусть R -минимальный период последовательности $\{x_l\}$. Поскольку $\omega_A(\{x_l\})$ – тоже допустимая последовательность и, следовательно, сдвиг $\{x_l\}$, имеем : если $y_1 \dots y_R$ -произвольное допустимое слово, то $\{x_l\}$ с точностью до сдвига есть $\dots y_1 \dots y_R y_1 \dots y_R \dots y_1 \dots y_R \dots$, и, с другой стороны, оно же, с точностью до сдвига есть $\dots \omega_A(y_1 \dots y_R) \omega_A(y_1 \dots y_R) \dots \omega_A(y_1 \dots y_R) \dots$. Следовательно, $|\omega_A(y_1 \dots y_r)| = MR$, где M -натуральное число. Если $U_A^s : L^2(X_A^s) \rightarrow L^2(X_A^s)$ -унитарный оператор, соответствующий нашей динамической системе, то имеет место сильная сходимость $(U_A^s)^{M^l R} \rightarrow E$, где E -единичный оператор, что влечет чистую дискретность спектра. Доказательство этой сильной сходимости (проверка условия [63]) основывается на том очевидном факте, что каждый элемент разбиения, рассмотренного в доказательстве теоремы 1, инвариантен относительно $(T_A^s)^{M^m R}$. Будем теперь считать, что подстановка нециклична, то есть найдутся допустимые слова $ac, ad, c \neq d$. Сформулируем достаточное условие наличия непрерывной компоненты спектра. Оно будет доказано после изучения вопроса о том, какими могут быть собственные числа и собственные функции подстановочных динамических систем. Соответствующие результаты опубликованы в работах [65] и [15].

Теорема 2. *Предположим, что найдутся такой конечный набор слов $\{Y_i\}$ в алфавите Z_* и такая возрастающая последовательность нату-*

ральных чисел $\{m_i\}$, что при каждом i $\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(c) = Y_{j_1^i} \dots Y_{j_{s_i}^i} A_i$, $\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(d) = Y_{k_1^i} \dots Y_{k_{s_i}^i} B_i$, где A_i или B_i -пустое слово и при любом t $1 \leq t \leq s_i$ имеем $|Y_{k_t^i}| = |Y_{j_t^i}|$ и $Y_{k_t^i} \neq Y_{j_t^i}$. В этом случае спектр имеет непрерывную компоненту.

По определению [65], отображение $h : Z_* \rightarrow \{g \in C, |g| = 1\}$ называется кограницей, если для любого такого допустимого слова $a_1 \dots a_k$, что $a_1 = a_k$ имеет место $h(a_1) \dots h(a_{k-1}) = 1$. Формулируемая ниже теорема верна для ОДД-подстановок. Ее аналог для $T_{\mathcal{A}}^s$ верен для любых примитивных подстановок.

Теорема 3. (B.Host [65])

(i) Каждому собственному числу подстановочной динамической системы соответствует непрерывная собственная функция.

(ii) Для того, чтобы комплексное число $\lambda, |\lambda| = 1$ было собственным числом автоморфизма $T_{\mathcal{A}}$ (аналогично для $T_{\mathcal{A}}^s$) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное p , что для любой буквы $a \in Z_*$ существовал предел $h(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^{|\omega_{\mathcal{A}}^{pm}(a)|}$, причем функция h оказывалась бы кограницей.

Можно предложить и несколько иной критерий (непосредственно вытекающий из того, что фактически доказано в [15] для стационарных адических преобразований)

Назовем последовательность $L_1, \dots, L_s, \dots$ хорошей, если существует такое допустимое слово $a_1 \dots a_k$ с $a_1 = a_k$, что $L_s = \sum_{i=1}^{k-1} |\omega_{\mathcal{A}}^s(a_i)|$.

Предложение 1. Для того, чтобы комплексное число $\lambda, |\lambda| = 1$ было собственным числом $T_{\mathcal{A}}(T_{\mathcal{A}}^s)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой хорошей последовательности существовал предел $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^{L_s}$ и равнялся 1.

Прежде всего заметим, что поскольку L_s - рекуррентная последова-

тельность, с целочисленными коэффициентами, стандартный аргумент ([66],[15]) показывает, что если сходимость, о которой идет речь в Предложении 1, имеет место, то она экспоненциальна. Из формулировок критериев видно, что требования (ii) Теоремы 3 и Предложения 1 эквивалентны. Покажем, независимо от критериев, что эта эквивалентность имеет место. Предположим, что выполнено условие Предложения 1. Пусть p -период начальных букв ([65]), то есть наименьшее такое число, что для каждого символа $a \in Z_*$ существуют такие $k \in N, b \in Z_*$, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(a) = b \dots, \omega_{\mathcal{A}}^{k+p}(a) = b \dots$. Докажем, что для этого значения p выполнено условие (ii) теоремы 3.

Если $a \in Z_*$, то из минимальности нашей динамической системы вытекает существование такого $b \in Z_*$ и таких допустимых слов A и B , что $A = abB\omega_{\mathcal{A}}^p(ab)$. Из определения p вытекает существование такого k и таких $c, d \in Z_*$, что $\omega_{\mathcal{A}}^p(c) = c \dots, \omega_{\mathcal{A}}^p(d) = d \dots, \omega_{\mathcal{A}}^p(a) = c \dots, \omega_{\mathcal{A}}^p(b) = d \dots$. Если l таково, что $lp > k$, то имеем :

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{A}}^{pl}(A) &= \omega_{\mathcal{A}}^{pl}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(b)\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(B)\omega_{\mathcal{A}}^p(\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(b)) = \\ &= U_l\omega_{\mathcal{A}}^p(\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{pl}(b)) = \omega_{\mathcal{A}}^{pl}(a)V_l\omega_{\mathcal{A}}^{(l+1)p}(b). \end{aligned}$$

Далее, по построению:

- 1) последовательности $|U_l|$ и $|V_l|$ -хорошие;
- 2) $\lambda^{|\omega_{\mathcal{A}}^{(l+1)p}(a)|} / \lambda^{|\omega_{\mathcal{A}}^{lp}(b)|} = \lambda^{|V_l| - |U_l|}$

Из 1), 2) и вышесказанного вытекает, что последовательность в левой части 2) экспоненциально сходится к 1, откуда и следует существование $h(a)$. То, что h -кограница, в данном случае автоматически вытекает из условия.

Предположим теперь, что выполнено условие (ii) теоремы 3. Пусть $\{L_s\}$ -хорошая последовательность. Докажем, что для каждого $s_0 : 0 \leq s_0 \leq p - 1$ имеет место $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda^{L_{s_0+rp}} = 1$ (откуда вытекает требуемое).

При $s_0 = 0$ это непосредственное следствие условия. Если $s_0 > 0$, рассмотрим слово $\omega_{\mathcal{A}}^{s_0}(a_1 \dots a_{k-1})a'$, где $\omega_{\mathcal{A}}^{s_0}(a_k) = a' \dots$. Поскольку $\omega_{\mathcal{A}}^{s_0}(a_1) = \omega_{\mathcal{A}}^{s_0}(a_k)$, это допустимое слово удовлетворяет требованию определения и по нему может быть построена хорошая последовательность L'_s . Имеем $L_{s_0+pr} = L'_{rp}$, то есть мы свели задачу к уже рассмотренному случаю. Сейчас мы приведем доказательство [15] необходимости условия Предложения 1. При этом рассматриваться будет случай обобщенного адического преобразования. Как мы выяснили, для любой примитивной подстановки может быть построено обобщенное адическое преобразование, метрически изоморфное подстановочной динамической системе. Собственные числа, стало быть, будут одни и те же. Классы же хороших последовательностей могут быть построены двумя способами: либо с учетом свойств подстановки, от которой произошла вспомогательная динамическая система, – в этом случае класс хороших последовательностей в точности сохраняется, либо – в терминах обобщенного адического преобразования – в этом случае формально класс хороших последовательностей станет уже, но все, с точностью до сдвига, хорошие последовательности для подстановки в нем будут представлены, чего для наших целей вполне достаточно.

Итак, пусть построены $Z_*^{(m)}, \Omega_{\mathcal{A}}^1$ в соответствии с нашими определениями. Пусть, далее, P_1 и P_2 – две допустимых (могущих быть кусками последовательностей из $\Omega_{\mathcal{A}}^1$) конечных последовательности элементов $Z_*^{(m)}$: $P_1 = y_0 \dots y_l, P_2 = z_0 \dots z_l$, для которых $y_0 = z_0$ (второй способ – первому соответствовало бы требование $y_0 = (u, k_1), z_0 = (u, k_2)$ для некоторого u) и $y_l = z_l$. Очевидно, существует последовательность $N_s(P_1, P_2)$ таких натуральных чисел, что для любой принадлежащей $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ последовательности $x_0 \dots x_s y_0 \dots y_l x_{s+l+2} \dots$ имеем: $(T_{\mathcal{A}}^1)^{N_s(P_1, P_2)}(x_0 \dots x_s y_0 \dots y_l x_{s+l+2} \dots) = x_0 \dots x_s z_0 \dots z_l x_{s+l+2} \dots$. Хоро-

шими будем называть все последовательности вида $N_s(P_1, P_2)$. Все они удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и длины слов $\omega_{\mathcal{A}}^s(a)$, $a \in Z_*$ - с полиномом, равным характеристическому полиному матрицы $G_{\mathcal{A}}$. Итак, мы должны доказать, что если λ -собственное число оператора $U_{T_{\mathcal{A}}^1}$, то для любой хорошей последовательности $N_s(P_1, P_2)$ имеем $\lambda^{N_s(P_1, P_2)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$. Для инвариантной меры μ автоморфизма $T_{\mathcal{A}}^1$ верно следующее утверждение, являющееся аналогом теорем о точках плотности теории функций вещественной переменной. Применительно к преобразованию $T_{\mathcal{A}}^1$ будем пользоваться обозначением $C(\{x_1, \dots, x_l\})$, ранее введенным для адических преобразований.

Пусть $E \in \Omega_{\mathcal{A}}^1$ - измеримое множество, $\mu(E) > 0$. Тогда для μ -почти всякой точки $\gamma = \{x_0, \dots\} \in E$ существует такая последовательность l_i , что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E \cap C(\{x_0, \dots, x_{l_i}\})) / \mu C(\{x_0, \dots, x_{l_i}\}) = 1.$$

Из этого утверждения следует, что если ϕ -собственная функция автоморфизма $T_{\mathcal{A}}^1$ с собственным значением λ , то для произвольных положительных последовательностей $\epsilon_k \rightarrow 0, \delta_k \rightarrow 0$ можно выбрать последовательность измеримых множеств $B_k, \mu(B_k) > 0$ и таких допустимых конечных последовательностей $\{x_0^k, \dots, x_{s_k}^k\}$, что колебание функции ϕ на B_k меньше, чем ϵ_k и

$$\mu(B_k \cap C(\{x_0^k, \dots, x_{s_k}^k\})) / \mu C(\{x_0^k, \dots, x_{s_k}^k\}) > 1 - \delta_k.$$

Зафиксируем P_1, P_2 . Мера μ эквивалентна мере максимальной энтропии относительно сдвига в пространстве последовательностей $\Omega_{\mathcal{A}}^1$. Из этого следует существование таких констант $D > 0$ и $M > 0$, что если через Y_{m, P_i} обозначить множество таких $x \in \Omega_{\mathcal{A}}^1$, для которых координаты с $m + 1$ по $m + l + 1$ образуют путь P_i , то для любых n_1, n_2 с $n_1 - n_2 > M$

и любого допустимого пути $\{x_0, \dots, x_{n_2-1}\}$ имеем

$$\mu(Y_{n_2, P_i} \cap C(\{x_0, \dots, x_{n_1-1}\})) > D\mu C(\{x_0, \dots, x_{n_2-1}\}).$$

Отсюда следует (по определению $N_s(P_1, P_2)$), что при $s > s_k + M$: $|\lambda^{N_s(P_1, P_2)} - 1| < \epsilon_k$. Необходимость нашего условия доказана.

Докажем теперь, что если для комплексного числа λ , $|\lambda| = 1$, выполнено условие Предложения 1, то λ - собственное число, которому соответствует непрерывная собственная функция. Из этого, в сочетании с доказанным выше, вытекает утверждение теоремы 3. Заметим, что поскольку мы вывели из условия Предложения 1 условие (ii) теоремы 3, а в работе [65] из этого условия выведено существование непрерывной собственной функции, то наше утверждение доказано. Все же для полноты изложения приведем непосредственное доказательство для обобщенного адического преобразования [15] методом продолжения с всюду плотной траектории в $\Omega'^1_{\mathcal{A}}$ равномерно-непрерывной на ней функции. Поскольку мы установили взаимно-однозначное взаимно-непрерывное соответствие между $\Omega'^1_{\mathcal{A}}$ и $X'^s_{\mathcal{A}}$, а последнее всюду плотно в $X^s_{\mathcal{A}}$, мы получаем соответствующее утверждение для структурированных последовательностей. Все рассматриваемые системы "на точечном уровне" между собой различаются, причем для нестационарного случая подобное различие может оказаться более существенным.

Итак, пусть $x = \{y_i\}_0^\infty \in \Omega'^1_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим орбиту точки x $O(x) = \{(T_{\mathcal{A}}^1)^l x\}_{l=-\infty}^\infty$ и построим функцию $\phi : O(x) \rightarrow C : \phi((T_{\mathcal{A}}^1)^l x) = \lambda^l$. Каждая точка $O(x)$ имеет вид $\{w_0, \dots, w_s, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots\}$ и все допустимые последовательности такого вида принадлежат $O(x)$. Достаточно доказать существование такой последовательности $\epsilon(l) \searrow 0$, что если $x_1 = \{w_0, \dots, w_l, \dots\} \in O(x)$ и $x_2 = \{w_0, \dots, w_l, \dots\} \in O(x)$, то $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \epsilon(l)$. Но из примитивности матрицы $G_{\mathcal{A}}$ следует существование такого M , что если $x_1 = \{w_1, \dots, w_l, f_1, \dots, f_k \dots\} \in O(x)$

и $x_2 = \{w_1, \dots, w_l, g_1, \dots, g_k \dots\} \in O(x)$, то существуют такая точка $x_3 = \{w_1, \dots, w_l, h_1, \dots, h_k \dots\} \in O(x)$ и такое число R , что для некоторых последовательностей натуральных чисел $\{Q_k\}_0^v, \{L_k\}_0^v, Q_{k-1} < L_k < Q_k < L_{k+1}, |Q_{k+1} - Q_k|, |L_{k+1} - L_k| < M, k = 1, 2, \dots, v, f_{Q_k} = h_{Q_k}, g_{L_k} = h_{L_k}, k = 1, 2, \dots, v-1, g_m = h_m = f_m, m > R > \max(Q_v, l_v)$. Рассмотрим пары путей $(P_1^i, P_2^i), P_1^i = f_{Q_i} \dots f_{Q_{i+1}}, P_2^i = h_{Q_i} \dots h_{Q_{i+1}}, 1 \leq i < v, (P_1^0, P_2^0) = (\{w_l, f_1, \dots, f_{Q_1}\}, \{w_l, h_1, \dots, h_{Q_1}\}), (P_1^v, P_2^v) = (\{f_{Q_v}, \dots, f_R\}, \{h_{Q_v}, \dots, h_R\})$. Имеем

$$\phi(x_3)/\phi(x_1) = \lambda^{N_{l-1}(P_1^0, P_2^0)} \lambda^{N_{Q_1-1}(P_1^1, P_2^1)} \dots \lambda^{N_{Q_v-1}(P_1^v, P_2^v)}.$$

Но конечность числа пар возможных путей длины $\leq M$ и экспоненциальность близости сомножителей к 1 влекут близость к единице частного $\phi(x_3)/\phi(x_1)$ (зависимость этой близости от l экспоненциальна). Аналогично оценивается $\phi(x_3)/\phi(x_2)$. Возможность продолжения ϕ до непрерывной собственной функции доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что $T_{\mathcal{A}}^s$ имеет чисто дискретный спектр, и докажем что это противоречит условию теоремы. Пусть $\{\lambda_i\}$ -перечень собственных значений. Если L_s -хорошая последовательность, то для каждого i имеем по доказанному выше $\lambda_j^{L_g} \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 1$. Следовательно, если $f \in L^2(X_{\mathcal{A}}^s)$, то имеет место сходимость по норме $(U_{\mathcal{A}}^s)^{L_g} f \rightarrow f$.

Существует (вследствие минимальности) допустимое слово вида $acBad$. Рассмотрим хорошую последовательность $L_g = |\omega_{\mathcal{A}}^g(cBa)|$. Пусть $|B| = q, P_g = \min(|\omega_{\mathcal{A}}^g(c)|, |\omega_{\mathcal{A}}^g(d)|)$. Рассмотрим множества $\Gamma_g \subset X_{\mathcal{A}}^s$ и $\Gamma'_g \subset X_{\mathcal{A}}^s$:

$$\begin{aligned} \Gamma_g &= \{x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^\infty, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^\infty\}_{l=0}^\infty\} : i_{-1,x}^g = a, \\ &\quad i_{0,x}^g = c, i_{1,x}^g \dots i_{q+2,x}^g = Bad, n_{-1,x}^g \geq -P_g\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_g = \{ \{ \{ S_x^l \}_{l=0}^\infty, \{ \{ n_{r,x}^l \}_{r=-\infty}^\infty \}_{l=0}^\infty \} : i_{-3-q,x}^g \\ \dots i_{-1,x}^g, i_{0,x}^g = acBad, n_{-1,x}^g \geq -P_g \}. \end{aligned}$$

Имеем $(T_{\mathcal{A}}^s)^{L_g} \Gamma_g = \Gamma'_g$ и, в соответствии с нашими формулами для мер цилиндрических множеств, $\mu^s(\Gamma_g) = \mu^s(\Gamma'_g) > \eta > 0$, где η не зависит от g . Из условия теоремы легко следует существование такой константы $t > 0$ и такого символа $a' \in Z_*$, что для некоторой возрастающей последовательности i_l среди первых P_{i_l} букв слова $\omega_{\mathcal{A}}^{m_{i_l}}(c)$ долю символов, большую, чем t составляют символы, равные a' , стоящие на таких местах, на которых в $\omega_{\mathcal{A}}^{m_{i_l}}(d)$ стоят символы, отличные от a' . Обозначим через χ характеристическую функцию множества $C_{a',0}$ (напомним: $C_{a',0} = \{x^s \mid i_{0,x}^0 = a'\}$). Из вышесказанного следует, что

$$\begin{aligned} \|(U_{\mathcal{A}}^s)^{L_{i_{m_l}}} \chi - \chi\| &> \sqrt{\mu((T_{\mathcal{A}}^s)^{L_{m_{i_l}}} C_{a',0} \Delta C_{a',0})} = \\ &= \sqrt{\mu(\Gamma'_{m_{i_l}} \cap ((T_{\mathcal{A}}^s)^{L_{m_{i_l}}} C_{a',0} \Delta C_{a',0}))} > \sqrt{\eta t}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили требуемое противоречие.

Замечание. Как видно из доказательства, вовсе необязательно требовать, чтобы одно из слов A_i, B_i было пустым. Достаточно, чтобы для некоторого $R < 1$ имело место $\frac{|A_i|}{|\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(c)|} < R$, $\frac{|B_i|}{|\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(d)|} < R, i > 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о слабом перемешивании. Рассмотренные выше критерии, по которым можно определить, является ли число λ собственным числом динамической системы, дают возможность сформулировать легко проверяемое в любых конкретных случаях необходимое и достаточное условие слабого перемешивания: подстановочная динамическая система слабо перемешивает в том и только в том случае, когда ни для какого числа λ не выполнено соответствующее условие.

Эффективно проверить можно выполнение обоих условий, но формально положительным качеством условия Предложения 1 является то,

что его проверка не требует нахождения предела. Пользуясь подстановочной моделью, легко увидеть, что множество хороших последовательностей содержится в полугруппе с конечным (легко описываемым) базисом. Если же L_s -хорошая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению с целочисленными коэффициентами, то легко описать множество всех таких чисел $\lambda = e^{2\pi i \chi}$, что для некоторой последовательности $d_s \in Z$ имеем $|L_s \chi - d_s| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$. В самом деле, уже упоминавшийся аргумент ([15],[66]) состоит в том, что если выполняется приведенное условие, то последовательность d_s , начиная с некоторого s удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и L_s .

Пусть это соотношение имеет вид $L_{s+n} = a_1 L_{s-1+n} + a_2 L_{s-2+n} + \dots + a_n L_s, a_n \neq 0$. Обозначим через $f(t)$ полином $t^n - a_1 t^{n-1} - \dots - a_n = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_l)^{k_l}$. Тогда, как известно из теории, ([67]), имеем: $L_s = \sum_{i=1}^l \phi_i(s) \lambda_i^s$, где ϕ_i -полиномы степеней не выше $k_i - 1$, $d_s = \sum_{i=1}^l \psi_i(s) \lambda_i^s$, где ψ_i -полиномы степеней не выше $k_i - 1$ (будем считать, что d_s определена этим равенством при всех достаточно больших натуральных s).

Имеем $\sum_{i=1}^l (\phi_i(s) - \chi \psi_i(s)) \lambda_i^s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Из этого, как легко понять, следует, что $(\phi_i(s) - \chi \psi_i(s)) = 0$, если $|\lambda_i| \geq 1$. Обратно, если существуют χ и такая рациональная последовательность d_s , что для соответствующих $\psi_i(s)$ выполнены наши соотношения при $|\lambda_i| \geq 1$, то непусто и является дискретной группой множество таких рациональных чисел r , что $r d_s$ -целочисленна, начиная с некоторого s ($L_s(r\chi - r d_s) \rightarrow 0$). Рациональное χ существует тогда и только тогда, когда существует такое s_0 , что все L_s для $s > s_0$ имеют общий делитель > 1 . Множество $Rat_{\{L_s\}}$ всех рациональных χ , подходящих для данной L_s , есть $\{p/q \mid \exists s_0(q), s > s_0 \Rightarrow q \mid L_s\}$.

Замечание. Комплексное число $\lambda = e^{2\pi i \chi}$ с рациональным χ является собственным числом подстановочной динамической системы то-

гда и только тогда, когда для любой хорошей последовательности $\chi \in \text{Rat}(\{L_s\})$.

Обозначим через $\{\psi_i^k\}_{i=1}^l, 1 \leq k \leq n$ наборы полиномов для рекуррентных последовательностей, определяемых равенствами $d_i'^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & 1 \leq i \leq n, i \neq k \end{cases}$.

Для того, чтобы найти все возможные иррациональные χ для $\{L_s\}$, мы должны найти все такие целочисленные наборы $\{v_1, \dots, v_n\}$, что частные $\frac{\sum_k v_k \psi_i^k(s)}{\phi_i(s)}$ суть константы для всех таких i , что $|\lambda_i| \geq 1$, иррациональные и совпадающие между собой. Заметим, что множество иррациональных χ для L_s $\text{Irr}(\{L_s\})$ заведомо пусто, если все λ_i не лежат во внутренности единичного круга. Если это не так, то из наших условий легко получить систему уравнений вида $\sum_{k=1}^n c_k^i v_k = 0$, где i пробегает $\sum_{\{i \mid |\lambda_i| \geq 1\}} k_i - 1$ возможных значений. Зная алгебраические числа c_k^i , можно определить, могут ли вообще наши уравнения удовлетворяться целыми числами и найти множество возможных решений. Особенно просто этот вопрос решается в том случае, когда все корни полинома – простые.

Для таких рекуррентных последовательностей имеет место следующий факт ([20],[66] и пр.)

Пусть полином $F(u) = a_0 u^m + a_u^{m-1} + \dots + a_{m-1} u + a_m$, $a_0 a_m \neq 0$ над полем S имеет простые корни $u_1, u_2, \dots, u_m$ и $v = (v_1, \dots, v_m)$ – m -мерный комплексный вектор.

Факт. Существует единственный полином $g_v(u)$ степени $< m$, для которого последовательность $h_l = \sum_{k=1}^m g_v(u_k)(u_k F'(u_k))^{-1} u_k^l$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_m h_l + a_{m-1} h_{l+1} + \dots + a_1 h_{l+m-1} + a_0 h_{l+m}$ и $h_l = v_l$ при $1 \leq l \leq m$. Может быть написана точная формула для

полинома $g_v(u)$:

$$g_v(u) = \sum_{i=1}^m v_i a_{m-i} + u \sum_{i=1}^{m-1} v_i a_{m-i-1} + u^2 \sum_{i=1}^{m-2} v_i a_{m-i-2} + \cdots + u^{m-1} \sum_{i=1}^1 v_i a_{1-i}.$$

Этот факт доказывается путем непосредственного решения системы линейных уравнений с определителем Вандермонда. Для "начальных данных" специального вида полином $g_v(u)$ может быть вычислен непосредственно: если $v = (u_k, u_k^2, \dots, u_k^m)$, то $g_v(u) = u_k F(u)/(u - u_k)$ при $u \neq u_k$ и $g_v(u_k) = u_k F'(u_k)$. Если a_i, v_i -целочисленные, то g_v имеет целые коэффициенты.

Для произвольной последовательности (на деле для L_s или d_s) $\{R_s\}$ обозначим через $v_{\{R_n\}}$ вектор $(R_1, \dots, R_n)$. В нашем случае $F = f$ все $\phi_i(s), \psi_i(s)$ - константы. Допустим, что полиномы f и $g_{v_{\{L_s\}}}$ имеют наибольший общий делитель $p(t)$. Тогда полином $g_{v_{\{L_s\}}}/p$ обратим в кольце классов рациональных полиномов $\text{mod } f/p$. А из нашего условия следует, что $p \mid g_{v_{\{d_s\}}}$ и что если $|\lambda_i| \geq 1$ и $f(\lambda_i) = 0, p(\lambda_i) \neq 0$, то для любого полинома Q из класса полинома $(g_{v_{\{d_s\}}}/p)(g_{v_{\{L_s\}}}/p)^{-1}$, имеющего, конечно, рациональные коэффициенты, выполнено $Q(\lambda_i) = \chi$. Таким образом, мы получаем следующее

Предложение 2. Пусть $\{L_s\}$ -хорошая последовательность и не существует такого k_0 , что все $L_k, k > k_0$ имеют общий делитель, больший 1, а также не существует полинома с целыми коэффициентами, постоянного и иррационального на множестве $\{\lambda \mid g_{v_{\{L_s\}}}(\lambda_i) \neq 0 \ \& \ |\lambda_i| \geq 1\}$. Тогда подстановочный автоморфизм обладает слабым перемешиванием.

Замечание 1. Иррациональное $\chi \in \text{Irr}(\{L_s\})$ тогда и только тогда, когда для некоторой рекуррентной последовательности, целочисленной, начиная с некоторого места d_s из $|\lambda_i| \geq 1$ следует, что $g_{v_{\{L_s\}}}(\lambda_i) = \chi g_{v_{\{L_s\}}}(\lambda_i)$. $e^{2\pi i \chi}$ с иррациональным χ является собственным числом

подстановочной динамической системы тогда и только тогда, когда для любой хорошей последовательности $\{L_s\} \quad \chi \in Irr(\{L_s\})$.

Замечание 2. Если $L = \{L_s\}$ -хорошая последовательность для подстановки $\omega_{\mathcal{A}}$, то она удовлетворяет рекуррентному соотношению с полиномом, являющемуся характеристическим полиномом матрицы $G_{\mathcal{A}}$, поэтому, если он имеет простые корни, то построение $g_{v_{\{L_s\}}}$ может осуществляться с его использованием. Множество же $\{\lambda_i \mid g_{v_{\{L_s\}}}(\lambda_i) \neq 0\}$ как подмножество C вообще не зависит от выбора рекуррентного соотношения из множества тех, которым удовлетворяет $\{L_s\}$.

Случай наличия кратных корней несколько более сложен. Мы покажем на примере, не обращаясь к подстановкам, как рассматривать соответствующий вопрос для рекуррентных последовательностей.

Пусть $F_2(t) = F_1(t)^2$, где $F_1(t)$ имеет степень m и простые корни. $F_2(t) = a_0 t^{2m} + \dots + a_{2m}$, $F_1(t) = b_0 t^m + \dots + b_m$, $b_0 b_m \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ -корни $F_1(t)$ и $\{L_s\}$ -рекуррентная последовательность, удовлетворяющая соотношению с полиномом $F_2(t)$. Рассмотрим рекуррентную последовательность $\{M_s\}_{s=1}^{\infty}$. $M_s = b_0 L_{s+m} + \dots + b_{m-1} L_{s+1} + b_m L_s$. Она удовлетворяет рекуррентному соотношению с полиномом $F_1(t)$ и поэтому для нее может быть написан соответствующий полином $g_{v_{\{M_s\}}}$. С другой стороны, как известно, [67], L_s можно выразить как $\sum_{i=1}^m (c_i s + h_i) \lambda_i^s$. По определению M_s имеем

$$\begin{aligned} M_s &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^m b_j (c_i (s+j) + p_i) \lambda_i^{s+j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^m b_j c_i j \lambda^{s+j} = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda^s c_i \sum_{j=0}^m b_j j \lambda_i^j = \sum_{i=1}^m \lambda_i^s c_i F'_1(\lambda_i) \lambda_i. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что все b_i -рациональны и все L_s -рациональны.

Учитывая определение $g_{v_{\{M_s\}}}$, имеем $c_i = g_{v_{\{M_s\}}} / (\lambda_i F'_1(\lambda_i))^2$. То есть по аналогии с предыдущим заключаем, что для некоторого полинома Q

с рациональными коэффициентами имеет место $c_i = Q(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$. Имеем, далее, $L_s - s \sum_{i=1}^m Q(\lambda_i) \lambda_i^s = \sum_{i=1}^m p_i \lambda_i^s$, $s > 0$, то есть это рекуррентная последовательность с полиномом $F_1(t)$, все члены которой рациональны, что видно из выражения в левой части. Стало быть, для некоторого рационального полинома P имеем $f_i = P(\lambda_i)$. Теперь ясно, как находить $Irr_{\{L_s\}} : \chi \in Irr_{\{L_s\}}$ тогда и только тогда, когда для некоторых полиномов $P_1(t)$ и $Q_1(t)$ с рациональными коэффициентами имеем :

1) рекуррентная последовательность $\sum_{i=1}^m (P_1(\lambda_i) + sQ_1(\lambda_i)) \lambda_i^s$ целочисленна, начиная с некоторого s ;

2) если $|\lambda_i| \geq 1$, то $(P_1(\lambda_i), Q_1(\lambda_i)) = \chi \times (P(\lambda_i), Q(\lambda_i))$.

Аналогичным образом вопрос может быть рассмотрен для любого полинома с рациональными коэффициентами. По индукции методом, аналогичным вышеописанному, легко можно получить следующее утверждение (весьма естественное).

Факт. Пусть рациональная последовательность $\{K_s\}_{s=1}^\infty$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\sum_{j=0}^n \beta_j K_{s+n-j} = 0$, $\beta_0 \beta_n \neq 0$, все β_i -рациональны, и пусть $\sum_{j=0}^n \beta_j t^j = \prod_1^l F_i^{s_i}(t)$, где полиномы F_i неприводимы над Q а s_i -натуральные. Тогда существуют такие рациональные последовательности $\{M_s^{i,r}\}_{j=1}^\infty$, $i = 1, \dots, l$, $1 \leq r \leq s_i$, что $K_s = \sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^{s_i} s^r M_s^{i,r}$ и $\sum_{j=0}^{\deg(F_i)} \alpha_j^i M_{s+j}^{i,r} = 0$, где $F_i = \sum_{j=0}^{\deg(F_i)} \alpha_j^i t^j$, $s = 1, \dots$.

Теперь наша основная задача при работе с хорошими последовательностями состоит в том чтобы для любого набора $\{(F_i, s_i)\}$ знать, для каких наборов $\{M_s^{i,r}\}_{s=1}^\infty$ последовательность K_s целочисленна начиная с некоторого места. Заметим, что теорема Перрона-Фробениуса существенно ограничивает множество возможных ситуаций. Простейший пример $\mathcal{A} = \{2, 3, 111222223\}$. $T_{\mathcal{A}}$ — слабое перемешивание.

§5. Интегральные автоморфизмы над подстановочными и стационарными адическими динамическими системами.

Поскольку мы получили некоторые факты об эквивалентности динамических систем четырех типов: подстановочные динамические системы, динамические системы в пространствах структурированных последовательностей, адические преобразования, обобщенные адические преобразования, выбор языка снова будет определяться соображениями удобства.

Рассмотрим стационарное адическое преобразование U , действующее в марковском компакте $Y_{(D,M)}$. Пусть $f : Y_{(D,M)} \rightarrow Z_+$ – непрерывная функция. Пусть $V = V(Y_{(D,M)}, f)$ естественным образом топологизированное пространство пар (y, m) , $1 \leq m \leq f(y)$ и U_f –преобразование, действующее в V следующим образом: если $m < f(y)$, то $U_f((y, m)) = (y, m + 1)$, если $m = f(y)$ и в точке y определено U , то $U_f((y, m)) = (U(y), 1)$. Мы предполагаем, как и ранее, что матрица M –примитивна и, следовательно, преобразование U – строго эргодично (всюду плотность траекторий и полутраекторий и единственность борелевской инвариантной нормированной меры). С точки зрения эргодической теории преобразование U_f является интегральным автоморфизмом, построенным по автоморфизму U и функции f . [68]. Сформулируем несколько простых (или известных для более общих случаев) утверждений.

1) U_f –строго эргодично.

2) Если μ_f –инвариантная мера U_f , A –измеримое множество в $Y_{(D,M)}$, и μ –центральная мера в $Y_{(D,M)}$, то $\mu_f(\{(x, 1), x \in A\}) = \mu(A) / \int_{Y_{(D,M)}} f d\mu$.

3) Существуют: функция $\phi : D \rightarrow Z_+$, функция $f' = f_\phi$, $f'(\{y_1 \dots\}) = \phi(y_1)$ и биективное отображение (гомеоморфизм) $Q : V(Y_{(D,M)}, f) \rightarrow V(Y_{(D,M)}, f')$, для которых $U_{f'} \circ Q = Q \circ U_f$ всюду, где это равенство имеет смысл.

Объясним, почему имеет место утверждение 3. Пусть $m = \sup f$. То-

гда существует набор таких конечных последовательностей $G_{i,k}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq b_m > 0, G_{ik} = \{x_l^{i,k}\}_{l=1}^{s(i,k)}$, что $M(x_l^{i,k}, x_{l+1}^{i,k}) = 1$, если $1 \leq l < s(i,k)$ и $f^{-1}(\{i\}) = \cup_k C(G_{i,k}), 1 \leq i \leq m$. Пусть $S \geq \max_{i,k} s(i,k) + 1$. Можно считать, что $C(G_{i_1,k_1}) \cap C(G_{i_2,k_2}) \neq \emptyset \Leftrightarrow (i_1 = i_2) \ \& \ (k_1 = k_2)$. Для всякой последовательности $F = \{x_l\}_{l=1}^S$, допустимой в вышеописанном смысле, существует и единственна такая пара (i,k) , что $\{x_l\}_{l=1}^{s(i,k)} = G_{ik}$ или $C(F) \subset C(G_{ik})$. Рассмотрим пространство состояний $D_S = D$. Пусть $d \in D_S$. Определим $f'(d)$ как $\sum_{F \in E(d)} i(F)$, где для каждого F $C(F) \subset C(G_{i(F),k})$. Если теперь $(y,m) \in V(Y_{(D,M)}, f)$, $y = \{y_i\}_{i=1}^\infty$, то положим $Q(y,m) = (\{y_{S+i-1}\}_{i=1}^\infty, m')$, где $m' = \sum_{\substack{G \in E(y_s) \\ G \prec \{y_i\}_{i=1}^s}} i(G) + m$, где $\prec$ – естественное упорядочение на множестве $L(y_s)$ (обозначения начала главы 1). То, что отображение Q удовлетворяет требованиям утверждения 3, вытекает с очевидностью из определения U . Если $f \equiv 1$, то U_f изоморфно U с тождественным Q . Если $\pi : D_1 \rightarrow D_s$ – естественное соответствие, а $\phi(d) = B(\pi_s d)$, то U_{f_ϕ} изоморфно U , ибо, как видно из построения, $Q, U_{f'}$ изоморфно U_{f_ϕ} , где $\phi \equiv 1$.

В дальнейших рассмотрениях мы будем использовать только функции вида f_ϕ . Если адическое преобразование сопоставлено вышеописанным образом подстановочной динамической системе, то между множествами непрерывных функций на соответствующих пространствах легко установить соответствия.

Дадим определение хороших последовательностей для U_f (см. также [69]). Прежде всего заметим, что U можно рассматривать как обобщенное адическое преобразование (для подстановки $\omega_{\mathcal{A}_M}$, введенной ранее). Поэтому определение хороших последовательностей будет аналогичным. Пусть $P_1 = y_0, \dots, y_l, P_2 = z_0, \dots, z_l$ – два конечных допустимых пути одинаковой длины, $y_0 = z_0, y_l = z_l$. Определим последовательность натуральных чисел $N_m^f(P_1, P_2)$ (по аналогии со случаем обычного преобразо-

вания). Очевидно, что для любого пути $x_1, \dots, x_m, y_0, \dots, y_l, x_{m+l+2}, \dots$ существует такое (не зависящее от $\{x_i\}$) натуральное число k , что

$$U_f^k((\{x_1, \dots, x_m, y_0, \dots, y_l, x_{m+l+2}, \dots\}, 1)) = (\{x_1, \dots, x_m, z_0, \dots, z_l, x_{m+l+2}, \dots\}, 1).$$

Возьмем это k в качестве $N_m^f(P_1, P_2)$. Хорошими будем называть все последовательности вида $\{N_m^f(P_1, P_2)\}$. При фиксированных P_1, P_2 соответствующая хорошая последовательность рекуррентна. В качестве полинома может быть взят характеристический полином матрицы M .

Все полученные ранее результаты о том, какие числа могут быть собственными числами стационарных адических преобразований и подстановочных систем автоматически переносятся на рассматриваемый случай. Верны также и вытекающие из них условия слабого перемешивания. Сформулируем утверждение о собственных числах.

Предложение 1. Комплексное число $\lambda, |\lambda| = 1$ является собственным числом динамической системы U_f тогда и только тогда, когда для любых допустимых путей $P_1 = y_0, \dots, y_l, P_2 = z_0, \dots, z_l, y_0 = z_0, y_l = z_l$ имеет место $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^{N_m^f(P_1, P_2)} = 1$.

Условие чистой дискретности спектра для этого случая тоже может быть сформулировано (на сей раз в терминах подстановок). Если $T_{\mathcal{A}}^s : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}}^s$ –подстановочная динамическая система, то для любой непрерывной функции $f : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow Z_+$ может быть построен интегральный автоморфизм $T_{\mathcal{A},f}^s : V \rightarrow V$, где $V = V(X_{\mathcal{A}}^s, f)$ определяется совершенно аналогично $V(Y_{(D,M)}, f)$. Если Z_* – алфавит подстановки $\omega_{\mathcal{A}}$, то произвольной функции $\phi : Z_* \rightarrow Z_+$ соответствует функция $f_{\phi} : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow Z_+, f_{\phi} = \phi(i_{0,x}^0)$, где $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, $S_x^l = \{i_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}$. По аналогии со случаем адического преобразования и здесь легко видеть, что $T_{\mathcal{A},f}^s$ строго эргодично, что меры множеств в V вычисляются с помощью формулы утверждения 2, и что для широкого класса случаев существуют

такие функция $\phi : Z_* \rightarrow Z_+$ ($\phi = \phi(f)$) и гомеоморфизм $Q : X_{\mathcal{A}}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}}^s$, что $T_{\mathcal{A},f_\phi}^s \circ Q = Q \circ T_{\mathcal{A},f}^s$. Если $a_1 \dots a_r$ –слово в Z_* , то обозначим через $\phi(a_1 \dots a_r)$ число $\sum_{i=1}^r \phi(a_i)$.

Предложение 2. Допустим, что выполнены условия теоремы 1 о достаточности условия дискретности спектра. Допустим, далее, что $\phi : Z_* \rightarrow Z_+$ такова, что если допустимые слова в Z_* v_1 и v_2 имеют эквивалентную номенклатуру, то $\phi(v_1) = \phi(v_2)$. Тогда автоморфизм $T_{\mathcal{A},f_\phi}^s$ имеет чисто дискретный спектр.

Доказывается предложение вполне аналогично теореме 1. Анализируя доказательство теоремы 1, мы видим, что достаточно получить следующее: если пара слов $(E, D) \in \Delta_c$, то при каждом $m \in Z_+$ имеем $\omega_{\mathcal{A}}^m(E) = v_0^m u_1^m v_1^m \dots u_{s(m)}^m v_{s(m)}^m, \omega_{\mathcal{A}}^m(D) = v_0^m u_1'^m v_1^m \dots u_{s(m)}'^m v_{s(m)}^m$, где пары $(u_i^m, u_i'^m) \in \Delta \cup \Delta_c, \phi(u_i^m) = \phi(u_i'^m) 1 \leq i \leq s(m)$ и $\frac{\sum_i \phi(u_i^m)}{\phi(\omega_{\mathcal{A}}^m(E))} < Kr^m, 0 < r < 1, K > 0$ –константы. Но это видно из условия предложения и доказательства теоремы 1, в котором получены такие представления с оценкой для $\frac{\sum_i |u_i^m|}{|\omega_{\mathcal{A}}^m(E)|} < Kr^m$.

Для интегральных автоморфизмов над подстановочными динамическими системами мы покажем, как вычислять хорошие последовательности (см. также [69]). Пусть $\omega_{\mathcal{A}}$ –подстановка и задано отображение $\phi : Z_* \rightarrow Z_+$, определяющее, как было описано выше, интегральный автоморфизм. Предположим, что $Z_* = \{1, \dots, n\}$ и рассмотрим n –мерный вектор $U_\phi = \{\phi(1), \dots, \phi(n)\}$. Пусть $A = a_1 a_2 \dots a_k$ –допустимое слово с $a_1 = a_k$ и $B = a_1 \dots a_{k-1}$. Введем вектор $V_A = \{|B|_1, \dots, |B|_n\}$, где $|B|_i$ –число вхождений символа i в слово B . Рассмотрим последовательность $L_s^A : L_s^A = (G_{\mathcal{A}}^s U_\phi, V_A)$. Такие последовательности скалярных произведений и только они являются хорошими последовательностями.

Спектральная теория интегральных автоморфизмов над подстановочными динамическими может, быть применена к изучению спектров самих

подстановочных динамических систем. Можно заметить, что в доказательстве достаточности условия чистой дискретности спектра использовалась рекуррентная последовательность, которая в общем случае не обязана быть ни хорошей ни линейной комбинацией хороших. Поэтому при проверке выполнения этого условия можно "упустить" подстановку с дискретным спектром. Простейший пример– циклическая подстановка. $\mathcal{A} = \{12341, 234, 12, 34\}$. Можно все же сделать так, чтобы последовательность оказалась хорошей. Существуют такие символ $a \in Z_*$ и натуральное p , что $\omega_{\mathcal{A}}^p(a) = a \dots$. Обозначим через Z_{**} множество таких допустимых слов $a_1 \dots a_k$, что $a_1 = a$, слово $a_1 \dots a_k a$ – допустимо и $a_i \neq a, 1 < i \leq k$. Определим функцию $\phi : Z_{**} \rightarrow Z_+, \phi(A) = |A| = k$. Определим набор слов $\mathcal{A}_a = \{B_i\}_{i=1}^{\#Z_{**}}$, где $B_i = A^i \dots A_{s(i)}^i$, если $\omega_{\mathcal{A}}^p(A_i) = A_1^i \dots A_{s(i)}^i$ – соединение слов из Z_{**} . Ясно, что подстановка $\omega_{\mathcal{A}_a}$ – примитивна.

Учитывая отношение эквивалентности на Z_* , используемое в достаточном условии дискретности спектра, введем отношение эквивалентности на $(Z_{**})^*$: элементы $(Z_{**})^* B_1, B_2, B_1 = A_1^1 \dots A_{l(1)}^1, B_2 = A_1^2 \dots A_{l(2)}^2$ будут называться словами эквивалентной номенклатуры, если допустимые слова–конкатенации в Z_* $A_1^1 \dots A_{l(1)}^1, A_1^2 \dots A_{l(2)}^2$ имеют эквивалентную номенклатуру (имеется в виду эквивалентность слов, фигурирующая в формулировке теоремы 1) в смысле старого определения. Заметим теперь, что динамическая система $T_{\mathcal{A}}^s$ метрически изоморфна системе $T_{\mathcal{A}_a, f_\phi}^s$, что достаточное условие дискретности спектра можно сформулировать в терминах введенного отношения эквивалентности и что применимо последнее предложение, поскольку функция ϕ удовлетворяет его условию.

Для нашей циклической подстановки можно взять $p = 1, a = 1$. Имеем: $Z_{**} = \{A\}, A = 1234, \mathcal{A}_a = \{AAA\}, \phi(A) = 4$. С этой же точки зрения могут рассматриваться подстановки с постоянной длиной слова

[41], в частности, приводимый в следующем параграфе пример π -произведения. Можно привести пример подстановки с непостоянной длиной слова: $\mathcal{A} = \{12, 31, 2423, 242\}$. Легко проверить, что ни одна из последовательностей вида $|\omega_{\mathcal{A}}^m(b)|, b \in Z_*$, не является хорошей или линейной комбинацией таковых. Берем $p = 2, a = 2$. Имеем $Z_{**} = \{\alpha, \beta\}, \alpha = 24, \beta = 231, \mathcal{A}_a = \{\alpha\beta\beta\alpha\beta, \alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\beta\beta\}$. Выполненность условий предложения легко проверяется.

§6. Об одном классе косых произведений.

Если матрица стационарного минимального адического преобразования полностью определяет его метрические и спектральные свойства, то для подстановок это не имеет места. Например, подстановка Морса со смешанным спектром имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Но такую же матрицу имеет подстановка $1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 12$, которая циклична и соответствует преобразованию $T_{\mathcal{A}}^s$ пространства структурированных последовательностей, имеющему чисто дискретный двоично-рациональный спектр. Некоторую информацию о спектре характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$ все же дает: если этот полином неприводим над полем рациональных чисел и среди его корней есть число Пизо, то спектр имеет дискретную компоненту (для адических преобразований это доказано в дипломной работе М.И.Соломяк, далее такие системы исследовались в ее работе [70], для подстановок см. [65] и [27]).

Если полином приводим, то наличие среди корней числа Пизо не гарантирует наличия дискретной компоненты. В символической динамике (в частности, в теории подстановок и обобщенных последовательностей Морса [32],[27]) как и в других отраслях теории динамических систем важными источниками примеров и средствами изучения метрических и топологических свойств являются построение косых произведений и представление в виде косых произведений известных систем [71–79]

Пусть $Z_* = \{1, \dots, n\}$ –алфавит, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – такой набор слов в Z_* , что матрица $G_{\mathcal{A}}$ – примитивна. Обозначим через E конечное множество $\{1, \dots, m\}$. На нем действует симметрическая группа $\mathfrak{S}_m$.

Рассмотрим (как при построении адического преобразования, связанного с подстановкой) множество D^2 пар натуральных чисел $(f, g) : 1 \leq f \leq n, 1 \leq g \leq |A_f|$ и произвольное сначала отображение $\pi : D^2 \rightarrow \mathfrak{S}_m$. Этому отображению может быть нижеописываемым образом сопоставлена подстановка (вообще говоря не примитивная). В качестве алфавита Z_E берется декартово произведение $Z_* \times E$. Набор слов $\mathcal{A}_\pi = \{A_{(i,j)}^\pi\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ получается из $\mathcal{A}$ в соответствии с отображением π по следующему правилу: если слово $A_i, 1 \leq i \leq n$ имело вид $a_1^i \dots a_{s(i)}^i$, то

$$A_{(i,j)}^\pi = b_1^{(i,j)} \dots b_{s(i)}^{(i,j)}, \quad (i, j), b_k^{(i,j)} \in Z_E, b_k^{(i,j)} = (a_k, \pi(i, k)j), \\ 1 \leq k \leq s(i) = |A_i|.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие отображения π , для которых матрица $G_{\mathcal{A}_\pi}$ примитивна. Разумеется, если $\omega_{\mathcal{A}}$ не примитивна, то ни при каком отображении π подстановка не может быть примитивной. Очевидно, что как автоморфизм (ибо это строго эргодический гомеоморфизм) пространства Лебега $T_{\mathcal{A}_\pi}^s : X_{\mathcal{A}_\pi}^s \rightarrow X_{\mathcal{A}_\pi}^s$ является косым произведением со слоем E . Если подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ (которую будем называть базовой подстановкой) –ОДД, то такова же и подстановка $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$ и автоморфизм $T_{\mathcal{A}_\pi} : X_{\mathcal{A}_\pi} \rightarrow X_{\mathcal{A}_\pi}$ – косое произведение над $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ со слоем E . ОДД вытекает из того, что, по определению $\mathcal{A}_\pi$, если нам известно i и слово $A_{(i,j)}^\pi$, то мы можем однозначно определить j .

Подстановку $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$ будем называть π –произведением. С точки зрения топологической, на точечном уровне дело обстоит не так хорошо. Для простоты мы будем сейчас рассматривать случай базовой ОДД–подстановки , хотя как раз π –произведения над циклическими подста-

новками (в стационарном случае, что уже обсуждалось, единственная альтернатива[58]) могут быть ОДД, то есть рассмотрение структурированных последовательностей является содержательной задачей.

Итак, обозначим через X'_A множество таких последовательностей $\{x_i\}_{-\infty}^\infty$, что существуют такие последовательности $\{a_j\}_{j=0}^\infty$, $\{l_j\}_{j=0}^\infty$, $\{m_j\}_{j=0}^\infty$, где $a_j \in Z_*$, $l_j, m_j \in Z$, $j \geq 0$, $l_j \rightarrow -\infty$, $m_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, что $x_{l_j+1} \dots x_{m_j} = \omega_A^j a_j$, причем если $\omega_A(a_j) = b_1^j \dots b_{k(j)}^j$, $j > 0$, и $\omega_A^j(a_j) = \omega_A^{j-1}(b_1^j) \dots \omega_A^{j-1}(b_{k(j)}^j)$, то для некоторого $p(j)$ $1 \leq p(j) \leq k(j)$ имеем $b_{p(j)}^j = a_{j-1}$ и $\omega_A^{j-1}(b_{p(j)}^j) = x_{l_{j-1}+1} \dots x_{m_{j-1}}$. Очевидно, $X'_A \subset X_A$. Рассмотрим теперь множество X'_{A_π} . По определению X_{A_π} ясно, что если $\{(x_i, p_i)\} \in X'_{A_\pi}$, $p_i \in E$, $-\infty < i < \infty$, то $\{x_i\} \in X'_A$. Кроме того, если последовательности $\{(x_i, p_i)\}$ соответствуют (в смысле определения X'_{A_π}) последовательности $\{(a_i, q_i)\}_{i=0}^\infty$, $\{l_j\}_{j=0}^\infty$, $\{m_j\}_{j=0}^\infty$ (конечно, $l_0+1 = m_0 = 0$), то последовательности $\{x_i\}$ соответствуют $\{a_j\}$, $\{l_j\}$, $\{m_j\}$, $1 \leq j < \infty$. Пусть теперь J –такой наибольший номер j , что $m_j = 0$. Обозначим для $j > 0$ $|\omega_A a_j|$ через d_j . Имеем $a_j = b_{p(J+1)}^{J+1}$, $q_0 = p_0 = \pi(a_1, d_1) \circ \pi(a_2, d_2) \circ \dots \circ \pi(a_J, d_J) \circ \pi(a_{J+1}, p(J+1))(q_{J+1})$. Очевидно, $p(J+1) < d_{J+1}$. Рассмотрим теперь последовательность $T_{A_\pi}(\{(x_i, p_i)\})$. Ей соответствуют последовательности $\{(a'_j, q'_j)\}_{j=1}^\infty$, $\{m'_j\}_{j=1}^\infty$, $\{l'_j\}$, причем $q'_0 = p_1$, $a'_0 = a_1$, если $j > 1$, то $(a_j, q_j) = (a'_j, q'_j)$, далее, $q'_0 = p_1 = \pi(a'_1, 1) \circ \pi(a'_2, 1) \circ \dots \circ \pi(a'_j, 1) \circ \pi(a_{J+1}, p(J+1)+1)(q_{J+1})$. Стало быть, $p_1 = \pi(a'_1, 1) \circ \pi(a'_2, 1) \circ \dots \circ \pi(a'_j, 1) \circ \pi(a_{J+1}, p(J+1)+1)(\pi(a_1, d_1) \circ \pi(a_2, d_2) \circ \dots \circ \pi(a_J, d_J) \circ \pi(a_{J+1}, p(J+1))^{-1}(q_0))$.

Обозначим элемент группы $\mathfrak{S}_m$, который в последней формуле действует на q_0 , через $\chi_\pi(\{x_i\}_{-\infty}^\infty)$. Из этой формулы видно, что, во-первых, $\{(x_i, p_i)\}$ есть функция $\{x_i\}$ и p_0 , во-вторых, обозначая, с учетом этого обстоятельства, $\{(x_i, p_i)\}$ через $(\{x_i\}, p_0)$, имеем:

$$T_{A_\pi}((\{x_i\}, p_0)) = (T_A(\{x_i\}), \chi_\pi(\{x_i\})(p_0))$$

, то есть для динамической системы, действующей в множестве $X'_\mathcal{A}$, можно говорить о косом произведении на точечном уровне. Для изучения соотношения наших динамических систем в $X_\mathcal{A} \setminus X'_\mathcal{A}$ сопоставим множества порождающих четверок для $\omega_\mathcal{A}$ и $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$.

Факт. Пусть фиксированы $i_0 \in Z_*$, $j_0, t_1 \in Z_+$. Тогда существование такого t_2 , что при любом $s \in E$ четверка $((i_0, s), j_0, t_1, t_2)$ является порождающей для $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$ эквивалентно существованию такого t'_2 , что четверка (i_0, j_0, t_1, t'_2) является порождающей для $\omega_\mathcal{A}$. При этом минимальное возможное t'_2 является делителем минимального возможного t_2 .

Пусть фиксированная тройка (i_0, j_0, t_1) удовлетворяет требованиям, фигурирующим в формулировке факта. Имеем $\omega_\mathcal{A}(i_0) = a_0 \dots a_k$, $\omega_\mathcal{A}^{t_1}(a_{j_0}) = b_1 \dots b_r$, $\omega_\mathcal{A}^{t_1}(a_{j_0+1}) = c_1 \dots c_l$. Какой запас пар вида $((b_r, u), (c_1, v))$, $u, v \in E$ могут обеспечить все соответствующие (дающие ту же пару символов (b_r, c_1) хотя бы с другими r и парами слов $b_1 \dots b_r, c_1 \dots c_l$) тройки вида $((i_0, s), j_0, t_1)$ для $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$. Если число таких пар больше чем m , то, фиксируя t'_2 , получим $\#\{(x_i, p_i)\}_{i=-\infty}^\infty \in X_{\mathcal{A}_\pi} \mid \{x_i\} = \omega_\mathcal{A}^{t'_2 \infty}(b_r) \omega_\mathcal{A}^{t'_2 \infty}(c_1)\} > m$. Но этого легко добиться, например, следующим образом: если $\mathcal{A}$ и π таковы, что $\omega_\mathcal{A}(i_0) = a_1 \dots a_k$ и для некоторых $j_0, j'_0, j'_0 > j_0 + 1$ имеем $\pi(i_0, j_0) = \pi(i_0, j'_0)$, $a_{j_0} a_{j_0+1} = a_{j'_0} a_{j'_0+1}$, при каждом $s \in E$ $\pi(i_0, j_0 + 1)(s) \neq \pi(i_0, j'_0 + 1)(s)$, то число возможных $((b_r, u), (c_1, v))$ не меньше, чем $2m$.

Заметим здесь, что в соответствии с нашей теоремой о достаточном условии наличия непрерывной компоненты спектра существование для $\omega_{\mathcal{A}_\pi}$ допустимого слова вида $(a, s)(b, t_1) \dots (a, s)(b, t_2)$, $s, t_1, t_2 \in E, t_1 \neq t_2$ обеспечивает наличие непрерывной компоненты спектра.

Пример π -произведения с чисто дискретным спектром строится следующим образом. Пусть $Z_* = (1, 2)$; $E = (1, 2, 3)$; $\mathcal{A} = (1112221, 1122211)$; $\pi(i, j) = \sigma^{j-1}$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, 7$.

Заметим, что в этом случае высота подстановки равна 3 и для того, чтобы получить подстановку, удовлетворяющую условиям [41], необходимо построить вспомогательную подстановку (см. [27]).

Весьма удобно использовать π -произведения при проверке слабого перемешивания с помощью хороших последовательностей. Класс хороших последовательностей для π -произведения уже, чем для базы, но если последовательность хороша для π -произведения и удовлетворяет нашему достаточному условию слабого перемешивания (для базы), то по замечанию 2 к этому предложению π -произведение слабо перемешивает. Взятие π -произведения может, все же, как уже обсуждалось, существенно изменить свойства подстановочной динамической системы. Прежде чем переходить к общему случаю и к примерам слабых перемешиваний, рассмотрим примеры π -произведений над циклическими подстановками.

Частным случаем построения динамической системы как π -произведения над циклической подстановкой является построение обобщенной подстановки Рудина–Шапиро в [81]. Обобщенная подстановка Рудина–Шапиро строится следующим образом. Задавшись произвольным натуральным n и $m = n$, рассмотрим алфавит $Z_* = \{1, 2, \dots, n\}$ и набор слов $\mathcal{A} = \{12\dots n, 12\dots n, \dots, 12\dots n\}$. В качестве $\pi(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n$ берем подстановку $\sigma^{(i-1)(j-1)}$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$. Например, при $n = 2$ (обычная подстановка Рудина–Шапиро [27],[82],[20]) имеем:

$$A_{(1,1)} = (1, 1)(2, 1), \quad A_{(1,2)} = (1, 2)(2, 2),$$

$$A_{(2,1)} = (1, 1)(2, 2), \quad A_{(2,2)} = (1, 2)(2, 1).$$

Эта подстановка имеет, как уже указывалось, двукратную лебеговскую компоненту в спектре.

Если взять в качестве базовой циклическую подстановку $\omega_{\mathcal{A}}$ с $\{\mathcal{A}\} = 11$, $E = \{1, 2\}$, то, полагая $\pi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, получим

известную подстановку Морса

$$A_{(1,1)} = (1, 1)(1, 2), A_{(1,2)} = (1, 2)(1, 1).$$

Обозначим через $f_{\mathcal{A}}$ характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$. Путем непосредственных вычислений мы покажем, что для общего случая $f_{\mathcal{A}} \mid f_{\mathcal{A}_{\pi}}$, и представим частное $f_{\mathcal{A}_{\pi}}/f_{\mathcal{A}}$ как характеристический полином некоторой матрицы, что полезно для построения примеров. Матрица $G_{\mathcal{A}_{\pi}}$ является блочной и имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

, где

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & \dots & a_{1m}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{ij} & \dots & a_{mm}^{ij} \end{pmatrix}, 1 \leq i, j \leq n,$$

, причем для любого r_0 $\sum_{l=1}^m a_{lr_0}^{ij} = g_{ij}$, для любого l_0 $\sum_{r=1}^m a_{l_0 r}^{ij} = g_{ij}$. Матрица $G_{\mathcal{A}_{\pi}}(t) = G_{\mathcal{A}_{\pi}} - tI$ тоже блочная с блоками $A_{ij}(t)$. Аналогичные равенства для нее тоже имеют место с заменой всех g_{ii} на $g_{ii}(t) = g_{ii} - t$ ($g_{ij}(t) = g_{ij}$ при $i \neq j$).

Легко осуществить над столбцами и строками $G_{\mathcal{A}_{\pi}}(t)$ такие преобразования, чтобы в каждом блоке $A_{ij}(t)$ были выполнены следующие:

1) прибавление всех столбцов к m -ому

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{ij}(t) & \dots & g_{ij}(t) \end{pmatrix},$$

2) прибавление всех строк к последней

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) & \dots & g_{ij}(t) \\ g_{ij}(t) & \dots & mg_{ij}(t) \end{pmatrix},$$

3) вычитание из всех строк последней, деленной на m :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & g_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & 0 \\ g_{ij}(t) & \dots & mg_{ij}(t) \end{pmatrix},$$

4) вычитание из всех столбцов последнего, деленного на m :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a_{1m-1}^{ij} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a_{m-1m-1}^{ij} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & mg_{ij}(t) \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $f_{\mathcal{A}} \mid f_{\mathcal{A}_\pi}$, и что $f_{\mathcal{A}_\pi} = m^n |G_{\mathcal{A}}(t)| \times |D(t)|$, где

$$D(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & \dots & C_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(t) & \dots & C_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

, причем

$$C_{ij}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a_{1m-1}^{ij} - \frac{g_{ij}(t)}{m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a_{m-1m-1}^{ij} - \frac{g_{ij}(t)}{m} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что если $i \neq j$, то $C_{ij}(t)$ не зависит от t , если же $i = j$, то

$$C_{ij}(t) = C_{ij} + t \begin{pmatrix} -\frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{m-1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & -\frac{m-1}{m} \end{pmatrix} = C_{ij} + tF_m.$$

Необходимо осуществить такие преобразования над строками и столбцами и домножение строк или столбцов на m , чтобы F_m преобразовалось в $-I$. Можно выполнить их таким образом, (использовав при этом множитель m^n), чтобы каждая клетка

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} c'_{11}^{ij} & \dots & c'_{1m-1}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ c'_{m-11}^{ij} & \dots & c'_{m-1m-1}^{ij} \end{pmatrix}$$

имела следующие элементы:

$$\begin{aligned} c'_{11}{}^{ij} &= g_{ij} - ma_{1m}^{ij}, c'_{1k}{}^{ij} = (a_{1k}^{ij} - a_{1m}^{ij})m, \quad k > 1 \\ c'_{l1}{}^{ij} &= a_{1m}^{ij} - a_{lm}^{ij}, \quad l > 1 \\ c'_{lk}{}^{ij} &= a_{lk}^{ij} + a_{1m}^{ij} - a_{lm}^{ij} - a_{1k}^{ij}, \quad l, k > 1 \end{aligned} \quad .$$

Блочная матрица

$$D' = \begin{pmatrix} C'_{11} & \cdots & C'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C'_{n1} & \cdots & C'_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет характеристический полином, равный $f_{\mathcal{A}_\pi}/f_{\mathcal{A}}$. Обозначим этот полином через $f_{\mathcal{A}_\pi/\mathcal{A}}$. При $m = 2$ матрицы c'_{ij} одномерны. Можно выбрать $c'_{ij} = a_{11}^{ij} - a_{12}^{ij}$.

Пусть $\mathcal{A} = \{112, 1222\}$. $\mathcal{A}$ определяет слабоперемешивающую подстановку (с собственными числами $\lambda_{12} = 3 \pm \sqrt{2}$). $G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Зафиксировав $m = 2$, выберем π с такой D' , чтобы корнем $f_{\mathcal{A}_\pi/\mathcal{A}}$ было число Пизо. Например, $D' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$G_{\mathcal{A}_\pi} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad f_{\mathcal{A}_\pi/\mathcal{A}} = t^2 - 2t - 1 = (t - 1 + \sqrt{2})(t - 1 - \sqrt{2}).$$

В качестве соответствующего $\mathcal{A}_\pi$ можно взять

$$\begin{aligned} A_{(1,1)} &= (1, 1)(1, 1)(2, 2), \quad A_{(1,2)} = (1, 2)(1, 2)(2, 1) \\ A_{(2,1)} &= (1, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 2)(2, 1) \\ A_{(2,2)} &= (1, 1)(2, 2)(2, 1)(2, 1)(2, 2). \end{aligned}$$

Если в качестве $\mathcal{A}_\pi$ взять [20]

$$\begin{aligned} A_{(1,1)} &= (1, 2)(1, 2)(2, 1), \quad A_{(1,2)} = (1, 1)(1, 1)(2, 2) \\ A_{(2,1)} &= (1, 1)(2, 2)(2, 1)(2, 1)(2, 2) \\ A_{(2,2)} &= (1, 2)(2, 1)(2, 2)(2, 2)(2, 1), \end{aligned}$$

то получится матрица $D' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Из вышесказанного следует, что косое произведение слабо перемешивает, хотя среди корней $f_{\mathcal{A}_\pi}$ есть число Пизо, ведь последовательность $|\omega_{\mathcal{A}}^l(2)|$ хороша для $\mathcal{A}_\pi$.

§7. Примеры.

Будет рассмотрена серия примеров, связанных со схемами Дынкина. Если имеется произвольный граф (конечный, без кратных дуг) и некоторая степень его матрицы инцидентности распадается на примитивные матрицы, то графу может быть сопоставлена некоторая совокупность минимальных адических преобразований марковских компактов.

Точнее, пусть (D, U) –граф с множеством вершин D и дуг– U . Предположим, что существуют натуральное число k и совокупность таких множеств $\{D_i\}_{i=1}^s$, что $\cup_{i=1}^s D_i = D$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$, причем, если $d_{i_0} \dots d_{i_k}$ –путь, т.е. при каждом r , $0 \leq r < k$ d_{i_r} и $d_{i_{r+1}}$ соединены дугой из U , то для некоторого j $d_{i_1} \in D_j, d_{i_k} \in D_j$; предположим, далее, что существует такое t , что для произвольного $j, 1 \leq j \leq s$ и произвольных $d_1, d_2 \in D_j$ существует путь $d'_0 \dots d'_{kt}$ с $d_0 = d'_1, d_2 = d'_{kt}$. В этом случае каждому D_i может быть сопоставлена матрица $M_i \# D_i \times \# D_i$: $M_i(d_1, d_2) = \#\{d_{i_1} \dots d_{i_{k+1}} \mid d_{i_1} \dots d_{i_{k+1}}\text{–путь } d_1 = d_{i_1}, d_2 = d_{i_k}\}$. Если множество D вполне упорядочено и на множествах D_i порядок индуцирован порядком на множестве D , то возникает s марковских компактов $Y_i, i = 1, \dots, s$, $Y_i = Y_{D_i, M_i}$ с кратными дугами. Здесь такие компакты не рассматривались, но в них может быть достаточно просто введено (различными способами) упорядочение и, следовательно, определено адическое преобразование. Впрочем, если формально рассмотреть пространство путей (имеющее упорядочение, аналогичное упорядочению путей марковского компакта), связанного с $(D, \bar{M})$, где $\bar{M}$ – матрица инцидентности нашего графа, то можно считать все компакты Y_i вложенными в него и сообразно этому определять в них упорядочение.

Построение подстановки, отвечающей простейшему марковскому компактному с кратными дугами, что может иметь место в нашей ситуации, осуществляется аналогично тому, как это делается для марковских компактов без кратных дуг. Утверждение о метрическом изоморфизме с адическим преобразованием сохраняет силу для этого случая. Если $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ -примитивная матрица, то набор слов $\mathcal{A}_M = \{A_i\}$ строится следующим образом. Пусть для некоторого $i, 1 \leq i \leq n, j_1^i, \dots, j_{k_i}^i$ -список всех таких j , что $m_{ji} > 0$. Тогда в качестве A_i берется слово

$$\underbrace{j_1^i \dots j_1^i}_{m_{j_1^i i} \text{ раз}} \underbrace{j_2^i \dots j_2^i}_{m_{j_2^i i} \text{ раз}} \dots \underbrace{j_{k_i}^i \dots j_{k_i}^i}_{m_{j_{k_i}^i i} \text{ раз}}.$$

Мы будем теперь рассматривать графы Дынкина–Кокстера [83]. Последовательности вложенных алгебр, так или иначе связанных с ними, интенсивно исследуются. Пусть граф (D, U) соответствует схеме Дынкина A_n с естественной нумерацией вершин.



Рис. 2.1

Имеем

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

При распадении могут встретиться матрицы следующих видов(в зависимости от четности размерности).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще схему D_n с определяемой ниже нумерацией вершин.

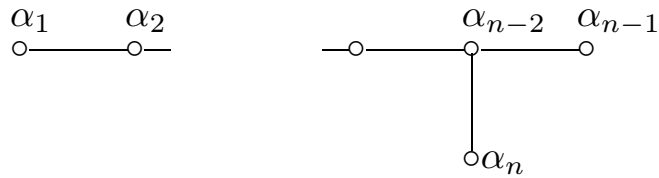


Рис. 2.2

Имеем

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При распадении получатся матрицы (если $n > 4$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наиболее простыми из перечисленных матриц являются матрицы вида

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие им адические преобразования наряду со интегральными автоморфизмами над ними и будут рассматриваться (см. [20] и [69]). Попутно некоторая информация будет получена и о других сериях матриц. Обозначим через $P_n(t)$ характеристический полином матрицы

$A_n; P_n(t) = \det(M_n - tI)$. Полиномы $P_n(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(t) = (2 - t)P_n(t) - P_{n-1}(t).$$

Имеем $P_1(t) = 2 - t$, $P_2(t) = t^2 - 4t + 3$. Пользуясь рекуррентным соотношением, легко проверить, что $P_n(t) = \frac{T_{n+1}(1-\frac{t}{2}) \times (1-\frac{t}{2}) - T_n(1-\frac{t}{2})}{t(\frac{t}{4}-1)}$, и что $P_n(t) = U_n(1 - \frac{t}{2})$, где U_n –полиномы Чебышева второго рода [84]. Из него же вытекает, что $P_n(t) = (\sqrt{t^2 - 4})^{-1}((\frac{2-t+\sqrt{t^2-4t}}{2})^{n+1} - (\frac{2-t-\sqrt{t^2-4t}}{2})^{n+1})$. Стало быть, если t_0 обращает P_n в 0 (вычислением $P_n(0)$ и $P_n(4)$ проверяется, что $t_0 \neq 0, 4$), то для некоторого целого s имеем $\frac{2-t+\sqrt{t^2-4t}}{2-t-\sqrt{t^2-4t}} = e^{2\pi is/(n+1)}$. Ясно, что подходит значение $t_0 = 2 - 2 \cos \frac{\pi s}{n+1}$. Отсюда ясно, что корнями такого вида для $1 \leq s \leq n$ исчерпываются корни $P_n(t)$.

Обозначим через $t_k^{(n)}$ корень $2 - 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}$. Очевидно,

$$0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} < 4$$

и $t^{(n)} < 1$ тогда и только тогда, когда $k < \frac{n+1}{3}$. Могут быть найдены и собственные векторы, отвечающие нулям $P_n(t)$. Собственному значению $t_k^{(n)}$ отвечает собственный вектор $X_k^n = (x_{k,j}^n)_{j=1}^n$ (см. также [85])

$$x_{k,j}^n = \sin j(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}), 1 \leq k, j \leq n.$$

Обозначим $\pi - \frac{k\pi}{n+1}$ через α_k^n . Пользуясь этой информацией, можно получить выражение для хороших последовательностей, соответствующих интегральным автоморфизмам. В обозначениях §5 имеем (для подстановки $\omega_{\mathcal{A}_{M_n}}$) $L_s^A = (M_n^s U_\phi, V_A) = (U_\phi, M_n^s V_A)$, поскольку матрица M_n – симметрическая. Предположим, что

$$V_A = \sum_{k=1}^n Y_k^A X_k^n.$$

Тогда $L_s^A = \sum_{k=1}^n (t_k^{(n)})^s Y_k^A(X_k^n, U_\phi)$, где $(X_k^n, U_\phi) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin j\alpha_k^n$. Мы будем пользоваться хорошей последовательностью $\{L_s^{nn}\}_{s=1}^\infty$. Для нахождения Y_k^{nn} надо решить систему линейных уравнений.

[illegible]

Воспользуемся общим выражением ([86]) для определителя вида

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \dots & \sin \alpha_m \\ \sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin 2\alpha_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin m\alpha_1 & \sin m\alpha_2 & \dots & \sin m\alpha_m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{[\frac{m}{2}]} 2^{m(m-1)} \times \prod_{s=1}^m \sin \alpha_s \times \prod_{m \geq i > k \geq 1} \sin \frac{\alpha_i + \alpha_k}{2} \times \prod_{m \geq i > k \geq 1} \sin \frac{\alpha_i - \alpha_k}{2} = \\ & (-1)^{[\frac{m}{2}]} 2^{\frac{m(m-1)}{2}} \times \prod_{s=1}^m \sin \alpha_s \times \prod_{m \geq i > k \geq 1} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_i). \end{aligned}$$

Получаем

$$Y_k^{nn} = (-1)^{n+k} D(\alpha_1^n, \dots, \widehat{\alpha_k^n}, \dots, \alpha_n^n) / D(\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n) = \\ 2^{-(n-1)} (\sin \alpha_k^n)^{-1} \prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq n}} (\cos \alpha_k^n - \cos \alpha_j^n)^{-1} = \frac{1}{\sin \alpha_k^n} \prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq n}} (t_k^{(n)} - t_j^{(n)})^{-1} = \\ \frac{1}{\sin \alpha_k^n P'_n(t_k^{(n)})}.$$

Таким образом,

$$L_s^{nn} = \sum_{k=1}^n (t_k^{(n)})^s \frac{1}{P'_n(t_k^{(n)})} \sum_{i=1}^n \phi(i) \frac{\sin i \alpha_k^n}{\sin \alpha_k^n}.$$

Линейную комбинацию полиномов Чебышева II рода от $(\frac{t_k^{(n)}-2}{2})$
 $\sum_{i=1}^n \phi(i) \frac{\sin i\alpha_k^n}{\sin \alpha_k^n}$ обозначим через $Q_\phi(t_k^{(n)})$, т.е.

$$L_s^{nn} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_\phi(t_k^{(n)})}{P'_n(t_k^{(n)})} (t_k^{(n)})^s.$$

Исследуем полиномы, неприводимые над полем рациональных чисел, на которые делится $P_n(t)$ (см. также [85] 1.2). Поскольку $\cos \frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2}(e^{\frac{k\pi i}{n+1}} + e^{-\frac{k\pi i}{n+1}})$, из неприводимости кругового многочлена $\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k, 2(n+1))=1}} ((t -$

$$e^{\frac{2k\pi i}{n+1}})(t - e^{-\frac{2k\pi i}{n+1}})) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k, 2(n+1))=1}} [2t(\frac{t^2 + 1}{2t} - \cos \frac{k\pi}{n+1})]$$

следует, что неприводимы над полем Q полиномы $q_n(t) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k, 2(n+1))=1}} [t - \cos \frac{k\pi}{n+1}] \in Q(t)$

и $\phi_n(t) = q_n(1 - \frac{t}{2})$. Далее, неприводимы над Q полиномы $q_n^*(t) = \prod_{\substack{1 \leq 2k \leq n \\ (k, n+1)=1}} (t - \cos \frac{2k\pi}{n+1})$ и $\phi_n^*(t) = q_n^*(1 - \frac{t}{2})$. Конечно, если $n+1$ – четно, то

$\phi_n^*(t) = \phi_{\frac{n-1}{2}}(t)$. Стало быть, неприводимые делители $P_n(t)$ это полиномы $\phi_{d-1}(t)$, если $d \mid (n+1)$ и $\phi_{d-1}^*(t)$, если $d \mid (n+1)$ и d – нечетно. Теперь, применяя наше представление рекуррентных последовательностей, можно дать ответ на вопрос о том, когда динамические системы вида $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$ имеют собственные числа вида $e^{2\pi i t}$ с иррациональным t (подстановки $\omega_{\mathcal{A}_{M_n}}$, очевидно, ОДД)

Итак, $L_s^{nn} = \sum_{k=1}^n g_{v_{\{L_s^{nn}\}}}(t_k^{(n)})(t_k^{(n)} P'_n(t_k^{(n)}))^{-1} (t_k^{(n)})^s$, ибо корни P_n – простые. Из последнего выражения для L_s^{nn} получаем

$$g_{v_{\{L_s^{nn}\}}}(t) = tQ_\phi(t).$$

Теперь мы должны выяснить, какие из $t_k^{(n)}$ могут быть корнями $Q_\phi(t)$. Прежде всего, заметим, что если n – четно, то нули $\phi_n^*(t)$ не могут быть

нулями $Q_\phi(t)$, а если n –нечетно, то нули $\phi_n(t)$ не могут быть нулями $Q_\phi(t)$:

$$Q_\phi(\alpha_n^n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin \frac{j\pi}{n+1} > 0.$$

В большинстве случаев этого достаточно, чтобы установить, что $Irr(L_s^{nn}) = \emptyset$. Имеются различные подходы к решению таких задач. В [15] приводится достаточное условие для случая, когда характеристический полином $G_{\mathcal{A}}$ – неприводим (оно может быть применено и в данной ситуации). В [64] описано применение теории Галуа в общем случае (неприводимый полином), в [20] приводятся подобные же аргументы для конкретной ситуации (те же полиномы P_n). Рассмотрим с этой точки зрения динамические системы $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$. Основной будет следующая стандартная

Лемма. Пусть $f(t) = (t-u_1) \dots (t-u_n) \in Q(t)$ – полином, неприводимый над $Q(t)$. Пусть $U_1 = \{u_{i_k}\}_{k=1}^s \subset \{u_j\}_{j=1}^n = U$. Если $g(t)$ – такой полином из $Q(t)$, что для некоторых $k_1, k_2, k_1 \neq k_2$, $g(u_{i_{k_1}}) = u_{i_{k_2}}$ и для каждого $u_j \in U \setminus U_1$ существует такое m_j , что $\underbrace{g(g(\dots(g(u_j))\dots))}_{m_j} \in U_1$, то для любого полинома $h(t) \in Q(t)$, такого, что $h(u_{i_1}) = h(u_{i_2}) = \dots = h(u_{i_s}) = H$, имеет место: $f \mid (h - H)$ и H –рационально.

Доказательство. Рассмотрим полином $g_1(t) = h(t) - h(g(t)) \in Q(t)$. Поскольку $g_1(u_{i_{k_1}}) = 0$, имеем $f \mid g_1$. Поэтому для любого u_j имеем $h(u_j) = h(g(u_j))$. Поэтому $h(u_1) = h(u_2) = \dots = h(u_n) = H$. Значит, $f \mid (h - H)$. Но имеет место тривиальный факт: если $(a_0 t^m + \dots a_m)(b_0 t^s + \dots + b_s) = c_0 t^{m+s} + \dots + c_{m+s} - H$, где все a_i, c_i –рациональны, то рациональны все b_i и H . Доказывается это утверждение индукцией по s . Лемма доказана.

Замечание 1. Если для данных n, ϕ существует такое k , что $|t_k^{(n)}|$ –целое рациональное число и $Q_\phi(t_k^{(n)}) \neq 0$ то $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$

Замечание 2. Если для динамической системы $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$ последова-

тельность $\{P_s\}_{s=1}^\infty$ -хорошая, то существуют такие целые $a_0 \dots a_{n-1}$, что $P_s = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_{s+i}^{nn}$.

Первое замечание очевидно, второе следует из того, что соотношение $\{L_{s+1}^{ii}\}_{i=1}^n = M_n \{L_s^{ii}\}_{i=1}^n$ (верное при каждом фиксированном $s \geq 0$) позволяет найти $\{a_j\}$ для каждой хорошей последовательности $\{L_s^{ii}\}_{i=1}^n$.

Рассмотрим конкретные значения n , вспоминая, что $t_k^{(n)} < 1$ тогда и только тогда, когда $k < \frac{n+1}{3}$.

$n = 2$. По замечанию 1 $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$.

$n = 3$. $Irr(\{L_s^{nn}\}) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\phi(1) = \phi(3)$.

$n = 4$. Рассмотрение $\phi_n^*(t)$ показывает, что при любой ϕ $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$.

$n = 5$. $Irr(\{L_s^{nn}\}) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\phi(3) = 2\phi(1) = 2\phi(5)$, $\phi(2) = \phi(4)$. Из замечания 2 и ранее изложенных результатов следует, что спектр динамической системы имеет соответствующую дискретную компоненту.

$n = 6$. Применим лемму к $\phi^*(t)$. В качестве $g(t)$ возьмем $2 - 2T_2(\frac{2-t}{2})$ (где T_2 -полином Чебышева). Имеем $t_6^{(6)} = g(t_4^{(6)})$, откуда следует, что $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$ (здесь $U_1 = \{t_4^{(6)}, t_6^{(6)}\}$).

$n = 7$. Можно при рассмотрении $\phi_7(t)$ использовать аргумент [20], можно – лемму с $g(t) = 2 - 2T_3(\frac{2-t}{2})$, чтобы получить $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$.

$n = 8$. Аналогично случаю $n = 6$.

$n = 9$. Корни $\phi_9(t)$ это $t_1^{(9)}, t_3^{(9)}, t_7^{(9)}$ и $t_9^{(9)}$. Аналогично случаю $n = 7$: $g(t_9^{(9)}) = t_7^{(9)}$ ($U_1 = \{t_7^{(9)}, t_9^{(9)}\}$).

$n > 9$. Применим рассуждение [20]. Если n нечетно, то берем $g(t) = 4 - t$ и $U_1 = \{t_k^{(n)} \mid \phi_n(t_k^{(n)}) = 0, k \geq \frac{n+1}{3}\}$. Если $4 \mid (n+1)$, то $g(t_{\frac{3+n}{2}}^{(n)}) = t_{\frac{n-1}{2}}^{(n)}$. Если $n \equiv 1(4)$, то $g(t_{\frac{5+n}{2}}^{(n)}) = t_{\frac{n-3}{2}}^{(n)}$. Если n – четно, снова берем $g(t) = 2 - 2T_2(\frac{2-t}{2})$. Тогда для некоторого l имеем $\frac{n+1}{3} \leq 2^l < \frac{5}{6}(n+1)$, $t_{2^l}^{(n)} \in U_1 = \{t_k^{(n)} \mid \phi_n^*(t_k^{(n)}) = 0, k \geq \frac{n+1}{3}\}$. Та-

ким образом, по лемме при $n > 9$ для любой ϕ имеем $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$. Рассмотрим еще один случай. Положим $n = 11$ и немного изменим множество U_1 . Рассмотрим в качестве матрицы, определяющей марковский компакт, матрицу $M_{11} - E_{11}$. К интегральным автоморфизмам над такой динамической системой применима изложенная выше теория, но для корней и делителей характеристического полинома P'_{11} имеем $t_k^{(11)} = 1 - 2 \cos(\frac{k\pi}{11})$, $\phi'_n(t) = q_n(\frac{1-t}{2})$, $\phi_n^* = q_n^*(\frac{1-t}{2})$. Корни $\phi'_{11}(t)$ это $t_1^{(11)}, t_5^{(11)}, t_7^{(11)}, t_{11}^{(11)}$, $U_1 = \{t_7^{(11)}, t_{11}^{(11)}\}$. Как легко видеть, ситуация отличается от ситуации, изучавшейся в [64], и рассмотренные выше методы здесь не дают $Irr(\{L_s^{nn}\}) = \emptyset$. Однако найти $Irr(\{L_s^{nn}\})$ можно. Рассмотрение полинома $g(t) = 1 - 2T_5(\frac{1-t}{2})$ и доказательство леммы (см. также [20]) показывают, что если для некоторого полинома $h \in Q(t)$ имеет место: $h(t_7^{(11)}) = h(t_{11}^{(11)})$, то $h(t_1^{(11)}) = h(t_5^{(11)})$, а потому (если предположить что $Irr(\{L_s^{nn}\}) \neq \emptyset$) для некоторого полинома h_1 верно: $h_1(\cos \frac{\pi}{12}) = h_1(\cos \frac{5\pi}{12})$. Пусть $h_1 = aT_1 + bT_2 + cT_3$, где a, b, c – целые рациональные, а T_i – полиномы Чебышева ($T_j(\cos x) = \cos jx$). Заметим, что при $i = 2$ и при $i = 3$ имеем $T_i(\cos \frac{\pi}{12}) = -T_i(\cos \frac{5\pi}{12})$. Поэтому, если $h_1(\cos \frac{\pi}{12}) = h_1(\cos \frac{5\pi}{12})$, то $aT_1(\cos \frac{5\pi}{12}) = 2bT_2(\cos \frac{\pi}{12}) + 2cT_3(\cos \frac{\pi}{12}) + hT_1(\cos \frac{\pi}{12})$. Заметим также, что $T_4(\cos \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$, т.е. в $Q(x)$ $(T_4 - 1/2) \mid (aT_5 - 2bT_3 - 2cT_2 - aT_1)$, или $(8x^4 - 8x^2 + 0.5)(dx - c) = a(16x^5 - 20x^3 + 5x) - ax - 2c(4x^3 - 3x) - 2b(2x^2 - 1)$. Сравнивая коэффициенты в правой и левой части, убеждаемся, что $e = 0$, далее, $b = 0, d = 2a, a(4x^3 - 3x) = -2c(4x^3 - 3x)$. То есть, с точностью до константы, единственное решение есть $h = -2T_1 + T_3$. То есть в спектре имеется "иррациональная" дискретная компонента, если для всех i , для которых $\phi'_{11}(t_i^{(11)}) \neq 0$ имеет место $\sum_{j=1}^{11} \phi(j) \sin(j\alpha_i^{11}) = 0$.

Вернемся теперь к последовательности матриц M_n и рассмотрим вопрос о собственных числах вида $e^{2\pi it}$, где t – рационально. Утверждение §5 верно и для интегральных автоморфизмов над подстановочными ди-

намическими системами, а из замечания 2 настоящего § следует, что достаточно ограничиться хорошей последовательностью $\{L_s^{nn}\}$. Верно и обратное утверждение.

Факт 1. Пусть m, k –целые, $(m, k) = 1, m/k \in Rat(\{L_s^{nn}\})$ тогда и только тогда, когда для всех s , начиная с некоторого s_0 имеет место $k = l.c.d.(L_s^{11}, L_s^{22}, \dots, L_s^{nn})$.

Последнее же условие выполняется или нет в зависимости от свойств наших векторов при малых s и от коэффициентов $P_n(t)$. Имеет место следующий тривиальный

Факт 2. Пусть $f(t) = t^N + a_1 t^{N-1} + \dots + a_{n-1} t + a_N$ – такой полином с целыми коэффициентами, что для некоторой целочисленной матрицы A $f(A) = 0$. Пусть, далее, u, v –такие натуральные числа, что $u \nmid a_{N-v-1}$, и $u \mid a_{N-i}, 0 \leq i < v + 1$. Если для некоторого целочисленного вектора b $b \mid A^s b$, где s – натуральное, то $u \mid A^v b$.

Могут представиться два случая. 1) n – чётно. Применительно к нашим целям рассмотрим новый базис (вполне естественный и стандартный прием при получении полиномиальных тождеств и в иных ситуациях)

$$(e_1, \dots, e_{n/2}, e'_1, \dots, e'_{n/2}) : e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0), \\ e'_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0, \underset{n+1-j}{1}, 0 \dots 0).$$

Матрица в этом базисе выглядит, как легко видеть, следующим образом:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & \mathbb{O} & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ \hline & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & \mathbb{O} & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & & & & & & 1 & 3 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \frac{n}{2} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \frac{n}{2}.$$

Мы получаем, что $P_n(t) = (P_{n/2}(t) - P_{n/2-1}(t))(P_{n/2}(t) + P_{n/2-1}(t))$. Это тождество может быть доказано тригонометрически наряду с другими тождествами, связанными с U_n (как отмечено в [84]). Обозначим через A^* матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \mathbb{O} \\ & \mathbb{O} & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \mathbb{O} \\ & & & & & & & \mathbb{O} \end{array} \right) * A'.$$

Характеристический полином матрицы $A^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

есть $P_{n/2}(t) - P_{n/2-1}(t) = \dots - \frac{(n/2)(n/2+1)}{2}t + 1$, поэтому если для како-

го либо вектора $c = \sum_{i=1}^{n/2} a_i e_i$, то имеем, обозначая компоненты $A^{*l}c$ через $a_i^{(l)}$, $Rat(\{a_i^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}) = Z$ при каждом фиксированном i (это следует из факта 1 и факта 2). Рассмотрим, пользуясь этим, действие A' . Пусть d –произвольный вектор вида $\sum_{i=1}^{n/2} b_i e'_i$. Утверждается, что для последовательности векторов $A'^l(c + d)$ (в исходном базисе) имеет место аналогичное обстоятельство, которое, вследствие фактов 1 и 2, может быть записано как $Rat(\{A'^l(c + d)\}) = Z$, где левая часть имеет очевидный смысл. В самом деле, по индукции легко доказать, что при каждом l $A'^l(c + d) - A^{*l}(c) \in Lin(\{e'_i\})$. Это значит, что в исходном базисе верно:

$$A^l(c + d) = (a_1^{(l)} + D_1^{(l)}, a_2^{(l)} + D_2^{(l)}, \dots, a_{n/2}^{(l)} + D_{n/2}^{(l)}, D_{n/2}^{(l)}, D_{n/2-1}^{(l)}, \dots, D_1^{(l)})$$

,где $D_i^{(l)}$ –целые. Если бы все компоненты этого вектора имели НОД, не равный 1 , то на него делились бы все $D_i^{(l)}$, а, следовательно, и все $a_1^{(l)}$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, имеет место

Факт 3. Если n –четно и $\phi : Z_* \rightarrow N$ таково, что для некоторых целых $a_1, \dots, a_{n/2}, d_1, \dots, d_{n/2}$, $(a_1, \dots, a_{n/2}) = 1$ верно $\{\phi(1), \dots, \phi(n)\} = \{a_1 + d_1, \dots, a_{n/2} + d_{n/2}, d_{n/2}, \dots, d_2, d_1\}$, то динамическая система $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$ не имеет собственных значений вида $e^{2\pi i \chi}$, где χ – рационально.

Могут быть рассмотрены и иные классы случаев.

Факт 3'. Если n –четно и $\phi : Z_* \rightarrow N$ таково, что для некоторых $a_1, \dots, a_{n/2}, d_1, \dots, d_{n/2}$, $(a_1, \dots, a_{n/2}) = r_1$, $(d_1, \dots, d_{n/2}) = r_2$, $(r_1, r_2) = 1$, $(r_1, n + 1) = 1$ имеем $\{\phi(1) \dots, \phi(n)\} = \{a_1 + d_1, \dots, a_{n/2} + d_{n/2}, d_{n/2}, \dots, d_2, d_1\}$, то динамическая система $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$ не имеет собственных значений вида $e^{2\pi i \chi}$, где χ – рационально.

Доказательство. Поскольку значения $a_1^{(l)}, \dots, a_{n/2}^{(l)}$ определяются значениями $a_1, \dots, a_{n/2}$ и числом l , если для какого то l $(a_1^{(l)} + d_1^{(l)}, \dots, a_{n/2}^{(l)} + d_{n/2}^{(l)}, d_{n/2}^{(l)}, \dots, d_2^{(l)}, d_1^{(l)}) = d > 1$, то $d \mid r_1$. Однако по индукции легко показать, что $\{d^{(l)}, \dots, d_{n/2}^{(l)}\} \equiv (2M_{n/2} - A^{**})^l \{d_1, \dots, d_{n/2}\} \pmod{r_1}$.

Если d не является общим делителем на $l - 1$ итерации и $d_1 \equiv c \pmod{d}$, то из делимости $d_i^{(l)}$ на d можно заключить, что $d_2^{(l-1)} \equiv -2c \pmod{d}, \dots, d_k^{(l-1)} \equiv ck(-1)^{k+1}(d), \dots, d_{n/2}^{l-1} \equiv c(n/2)(-1)^{n/2+1} \pmod{d}$. Поэтому $d \mid (3d_{n/2}^{(l-1)} + d_{n/2-1}^{(l-1)})$ т.е. $d \mid (n+1)c$, и, стало быть, либо $d \mid c$, либо мы получаем противоречие с условием.

2) n - нечетно $n = 2k + 1$. Рассмотрим базис $(e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k+1})$

$$e_j = (0, \dots, 0, \frac{1}{j}, 0, \dots, 0), e'_j = \begin{cases} (0, \dots, \frac{1}{j}, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1-j}, 0 \dots 0), j < k+1 \\ (0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, 0, \dots, 0), j = k+1 \end{cases}$$

•

Матрица в этом базисе выглядит как

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \mathbb{O} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \mathbb{O} & \\ & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & & \\ \hline & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \mathbb{O} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbb{O} & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 & 2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} k \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} k+1 \quad .$$

Отсюда (равно как из формул (37),(38), 10.11 [84]) вытекает, что $P_n(t) = P_k(t)(P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t))$. Методом, аналогичным методу доказательства Факта 3, можно доказать, что если $\{a_1, \dots, a_k\}$ —такой вектор, что для любого l компоненты вектора $M_k^l(\{a_1, \dots, a_k\})$ имеют наибольший общий делитель 1 и $\{d_1, \dots, d_{k+1}\}$ - произвольный целочисленный вектор, то для любого l компоненты вектора $M_n^l(\{a_1 + d_1, \dots, a_k +$

$d_k, d_{k+1}, \dots, d_2, d_1\}$) имеют наибольший общий делитель 1, так что если $\{\phi(1), \dots, \phi(n)\} = \{a_1 + d_1, \dots, a_k + d_k, d_{k+1}, \dots, d_2, d_1\}$, то динамическая система $T_{\mathcal{A}_{M_n}, f_\phi}$ не имеет собственных значений вида $e^{2\pi i\chi}$, где χ - рационально.

Рассмотрим теперь как для четных, так и для нечетных n случаи $\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\} \in \text{Lin}\{e'_j\}$. Соответствующие делители P_n ($P_{n/2}(t) + P_{n/2-1}(t)$ или $P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t)$) в широком классе случаев имеют вид $t^n + dg(t)$, что гарантирует независимо от ϕ наличие в спектре d -адической дискретной компоненты.

Для вычисления коэффициентов этих полиномов воспользуемся приведенным выражением их через полиномы Чебышева и рекуррентным соотношением для полиномов Чебышева. Получим для любого натурального k : $P_k(t) + P_{k-1}(t) = -(2/t)(T_{k+1}(1 - \frac{t}{2}) - T_k(1 - \frac{t}{2}))$, $P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t) = 2T_{k+1}(1 - \frac{t}{2})$. Известно выражение полиномов Чебышева через гипергеометрическую функцию $T_m(x) = F(m, -m, 1/2, \frac{1-x}{2})$. Т.е. $T_m(1 - t/2) = F(m, -m, 1/2, \frac{t}{4}) = 1 + \frac{m}{2} \sum_{s=1}^m \frac{1}{s} \binom{2s-1}{m+s-1} (-t)^s$. Имеем, далее, $P_k(t) + P_{k-1}(t) = t^k(-1)^k + \sum_{s=1}^k (-t)^{s-1} (\frac{k+1}{s} \binom{2s-1}{k+s} - \frac{k}{s} \binom{2s-1}{k+s-1})$. Для многих значений k все коэффициенты делятся на $2k+1$. Но, например, для $k=10$ это не так. Рассмотрим полином $P_{k+1}(t) - P_{k-1}(t) = 2 + (1+k) \sum_{s=1}^m \frac{1}{s} \binom{2s-1}{k+s} (-t)^s$. Если $k+1 \neq 2^l (l=1, 2, \dots)$, то среди коэффициентов полинома (не при высшей степени) есть нечетные. Более того, если 2^l - наименьшая степень 2, большая, чем $k+1$, то существует такое $s, k+s < 2^l, s < k+1$, что $\frac{k+1}{s} \binom{2s-1}{k+s}$ нечетно. Утверждение легко проверить для малых l и всех соответствующих k . Если теперь $2^{l-1} < k+1 < 2^l, k+s < 2^l$ и $\frac{k+1}{s} \binom{2s-1}{k+s}$ нечетно, то $\frac{2^l+k+1}{s} \binom{2s-1}{2^l+k+s}$ тоже нечетно (у двух данных выражений совпадают степени 2 во всех сомножителях числителя и знаменателя). Возьмем теперь

вектор $U = (0, \dots, 0, \underset{k+1}{1}, 0, \dots, 0)$. Если t_s - последовательность $2k+1$ -ых компонент векторов $M_{2k+1}^s U$, то $t_1 = \dots = t_{k-1} = 0, t_k = 1$, а поскольку последовательность рекуррентна и мы выяснили, что у полинома есть нечетные коэффициенты, возможность наличия 2-адической компоненты в спектре (а других рациональных быть не может, поскольку свободный член полинома -2) исключена и для построения слабого перемешивания мы (сопоставив с информацией об "иррациональных" собственных значениях) должны в качестве $(\{\phi(1), \dots, \phi(2k+1)\})$ взять $M_{2k+1}^s U$ с достаточно большим s (чтобы все компоненты были положительны)

Если же $k+1 = 2^l$, то все коэффициенты, кроме старшего, четны и для любой ϕ 2-адическая компонента гарантирована.

При $n = 2$ и $n = 3$ подстановки $\omega_{A_{M_n}}$ имеют чисто дискретный спектр. $A_{M_2} = \{112, 122\}$. 1 эквивалентно 2, поэтому $\Delta_C = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2\}$ и, очевидно, $\Delta \cup \Delta_C = \Delta_C$. Собственные числа – все числа вида $\exp(2\pi ki/3^n)$, где k, n – натуральные.

$A_{M_3} = \{112, 1223, 233\}$. 1 эквивалентна 3. В [20] были проделаны довольно громоздкие вычисления для построения $\Delta \cup \Delta_c$. Впоследствии эти вычисления осуществил компьютер *IBM PC* по программе, написанной на языке Паскаль. Результат вычислений – спектр динамической системы чисто дискретен. Группа собственных чисел вычисляется с помощью результатов, изложенных в §4. Она суть $\{\exp(2\pi ir \times P(2 + \sqrt{2})) \mid r \text{ – двоично-рациональное, } P \text{ – полином с целыми коэффициентами}\} = \{\exp(2\pi i(r_1 + r_2\sqrt{2})), r_1, r_2 \text{ – двоично-рациональные числа}\}$.

Алгоритм состоял в выделении (с фиксацией класса $C = \{2\}$) C – первичных пар базовых слов применениями подстановки к уже построенным парам и разбиениями слов на части с надлежащими свойствами. Разумеется, были отлажены и другие сервисные программы работы с допустимыми последовательностями, имеющими иерархическую структуру.

С помощью компьютерного вычисления удалось подметить закономерность, позволившую доказать, что разбиение на классы эквивалентности является необходимым. Для подстановок с постоянной длиной слова такое обстоятельство тоже часто имеет место и в некоторых случаях доказательство без компьютера оказывается громоздким, но может представлять интерес, например, для изучения централизаторов интегральных автоморфизмов A именно, был доказан

Факт 4. Пусть $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l(12) = a_1^l \dots a_{s(l)}^l, \omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l(21) = b_1^l \dots b_{s(l)}^l$. Тогда, если для произвольного слова A и произвольного символа b через $|A|_b$ обозначить число вхождений символа b в слово A , то для любого $i, \min\{r \mid b_r^l \neq a_r^l\} \leq i < s(l)$ имеем: если $|a_1^l \dots a_i^l|_2 = |b_1^l \dots b_i^l|_2$, то $|a_1^l \dots a_i^l|_1 > |b_1^l \dots b_i^l|_1$.

Имеют место два обстоятельства: 1) очевидно, что $t(l) = \min\{r \mid b_r^l \neq a_r^l\} \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, 2) если $|a_1^l \dots a_i^l|_2 \neq |b_1^l \dots b_i^l|_2$, то необязательно $|a_1^l \dots a_i^l|_1 > |b_1^l \dots b_i^l|_1$: можно взять, например, $l = 2, i = 18$. Поэтому рассмотрение (индукцией по l), которое позволило бы изучить все возможные варианты, оказалось бы до некоторой степени громоздким.

Опишем метод доказательства с помощью компьютера (могущий использоваться и для общего случая). При реализации на компьютере алгоритма с классами эквивалентности были получены 17 пар базовых слов:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (12112, 22311), (x_2, y_2) = (12, 21), \\ (x_3, y_3) &= (23, 12), (x_4, y_4) = (1212, 2231), (x_5, y_5) = (3112112, 2323311), \\ (x_6, y_6) &= (311212, 232331), (x_7, y_7) = (3122, 2323), (x_8, y_8) = (32, 23), \\ (x_9, y_9) &= (33112112, 23323311), (x_{10}, y_{10}) = (3311212, 2332331), \\ (x_{11}, y_{11}) &= (33122, 23323), (x_{12}, y_{12}) = (22323, 12122), \\ (x_{13}, y_{13}) &= (31121121223112112, 23233122323323311), \\ (x_{14}, y_{14}) &= (3112112122311212, 2323312232332331), \\ (x_{15}, y_{15}) &= (331121121223112112, 233233122323323311), \end{aligned}$$

$$(x_{16}, y_{16}) = (33112112122311212, 23323312232332331),$$

$(x_{17}, y_{17}) = (3112122312, 2312232331)$. Для этих пар выполнено следующее:

$$\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}((x_i, y_i)) = (u_1^i v_1^i \dots u_{s(i)}^i v_{s(i)}^i u_{s(i)+1}^i, u_1^i v_1'^i \dots u_{s(i)}^i v_{s(i)}'^i u_{s(i)+1}^i),$$

где каждая пара $(v_j^i, v_j'^i)$ это либо (x_r, y_r) , либо (y_r, x_r) для какого либо r , а некоторые u_j^i , возможно, пусты (это представление также получено компьютером). Следовательно, при $l > 1$: $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l((x_i, y_i)) = (u_1^{i,l} v_1^{i,l} \dots u_{s(i)}^{i,l} v_{s(i)}^{i,l} u_{s(i)+1}^{i,l}, u_1^{i,l} v_1'^{i,l} \dots u_{s(i)}^{i,l} v_{s(i)}'^{i,l} u_{s(i)+1}^{i,l})$, где $u_j^{i,l} = \omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^{l-1}(u_j^i)$, $v_j^{i,l} = \omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^{l-1}(v_j^i)$, $v_j'^{i,l} = \omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^{l-1}(v_j'^i)$.

Приведем список для $l = 1$:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &\rightarrow (u_1^{1,1} x_4 u_2^{1,1} x_5 x_3, u_1^{1,1} y_4 u_2^{1,1} y_5 y_3), \\ (x_2, y_2) &\rightarrow (u_1^{2,1} x_4 x_3, u_1^{2,1} y_4 y_3), \\ (x_3, y_3) &\rightarrow (u_1^{3,1} x_{12} u_2^{3,1}, u_1^{3,1} y_{12} u_2^{3,1}), \\ (x_4, y_4) &\rightarrow (u_1^{4,1} x_4 u_2^{4,1} x_6 x_3, u_1^{4,1} y_4 u_2^{4,1} y_6 y_3), \\ (x_5, y_5) &\rightarrow (x_3 x_{13} x_2 x_3, y_3 y_{13} y_2 y_3), \\ (x_6, y_6) &\rightarrow (x_3 x_{14} x_3, y_3 y_{14} y_3), \\ (x_7, y_7) &\rightarrow (x_3 x_6 u_1^{7,1} x_6 u_2^{7,1} x_7, y_3 y_6 u_1^{7,1} y_6 u_2^{7,1} y_7), \\ (x_8, y_8) &\rightarrow (x_3 x_7 u_1^{8,1}, y_3 y_7 u_1^{8,1} y_1), \\ (x_9, y_9) &\rightarrow (x_3 x_8 x_{15} x_2 x_3, y_3 y_8 y_{15} y_2 y_3), \\ (x_{10}, y_{10}) &\rightarrow (x_3 x_8 x_{16} x_3, y_3 y_8 y_{16} y_3), \\ (x_{11}, y_{11}) &\rightarrow (x_3 x_8 x_{10} u_1^{11,1} x_7 u_2^{11,1}, y_3 y_8 y_{10} u_1^{11,1} y_7 u_2^{11,1}), \\ (x_{12}, y_{12}) &\rightarrow (u_1^{12,1} y_4 u_2^{12,1} y_6 u_3^{12,1} y_7 u_4^{12,1}, \\ &u_1^{12,1} x_4 u_2^{12,1} x_6 u_3^{12,1} x_7 u_4^{12,1}), \\ (x_{13}, y_{13}) &\rightarrow (x_3 x_{13} x_2 u_1^{13,1} x_{17} u_2^{13,1} x_8 x_{15} x_2 x_3, \\ &y_3 y_{13} y_2 u_1^{13,1} y_{17} u_2^{13,1} y_8 y_{15} y_2 y_3), \\ (x_{14}, y_{14}) &\rightarrow (x_3 x_{13} x_2 u_1^{14,1} x_{17} u_2^{14,1} x_8 x_{15} x_2 x_3, \\ &y_3 y_{13} y_2 u_1^{14,1} y_{17} u_2^{14,1} y_8 y_{15} y_2 y_3), \\ (x_{15}, y_{15}) &\rightarrow (x_3 x_8 x_{15} x_2 u_1^{15,1} x_{17} u_2^{15,1} x_8 x_{15} x_2 x_3, \\ &y_3 y_8 y_{15} y_2 u_1^{15,1} y_{17} u_2^{15,1} y_8 y_{15} y_2 y_3), \\ (x_{16}, y_{16}) &\rightarrow (x_3 x_8 x_{15} x_2 u_1^{16,1} x_{17} u_2^{16,1} x_8 x_{16} x_3, y_3 y_8 y_{15} y_2 u_1^{16,1} y_{17} u_2^{16,1} y_8 y_{16} y_3), \end{aligned}$$

$$(x_{17}, y_{17}) \rightarrow (x_3 x_5 x_2 u_1^{17,1} x_{17} u_2^{17,1} x_2 x_8 x_{10} x_3, y_3 y_5 y_2 u_1^{17,1} y_{17} u_2^{17,1} y_2 y_8 y_{10} y_3). \blacksquare$$

С другой стороны можно написать и иное представление для $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l((x_i, y_i))$: $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l((x_i, y_i)) = (u_{l,1}^i v_{l,1}^i \dots u_{l,s(i,l)}^i v_{l,s(i,l)}^i u_{l,s(i,l)+1}^i, u_{l,1}^i v_{l,1}'^i \dots u_{l,s(i,l)}^i v_{l,s(i,l)}'^i u_{l,s(i,l)+1}^i)$, где каждая пара $(v_{l,k}^i, v_{l,k}'^i) \in \{(x_i, y_i)\} \cup \{(y_i, x_i)\}$, то есть аналог первого, но с заменой подстановки $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}$ на подстановку $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l$, для которой тоже пригодны эти пары базовых слов. Теперь рекурсивно на множестве пар $(i, l), 1 \leq i \leq 17, l = 0, 1, 2, \dots$, определим функции $f_1(j, l), f_2(j, l), f_3(j, l)$ по следующему правилу : при $l = 0$ $f_1(j, l) = f_2(j, l) = f_3(j, l) = |x_j|_3 - |y_j|_3$, для $l > 0$ определяем их следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(j, l) &= |\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l x_j|_3 - |\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l y_j|_3, \\ f_2(j, l) &= \min(0, \min_{1 \leq k \leq s(j,l)} (|u_{l,1}^j v_{l,1}^j \dots u_{l,k}^j v_{l,k}^j|_3 - \\ &|u_{l,1}^j v_{l,1}'^j \dots u_{l,k}^j v_{l,k}'^j|_3) = \min(0, \min_{1 \leq k \leq s(j,l)} \sigma_k^{j,l}), \\ f_3(j, l) &= \max(0, \max_{1 \leq k \leq s(j,l)} (|u_{l,1}^j v_{l,1}^j \dots u_{l,k}^j v_{l,k}^j|_3 - \\ &|u_{l,1}^j v_{l,1}'^j \dots u_{l,k}^j v_{l,k}'^j|_3) = \max(0, \max_{1 \leq k \leq s(j,l)} \sigma_k^{j,l}). \end{aligned}$$

Вычисление функций осуществлялось на основе рекуррентного соотношения, описываемого ниже. Пусть для $i = 1, 2, 3$ $\beta_0^{l,j} = 0, \beta_k^{l,j} = \sum_{p=1}^k \epsilon_p^j f_1(r_p, l-1)$, где $1 \leq k \leq s(j)$, $\epsilon_p^j = \pm 1, \epsilon_p^j = 1$ если $(v_p^j, v_p'^j) = (x_r, y_r)$ для некоторого $r = r_p^j$ (неоднозначности исключены). Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_1(j, l) &= \beta_{s(j)}^{l,j}, \\ f_2(j, l) &= \min_{1 \leq k \leq s(j)} (\beta_{k-1}^{l,j} + \epsilon_k^j f_{2.5-\epsilon_k^j/2}(r_k^j, l-1)), \\ f_3(j, l) &= \max_{1 \leq k \leq s(j)} (\beta_{k-1}^{l,j} + \epsilon_k^j f_{2.5+\epsilon_k^j/2}(r_k^j, l-1)) \end{aligned}$$

, где $(v_k^j, v_k'^j) = (x_{r_k^j}, y_{r_k^j})$ или $(v_k^j, v_k'^j) = (y_{r_k^j}, x_{r_k^j})$.

Результаты вычислений выявили следующую закономерность:

1	2	3	4	5	6	7	8
-2^l	0	2^l	-2^l	-2^{l+1}	-2^{l+1}	-2^l	0
$1 - 2^{l+1}$	$1 - 2^l$	0	$1 - 2^{l+1}$	$1 - 3 \cdot 2^l$	$1 - 3 \cdot 2^l$	-2^l	0
0	0	2^l	0	$2^l - 1$	$2^l - 1$	$2^l - 1$	$2^l - 1$
9	10	11	12	13	14	15	
-2^{l+1}	-2^{l+1}	-2^l	2^{l+1}	$-3 \cdot 2^{l+1}$	$-3 \cdot 2^{l+1}$	$-3 \cdot 2^{l+1}$	
$1 - 3 \cdot 2^l$	$1 - 3 \cdot 2^l$	-2^l	0	$1 - 7 \cdot 2^l$	$1 - 7 \cdot 2^l$	$1 - 7 \cdot 2^l$	
$2^l - 1$	$2^l - 1$	$2^l - 1$	2^{l+1}	$2^l - 1$	$2^l - 1$	$2^l - 1$	
		16	17				
		$-3 \cdot 2^{l+1}$	-2^{l+1}				
		$1 - 7 \cdot 2^l$	$1 - 3 \cdot 2^l$				
		$2^l - 1$	$2^l - 1$				

Однако проверить эту закономерность, пользуясь индукционным рассуждением, очень несложно, ибо сами функции определены рекурсивно, более того, значения $f_i(j, l + 1)$, $1 \leq j \leq 17$, $i = 1, 2, 3$ зависят лишь от значений $f_i(j, l)$, $i = 1, 2, 3$, $1 \leq j \leq 17$. Из вида рекуррентных соотношений (сравниваются $s(j)$ величин вида $c \cdot 2^l + d$, где c, d ограничены) ясно, что если наша закономерность соблюдена для какого либо большого l_0 и для $l_0 + 1$, то она соблюдена для любых больших l и $l + 1$ (в чем, собственно, и состоит индукционный переход). Опуская составляющие U_j^i , имеем $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}((12, 21)) = \omega_{\mathcal{A}_{M_3}}((x_2, y_2)) \approx (x_4 x_3, y_4 y_3)$. Но

$$\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^2((x_4 x_3, y_4 y_3)) \approx (x_4 x_6 x_3 x_3 x_{14} x_3 x_{12} y_4 y_6 y_7, y_4 y_6 y_3 y_3 y_{14} y_3 y_{12} x_4 x_6 x_7).$$

Теперь уже утверждение факта 4 получается непосредственным применением таблицы (можно тоже с помощью компьютера) после проверки (по индукции с помощью таблицы и формул для $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}((x_i, y_i))$) того, что если обозначить для любых l, q $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l(x_q) = a_1^{l,q} \dots a_{s(l,q)}^{l,q}$, $\omega_{\mathcal{A}_{M_3}}^l(y_q) = b_1^{l,q} \dots b_{s(l,q)}^{l,q}$, то при $i \geq \min\{r \mid a_r^{l,4} \neq b_r^{l,4}\}$ $|a_1^{l,4} \dots a_i^{l,4}|_1 > |b_1^{l,4} \dots b_i^{l,4}|_1$, при $i \leq \max\{r \mid a_r^{l,7} \neq b_r^{l,7}\}$ $|a_i^{l,7} \dots a_{s(l,7)}^{l,7}|_1 > |b_i^{l,7} \dots b_{s(l,7)}^{l,7}|_1$.

ГЛАВА 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СДВИГАМИ И АДИЧЕСКИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

§1. Введение.

В соответствии с известным результатом любой апериодический автоморфизм пространства Лебега с вероятностной мерой имеет не более чем счетную образующую. Это значит, что если рассмотреть алфавит $Z' = \{z_1, z_2, \dots\}$, пространство $X_{Z'} = \prod Z'_i, Z'_i = Z', -\infty < i < \infty$ со слабой топологией и сдвиг $T : X_{Z'} \rightarrow X_{Z'}, T(\dots a_{-i}, \dots, a_0, \dots, a_i \dots) = \dots a'_{-i}, \dots a'_0, \dots, a'_i \dots$, где $a'_i = a_{i+1}, -\infty < i < \infty$, то для любого апериодического автоморфизма пространства Лебега существует такая борелевская мера μ в $X_{Z'}$, инвариантная относительно T , что динамическая система $(X_{Z'}, \mu, T)$ метрически изоморфна этому изоморфизму.

Конечные пространства состояний марковского компакта тоже могут быть заменены на не более чем счетные. Дадим определение соответствующего объекта, называемого марковским множеством [14].

Пусть $D_i = \{d_j^i\}_{j=1}^{|D_i|}, i = 1, 2, \dots$ -пространства состояний, $|D_i| \leq \infty$, $M_i = (m_{jk}^i)_{\substack{j=1, \dots, |D_i| \\ k=1, \dots, |D_{i+1}|}}$ - матрицы, все элементы которых суть 1 или 0. Мы говорим, что набор $\{(D_i, M_i)\}_{i=1}^\infty$ определяет марковское множество, если для любых $i > 1, 1 \leq k \leq |D_i|$ множество $\{j \mid m_{j,k}^i = 1\}$ конечно. Марковским множеством в этом случае называется аналогичное марковскому компакту множество Y путей, т.е. последовательностей $\{d_{j_1}^1, \dots\}, d_{j_i}^i \in D_i, m_{j_i j_{i+1}}^i = 1, i = 1, 2, \dots$

Очень многие из определений гл.1 применимы для марковских множеств. Можно предложить и определение минимальности, фактически отличное от определения для марковского компакта. Марковское множество $Y = Y(\{(D_i, M_i)\})$ называется минимальным, если для любых $i, k, 1 \leq k \leq \#D_i$ существует такое $N(i, k)$, что для любых $i_1, k_1 : i_1 > N(i, k), 1 \leq k_1 \leq \#D_{i_1}$ существует последовательность

$d_{j_i}^i d_{j_{i+1}}^{i+1} \dots d_{j_{i_1}}^{i_1}, j_i = k, j_{i_1} = k_1, m_{j_r j_{r+1}} = 1, i \leq r < i_1$ (в отличие от марковского компакта при фиксированном i единого $N(i, k)$ для всех k может не существовать).

Определения упорядочения, функций B, L , множеств $E(X) \subset C(\{x_1, \dots, x_l\})$ переносятся без изменений, так же как определение упорядочения, K_1, K_2 , адического преобразования и центральной меры.

От марковского множества Y мы снова будем требовать, чтобы не существовало таких путей $\{x_1, x_2, \dots\} \in Y$, что $L(x_i) = 1$ при $i > I$ для некоторого I . Требование $\lim_{i \rightarrow \infty} \min_{x \in D_i} B(x) = \infty$, на сей раз не эквивалентное, предъявляться не будет.

Таким образом мы имеем (на конечном и счетном уровнях) два способа символического представления динамических систем. В соответствии с результатами А.М.Вершика [1], если $T : X \rightarrow X$ -эргодический автоморфизм пространства Лебега (X, μ) и $\mathfrak{G}$ -алгебра измеримых множеств, удовлетворяющая некоторым специальным требованиям, то существуют такой минимальный марковский компакт Y с адическим преобразованием U и центральной мерой ν и такой изоморфизм пространств Лебега $\tau : (Y, \nu) \rightarrow (X, \mu)$, что $\tau \circ T = U \circ \tau \pmod{0}$ и $\tau^{-1}\mathfrak{G}$ совпадает $\pmod{0}$ с алгеброй цилиндрических множеств марковского компакта. Впоследствии был доказан топологический вариант теоремы о существовании марковского компакта с такими свойствами [2].

Ниже будет установлена связь между двумя символическими представлениями. Прежде всего, проанализировав доказательство теоремы о существовании не более чем счетной образующей для эргодического автоморфизма T [50], мы покажем (предполагая для простоты, что для любого элемента инвариантной счетной всюду плотной алгебры $\mathfrak{G}$ D существует такое k , что $\cup_{i=1}^k T^i D = X$) мы убедимся в том, что образующая ξ может быть выбрана так, что $\mathfrak{G}$ окажется прообразом алгебры, порожд-

даемой цилиндрическими множествами в $X_{Z'}$ и их дополнениями, или, иначе, $\text{mod } 0$, прообразом объединения алгебр, порожденных элементами $\bigvee_{i=-k}^{i=k} T^i \xi$ и их дополнениями.

В соответствии с методом [50] выбираем последовательность множеств C_n , требуя дополнительно, чтобы $C_n \in \mathfrak{G}$, $C_1 = \emptyset$, $C_n \subset C_{n+1}$, $\mu(C_{n+1} \setminus C_n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup C_n = X$. Для каждого n существует такое K_n , что $\bigcup_{i=1}^{K_n} T^i(C_{n+1} \setminus C_n) = X \pmod{0}$. Выбираем последовательность α_n конечных измеримых разбиений, порождающих $\mathfrak{G}$ и таких, что $\bigvee_1^\infty \alpha_n = \epsilon$. Пусть $\gamma_n = \bigvee_{s=1}^{K_n} (T^{s-1} \alpha_n \cap (C_{n+1} \setminus C_n))$. Тогда очевидно, что $\bigvee_{s=1}^\infty T^{-s} \gamma_n \geq \bigvee_{s=1}^{K_n} T^{-s} \gamma_n \geq \alpha_n$ и $\xi = \bigvee_{i=1}^\infty \gamma_n$ -образующая T . Пронумеруем элементы каждого из конечных разбиений $\gamma_n B_1^n, \dots, B_{d_n}^n, B_1^n = C_n \cup (X \setminus C_{n+1})$. Поскольку для множеств $\bigcap_{n=k}^\infty C_n = C_k$ имеем $\bigcup_n \bigcap_{n=k}^\infty C_n = X \pmod{0}$, ясно, что все элементы не более чем счетного разбиения ξ это множества вида $C_k \cap B_{i_{k-1}}^{k-1} \cap B_{i_{k-2}}^{k-2} \dots \cap B_{i_1}^1 \in \mathfrak{G}$, следовательно, образующая ξ удовлетворяет нашим требованиям: $\xi \cap C_k > \gamma_{k-1}$, $k > 1$.

В силу сказанного, согласованности (может быть, несколько более слабой) марковского компакта с алгеброй $\mathfrak{G}$ можно добиться, построив вышеописанным способом образующую, а затем адическое представление по символическому представлению с помощью этой образующей методом, излагаемым далее.

Итак, пусть имеется динамическая система $(X_{Z'}, \mu, T)$, где мера μ – НБВИЭ-непрерывная борелевская вероятностная инвариантная эргодическая. Обозначим через $Cyl(\mu)$ множество всех слов над Z' , которым соответствуют цилиндрические множества положительной меры μ . Множество слов $\mathcal{A}$ над Z' будем называть Cyl -множеством, если существует такая НБВИЭ – мера μ' , что $\mathcal{A} = Cyl(\mu')$. Если $\mathcal{A}$ – Cyl -множество, то каждую меру μ'' , для которой $\mathcal{A} = Cyl(\mu'')$, будем называть $\mathcal{A}$ -мерой. Через $X_{Z'}^{\mathcal{A}}$ обозначим борелевское инвариантное под-

множество $X_{Z'}$, состоящее из всех последовательностей, в которых слова, не принадлежащие $\mathcal{A}$, вообще не встречаются, а слова из $\mathcal{A}$ встречаются с ненулевыми в обе стороны плотностями ([87] стр. 11) ,т.е. $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_{Z'}^{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда при каждом $m > 0$ слово $x_{-m} \dots x_m \in \mathcal{A}$ и для каждого слова $B \in \mathcal{A}$ верно следующее : если $\dots -j_n^B < -j_{n-1}^B < \dots < j_1^B \leq 0 < i_1^B < \dots i_2^B < \dots i_n^B < \dots$ -множество всех таких номеров r , что $x_r \dots x_{r+|B|-1} = B$, то последовательности $\{1\} \cup \{i_n^B\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{1\} \cup \{j_n^B\}$ имеют положительные плотности.

Заметим, что если НБВИЭ- мера μ'' сосредоточена на некотором компактном инвариантном минимальном множестве $M \subset X_{Z'}$ и $\mathcal{A} = Cyl(\mu'')$, то $X_{Z'}^{\mathcal{A}} = M$.

В дальнейшем будет описана процедура построения, ставящая в соответствие каждому Cyl -множеству $\mathcal{A}$ следующие объекты :

- 1) инвариантное борелевское множество $X''_{Z'}^{\mathcal{A}} \subset X_{Z'}^{\mathcal{A}}$ полной меры для всякой $\mathcal{A}$ -меры;
- 2) минимальный марковский компакт $Y^{\circ \mathcal{A}}$ с адическим преобразованием $U^{\circ \mathcal{A}}$;
- 3) инвариантное относительно $U^{\circ \mathcal{A}}$ борелевское подмножество $Y^{\circ' \mathcal{A}}$ компакта $Y^{\circ \mathcal{A}}$;
- 4) такую борелевскую биекцию $f'_{\mathcal{A}} : X''_{Z'}^{\mathcal{A}} \rightarrow Y^{\circ' \mathcal{A}}$, что

$$U^{\circ \mathcal{A}} \circ f'_{\mathcal{A}} = f'_{\mathcal{A}} \circ T$$

и прообразы пересечений $Y^{\circ' \mathcal{A}}$ с цилиндрическими множествами являются множествами положительной меры ν для любой $\mathcal{A}$ -меры ν .

Утверждение о существовании перечисленных объектов для каждого Cyl -множества $\mathcal{A}$ составляет содержание теоремы 2. Будет предъявлен один из многих возможных способов построения и доказана его корректность. Любую же четверку $(X''_{Z'}^{\mathcal{A}}, Y_{Z'}^{\circ \mathcal{A}}, Y^{\circ' \mathcal{A}})$, удовлетворяющую условиям 1)-4) мы будем называть минимальным марковским $\mathcal{A}$ - компактом.

Проще доказать возможность построения минимального марковского $\mathcal{A}$ -множества, то есть четверки $X'_{Z'}, Y^{\mathcal{A}}, Y'^{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{A}}$, удовлетворяющей условиям 1')-4'), идентичных условиям 1)-4) с точностью до замены термина "марковский компакт" на "марковское множество" и объектов четверки на им соответствующие.

§2. Построение марковского множества.

Теорема 1. *Для любого Cyl -множества $\mathcal{A}$ существует (минимальное) марковское $\mathcal{A}$ -множество.*

Доказательство. Выберем некоторое натуральное s с $z_s \in \mathcal{A}$ и пронумеруем произвольным образом все такие слова из $\mathcal{A}$ вида $\underbrace{z_s \dots z_s}_m z_{i_1} \dots z_{i_k}, m, k > 0$, что $i_1, \dots, i_k \neq s$ и для некоторого $z_u \underbrace{z_s \dots z_s}_m z_{i_1} \dots z_{i_k} z_s \in \mathcal{A}$. Пусть перечень таких слов есть $\{B_j^1\}_{j=1}^{h_1^*}, h_1^* \leq \infty$. Тогда для всякой последовательности $x = \{\dots, z_{i_{-k}}, \dots, z_{i_{-1}}, z_{i_0}, z_{i_1}, \dots, z_{i_k}, \dots\}$ существует и единственна такая строго возрастающая двусторонняя бесконечная последовательность целых чисел $\dots n_{-k} < n_{-k+1} < \dots < n_0 \leq 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, что при каждом k

$$z_{i_{n_k}} z_{i_{n_k+1}} \dots z_{i_{n_{k+1}-1}} = B_{j_k}^1 \quad \text{для некоторого } j_k.$$

Таким образом, для последовательности символов x получилось представление, которое будет обозначаться $\{\{B_{j_k}^1\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0\}$. $1 - n_0$ -номер символа z_{i_0} в слове $B_{j_0}^1$. Будем рассматривать B_j^1 как символы нового алфавита $Z^1, \#Z^1 = h_1$. Всякая $\mathcal{A}$ -мера μ естественным образом индуцирует инвариантную относительно сдвига $T_1 : X_{Z^1} \rightarrow X_{Z^1}$ эргодическую меру μ (инвариантную меру производного автоморфизма) в X_{Z^1} , причем, очевидно, $Cyl(\mu^*)$ не зависит от выбора $\mathcal{A}$ -меры

μ . Образующую, отвечающую алфавиту Z^1 , имеет производный T_B , где $B = \{x \mid x = \{\{B_{j_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1\}\}$. T_1 изоморфен ему.

Обозначим $Cyl(\mu')$ через $\mathcal{A}$. Заметим, что по определению $X_{Z^1}^{\mathcal{A}} \mid T_1 \mid_{X_{Z^1}^{\mathcal{A}}}$ есть производный от $T \mid_{X_{Z'}^{\mathcal{A}}}$ не только для любой $\mathcal{A}$ -меры, но и в топологическом смысле – на точечном уровне.

Теперь сделанное для $X_{Z'}^{\mathcal{A}}$ можно осуществить аналогичным образом для $X_{Z^1}^{\mathcal{A}}$, выбрав предварительно некий элемент $Z^1 - B_{s_1}^1$. Получатся слова $\{B_j^2\}_{j=1}^{h_2}$, рассматриваемые одновременно в качестве символов нового алфавита Z^2 . Для каждой последовательности $x_1 = \{B_{j_k}^1\}_{k=-\infty}^{\infty} \in X_{Z^1}^{\mathcal{A}}$ получится представление в Z^2 : $\{\{B_{j_k}^2\}, 1 - n_0^1\}$, а если точка $x \in X_{Z^1}$ имела в Z^1 представление $\{\{B_{j_k}^1\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0\}$, то для нее получится представление $\{\{B_{j_k}^2\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0^1, 1 - n_0\}$.

Действуя тем же методом, мы для каждого натурального m получим алфавит Z^m , множество слов $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\mathcal{A})$, множество $X_{Z^m}^{\mathcal{A}_m}$ и для всякой точки $x \in X_{Z'}^{\mathcal{A}}$ представление $\{\{B_{j_k}^{m-1}}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0^{m-1}, 1 - n_0^{m-2}, \dots, 1 - n_0\}$. Элементом алфавита Z^m естественным образом соответствуют слова в Z' длины, не меньшей 2^m .

Легко доказать, что для почти всех по любой $\mathcal{A}$ -мере точек x бесконечно многие члены последовательности $1 - n_0, 1 - n_0^1, 1 - n_0^2, \dots, 1 - n_0^m, \dots$ не равны 1 и бесконечно многие $1 - n_0^i$ не равны 0, то есть вся последовательность, а не какая либо ее односторонняя часть всею совокупностью представлений определена. Действительно, если обозначить через C множество тех $x \in X_{Z'}^{\mathcal{A}}$, для которых все $1 - n_0^m$ суть 1, то, как можно увидеть, анализируя структуру x , определяемую нашими представлениями, для всякой такой последовательности x' , что в соответствующей последовательности $1 - n'_0, 1 - n'_0^1, \dots$ имеется лишь конечное число не 0, найдется такое $N > 0$, что $T^{-N'} x' \in C$, и в этом случае для точки $x' = \{\dots z_{i'_{-k}}, \dots, z_{i'_0}, \dots, z_{i'_k}, \dots\}$ с представлениями

$\{\{B_{j'_k}^m\}_{k=-\infty}^\infty, 1 - n_0^{m-1}, \dots, 1 - n_0^i\}, m = 1, 2, \dots$ найдется такое M , что при $m > M$ слово $B_{j'_0}^m$ имеет вид $z_{i'_-N} \dots z_{i'_{v_m}}$. Поэтому все $T^N C$ попарно не пересекаются и потому для любой НБВИЭ- меры μ''' имеем $\mu'''(C) = 0$. Интересующее же нас множество таких x , что либо среди $1 - n_0^i$ -конечное число единиц, либо среди $1 - n_0^i$ -конечное число нулей, суть $\bigcup_{N=-\infty}^\infty$.

Множество $X'_{Z'}^A$ будет определено как $X_{Z'}^A \setminus \bigcup_{N=-\infty}^\infty T^N C$. Оно является аналогом множества Ω_A^1 для стационарного случая ([15] и глава 2 настоящей диссертации, где, впрочем, A обозначает иное множество слов). Теперь можно построить (вообще говоря неминимальное) марковское множество Y^A и отображение f_A .

В качестве D_1 берется множество пар (B_j^1, l) ; $B_j^1 \in Z^1, 1 \leq l \leq |B_j^1|_{Z'}$. Заметим, что при каждом $m > 1$ каждому $B_j^m \in Z^m$ по построению естественным образом сопоставлено слово $B_{s_1^{m,j}}^{m-1} \dots B_{s_{k_j^m}^{m,j}}^{m-1}$, где $B_{s_r^{m,i}} \in Z^{m-1}, 1 \leq r \leq k_j^m$, причем для некоторого $r^{m,j}$ имеет место $s_1^{m,j} = s_2^{m,j} = \dots = s_{r^{m,j}}^{m,j} = s_{m-1}^{m,j} \neq s_{m-1}^{m,j}, r > r^{m,j}$. В качестве D_m возьмем множество пар $(B_j^m, l), B_j^m \in Z^m, 1 \leq l \leq k_j^m$. Определим переходную матрицу M_m :

$$M_m((B_j^m, l_1), (B_{j'}^{m+1}, l_2)) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_{j'}^{m+1} = B_{s_1^{m+1,j'}}^m \dots B_{s_{k_{j'}^{m+1}}^{m+1,j'}}^m \\ & \text{и } s_{l_2}^{m+1,j'} = j \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Упорядочение в каждом из D_m можно определить многими способами, эквивалентными с точки зрения итоговой структуры марковского компакта. Упорядочение (нумерация) в D_m должно удовлетворять единственному требованию:

$$((B_j^m, l_1) < (B_{j'}^m, l_2) \text{ при } l_1 < l_2.$$

Отображение $f_A : X'_{Z'} \rightarrow Y_A$ строится следующим образом. Если последовательность представлений точки $x \in X'_{Z'}$ есть

$$\{\{\{B_{j_k}^{m-1}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0^{m-1}, 1 - n_0^{m-2}, \dots, 1 - n_0\}\}, \text{ то}$$

$$f_A(x) = ((B_{j_0}^1, 1 - n_0), (B_{j_1}^2, 1 - n_0^1), \dots, (B_{j_0}^m, 1 - n_0^{m-1}), \dots)$$

В качестве Y'_A берется множество $f_A(X'_{Z'})$. Очевидно, что все требования к построенным объектам, кроме минимальности марковского множества, выполнены. Минимальности можно добиться при построении алфавитов Z^m в соответствии с предложенным выше алгоритмом, например, на этапе выбора s_{m-1} при построении алфавита Z^m . Выбор последовательности s_m должен осуществляться так, чтобы для любых M и N с B_M^N нашлось такое $m = m(M, N) > N$, что в естественное представление $B_{s_m}^m$ элементами Z^N входило бы B_M^N . Поскольку все алфавиты Z^N не более чем счетны, такой выбор легко осуществить. Теорема 1 доказана.

В рассматриваемой нами ситуации, когда для некоторого *Cyl*-множества $\mathcal{A} \subset X'_{Z'}$ оказывается компактным минимальным множеством, наше построение приведет к марковскому компакту, минимальному независимо от выбора s_m . Это видно из того, что при каждом m независимо от выбора последовательности $s_1, \dots, s_{m-1}$ $X_{Z^m}^{\mathcal{A}^m}$ -компакт, минимальный тогда и только тогда, когда минимален компакт $X_{Z'}^{\mathcal{A}}$. В случае подстановочного строго эргодического компакта описанная здесь конструкция дает марковский компакт, чрезвычайно громоздкий сравнительно со стационарным марковским компактом, построенным в [15] и в гл. 2.

§3. Построение минимального марковского компакта.

При построении марковского множества использовался некий метод кодирования последовательностей. Сейчас будет описано его обобщение, которое будет использовано в основной конструкции. Пусть Z^* – алфавит

(конечный или счетный), $X_{Z^*} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i^*, Z_i^* = Z^*, -\infty < i < \infty$, T^* -сдвиг в X_{Z^*} , μ^* -НБВИЭ-мера в X_{Z^*} . Пусть, далее, $\{A_i\}_{i=1}^r, r \leq \infty$ -набор слов над $Z^*, \{A_i\}_{i=1}^r \subset Cyl(\mu^*)$. Одновременно рассмотрим алфавит Z_1^* , символы которого тоже будем обозначать $A_i, Z_1^* = \{A_i\}_{i=1}^r$.

Пусть, далее, $\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^r$ -цилиндры [61], отвечающие словам A_i и $B_i, 1 \leq i \leq r$ -некоторые μ^* -измеримые множества $\mu^*(B_i) > 0, B_i \subset \tilde{A}_i, 1 \leq i \leq r$, такие что совокупность множеств $\{T^{*j}B_i, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq |A_i|\}$ представляет собой измеримое разбиение ξ . Это разбиение оказывается образующей T^* , поскольку $B_i \subset \tilde{A}_i, 1 \leq i \leq r$. В этом случае производный автоморфизм $T_{\cup_{i=1}^r B_i}^*$ можно представить как сдвиг $T_1^* : X_{Z_1^*} \rightarrow X_{Z_1^*}$ с НБВИЭ-мерой μ_1^* в $X_{Z_1^*}$, индуцированной мерой μ^* . С другой стороны, если зафиксировать меру μ_1^* в $X_{Z_1^*}$ и построить интегральный автоморфизм по T_1^* и функции $f : f(\{\dots A_{i_{-k}}, \dots, A_{i_0}, \dots, A_{i_k}, \dots\}) = |A_{i_0}|$, то он будет метрически изоморфен $T^* : (X_{Z^*}, \mu^*) \rightarrow (X_{Z^*}, \mu^*)$. Описание этого метрического изоморфизма легко осуществить, основываясь на том, что выделение образующей ξ эквивалентно фиксации для почти всякой последовательности $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_{Z^*}$ такой строго возрастающей бесконечной двусторонней последовательности целых чисел $\dots n_{-k}, < n_{-k+1} < \dots < n_0 \leq 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, что при каждом $k, x_{n_k} x_{n_k+1} \dots x_{n_{k+1}-1} = A_{j_k}$ для некоторого j_k и, аналогично кодированию из доказательства теоремы 1, такого представления $\{\{\dots A_{j_{-k}}, \dots, A_{j_0}, \dots, A_{j_k}, \dots\}, 1 - n_0\}$, такого, что множества $T^{*-1}\{x \mid n_0 = 0, i_0 = i\} \mu^*$ -измеримы (и равны $B_i \bmod 0$). Наш метрический изоморфизм в этом случае есть попросту отображение $\phi : \phi(x) = \{\{\dots A_{j_{-k}}, \dots, A_{j_0}, \dots, A_{j_k}, \dots\}, -n_0\}$. Имеет место инвариантность относительно сдвига. Обозначим $\phi(x)$ через $\{x', -n_0\}, x' \in X_{Z_1^*}$. Тогда почти всюду $\phi(T^*x) = \{x', 1 - n_0\}$, если $n_0 > 1 - |A_{i_0}|$ и $\phi(T^*x) = \{T_1^*x', 0\}$ в противном случае. Представление с описанными свойствами мы будем

называть специальным кодированием. Если имеются два специальных кодирования : с отображением $\phi_1 : X_{Z^*} \rightarrow X_{Z_1^*} \times N$ и с отображением $\phi_2 : X_{Z_1^*} \rightarrow X_{Z_2^*} \times N$, где Z_2^* определяется набором слов $\{A_j^1\}_{j=1}^{r_1}$ в алфавите Z_1^* , то канонически строится набор слов $\{A_j^2\}_{j=1}^{r_1}$ и специальное кодирование с отображением $\phi_3 : X_{Z^*} \rightarrow X_{Z_2^*} \times N$, причем элементы Z_2^* на сей раз сопоставляются словам A_j^2 . Слова A_j^2 строятся следующим образом: если $A_j^1 = A_{i_1}^j \dots A_{i_{s_j}}^j$, где $A_{i_r}^j$ -элементы алфавита Z_1^* , то A_j^2 есть соединение слов $A_{i_1}^j \dots A_{i_{s_j}}^j$ в алфавите Z^* . Заметим, что среди этих слов могут быть одинаковые (если это не оговорено и не подразумевается, что одинаковые отождествляются), как могли быть одинаковыми с самого начала некоторые из A_i . В дальнейшем одинаковые слова не будут допускаться на каждом этаже, но будут допускаться в "композициях" (где все равно будет фиксироваться иерархическая структура слов).

Если мы имеем $\phi_1(x) = \{x', -n_0\}, \phi_2(x) = \{x'', -n'_0\}, x' \in X_{Z_1^*}, x'' \in X_{Z_2^*}$ то $\phi_3(x) = \{x'', -n''_0\}, -n''_0 = -n_0 + \sum_{k=1}^{-n'_0} |A_{i_k}^{j'_0}|$, где $x'' = \{A_{j'_s}\}_{s=-\infty}^{\infty}$

Простейшее специальное кодирование возникает в тех случаях, когда слова A_i образуют код со свойствами однозначного декодирования (по крайней мере почти всюду по мере μ^*).

Если обозначить через $\mathcal{A}'$ множество слов $Cyl(\mu^*)$ и дать определение специального кодирования на точечном уровне, требуя от элементов образующей $\xi T^j B_i \subset X_{Z^*}^{\mathcal{A}'}$, чтобы они были открыты в относительной топологии $X_{Z^*}^{\mathcal{A}'} \subset X_{Z^*}$, а от A_i , чтобы они лежали в $\mathcal{A}'$, то получится определение $\mathcal{A}'$ -специального кодирования. Можно требовать, чтобы множество $X_{Z^*}^{\mathcal{A}'} \setminus (\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^{|A_i|} T^j B_i) \cup (\cup_{\substack{(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \\ 1 \leq i_s \leq r \\ 1 \leq j_s \leq |A_{i_s}|}} (T^{j_1} \tilde{A}_{i_1} \cap T^{j_2} \tilde{A}_{i_2}))$ имело меру 0 по любой $\mathcal{A}'$ -мере, можно, чтобы оно было пустым. В наших конструкциях будет использоваться второй вариант. Для $\mathcal{A}'$ - специальных

кодирований этого типа определения T_1^*, ϕ, μ_1^* , композиции таковы же (но без слов "почти всюду"). При этом отображение ϕ является гомеоморфизмом между X_{Z^*} и $\phi(X_{Z^*})$, индуцирующим биекцию классов $\mathcal{A}$ -мер и $Cyl(\mu^*)$ - мер.

Сейчас для X_{Z^*} будет описан класс $\mathcal{A}'$ - специальных кодирований, который будет применяться при построении марковского компакта. Пусть $z_p^* \in Z^*$ и $z_p^* \in \mathcal{A}$. Зададимся некоторым натуральным k . Зафиксируем какое либо слово -соединение непустых слов $D = A_0 D_1 A_1 \dots D_s \in \mathcal{A}$, такое что слова A_0, D_s -однобуквенны, слово- соединение $A_0 A_1 \dots A_s$ не содержит символов z_p^* , $D_1 D_2 \dots D_s$ не содержит символов, отличных от z_p^* , и что длина слова $C' = D_1 A_1 \dots A_{s-1} D_{s-1}$ больше чем $2k$. Могут представиться два случая: 1) не существует таких слов B', B'' , что $B' B'' B' \in \mathcal{A}$ и $B' B'' = B'' B' = C'$ или $B' B'' B' B'' B' \in \mathcal{A}$ и $B' B'' B' = C'$, 2) такие B' и B'' существуют. В первом случае в дальнейших построениях будем подразумевать C' в качестве "слова C ". Во втором случае существует такое слово $D', |D'| > |C'|$, что $C' D' \in \mathcal{A}$ и если для каких либо V', V'' имеем $V' V'' = V'' V' = C' D'$ и $V' V'' V' \in \mathcal{A}'$, то $|V'| > |C'|$. Если бы такого D' не существовало, то все $\{x_i\}$ были бы периодическими с фиксированным периодом. В этом случае через C обозначим $C' D'$. Тогда для любой последовательности $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_{Z^*}^{\mathcal{A}'}$ если $\{j_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, -\infty < \dots < j_s < \dots < j_0 < j_1 < \dots < j_s < \dots$ -полный перечень всех таких номеров j , что $x_{j-1} \neq z_p^*, x_j x_{j+1} \dots x_{j+|C|-1} = C$, то рассмотрим для каждого s разбиение $x_{j_s} \dots x_{j_{s+1}-1} = B_1^s \dots B_{l(s)}^s$, где $|B_i^s| = k, 1 \leq i < l(s), k \leq |B_{l(s)}^s| < 2k$. Образует набор слов $\{B_i\}$, состоящий из всех различных B_i^s , входящих во все такие разбиения (он не зависит от выбора точки $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$). Представление же всей последовательности $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, однозначно определяемое введенными разбиениями отрезков $x_{j_s} \dots x_{j_{s+1}-1}$ можно рассматривать как $\mathcal{A}'$ -специальное кодиро-

вание с $Z_1^* = \{B_i\}$. Оно будет называться (z_p^*, k) -представлением. Таким образом, для каждой последовательности $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_{Z^*}^{A'}$ существуют и единственны такие последовательности $\{s_r^x\}^\infty, \{v_r^x\}, \{l_j^x\}_{j=-\infty}^\infty$, что:

- 1) $-\infty \dots < s_{-r}^x < \dots < s_0^x \leq 0 < s_1^x < \dots < s_r^x < \dots$ и при каждом m :
 $x_{s_m^x} \dots x_{s_{m+1}^x-1} = B_{v_m^x}$
- 2) $-\infty \dots < l_{-r}^x < \dots < l_0^x \leq 0 < l_1^x < \dots < l_r^x < \dots$ и при каждом m :
 $|B_{v_{l_m^x}^x}| = |B_{v_{l_{m+1}^x}^x}| = \dots = |B_{v_{l_{m+1}^x-2}^x}| = k, k \leq |B_{v_{l_{m+1}^x-1}^x}| < 2k$
- 3) последовательность $\{s_{l_m^x}^x\}_{m=-\infty}^\infty$ образует полный перечень таких номеров, j что $x_{j-1} \neq z_p^*, x_j x_{j+1} \dots x_{j+|C|-1} = C$.

Пример (1,3)-представления: $C = 11010110$,

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 110 & 101 & 101 & 110 & 111 & 1000 & 110 & 101 & 101 & 100 & 011 & 110 \\ B_{v_{l_m}^x} & B_{v_{l_{m+1}}^x} & B_{v_{l_{m+2}}^x} & B_{v_{l_{m+3}}^x} & B_{v_{l_{m+4}}^x} & B_{v_{l_{m+5}}^x} & B_{v_{l_{m+6}}^x} & & & & & & \\ 10000 & 110 & 101 & 101 & 10110 & . \\ B_{v_{l_{m+1}+6}^x} & B_{v_{l_{m+2}}^x} & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Теорема 2. Для всякого CyL -множества $\mathcal{A}$ слов над Z' существует минимальный марковский $\mathcal{A}$ -компакт $(X''_{Z'}, Y^{\circ \mathcal{A}}, Y^{\circ' \mathcal{A}}, f'_{\mathcal{A}})$.

Доказательство. В ходе построения последовательности над Z' будут перекодироваться в последовательности над другим алфавитом и будут вводиться многие новые алфавиты.

Предполагая, что множество Z' счетно, введем еще одно счетное множество $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$. На n -шаге построения будет выбрано не более чем счетное множество $\Lambda_n \supset \Lambda_{n-1}$ (предполагается, что Λ_1 пусто) и последовательности над $Z' \cup \Lambda_{n-1}$ будут перекодированы в последовательности над $Z' \cup \Lambda_n$. Для каждого неотрицательного целого числа m и каждого слова $v_1 \dots v_k$ над $Z' \cup \Lambda$ определим m -проекцию – набор чисел $v'_1 \dots v'_k$, где v'_i зависит от v_i следующим образом. Пусть $v = z_{n_i}^*$. Тогда, если $n_i < 2^{m+1}$, то $v'_i = n_i$, если же $n_i \geq 2^{m+1}$ и двоичное разложение n_i есть $a_0 + 2a_1 + \dots + 2^m a_m + \dots$, то $v'_i = 2^{m+1} + a_0 + \dots + 2^m a_m$. Пусть $v_i = \lambda_{r_i}$. Тогда, если $r_i < 2^{m+1}$, то $v'_i = 2^{m+2} + r_i$; если же $r_i \geq 2^{m+1}$ и

$r_i = b_0 + 2b_1 + \dots 2^m b_m + \dots$, то $v'_i = 2^{m+3} + b_0 + 2b_1 + \dots 2^m b_m$. Слово $v_1 \dots v_k$ будет называться представителем набора $v'_1 \dots v'_k$ (при фиксированном m). m -проекция слова однозначно определяет его $m - 1$ -проекцию. Обозначение $:v'_1 \dots v'_k = R_m^2(v_1 \dots v_k)$. На каждом шаге будет возникать некоторая последовательность конечных алфавитов и последовательность не более чем счетных алфавитов с соответствующими специальными кодированиями и *Cyl*-множествами. На первом шаге мы фиксируем конечный алфавит Z'^1 -совокупность 0-проекций однобуквенных слов из $\mathcal{A}$. $Z'^1 \subset \{1, 2, 3\}$ и $Z' \cup \Lambda_1 = Z'$ в качестве счетного алфавита Z''^1 , к которому сопоставлено тривиальное специальное кодирование и *Cyl*-множество $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$. Предположим, что сделано $n - 1$ шагов, в результате чего после каждого (m -ого) из этих шагов получены:

1) *Cyl*-множество $\mathcal{A}_m$ над $Z' \cup \Lambda_m$ и коммутирующий со сдвигом гомеоморфизм (в относительных топологиях подмножеств $X_{Z'}$ и $X_{Z' \cup \Lambda_m}$) $\phi_m : Z_{Z'}^{\mathcal{A}} \rightarrow X_{Z' \cup \Lambda_m}^{\mathcal{A}_m}$,

2) набор конечных алфавитов $Z'^k_m, 0 < k \leq m$, и счетных алфавитов $Z''^k_m, 0 < k \leq m$,

3) последовательность m специальных кодирований последовательностей $X_{Z' \cup \Lambda_m}^{\mathcal{A}_m}$ (начиная с первого тривиального $\mathcal{A}_m$ -кодирования $\{B_j\} = \{\tilde{z}_j^*\}_{z_j^* \in \mathcal{A}_m}$), каждое из которых есть $\mathcal{A}_m^{k-1}$ -специальное кодирование последовательностей $X_{Z''^{k-1}_m}^{\mathcal{A}_m^{k-1}}$, где $\mathcal{A}_m^{k-1}$ - *Cyl* -множество, возникшее к моменту k -ого специального кодирования слов над очередным не более чем счетным алфавитом Z''^{k-1}_m .

Продолжая перечислять свойства и соотношения объектов, возникших после $n - 1$ -ого шага, мы опишем иерархическое представление алфавитов Z''^k_m и соотношения между ними и алфавитами Z'^k_m . По определению специального кодирования, если выполнена цепочка таковых, то при фиксированном m алфавиты $Z''^k_m, 1 < k \leq m$ могут быть представлены

следующим образом (этим представлением мы и будем пользоваться)

$$\begin{aligned}
 Z''^k_m &= \{(a_1^{l,k,m} \dots a_{s(l,k,m)}^{l,k,m}, \{\{n_j^{i,k,l,m}\}_{j=0}^{v(i,k,l,m)}\}_{i=1}^k)\}_{l=1}^{r(k,m)} = \\
 \{z''^{k,m}_l\}_{l=1}^{r(k,m)} &= \{(Fi''^{k,m}_l, Se''^{k,m}_l)\}_{l=1}^{r(k,m)}, r(k, m) = \#Z''^k_m \leq \infty, \\
 a_t^{l,k,m} &\in (Z' \cup \Lambda_m) \cap \mathcal{A}_m, Fi''^{k,m}_l \in \mathcal{A}_m, 0 = n_0^{i,k,l,m} < n_1^{i,k,l,m} < \dots < \\
 n_{v(i,k,l,m)}^{i,k,l,m} &= s(l, k, m), 1 \leq l \leq r(k, m), \text{ для каждого } i < k \\
 \{n_j^{i,k,l,m}\}_{j=0}^{v(i,k,l,m)} &\supset \{n_j^{i+1,k,l,m}\}_{j=0}^{v(i+1,k,l,m)}.
 \end{aligned}$$

Иерархическое соотношение алфавитов Z''^k_m при различных k выражается следующим требованием: если $k' < k$, то для любого $j_0 : 0 \leq j_0 < v(k' + 1, k, l, m)$ существует такое l' , что

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad Z''^{(k',m)}_{l'} &= (a_{n_{j_0}^{k'+1,k,l,m}+1}^{l,k,m} a_{n_{j_0}^{k'+1,k,l,m}+2}^{l,k,m} \dots a_{n_{j_0+1}^{k'+1,k,l,m}}^{l,k,m}, \\
 &\{\{n_j^{i,k,l,m} - n_{j_0}^{k'+1,k,l,m} \mid n_{j_0}^{k'+1,k,l,m} < n_j^{i,k,l,m} \leq n_{j_0+1}^{k'+1,k,l,m}\}\}_{i=1}^{k'}) .
 \end{aligned}$$

Мы будем, с другой стороны, также требовать, чтобы из $k' < k$ следовало, что для любого l' найдутся l и такие j_0 , $0 \leq j_0 < v(k' + 1, k, l, m)$, что (3.1) выполнено. Если для четверки объектов $z''^{k,m}_l, z''^{k',m}_{l'}, j_0, n$ с $k' < k$ имеет место $n = n_{j_0}^{k'+1,k,l,m}$ и выполнено (3.1), то будем писать $R(z''^{k,m}_l, z''^{k',m}_{l'}, j_0, n)$. Обозначим $w(z''^{k,m}_l) = a_1^{l,k,m} \dots a_{s(l,k,m)}^{l,k,m}$ и $le(z''^{k,m}_l) = s(l, k, m)$. Заметим, что такое иерархическое соотношение между алфавитами в точности и означает, что специальное кодирование с помощью Z''^m_m (и, быть может, совпадающих слов $w(z''^{m,m}_l)$) может быть получено цепочкой специальных кодирований. Соотношение между алфавитами Z''^k_m и Z'^k_m следующее: $Z'^k_m = \{(Fi'^{k,m}_l, Se'^{k,m}_l)\}_{l=1}^{r'(k,m)}, r(k, m) < \infty$, где

$$(3.2) \quad (u, v) \in Z'^k_m \Leftrightarrow \exists l', 1 \leq l' \leq r(k, m) : u = R_{k-1}^2(Fi''^{k,m}_{l'}), v = Se''^{k,m}_{l'} .$$

В этом случае мы обозначаем $Fi_l^{k,m} = w(z_l^{k,m})$, длину слова $w(z_l^{k,m})$ в алфавите $R_{k-1}^2(Z' \cup \Lambda_m)$ обозначаем через $le(z_l^{k,m})$, и, наконец, (u, v) – через $R_{k-1}^2(z_l^{k,m})$.

При $m_2 > m_1$ должно быть выполнено $Z'_{m_1} \subseteq Z'_{m_2}$. Множество длин слов, соответствующих элементам Z''_m , конечно и не зависит от m .

Теперь, когда свойства и соотношения описаны, мы должны выполнить n -ый шаг и построить новые объекты таким образом, чтобы для всей совокупности эти свойства и соотношения снова имели место. При этом, конечно, над каждым новым алфавитом $Z' \cup \Lambda_m$ не будет выполняться m специальным кодирований а будет получена именно соответствующая иерархическая структура.

Обозначим объем алфавита Z'^{n-1}_{n-1} через R_{n-1} , общий наибольший делитель всех $le(z_l^{n-1,n-1})$, $1 \leq l \leq r'(n-1, n-1)$ -через d_{n-1} , $\sum_{g \in Z'^{n-1}_{n-1}} le(g)$ через S_{n-1} , минимум длин- через Q_{n-1} , максимум- через P_{n-1} . Очевидно, существует такое v_{n-1} , что для любого натурального $l > \frac{v_{n-1}}{d_{n-1}}$ найдутся такие натуральные $a_1, b_1, \dots, a_{s'}, b_{s'}$, что все b_i суть значения функции le на Z'^{n-1}_{n-1} и $a_1 b_1 + \dots + a_{s'} b_{s'} = l d_{n-1}$. Выберем $c^{n-1} = (a_1^c \dots a_{s'}^c, \{\{n_j^i\}_{j=1}^{v^c(i)}\}_{i=1}^{n-1}) \in Z''^{n-1}_{n-1}$ и такое натуральное $K_n > n^2$, что $K_n Q_{n-1} > S_{n-1} + s + v_n$. Зафиксируем такой набор пар $\{B'_r\}_{r=1}^{R_{n-1}} = \{(a_1^r \dots a_{s(r)}^r, \{\{n_j^{i,r}\}_{j=0}^{v_r(i)}\}_{i=1}^{n-1})\}_{r=1}^{R_{n-1}}$, что набор пар $\{(R_{n-2}^2(a_1^r \dots a_{s(r)}^r), \{\{n_j^{i,r}\}_{j=0}^{v_r(i)}\}_{i=1}^{n-1})\}_{r=1}^{R_{n-1}}$ суть в точности алфавит Z'^{n-1}_{n-1} . Пусть натуральное K'_n таково, что $K'_n Q_{n-1} > K_n^2 P_{n-1}$.

Рассмотрим (B'_1, K'_n) -представление последовательностей из $X^{\mathcal{A}_{n-1}^{n-1}}_{Z''^{n-1}_{n-1}}$. Из выбора K_n следует, что для каждого участвующего в нем слова $D = u_1 \dots u_l$ над Z''^{n-1}_{n-1} , $K'_n \leq l < 2K'_n$ найдется другое слово $E = E(u_1 \dots u_{K_n})$ над Z''^{n-1}_{n-1}

$E = B'_1 \dots B'_{R_{n-1}} c^{n-1} h_1 \dots h_t$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{K_n} le(u_i) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} le(B'_i) + le(c^{n-1}) + \sum_{i=1}^t le(h_i).$$

Обозначим через N_{n-1} множество (не более чем счетное) всех слов $u_1 \dots u_l$ над Z''^{n-1}_{n-1} , участвующих в этом представлении (каждое u_i - пара рассмотренного выше вида). Определим такую инъекцию $f_{n-1} : N_{n-1} \rightarrow \Lambda \setminus \Lambda_{n-1}$, что множество $\Lambda \setminus (\Lambda_{n-1} \cup f_{n-1}(N_{n-1}))$ - бесконечно. Для элемента c^{n-1} алфавита Z''^{n-1}_{n-1} зафиксируем такой номер j , что $a_j^c \in Z'$ и обозначим для произвольного $g \in N_{n-1}$ через $c^{n-1}(g)$ пару $(a_1^c \dots a_{j-1}^c f_{n-1}(g) a_{j+1}^c \dots a_s^c, \{\{n_j^i\}_{j=1}^{v(i)}\}_{i=1}^{n-1})$ -пару абстрактную до предстоящей коррекции предыдущих не более чем счетных и конечных алфавитов, которая на самом деле будет осуществлена уже теперь. Введем отображение слов $\phi'_n : \phi'_n(u_1 \dots u_l) = B'_1 \dots B'_{R_{n-1}} c^{n-1}(g) h_1 \dots h_t u_{K_n+1} \dots u_l$. Коррекция алфавитов осуществляется в соответствии с возникающим запасом слов следующим образом. Определяем при каждом $k \leq n-1$ алфавит Z''^k_n исходя из определяемого нижеописываемым образом алфавита $Z''^{n-1}_n : Z''^k_n = \{(a'_1 \dots a'_{s'}, \{\{n_j^i\}_{j=0}^{v'(i)}\}_{i=1}^k) \mid (\exists (a_1 \dots a_s, \{\{n_j^i\}_{j=0}^{v(i)}\}_{i=1}^{n-1}) \in Z''^{n-1}_n) \ \& \ (\exists j') \{\{n_j^i\}_{j=0}^{v'(i)}\}_{i=1}^k = \{\{n_k^i - n_{j'}^k\}, 1 \leq i \leq k, n_{j'}^k \leq n_j^i \leq n_{j'+1}^k\}, a'_1 \dots a'_{s'} = a_{n_{j'}^k+1} \dots a_{n_{j'+1}^k}\} \}$ (соответствие нумераций однозначно определяется тем, что каждое $n_j^i - n_{j'}^k$ есть $n_{j_1}^i$ для некоторого j_1). Z''^{n-1}_n определяется так:

$$Z''^{n-1}_n = \{u \mid \exists g \in N_{n-1} : g = u_1 \dots u_l, \text{ причем } u = u_q, q > K_n, \text{ или}$$

$$u = h_q, 1 \leq q \leq t, \text{ или } u = B'_q, 1 \leq q \leq R_{n-1}, \text{ или}$$

$$u = c^{n-1}(g), \text{ где } E(u_1 \dots u_{K_n}) = B'_1 \dots c^{n-1} h_1 \dots h_t\}.$$

Алфавиты Z'^k_n определяются алфавитами Z''^k_n в соответствии с ранее описанным соотношением (3.2) (для предыдущих уровней) един-

ственным возможным образом. Алфавитам $Z'_n{}^k$ соответствуют слова над $Z' \cup \Lambda_n$ и образы $\phi'(g)$ есть слова над Z''^{n-1}_n . Осталось определить множество последовательностей, которые этими словами кодируются. Нашему (B'_1, K'_1) представлению соответствует кодирование последовательностей над $Z' \cup \Lambda_{n-1}$ N_n - словами. Если последовательность $\phi_{n-1}(x)$ над $Z' \cup \Lambda_{n-1}$ (где x - последовательность над Z') имеет представление $\{\{g_i\}_{i=-\infty}^\infty, 1 - p_0\}$, то берем в качестве $\phi_n(x)$ последовательность, имеющую в словах $\phi'_n(g)$ представление $\{\{\phi'_n(g_i)\}_{i=-\infty}^\infty, 1 - p_0\}$, чем определен и гомеоморфизм ϕ_n и представление точек его образа с помощью алфавита Z''^{n-1}_n , вполне соответствующее осуществленной коррекции. Новый алфавит Z''^n_n будет определен как $\{z(\phi'_n(g)), g \in N_n$, где $\phi'_n(g)$ рассматриваются как слова над Z''^{n-1}_n и $z(\cdot)$ определяется в полном соответствии с ранее использовавшимся представлением : если $g' = u'_1 \dots u'_l$ и $u_f = (a_1^f \dots a_{s_f}^f, \{\{n_j^{f,i}\}_{j=0}^{v^f(i)}\}_{i=1}^{n-1})$, $1 \leq f \leq l$, то $z(g') = a_1^1 \dots a_{s_1}^1 a_1^2 \dots a_{s_2}^2 \dots a_1^l \dots a_{s_l}^l, \{\{n_j^{g',i}\}_{j=0}^{v^{g'}(i)}\}_{i=1}^n$, где $n_j^{g',i}$ определяются естественным образом (конечно, $v^{g'}(i) = \sum_{f=1}^l v^f(i)$, $1 \leq i \leq n-1$). ϕ_n -образ любой $\mathcal{A}'$ -меры определяет одно и то же *Cyl*-множество слов $\mathcal{A}_n$ над $Z' \cup \Lambda_n$. Мы видим, что объекты, полученные на n -ом шаге, удовлетворяют всем ранее формулировавшимся требованиям и что соотношение алфавитов Z''^k_n , $1 \leq k \leq n$ таково, что можно рассматривать соответствующую последовательность специальных кодирований, первое из которых применяется к последовательностям над $Z' \cup \Lambda_n$. Очевидно и то, что каждое слово, отвечающее какому либо элементу Z''^n_n , содержит символы из Z' . Последовательность кодирований ϕ_n построена. Можно говорить и о $\mathcal{A}_n$ - кодировании последовательностей $X_{Z' \cup \Lambda_n}^{\mathcal{A}_n}$ словами $w(z''^{n,n}_l)$, $1 \leq l \leq r(n, n)$ —о таких открытых в относительной топологии $X_{Z' \cup \Lambda_n}^{\mathcal{A}_n}$ множествах $B_l^{n,n} \subset \widetilde{w(z''^{n,n}_l)}$, $1 \leq l \leq r(n, n)$, что $\{T_{Z' \cup \Lambda_n}^i B_l^{n,n} \mid 1 \leq i \leq le(z''^{n,n}_l), 1 \leq l \leq r(n, n)\}$ есть разбиение $X_{Z' \cup \Lambda_n}^{\mathcal{A}_n}$ -образующая.

Здесь, конечно, не предполагается, что $l_1 \neq l_2 \Rightarrow w(z''_{l_1}{}^{n,n}) \neq w(z''_{l_2}{}^{n,n})$.

Если на каком либо шаге мы имеем последовательность над $Z' \cup \Lambda x' = \{x'_i\}_{-\infty}^{\infty}$ и $x'_{i_0} = \lambda_{n_0}$ -вхождение символа Λ в нее. Тогда по построению существует такое m , что $\lambda_{n_0} \in \Lambda_m, \lambda_{n_0} \notin \Lambda_{m-1}$, такое $g \in N_{m-1}$, что $\lambda_{n_0} = f_{m-1}(g)$ и однозначно определяемое подслово $x x'_{i_0-l(m_0)} \dots x'_{i_0+r(m_0)} = B_1'^{m-1} \dots B_{R_{m-1}}'^{m-1} c^{m-1}(g) h_1 \dots h_t u_{K_m+1} \dots u_l$, где $g = u_1 \dots u_l$. Отрезок $[i_0 - l(m_0), i_0 + r(m_0)]$ будет называться зоной действия символа λ_{m_0} . При этом однозначно же определяемый по λ_{m_0} отрезок $[i_0 - l(m_0), i_0 - l(m_0) + \sum le(B_i'^{m-1}) + le(c^{m-1}) + \sum le(h_i)]$ будет называться изменяемым отрезком зоны действия λ_{m_0} .

Далее, если перекодирования начались с последовательности $x = \{x_i\} \in X_{Z'}$ и на этапе перекодирования $\phi_{n-1}(x)$ в $\phi_n(x)$ мы имели N_{n-1} -представление последовательности $\phi_{n-1}(x) \in X_{Z' \cup \Lambda_{n-1}} \{\{g_i^n\}_{i=-\infty}^{\infty}, 1 - p_0^n\}$ т.е., стало быть, и последовательность таких номеров $\dots p_{-k}^n, \dots, p_0^n, p_1^n, \dots, p_t^n$ что при каждом t $p_{t+1}^n - p_t^n = \sum_{i=1}^{l(g_t^n)} le(u_i^{g_t^n})$, где $g_t^n = u_1^{g_t^n} \dots u_{l(g_t^n)}^{g_t^n}$. Обозначим при каждом t через $p_t'^n$ номер $p_t^n + \sum_{i=1}^{K_n} le(u_i^{g_t^n}) - 1$. Отрезки вида $[p_t^n, p_t'^n]$ назовем изменяемыми отрезками n -ого шага. Это соответствует определению перекодирований. По определению K'_n имеем $\frac{p_t'^n - p_t^n}{p_{t+1}^n - p_t^n} < \frac{1}{K_n}$.

Таким образом, для любого $x \in X_{Z'}^A$ существует такая последовательность последовательностей $sq(x) = \{\{(p_t^n, p_t'^n)\}_{t=-\infty}^{\infty}\}_{n=2}^{\infty}$, что при любых t и n имеет место $\frac{p_t'^n - p_t^n}{p_{t+1}^n - p_t^n} < \frac{1}{K_n}$ и каждый отрезок $[p_t'^{n+1}, p_t^{n+1}]$ содержит полностью ровно K_n отрезков вида $[p_{t'}^n, p_{t'}'^n]$. Далее, для любых $m > n, t, t'$ либо $[p_t^n, p_{t+1}^n] \cap [p_{t'}^m, p_{t'}'^m] = \emptyset$, либо $[p_t^n, p_{t+1}^n] \subset [p_{t'}^m, p_{t'}'^m]$

Для любой $\mathcal{A}$ -меры μ' при любом фиксированном n $\mu'(\{x \mid \exists t 0 \in [p_t^n, p_t'^n]\}) < \frac{1}{K_n}$, как видно из вышесказанного. В соответствии с нашим выбором K_n и леммой Бореля – Кантелли из этого следует, что множество $St = \{x \mid N = N(x) : n > N \Rightarrow \forall t 0 \notin [p_t^n, p_t'^n]\}$ имеет меру 1 для

любой $\mathcal{A}$ -меры, ибо $\sum_n \frac{1}{K_n} < \infty$. Из иерархических свойств последовательности $sq(x)$ следует, что если $x \in St$, то для последовательности представлений $\phi_n(x)$ в словах, отвечающих алфавитам Z''^n_n , в соответствии с выражением $\phi_{n-1}(x)$ через N_{n-1} -слова существует такая последовательность $g'_n, g'_n \in Z''^n_n, n > N(x)$, что $g'_n = \phi'_n(g_0^n)$, и что соответствующая пара $(w(g'_n), \{\{n_j^i\}_{j=0}^{v(i)}\}_{i=1}^n)$ принадлежит всем алфавитам $Z''^n_m, m > n$ и является Z''^n_m -компонентой соответствующего элемента g'_m . Z''^n_m -представления $\phi_m(x)$ для каждого $m > n$. Выделим теперь подмножество $St' \subset St$, состоящее из таких x , для которых $p_1^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку все наши кодирования инвариантны относительно сдвига, рассуждая так же, как для случая марковских множеств, видим, что St' тоже полной меры для любой $\mathcal{A}$ -меры. Разумеется, при каждом $n > N(x)$ имеет место $p_0^n > p_0^{n+1}$. Если $x \in St'$, то последовательность g'_n в соответствии с вышедоказанным определяет последовательность $y \in X_{Z' \cup \Lambda}$, которая будет обозначаться $\phi_\infty(x)$. ϕ_∞ -биективное отображение, поскольку рассмотрением зон действия всех символов Λ , входящих в y , можно найти $N(x)$ -минимальное n , при котором изменяемые отрезки зон действия элементов Λ_n , не содержат 0. По каждому же слову g'_n можно последовательными применениями отображений ϕ_k^{-1} к компонентам возникающих слов однозначно восстановить координаты x с теми же номерами в последовательности, что номера символов g'_n во всех $\phi_m(x)$ с $m > n$. Множество St' и будет взято в качестве $X''^{\mathcal{A}}_{Z'}$. Инвариантность St' относительно T очевидна.

Обратимся теперь к алфавитам Z'^k_m . Из построения ясно, что найдется такое $V(k)$, что при $m > V(k)$ $Z'^k_m = Z'^k_{V(k)}$. Обозначим $Z'^k_{V(k)} = \{(a_1^{l,k} \dots a_{s(l,k)}^{l,k}, \{\{n_j^{i,k,l}\}_{j=0}^{v(i,k,l)}\}_{i=1}^k)\}_{l=1}^{d(k)}$, где $a_r^{l,k} \in R_{k-1}^2(Z' \cup \Lambda)$. Построим минимальный марковский компакт $Y^{\circ \mathcal{A}}$. В качестве пространств состоя-

ний D_k^A будут братья пространства троек

$$\{(a_1^{l,k+1} \dots a_{s(l,k+1)}^{l,k+1}, \{\{n_j^{i,k+1,l}\}_{j=0}^{v(i,k+1,l)}\}_{i=1}^{k+1}, b\}_{l=1}^{k+1} = \\ \{(u, t, b)\}, (u, t) \in Z'_{V(k+1)}^{k+1}, 0 \leq b < v(k+1, k+1, l)\}.$$

Опишем матрицы M_k^A :

$$M_k^A((u, t, b), (u', t', b')) = 1, (u', t', b') \in D_{k+1}^A,$$

$$\text{если } (u, t, b) = (a_1^{l,k+1} \dots a_{s(l,k+1)}^{l,k+1}, \{\{n_j^{i,k+1,l}\}_{j=0}^{v(i,k+1,l)}\}_{i=1}^{k+1}, b), 1 \leq l \leq r(k+1), \\ (u', t', b') = (a_1^{l',k+2} \dots a_{s(l',k+2)}^{l',k+2}, \{\{n_j^{i,k+2,l'}\}_{j=0}^{v(i,k+2,l')}\}_{i=1}^{k+2}, b'), 1 \leq l' \leq r(k+2), \\ a_{n_{b'}^{k+2,k+2,l'}+1}^{l',k+2} \dots a_{n_{b'+1}^{k+2,k+2,l'}}^{l',k+2} = a_1^{l,k+1} \dots a_{s(l,k+1)}^{l,k+1},$$

при каждом $i : 1 \leq i \leq k+1$ имеет место

$$\{n_j^{i,k+1,l}\}_{j=0}^{v(i,k+1,l)} = \{n_j^{i,k+2,l'} - n_{b'}^{k+2,k+2,l'} \mid n_{b'}^{k+2,k+2,l'} \leq n_j^{i,k+2,l'} \leq, \\ n_{b'+1}^{k+2,k+2,l'}\}$$

$M_k^A((u, t, b), (u', t', b')) = 0$ в противном случае. Минимальность вытекает из определения отображения ϕ'_n . Теперь построим отображение f'_A . Если $x \in X''_{Z'}^A = St'$, то рассмотрим соответствующую последовательность $g'_n, g'_n \in Z''_n, n > N(x)$. Из вышедоказанного следует, что $g'_n \in Z''_{V(n)}^n$ и что для любого $n > N(x)$ существует такое $j_0(n)$, что $R(g'_{n+1}, g'_n, j_0(n), p_0^{n+1} - p_0^n)$, если считать, что $g'_n \in Z''_{V(n+1)}^n$. Разумеется, с тем же свойством последовательность однозначно продолжается в область $n \leq N(x)$. В этом случае мы считаем, что $g'_n \in Z''_{V(N(x)+1)}^n$. Полагаем теперь $f'_A(x) = \{(u_n, t_n, b_n)\}_{n=1}^\infty$, где $(u_n, t_n) = R_n^2(g'_{n+1}), b_n = j_0(n), 1 \leq n \leq \infty$. Биективность этого отображения вытекает из определения n - проекции и множества St' - точнее, если $x \in St'$ фиксирована, то для каждого n_0 существует такое $M_x(n_0)$, что отрезок $\{(u_n, t_n, b_n)\}_{n_0-1}^{M_x(n_0)}$

однозначно определяет g'_{n_0} . Очевидно и то, что удовлетворяются все остальные требования к $f'_{\mathcal{A}}$. $Y^{\circ'}_{\mathcal{A}} = f'_{\mathcal{A}}(St')$. Теорема 2 доказана.

Построенный минимальный марковский компакт весьма избыточен. Он может, например, быть использован для кодирования процессов с континуальным множеством состояний типа процесса, построенного в [53].

Приведем пример. Пусть при каждом $m \geq 0$ W_m есть, по определению $R_m^2(Z')$. Как уже говорилось, отображение $R_m^2 : Z' \rightarrow W_m$ допускает единственное продолжение на $Z' \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} W_i$. Обозначим это продолжение тоже через R_m^2 . Пусть $W_m^0 = \{w \in W_m : w < 2^{m+1}\}$. Опишем марковский компакт.

$$D_k = \{(\{a_i\}_{i=1}^{2^k}, b), a_i \in W_k, 1 \leq i \leq 2^k, b = 1, 2\}, k = 1, 2, \dots$$

$$M_k((\{a_i\}_{i=1}^{2^k}, b), (\{c_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}, b')) = 1, \text{ если}$$

либо $b' = 1$ и $\{a_i\}_{i=1}^{2^k} = R_k^2(\{c_i\}_{i=1}^{2^k})$, либо $b' = 2$ и $\{a_i\}_{i=1}^{2^k} = R_k^2(\{c_i\}_{i=2^{k+1}+1}^{2^{k+1}})$;

$$M_k((\{a_i\}_{i=1}^{2^k}, b), (\{c_i\}_{i=1}^{2^{k+1}}, b')) = 0 \text{ в противном случае.}$$

Упорядочения в D_k подчиним лишь требованию

$$(v, 1) \prec (v, 2), (v, b) \in D_k.$$

Обозначим через Y^{pr} соответствующий марковский компакт, через U^{pr} - адическое преобразование, через Y'^{pr} (обозначение гл.1) — наибольшее двусторонне инвариантное относительно U^{pr} подмножество Y^{pr} . Обозначим через Y_2 стационарный марковский компакт с $D = \{1, 2\}$ и $M(i, j) = 1, i, j \in D$. Аналогичны вышеописанным U_2 и Y'_2 . Существует естественная проекция $P : Y^{pr} \rightarrow Y_2$, причем $Y'^{pr} = P^{-1}(Y'_2)$ и на этих множествах $P \circ U^{pr} = U_2 \circ P$. Пусть Z_2 — множество целых 2-адических чисел. Тогда существует естественное вложение $N \subset Z_2$. Рассмотрим

второй экземпляр N и абстрактное объединение $Z^u = N \cup Z_2$. Пусть T_u — сдвиг Бернулли в $X_{Z^u} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} (Z^u)_i$, $Z_i^u = Z^u$, $-\infty < i < \infty$. Тогда легко проверить, что топологически $U^{pr} \mid_{Y'^{pr}} \simeq U_2 \mid_{Y'_2} \times T_u$, что упрощает классификацию центральных мер. Y'^{pr} содержит различные U^{pr} -инвариантные множества (подчас сравнительно с Y'^{pr} очень "маленькие"), для которых тоже возможны подобные представления. Если $y = \{(u_1, b_1), \dots, (u_k, b_k) \dots\} \in Y'^{pr}$ и $1 < k' < k$, то (k, k') - парой мы назовем такие две функции $c_y(k', k), d_y(k', k)$ с натуральными значениями, что

- 1) для любых $k'' < k' < k$ имеет место $c_y(k'', k) = c_y(k'', k') + c(k', k) - 1$, $d_y(k'', k) = c_y(k'', k) + 2^{k''} - 1$,
- 2) $c_y(k, k) = 1, d_y(k, k) = 2^k$,
- 3) $c_y(k, k+1) = 1$, если $b_k = 1$, $c_y(k, k+1) = 2^k + 1$, если $b_{k+1} = 2$.

Обозначим $Y_f'^{pr} = \{y = \{u_i, b_i\}_{i=1}^{\infty} \in Y'^{pr} : \forall i \exists M(i), u_{M(i)}(j) \in W_{M(i)}^{\circ}, \text{ если } c_y(i, M(i)) \leq j \leq d_y(i, M(i))\}$, где c_y, d_y — $i, M(i)$ — пара. Здесь $u_{M(i)}(j)$ — j -ый символ слова $u_{M(i)}$. Обозначим через T_N сдвиг в $X_N = \prod_{i=-\infty}^{\infty} N_i, N_i = N \forall i$. Тогда $U^{pr} \mid_{Y_f'^{pr}} \simeq U_2 \mid_{Y'_2} \times T_N$. Подобным образом можно промоделировать многие динамические системы.

ГЛАВА 4. ВЫЧИСЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С
ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ, ВЕРОЯТНОСТНЫМИ
И ЭНТРОПИЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ КОНКРЕТНЫХ
ПОДСТАНОВОЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§1. Топологическое перемешивание и оценки эксцесса.

Пусть $T : X \rightarrow X$ -гомеоморфизм топологического пространства X . Динамическая система, порождаемая этим гомеоморфизмом, называется топологически перемешивающей, если для любых двух открытых множеств U и V найдется n , такое что если $N > n$, то $t^N U \cap V \neq \emptyset$.

В [88],[60],[89] изучался вопрос о топологическом перемешивании для подстановочных динамических систем. Мы будем рассматривать подстановочные динамические системы над алфавитом из двух символов $Z_* = \{1, 2\}$. Будут выделяться динамические системы, обладающие следующими свойствами.

Свойство 1. При любом n $|\omega_{\mathcal{A}}^n(1)|$ и $|\omega_{\mathcal{A}}^n(2)|$ взаимно-просты.

Свойство 2. Пусть μ_1 -мера цилиндрического множества $\tilde{1}$ для подстановочной динамической системы. Обозначим через $v(n)$ число $\max\{|A|_1 - \mu_1 n \mid |A| = n \text{ и } A \text{ -допустимо}\}$, через $u(n) - \max\{\mu_1 n - |A|_1 \mid |A| = n \text{ и } A \text{ -допустимо}\}$. Тогда $v(n) \rightarrow \infty$ и $u(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Свойство 3. Существует такое k , что $\omega_{\mathcal{A}}^k(1) = E_1 a_1 D_1 b_1, \omega_{\mathcal{A}}^k(2) = E_2 a_2 D_2 b_2$, где $a_i, b_i \in Z_*$, $|D_1 b_1| = |D_2 b_2|, |D_2 b_2|_1 = |D_1 b_1|_1$, и либо $a_1 = a_2$, либо $a_1 = b_2$ & $a_2 = b_1$.

Замечание. Вместо равенств $|D_1 b_1| = |D_2 b_2|, |D_2 b_2|_1 = |D_1 b_1|_1$ можно требовать их аналогов для начал слов. Величину $|A|_1 - \mu_1 |A|$, упоминаемую в формулировке свойства 2, принято называть эксцессом слова A .

Теорема 1. Если подстановочная динамическая система обладает

свойствами 1), 2), 3) , то она топологически перемешивает.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $M > 0$ существует такое натуральное N_M , что при любом $n > N_M$ найдется такое допустимое слово $a_1^{n,M} \dots a_{n+|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M}$, что $a_1^{n,M} \dots a_{|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M} = a_{n+1}^{n,M} \dots a_{n+|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|}^{n,M}$. Ясно, что в последней формулировке можно всюду заменить $\omega_{\mathcal{A}}^M(2)$ на $\omega_{\mathcal{A}}^M(1)$, а также требовать, чтобы при любом $n > N_M$ выполнялось либо одно, либо другое.

Если $a_1 = a_2$, то достаточно показать, что найдется такое N'_M , что для всякого $n > N'_M$ существует такое допустимое слово U_n^M , что $|\omega_{\mathcal{A}}^{k+M}(U_n^M)| = n$. Действительно, в этом случае для некоторого символа $c^* \in Z_*$ слово c^*U_n и, значит, слово $\omega_{\mathcal{A}}^k(c^*U_n^M)$ будет допустимым. Ясно, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(U_n^M) = Ra_x Dxb_x$ и $\omega_{\mathcal{A}}^k(c^*) = E_y a_y D_y b_y$. Очевидно, что можно взять N'_M в качестве N_M и слово $\omega_{\mathcal{A}}^M(a_y D_y b_y R a_x)$ в качестве V_n^M .

Существование N'_M доказывается (по аналогии с [89]) следующим образом. От слова U_n^M требуется, чтобы $|U_n^M|_1 |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + |U_n^M|_2 |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| = n$. По свойству 1) существуют такие целые $X, Y (X_n^M, Y_n^M)$, что $|X| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|, |Y| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)|$ и $X|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + Y|\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| = 1$. Для произвольного n рассмотрим числа

$$\alpha_n^M = \left[\frac{\mu_1 n}{\mu_1 |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + (1 - \mu_1) |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|} \right]$$

и

$$\beta_n^M = \left[\frac{(1 - \mu_1) n}{\mu_1 |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + (1 - \mu_1) |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|} \right].$$

Имеем $\alpha_n^M |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + \beta_n^M |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)| - n = R_n^M$, где $|R_n^M| < |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(1)| + |\omega_{\mathcal{A}}^{M+k}(2)|$. Но по свойству 2 ясно, что при достаточно больших n существуют допустимые слова U_n^M с $|U_n^M|_1 = \alpha_n^M - X R_n^M, |U_n^M|_2 = \beta_n^M - Y R_n^M$, чем и доказана теорема для случая $a_1 = a_2$. Заметим, что свойство 2 в

полном объеме не нужно. Достаточно требование лишь к одной из последовательностей $u(n), v(n)$ – легко изменить соответствующим образом выбор α_n^M, β_n^M .

Прежде чем рассматривать второй случай, сделаем одно тривиальное замечание. Поскольку все допустимые последовательности для нашей подстановки апериодичны (это следует, например, из свойства 2)), имеет место следующее. Если существует допустимое слово U с $|U| = s, |U|_1 = t$, то существует допустимое слово вида $eVf, e, f \in Z_*, e \neq f, |Vf| = s, |Vf|_1 = t$.

Существование N'_M для этого случая доказывается так же как и для предыдущего. По нашему замечанию можно считать, что для некоторых $\gamma, \delta \in Z_*$ слово $\gamma\Omega\delta$ -допустимо $U_n^M = \Omega\delta, \gamma \neq \delta$. В этом случае имеем: $\omega_{\mathcal{A}}^k(\gamma\Omega\delta) = E_{\gamma}a_{\gamma}D_{\gamma}b_{\gamma}\omega_{\mathcal{A}}^k(\Omega)E_{\delta}a_{\delta}D_{\delta}b_{\delta}, a_{\gamma} = b_{\delta}$, так что $|\omega_{\mathcal{A}}^M(D_{\gamma}b_{\gamma}\omega_{\mathcal{A}}^k(\Omega)E_{\delta}a_{\delta}D_{\delta}b_{\delta})| = n + |\omega_{\mathcal{A}}^M(D_{\gamma}b_{\gamma})|$ и мы видим, что можно взять $N'_M + |\omega_{\mathcal{A}}^M(D_{\gamma}b_{\gamma})|$ в качестве N_M . Теорема доказана.

Примеры. $\mathcal{A} = \{112, 12222\}$ [89], $\mathcal{A} = \{112, 22221\}$ Можно рассмотреть случай $\mathcal{A} = \{121, 22212\}$, не подпадающий под формулировку теоремы. Здесь топологическое перемешивание, тем не менее, тоже имеет место. Пусть $C = 12$: имеем $\omega_{\mathcal{A}}(C) = CC22C, \omega_{\mathcal{A}}(2) = 222C$. Обозначим $Z^C = \{2, C\}, \mathcal{A} = \{222C, CC22C\}$. Достаточно доказать, что для любого M найдётся такое N_M , что для любого $n > N_M$ найдётся такое допустимое слово подстановки $\omega_{\mathcal{A}^C} U_n^M$, что $|U_n^M|_2 |\omega_{\mathcal{A}}^M(2)| + |U_n^M|_C |\omega_{\mathcal{A}}^M(12)| = n$. Из структуры допустимых слов $\omega_{\mathcal{A}}$ видно, что это точная переформулировка условия топологического перемешивания. Существование же N_M вытекает из взаимной простоты $|\omega_{\mathcal{A}}^M(2)|$ и $|\omega_{\mathcal{A}}^M(12)|$ и свойства 2 для подстановки $\omega_{\mathcal{A}^C}$.

Свойство 2 для всех наших примеров может быть доказано с помощью результатов [89]. В [89] показано, как получать подобные утверждения

с помощью оценок и применения компьютера. Заметим, что рассуждения типа приведенных выше могут дать более простое доказательство результата [60] о топологическом перемешивании для $\mathcal{A} = \{001, 11100\}$. В самом деле, по леммам 5 и 6 [60] существует такое $c > 0$, что если $0 < 2M - N < c \log M$, то существует допустимое слово B с $|B|_0 = 2M, |B|_1 = N$. Но поскольку для $\omega_{\mathcal{A}}$ имеет место свойство 3 с $k = 2$, то достаточно доказать, что для любого l существует такое N_l , что уравнение $M|\omega_{\mathcal{A}}^{l+2}(00)| + N|\omega_{\mathcal{A}}^{l+2}(1)| = n$ с $n > N_l$ всегда имеет решение, для которого $0 < 2M - N < c \log M$. А это вполне аналогично вышедоказанному.

Основой доказательства того, что подстановка обладает свойством 2, может служить следующий результат *J.M.Dumont* и *A.Thomas* [90]

Теорема. Пусть σ – подстановка с примитивной матрицей M , второе по величине собственное число которой $\theta_2 < \theta$ (где θ – собственное число Перрона-Фробениуса) – вещественное, превосходящее 1 и модуль остальных собственных чисел. Пусть θ_2 имеет порядок $\alpha + 1$ в минимальном многочлене матрицы M и $\beta = \log_2 \theta_2$. Тогда для произвольного отображения f алфавита σ в R , такого, что его значения образуют вектор, ортогональный собственному подпространству M , отвечающему θ , и любой неподвижной точки σ $\{u_i\}_{i \geq 1}$ существует такая вещественная функция $F_f \in C[1, +\infty]$, что для всех $x \in [1, +\infty]$ $F_f(\theta x) = F_f(x)$ и

$$S^f(N) = \sum_{1 \leq i \leq N} f(u_i) = (\log_{\theta} N)^{\alpha} N^{\beta} F_f(N) + o(\psi(N)), \text{ где } \psi(N) = O((\log_{\theta} N)^{\alpha} N^{\beta}),$$

причем, если $F_f \not\equiv 0$, то F_f нигде не дифференцируема. Функция ψ зависит от матрицы M .

Сейчас будет доказана

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы и $F_f \not\equiv 0$. Тогда существуют такие константы $a > 0, b > 0, N_0 > 0$, что если $n > N_0$, то $\inf_N (S^f(N + n) - S^f(N)) < -a(\log_\theta n)^\alpha n^\beta < b(\log_\theta n)^\alpha n^\beta < \sup_N (S^f(N + n) - S^f(N))$.*

Доказательство. Мы будем использовать следующий

Факт. Пусть на отрезке $[u, v]$ задана непрерывная функция $h(x)$. Тогда найдётся такое δ , что если $\Delta < \delta$, то существует такое $x = x(\Delta) : u < x < x + \delta < v$, что $\frac{h(x+\Delta)-h(x)}{\Delta} = \frac{h(v)-h(u)}{v-u}$.

Факт очевиден (простейший случай $x \in (u, v) \Rightarrow h(x) > 0$ & $h(u) = h(v)$). Функция F_f не является константой ибо нигде не дифференцируема. Не ограничивая общности, можно считать, что существуют такие $x_1, x_2 > 0$, что $F_f(x_1) < F_f(x_2)$ и $F_f > 0$ на $[x_1, x_2]$. Обозначим $\frac{F_f(x_2)-F_f(x_1)}{x_2-x_1}$ через ϵ_1 и, задавшись некоторым $\epsilon : 0 < \epsilon < \epsilon_1$, обозначим $\epsilon_1 - \epsilon$ через ϵ_0 . Применив факт к промежутку $[x_1, x_2]$ и функции F_f , получим $x(\Delta)$ для каждого Δ . Очевидно, кроме того, что существует такое ϵ_2 , что если $\delta > \Delta > \frac{\delta}{\theta}$, то $[x(\Delta) - \epsilon_2, x(\Delta) + \Delta + \epsilon_2] \subset [u, v]$ и при $x \in [x(\Delta) - \epsilon_2, x(\Delta) + \epsilon_2]$ имеем $\frac{F_f(x_0+\Delta)-F_f(x_0)}{\Delta} > \epsilon_0$. Если целое l настолько велико, что $\theta^l \epsilon_2 > 1$, то для любого $n > \delta \theta^l$ найдутся такие натуральные $N'(n) = N'$ и l' , что $\delta > \frac{n}{\theta^{l'}} > \frac{\delta}{\theta}$, $\frac{N'}{\theta^{l'}} \in [x(\frac{n}{\theta^{l'}}) - \epsilon_2, x(\frac{n}{\theta^{l'}}) + \epsilon_2]$, что влечёт $F_f(N' + n) - F_f(N') > \epsilon_0 \frac{\delta}{\theta}$ (в силу свойств функции F_f). Заметим, что существуют такие c_1, c_2 , что $N' \in (c_1 n, c_2 n)$ (можно взять $c_1 = \frac{x(\frac{n}{\theta^{l'}}) - \epsilon_2}{\theta}$, $c_2 = \theta \frac{x(\frac{n}{\theta^{l'}}) + \epsilon_2}{\delta}$). Имеем

$$(4.1) \quad S^f(N' + n) - S^f(N') = (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta (F_f(N' + n) - F_f(N')) + \\ F_f(N' + n)(\log_\theta(N' + n))^\alpha (N' + n)^\beta - (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta + \omega,$$

где при достаточно больших n разность двух остаточных членов ω достаточно мала по модулю (ибо c_1, c_2 -фиксированы). Но второе слагаемое положительно и выражение (4.1) больше, чем $\frac{\epsilon_0 \delta}{\theta} (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta + \omega$. Стало

быть, существование константы b доказано. Существование константы a менее очевидно. Ясно, что из соотношения (4.1) вытекает существование a , если для любых $0 < c < \sup_x F_f(x)$, $Q > 0$ существуют $d, y \in [1, \theta]$, $d < y$, $\frac{F_f(d) - F_f(y)}{y - d} > Q$, $\inf_{x \in [d, y]} F_f(x) > c$, и такие $\Delta : \frac{\delta}{\theta} < \Delta < \delta$ (где δ по факту соответствует отрезку $[d, y]$) $c_1, c_2 > 0$ (которые, разумеется, велики, если велико A), что если n достаточно велико, то существуют такие $l', N' \in (c_1 n, c_2 n)$, что $\frac{\Delta}{\theta} < \frac{n}{\theta^{l'}} < \Delta$, $F_f(N' + n) - F_f(N') > Q \frac{\Delta}{\theta}$ и ω в соотношении (4.1) мала сравнительно с $(\log_\theta N')^\alpha N'^\beta$. Но существование d, y (влекущее все остальное, ибо можно считать, что $\min(c_1, c_2) > \frac{K}{\delta}$, где k не зависит от Q , и $(\log_\theta(N' + n))^\alpha (N' + n)^\beta - (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta < (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta [(1 + \frac{\Delta}{k})^\beta (1 + \frac{\log_\theta(1 + \frac{\Delta}{k})}{\log_\theta N'})^\alpha - 1] < R \Delta (\log_\theta N')^\alpha N'^\beta$, где R тоже не зависит от Q) вытекает из полученного в [90] представления вещественных чисел в подстановочной системе счисления. Пусть $A = \{a\}_{a=1}^m$ – алфавит подстановки σ и $\{u_i\}_{i \geq 1} = \sigma^\infty(1)$. Тогда выберем собственный вектор–строку Перрона–Фробениуса матрицы $M \{\epsilon(j)\}_{j=1}^m : \epsilon(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta^{-k} |\sigma^k(j)|$. Существуют такие $\lambda'(j) \in R, 1 \leq j \leq m$, что если D -префикс $\sigma^k(1)$ и $x_D^k = \theta^{-k} \sum_{j=1}^m \epsilon |D|_j$, то $\Phi(x_D^k) = x_D^\beta F_f(x_D^k) = \theta_2^{-k} \sum_{j=1}^m \lambda'(j) |D|_j$.

Ясно, что существует такое k_0 , такое l , и такие префиксы D_1, D_2 слова $\sigma^\infty(1)$, что $\theta^l([x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]) \subset (1, \theta)$. Поскольку при $\lambda'(j) \neq 0, |\frac{\lambda'(j)}{\epsilon(j)} (\frac{\theta}{\theta_2})^k|$ велико при больших k , а точки вида $x_{D'_b}^k$ с фиксированным $b \in A$ при достаточно больших k образуют в $[x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]$ ϵ -сеть со сколь угодно малыми ϵ , нам достаточно убедиться в том, что среди λ'_j есть отрицательные числа. Но это вытекает из ограниченности Φ на $[x_{D_1}^{k_0}, x_{D_2}^{k_0}]$. Теорема 2 доказана.

Все рассмотренные в данном параграфе подстановки, кроме последней, удовлетворяют условию теоремы 2. Для доказательства свойства 2 нужна функция $f : f(1) = \mu(\tilde{2}), f(2) = -\mu(\tilde{1})$. Разумеется, теорема 2 не даёт сколько нибудь точных оценок эксцесса для конкрет-

ных подстановок. Можно, конечно, оценивать $o(\log N^\alpha N^\beta)$ в теореме *Dumont'*а и *Thomas*, пользуясь ее доказательством, но ниже будет предложен несколько иной метод ([89]).

Рассмотрим произвольную примитивную подстановку над Z_* с матрицей $G = \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$, имеющей вещественные собственные числа $\theta_1 = \theta$ и $\theta_2 < \theta_1$. Условие теоремы *Dumont'*а и *Thomas* эквивалентно неравенству $cf = (e - 1)(d - 1)$ (откуда, в частности, следует, что $de - cf > 0$). Попытаемся оценить константы a и b из теоремы 1, комбинируя применение численного эксперимента и строгих оценок. Мы будем пользоваться тем, что для любой подстановки η из рассматриваемого класса имеет место следующее обстоятельство: если натуральные N_1, N_2 и их разность достаточно велики и $\mathcal{B}(N_1, N_2) = \{B_i\}_1^{R(N_1, N_2)}$ – множество всех η -допустимых слов длин от N_1 до N_2 , то уже на словах набора $\{\eta(B_i)\}_1^{R(N_1, N_2)}$ реализуется весьма большой разброс длин – большой сплошной интервал при $(e + f, c + d) = 1$ и для каждой длины n из этого интервала – большие значения $u(n)$ и $v(n)$ (в обозначениях формулировки свойства 2). Имеем $\mu(\tilde{1}) = \frac{c}{\theta + c - e}, \mu(\tilde{2}) = \frac{c}{\theta + f - d}, \theta = \frac{d - e + \sqrt{(d - e)^2 + 4cf}}{2}$. Пусть $\beta = \log_\theta \theta_2$. Предположим для простоты, что $(e + f, c + d) = 1$. Для произвольного N обозначим через d_1^N число $\frac{v(N)}{n^\beta}$, через d_2^N – $\frac{u(N)}{n^\beta}$. Если $0 < N'_1 < N'_2$, то обозначим $\min_{N'_1 \leq n \leq N'_2} d_1^n$ через $C_1(N'_1, N'_2)$, $\min_{N'_1 \leq n \leq N'_2} d_2^n$ через $C_2(N'_1, N'_2)$.

Рассмотрим произвольный промежуток $[N_1, N_2]$, где N_1, N_2 – такие натуральные, что $N_2 > \theta N_1 + \omega N_1^\beta c_2(N_1, N_2)$, где $\omega = c + d - e - f$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\omega > 0$. Пусть $N^* = [\theta N_2 - \omega C_1(N_1, N_2) N_2^\beta], \lambda = de - cf = \theta \theta_1 = \theta^{1+\beta}$

Лемма. $C_1(N_2 + 1, N^*) > C_1(N_1, N_2) - \frac{\lambda}{N_2^\beta}, C_2(N_2 + 1, N^*) > C_2(N_1, N_2)(1 - \omega C_2(N_1, N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1} \frac{1}{\theta})^\beta - \frac{\lambda}{N_2^\beta}$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{B}(N_1, N_2)$, $|A| = p$, $|A|_1 = s$, $|A|_2 = r$,

то для $\eta(A)$ имеем $|\eta(A)| = (e + f)p + \omega r, |\eta(A)|_2 = pf + r(d - f)$. Зафиксировав $k \in [N_2 + 1, N^*]$, будем просматривать все такие пары $r, p: p \in [N_1, N_2], \mu(\tilde{1}) - C_1(N_1, N_2)p^\beta \leq r \leq \mu(\tilde{1}) + C_2(N_1, N_2)p^\beta$, (чем заведомо обеспечивается существование допустимого слова A с $|A| = p$ и $|A|_2 = r$, ибо по определению u, v при фиксированном p для каждого r из промежутка $[\mu(\tilde{1})p - u(p), \mu(\tilde{1})p + v(p)]$ существует такое A —это стандартным образом выводится из существования допустимого слова вида A_1CA_2 с $|A_1| = |A_2| = p, |A_1|_2 = \mu(\tilde{1})p - u(p), |A_2|_2 = \mu(\tilde{1})p + v(p)$), что $(e + f)p + \omega r = k$, и изучать промежуток, пробегаемый величиной $fp + r(d - f) = k\frac{d-f}{\omega} - p\frac{de-cf}{\omega}$ (вопросы о $|\cdot|_1$ и о $|\cdot|_2$ в данном случае эквивалентны). Наши неравенства, связывающие p и r , эквивалентны следующим неравенствам, связывающим p и k : $((e + f) + \omega\mu(\tilde{1}))p - \omega C_1(N_1, N_2)p^\beta \leq k \leq ((e + f) + \omega\mu(\tilde{1}))p + \omega C_1(N_1, N_2)p^\beta$. Но, как легко видеть, коэффициент при p есть θ . Ясно также, что если выполнено последнее неравенство и $k \equiv (e + f)p \pmod{\omega}$, то существует такое допустимое A , удовлетворяющее предыдущему неравенству, что $\eta(A) = k$. Верно и обратное (также при условии выполненности последнего неравенства). Для оценки максимального и минимального p , удовлетворяющего нашим требованиям, оценим сначала решения уравнений $k = \theta p_1 - \omega C_1(N_1, N_2)p_1^\beta$ и $k = \theta p_2 + \omega C_2(N_1, N_2)p_2^\beta$. Пусть $\Delta_1 = p_1 - \frac{k}{\theta}, \Delta_2 = \frac{k}{\theta} - p_2$. Имеем: $\theta\Delta_1 - \omega C_1(N_1, N_2)(\frac{k}{\theta} + \Delta_1)^\beta = 0$ и $\Delta_1 > \frac{\omega C_1(N_1, N_2)(\frac{k}{\theta} + \Delta_1)^\beta}{\theta}$. Оценим Δ_2 : $\Delta_2 = \theta^{-1}\omega C_2(N_1, N_2)(\frac{k}{\theta} - \Delta_2)^\beta < \theta^{-1}\omega C_2(N_1, N_2)(\frac{k}{\theta})^\beta < \frac{\omega k}{\theta^2} \frac{N_2}{\theta}^{\beta-1} C_2(N_1, N_2)$. Подставляя мажоранту в правую часть равенства для Δ_2 , получаем оценку снизу: $\Delta_2 \geq \theta^{-1}\omega C_2(N_1, N_2)(\frac{k}{\theta} - \omega C_2(N_1, N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1} \frac{k}{\theta^2})^\beta = \theta^{-1}(\frac{k}{\theta})^\beta \omega C_2(N_1, N_2)(1 - \omega C_2(N_1, N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1} \frac{1}{\theta})^\beta = \frac{\omega}{\lambda} \theta^{-1} k^\beta \omega C_2(N_1, N_2)(1 - \frac{\omega}{\theta} C_2(N_1, N_2)(\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1})^\beta$. Поскольку должны быть учтены требования делимости, имеем $p_{\max} \geq [p_1] - \omega + 1, p_{\min} \leq \omega + [p_2]$. Поэтому $|\eta(A)|_{2\min} \leq k\frac{d-f}{\omega} - (p_1 - \omega)\frac{de-cf}{\omega}, k\mu(\tilde{2}) - |\eta(A)|_{2\min} \geq cf - de + \Delta_1\frac{de-cf}{\omega} = cf -$

$de + \frac{\theta\theta_1\Delta_1}{\omega} > cf - de + C_1(N_1, N_2)k^\beta \frac{\theta_1}{\theta^\beta} = cf - de + C_1(N_1, N_2)k^\beta$, откуда вытекает первое утверждение леммы. Далее, $|\eta(A)|_{2\max} \leq k \frac{d-f}{\omega} - (p_2 + \omega) \frac{de-cf}{\omega}$, $-k\mu(\tilde{2}) + |\eta(A)|_{2\max} \geq cf - de + \Delta_2 \frac{de-cf}{\omega} + k(\frac{d-f}{\omega} - \mu(\tilde{2}) - \frac{de-cf}{\omega\theta}) > -\lambda + k^\beta C_2(N_1, N_2)(1 - \omega C_2(N_1, N_2)^{\beta-1} \frac{1}{\theta})^\beta$, откуда вытекает второе утверждение леммы.

Разумеется, любой промежуток вида N_1, N' с $N' > N_2$ удовлетворяет нашему первоначальному требованию. Поэтому получившийся промежуток N_1, N^* снова может быть взят в качестве исходного для процедуры, аналогичной проделанной выше. Таким образом, зафиксировав N_1 , можно бесконечно много раз итерировать преобразование $N_2 \rightarrow N^*$ и получить экспоненциально растущую последовательность $N_2^0 = N_2, N_2^1 = N^*, N_2^2, N_2^3, \dots$. Поэтому лемма даёт возможность оценить снизу $C_1(N_1, \infty), C_2(N_1, \infty)$, если провести численный эксперимент по приближённому вычислению $C_1(N_1, \infty)$ и $C_2(N_1, \infty)$ для надлежаще выбранного начального интервала $[N_1, N_2]$. Из теоремы 2 следует, что такой интервал найдётся.

Заметим, что последовательности d_1^N, d_2^N ограничены сверху. Это следует из того, что для слов вида $A = \eta^k(b), b \in Z_*$ имеет место $|\frac{|A|_{2-\mu(\tilde{2})}|A|}{|A|^\beta}| < c$, где c не зависит от k и b , в то время как всякое допустимое слово B может быть представлено как конкатенация $\eta^{n_1}B_1\eta^{n_2}B_2\dots\eta^{n_s}B_s$, где для некоторого $t \leq s$ $1 \leq i_1 < i_2 \leq t \Rightarrow n_{i_1} < n_{i_2}$ и $t \leq i_1 < i_2 \leq s \Rightarrow n_{i_1} > n_{i_2}$ и все B_i – подслова слов вида $\eta(C), C \in Z_*$. Поскольку для каждого i : $\frac{N_2^{i+1}}{N_2^i} > \theta - \frac{1}{N_2} - \omega C_1(N_1, N_2)(N_2)^{\beta-1} = \nu$, имеем (если N_2 достаточно велико) по лемме

$$(4.2) \quad C_1(N_1, \infty) > C_1(N_1, N_2) - \frac{\lambda}{N_2^\beta} \frac{1}{1 - \nu^{-\beta}}.$$

Далее, очевидно, если α мало и $0 < \beta < \gamma < 1$, то $(1 - \alpha)^\beta > 1 + \beta \ln(1 - \alpha)$

и $\frac{\ln(1-\gamma\alpha)}{1-\alpha} < \gamma$. Поэтому из леммы следует, что

(4.3)

$$C_2(N_2 + 1, N^*) > C_2(N_1, N_2)(1 + \beta \ln(1 - \omega C_2(N_1, N_2)) \frac{N_2^{-\beta}}{\theta} \frac{1}{\theta}) - \lambda N_2^{-\beta},$$

$$C_2(N_1, \infty) > C_2(N_1, N_2) - \frac{\lambda}{N_2^\beta} \frac{1}{1 - \nu^{-\beta}} + C_2(N_1, N_2) \beta \ln(1 - \alpha) \frac{1}{1 - \nu^{\beta-1}},$$

где $\alpha = \omega C_2(N_1, N_2) (\frac{N_2}{\theta})^{\beta-1} \frac{1}{\theta}$.

Поэтому численный эксперимент по оценке параметров a, b из теоремы 2 может осуществляться следующим образом: сначала осуществляется выбор N_1, N_2 , затем — исследование с помощью ЭВМ всех допустимых слов соответствующих длин и применение неравенств (4.2) и (4.3). При алгоритмизации вычислений полезно приводимое ниже рекуррентное соотношение.

Пусть $A = a_1 \dots a_k$ — произвольное слово над Z_* . Обозначим $A(s) = a_s, M_A^{s,v} = |a_1 \dots a_{s-1}|_v, N_A^{s,v} = |a_{s+1} \dots a_k|_v, v = 1, 2; 1 \leq s \leq k$ (для пустых слов эти величины обращаются в 0). Назовем четвёрку $(a, b, m, n), a, b \in Z_*; m, n \in N$ реализуемой, если существует допустимое слово (для подстановки η) $A = b_1 \dots b_{m+n}, b_1 = a, b_{m+n} = b; |A|_1 = m, |A|_2 = n$.

Предложение. Четвёрка (a, b, m, n) реализуема тогда и только тогда, когда существует такая реализуемая четвёрка (a^o, b^o, m^o, n^o) и такие номера p, q , что

$$\eta(a^o)(p) = a, \eta(b^o)(q) = b,$$

$$(M_{\eta(a^o)}^{p,1} + m + N_{\eta(b^o)}^{q,1}, M_{\eta(a^o)}^{p,2} + n + N_{\eta(b^o)}^{q,2}) = G(m^o, n^o).$$

Предложение вполне очевидно. Оно может применяться не только в численном эксперименте, но и в строгих рассуждениях относительно функций $u(n), v(n)$ и распределения значений эксцесса $|A|_2 - \mu(\tilde{2})n$ для допустимых A с $|A| = n$. Для подстановки Рудина-Шапира подобные рассуждения дают возможность получить конкретные результаты о предельных распределениях.

§2. Изучение предельных распределений для подстановки Рудина-Шапиро.

Рассматривается задача о суммировании случайных величин, являющихся функциями, определенными на фазовом пространстве динамической системы, фактически эквивалентная общей задаче о суммировании случайных величин, составляющих стационарную в узком смысле последовательность.

Пусть (X, μ) -пространство Лебега и $T : X \rightarrow X$ -его метрический автоморфизм. Тогда, если задана произвольная измеримая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, то последовательность функций $f_n, f_n(x) = f(T^n x); -\infty < n < \infty$ можно рассматривать как стационарную последовательность случайных величин. Рассмотрим последовательность величин $s_n : s_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x), 0 \leq n < \infty$ и зададимся вопросом о том, существует ли такая последовательность коэффициентов σ_n , что распределения величин $\frac{s_n}{\sigma_n}$ стремятся к некоторому предельному. Частным случаем является известная задача о проверке того, имеет ли место для некоторого достаточно регулярного процесса (скажем процесса, порожденного автоморфизмом Бернулли) центральная предельная теорема. Вообще говоря, предельное распределение может и не существовать. В этом случае резонно рассматривать вопрос (всегда привлекавший большое внимание специалистов по теории вероятностей) о том, существуют ли такие последовательности натуральных чисел $\{n_l\}$ и коэффициентов $\{\sigma_l\}$, что предел имеют распределения s_{n_l}/σ_l .

Мы будем предполагать, что в X выделена конечная образующая [50] и, тем самым, мы имеем дело с реализацией T в виде сдвига в пространстве двусторонних последовательностей. При этом будем считать, что f зависит лишь от нулевой координаты, то есть пробегает дискретное множество значений. Таким образом, можно счи-

тать, что задан алфавит $Z_* = \{1, \dots, k\}$ и алфавиты $Z_i = Z, -\infty < i < \infty, X = \Pi_{-\infty}^{\infty}, T(\{\dots x_{-i}, \dots, x_0, \dots, x_i, \dots\}) = \{y_i\}_{-\infty}^{\infty}, y_i = x_{i+1}, -\infty < i < \infty$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ -набор вещественных чисел и $f(\{\dots x_{-i}, \dots, x_0, \dots, x_i, \dots\}) = \alpha_{x_0}$. Пусть $A = u_0 \dots u_m$ -слово над алфавитом Z и $\tilde{A}$ -соответствующее ему цилиндрическое множество: $\tilde{A} = \{\{\dots x_{-i}, \dots, x_0, \dots, x_i, \dots\} : x_j = u_j, 0 \leq j \leq m\}$. Обозначим через $\Delta(A)$ число $\sum_{i=0}^m \alpha_{u_i}$. Тогда дискретная случайная величина ξ_{m+1} , принимающая значения $\Delta(A)$ с вероятностями $\mu(\tilde{A})$, где A пробегает множество всех слов над Z_* длины $m+1$, распределена так же, как и s_m . Значит, для нашего случая вопрос сводится к изучению ξ_{m+1} . Осмысленно изучать разброс и иные характеристики самих величин s_m . Особый интерес подобные рассмотрения имеют для подстановочных динамических систем. Применения к вопросу о топологическом перемешивании уже обсуждались. Эти системы, среди которых встречаются системы с дискретным спектром, весьма далеки от регулярности— координатные случайные величины f_i сильно зависимы между собой. Разброс значений ξ_{m+1} имеет асимптотику $O((m+1)^\lambda \log(m+1)^\gamma)$, где λ, γ зависят от подстановки. Для изучаемой с этой точки зрения в [91] и в данной работе подстановки Рудина-Шапиро $\lambda = 0.5$. Такое значение характерно для регулярных процессов, впрочем, эта подстановка, как уже говорилось, имеет двукратную лебеговскую компоненту в спектре. Основой для изучения сумм координатных случайных величин являются работы [92] и [93].

Будет использован принцип замены пространственных средних временными, что облегчается для подстановочных динамических систем по той причине, что они строго эргодичны. В связи с этим обстоятельством в рассмотрениях, связанных с s_n , используется обычно неподвижная точка подстановки. Если, например, $\omega_A(1) = 1B$, то определена односторон-

ная последовательность $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1)$. Уже обсуждались применения результатов [90] к изучению $\Delta(A)$ для слов-начал $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1)$. Наиболее хорошо этот вопрос, по-видимому, изучен для подстановки Рудина-Шапира. В [93] получены некоторые результаты о распределении последовательности значений $\Delta(A)$. С помощью метода генерации допустимых последовательностей посредством префиксного автомата некоторые результаты об асимптотике таких сумм для подстановок с дискретным спектром получены в [94].

Подстановке Рудина-Шапира соответствует алфавит $Z_* = \{1, \dots, 4\}$ и набор слов $\mathcal{A} = \{13, 43, 12, 42\}$. Для определения f полагаем $\alpha_i = \tau_i, \tau_1 = \tau_3 = 1; \tau_2 = \tau_4 = -1$. Пусть $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1) = v_0, v_1, \dots$. Рассмотрим последовательность $a(n) = \tau_{v_n}([27], [82] \text{ и пр.})$. Это и есть замечательная последовательность коэффициентов Рудина-Шапира, возникшая впервые в работах [95] и [96], посвященных проблеме равномерной минимизации тригонометрических сумм $\sum \epsilon_n e^{int}$, где $\epsilon_n = \pm 1$, но впоследствии получившая многочисленные важные применения как в анализе ([97], [98], и т.д.), так и в иных областях математики. Коэффициент $a(n)$ можно интерпретировать как $(-1)^{r(n)}$, где $r(n)$ – число вхождений слова 11 в двоичной записи числа n ([27], [92] и пр.). Иначе говоря, пусть двоичная запись числа n представляет собой соединение $A_1 B_1 \dots A_m B_m$, где все слова A_i, B_i , кроме, может быть, B_m – непусты, B_i состоят из одних нулей, A_i из одних единиц. Тогда имеем $r_n = \sum_{i=1}^m (|A_i| - 1)$.

Такое определение не удастся распространить на бесконечные 2-адические числа. В то же время, если бесконечное 2-адическое число X не есть $\dots 11 \dots 1$, то если обозначить через $v_n(X)$ число, образуемое первыми n цифрами числа X , то существует такое $N = N(X)$, что для $n > N$ $\frac{a(v_n(X)+1)}{a(v_n(X))}$ не зависит от n . Обозначим это число через $b(X)$. Величина $b(X)$ может быть проинтерпретирована в терминах теории косых произве-

дений над динамическими системами: динамическая система, порожденная подстановкой Рудина-Шапира, ([27], [82]) в соответствии с общей теоремой может быть представлена как косое произведение над одометром, или, иначе, над стационарным адическим преобразованием с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, причем соответствующий коцикл есть в точности $b(X)$. Стало быть, если одометр представить как сдвиг на группе целых 2-адических чисел $T : Z_2 \rightarrow Z_2$: $T(..., x_0) = (... , 0, 0, 1) + (... , x_0)$, то динамическая система, соответствующая подстановке Рудина-Шапира, метрически изоморфна $T_b : \{-1, 1\} \times Z_2 \rightarrow \{-1, 1\} \times Z_2$, $T_b(u, X) = (b(X)u, TX)$. Легко проверить, что

$$b(X) = -1 \Leftrightarrow X = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\}$$

.

В работе [92] изучалась асимптотика сумм $S(n) = \sum_0^n a(k)$. В [92] доказано, что $\sqrt{0.6} < \frac{S(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{6}$, причем значения $\frac{S(n)}{\sqrt{n}}$ всюду плотны в $[\sqrt{0.6}, \sqrt{6}]$. Для последовательностей $m_k = (5 \times 2^{2k} - 2)/3$ и $n_k = 2(2^{2k+2} - 1)/3$ в [92] доказано, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S(m_k)}{\sqrt{m_k}} = \sqrt{0.6}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S(n_k)}{\sqrt{n_k}} = \sqrt{6}$$

Мы покажем, как найти предельное распределение для последовательности $\{n_k\}$. То есть при каждом k мы будем изучать распределение μ_k значений $\frac{S(n+n_k)-S(n)}{2^{k-1}}$, $0 \leq n < \infty$, $\mu_k(\{x|x \leq d\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \#\{n', 0 \leq n' \leq n : \frac{S(n'+n_k)-S(n')}{2^{k-1}} \leq d\}$, $\infty < d < \infty$. Существование μ_k следует из одноэргодичности нашей динамической системы. Будет доказана сходимость μ_k к предельному распределению и описан метод получения с

помощью производящих функций уравнений для нахождения мер двоичных отрезков. Сама по себе сходимость μ_k к предельному распределению является фактом более грубым и может быть доказана для более широкого класса последовательностей. А именно, рассмотрим класс E последовательностей натуральных чисел $E = \{\{n_k\}_{k=0}^{\infty} : 0 \leq n_0 \leq 3; n_{k+1} = 4n_k + l_{k+1}; 0 \leq l_{k+1} \leq 3, k \geq 0\}$. Пусть, далее, для некоторой последовательности $\{n_k\} \in E$ определена последовательность μ'_k мер на прямой $\mu'_k(\{x|x \leq d\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \#\{n', 0 \leq n' \leq n : \frac{S(n'+n_k)-S(n')}{2^{k+1}} \leq d\}, \infty < d < \infty$

Предложение . Последовательность μ'_k слабо сходится к предельной мере $\mu' = \mu'(\{n_k\})$.

Доказательство. По определению E , для любых натуральных k и p существуют такие натуральные $R_{k,p} \leq 4^p$, что

$$n_{k+p} = R_{k,p} + 4^p n_k.$$

Легко доказать существование такой константы c , что при любых n, u и k ; $u < 4^{k+1}$ имеет место $|\frac{S(n+u)-S(n)}{2^k}| < c$. Пусть теперь на отрезке $[-c, c]$ задана какая либо непрерывная функция f с модулем непрерывности ω_f . Оценим разность $\mu_{k+p}(f) - \mu_k(f)$. Имеем по эргодической теореме

$$\begin{aligned} \mu_{k+p}(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n4^p} \sum_{i=0}^{n4^p-1} f\left(\frac{S(i+n_{k+p})-S(i)}{2^{k+p}}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n4^p} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{4^p-1} f\left(\frac{S(j \times 4^p + R_{k,p} + q + n_k 4^p) - S(j \times 4^p + q)}{2^{k+p}}\right) \end{aligned}$$

Но аргумент в последнем выражении есть

$$t = \frac{S(j \times 4^p + 4^p + n_k 4^p - 1) - S(j \times 4^p - 1 + 4^p)}{2^{k+p}} + \beta, |\beta| < \frac{2c}{2^k}$$

в силу определения c . Функция $S(n)$ удовлетворяет следующим соотношениям [92]

$$(4.4) \quad S(4n+3) = 2S(n), S(4n+1) = 2S(n).$$

Из них легко следует, что $t = \frac{S(j+n_k)-S(j)}{2^k}$, и, следовательно, $|\mu_{k+p}(f) - \mu_k(f)| < \omega_f(\frac{2^c}{2^k})$, откуда и вытекает наше утверждение.

Прежде, чем переходить непосредственно к вопросу о предельных распределениях, мы рассмотрим более простые модельные задачи о нахождении предельных распределений для последовательностей случайных величин и векторов, заданных производящими функциями [99], удовлетворяющими рекуррентным соотношениям определенного типа. Первое из изучаемых ниже бесконечных произведений рассматривалось в [100]. Впрочем, для подстановочных динамических систем в связи с иными задачами похожие бесконечные произведения тоже рассматривались ([101] и пр.)

Пусть $f(t) = 1 + t + t^2$, а полиномы $g_n(t)$ определяются следующими соотношениями

$$(4.5) \quad g_0(t) \equiv 1, g_{n+1}(t) = f(t)g_n(t^2).$$

Пусть $g_n(t) = q_0^n + \dots + q_{2^{n+1}-2}^n t^{2^{n+1}-2}$. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ дискретную меру $\nu_n : \nu_n(\{\frac{l}{2^{n+1}}\}) = \frac{q_l^n}{3^n}, 0 \leq l \leq 2^{n+1} - 2$. Докажем, что последовательность мер ν_n слабо сходится к некоей непрерывной мере ν . Легко понять, как мера ν_{n+1} получается из ν_n . Из нашего рекуррентного соотношения вытекает иное $g_{n+1}(t) = g_n(t)f(t^{2^n})$. А оно, в свою очередь, влечет следующее рекуррентное соотношение для мер: если $[e, f]$ -произвольный отрезок, то

$$\nu_{n+1}([e, f]) = (\frac{1}{3}(\delta(0) + \delta(0.5) + \delta(1)) * \nu_n)([2e, 2f]).$$

С помощью этого соотношения можно выразить значения ν_{n+k-1} на отрезках $[0, 2^{-k}]$, $(2^{-k}, 2 \cdot 2^{-k}]$, $\dots$, $((2^k - 1)2^{-k}, 1]$ через $\nu_n([0, 0.5])$ и $\nu_n(\{0\})$, причем каждое из этих 2^k выражений непрерывно зависит от обоих аргументов. Поэтому для доказательства слабой сходимости распределений достаточно доказать сходимость последовательностей значений

$\nu_n([0, 0.5])$ и $\nu_n(\{0\})$. Но если $\nu_n([0, 0.5]) = u, \nu_n(\{0\}) = v$, то имеем, в соответствии с нашим рекуррентным соотношением

$$\nu_{n+1}([0, 0.5]) = \frac{1 + u + v}{3}$$

и $\nu_n(\{0\}) = \frac{v}{3}$. Отсюда вытекает, что $\nu_n([0, 0.5]) \rightarrow 0.5, \nu_n(\{0\}) \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\max_{0 \leq i \leq 2^k - 1} \nu_{n+1}\left(\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right) \leq \frac{2}{3} \max_{0 \leq j \leq 2^{k-1} - 1} \nu_n\left(\left(\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}\right]\right)$$

(ибо при каждом i $\nu_{n+1}\left(\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{3}(\nu_n\left(\left(\frac{j_1}{2^{k-1}}, \frac{j_1+1}{2^{k-1}}\right]\right) + \nu_n\left(\left(\frac{j_2}{2^{k-1}}, \frac{j_2+1}{2^{k-1}}\right]\right))$ или слагаемое всего одно) – то есть предельная мера непрерывна. Если рассматривать ν_n как меры на прямой, то для их преобразований Фурье F_n имеет место следующее:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{3}(1 + e^{i\pi x \frac{1}{2}} + e^{i\pi x})F_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\phi(x)F_n\left(\frac{x}{2}\right)$$

. Поэтому, при любых, в том числе целых, значениях x $F_\infty(x) = \prod_0^\infty \frac{1}{3}\phi\left(\frac{x}{2^k}\right)$, чем однозначно определен ряд Фурье предельного распределения, рассмотренного как мера на окружности, откуда тоже следует существование и единственность предельного распределения.

Если рассмотреть уравнение (4.5) с $f(t) = t^{-1} + 1 + 2t^2$, то рекуррентное соотношение для последовательности мер на отрезке $[-0.5, 1]$, иллюстрируемое рисунком 1, будет выглядеть как $\nu_{n+1}([e, f]) = (\frac{1}{4}(\delta(0) + \delta(-0.5) + 2\delta(1)) * \nu_n)([2e, 2f])$. Дальнейшие рассуждения таковы же, как для предыдущего случая, только коэффициент $2/3$ в доказательстве непрерывности заменяется на $3/4$. Для предельного распределения, очевидно, $a = \frac{b+2a}{4}, b = \frac{b+2c+2a}{4}, c = \frac{b+c}{2}$. Т.е. $b = 2a = c, a = 1/5$. Если бы $g_0(t)$ было не 1 а иным полиномом $p_0 + p_1t + \dots + p_st^s$, то предельная мера была бы $\nu^* = (\sum_{i=0}^s p_i \delta(\frac{i}{2})) * \nu$.

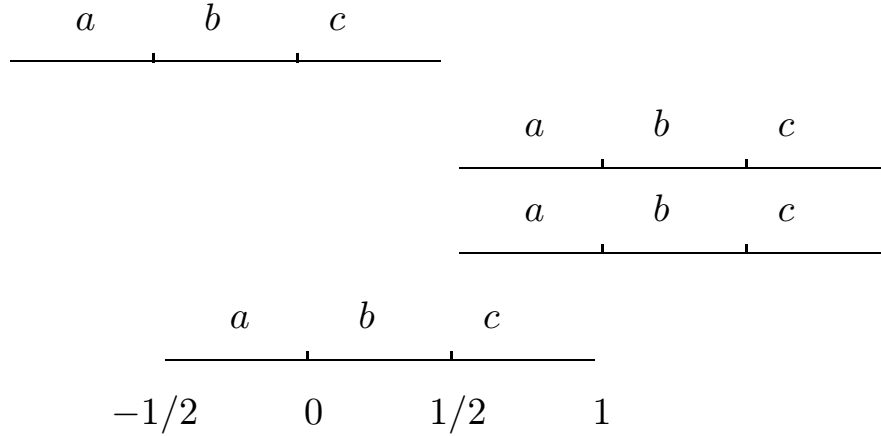


Рис. 4.1

В дальнейшем нас будут интересовать полиномиальные матрицы. Пусть $f = (f_1, \dots, f_k)$ -полиномиальный вектор, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k}(t) & \dots & a_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

—полиномиальная матрица. Рассмотрим последовательность полиномиальных векторов

$$f_n : f_0 = f, \dots, f_{n+1}(t) = A(t)f_n(t^2)$$

Поставим задачу нахождения для компонент векторов f_n надлежащих отрезков по аналогии с предыдущими рассмотрениями и проверки сходимости на них естественно определяемых мер к предельным распределениям. Сейчас будет рассмотрен частный случай, причем, отвлекаясь от векторов, мы будем изучать только матрицы.

Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} t + 1 & t^{-1} + t \\ 1 + t^{-1} & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательность полиномиальных матриц

$$B_n(t), B_{n+1}(t) = A(t)B_n(t^2), B_0(t) \equiv E. \text{ Пусть}$$

$$B_n(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^n(t) & b_{12}^n(t) \\ b_{21}^n(t) & b_{22}^n(t) \end{pmatrix}$$

, где $b_{ij}^n(t) = P_{s_n(i,j)}^n t^{s_n(i,j)} + \dots + P_{y_n(i,j)}^n t^{y_n(i,j)}$. Верно ли, что меры $\nu_{ij}^n : \nu_{ij}^n = (b_{ij}^n)^{-1} \sum_{k=s_n(i,j)}^{y_n(i,j)} P_k^n \delta(\frac{k}{2^n})$ сходятся к предельным на некоторых отрезках $[x^{ij}, y^{ij}]$, которые окажутся выпуклыми оболочками носителей предельных мер. Прежде всего надо понять, какие значения должны были бы принимать x^{ij}, y^{ij} . Имеем $B_{n+1}(t) = B_n(t)A(t^{2^n})$, стало быть:

$$\begin{aligned} \nu_{11}^{n+1}([e, f]) &= (b_{11}^{n+1}(1))^{-1} (b_{11}^n(1) ((\delta(1/2) + \delta(0)) * \\ &\quad \nu_{11}^n([2e, 2f]) + b_{12}^n(1) ((\delta(-1/2) + \delta(0)) * \nu_{12}^n([2e, 2f])), \\ \nu_{12}^{n+1}([e, f]) &= (b_{12}^{n+1}(1))^{-1} (b_{11}^n(1) ((\delta(-1/2) + \delta(1/2)) * \\ &\quad \nu_{11}^n([2e, 2f]) + b_{12}^n(1) (\delta(-1/2) * \nu_{12}^n([2e, 2f])), \\ \nu_{21}^{n+1}([e, f]) &= (b_{21}^{n+1}(1))^{-1} (b_{21}^n(1) ((\delta(1/2) + \delta(0)) * \\ &\quad \nu_{21}^n([2e, 2f]) + b_{22}^n(1) ((\delta(-1/2) + \delta(0)) * \nu_{22}^n([2e, 2f])), \\ \nu_{22}^{n+1}([e, f]) &= (b_{22}^{n+1}(1))^{-1} (b_{21}^n(1) ((\delta(-1/2) + \delta(1/2)) * \\ (4.6) \quad \nu_{21}^n([2e, 2f]) + b_{22}^n(1) (\delta(-1/2) * \nu_{22}^n([2e, 2f])) . \end{aligned}$$

Поскольку все b_{ij}^n -не нули, имеем соотношения для x^{ij} и y^{ij} :

$$\begin{aligned} (4.7) \quad y^{11} &= \frac{1}{2} \max(y^{11} + \frac{1}{2}, y^{12}), y^{21} = \frac{1}{2} \max(y^{21} + \frac{1}{2}, y^{22}), \\ y^{12} &= \frac{1}{2} \max(y^{11} + \frac{1}{2}, y^{12} - \frac{1}{2}), y^{22} = \frac{1}{2} \max(y^{21} + \frac{1}{2}, y^{22} - \frac{1}{2}); \\ x^{11} &= \frac{1}{2} \min(x^{11}, x^{12} - \frac{1}{2}), x^{21} = \frac{1}{2} \min(x^{21}, x^{22} - \frac{1}{2}), \\ x^{12} &= \frac{1}{2} \min(x^{11} - \frac{1}{2}, x^{12} - \frac{1}{2}), x^{22} = \frac{1}{2} \min(x^{21} - \frac{1}{2}, x^{22} - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Как и в одномерном случае, вероятностные борелевские меры $\nu_{ij}^0 > 0$ можно выбирать произвольно.

Общие подходы (вполне стандартные) к решению подобных систем неравенств будут описаны ниже. Сейчас просто приведем решение $x^{ij} = -\frac{1}{2}, 1 \leq i, j \leq 2, y^{ij} = \frac{1}{2}, 1 \leq i, j \leq 2$.

Докажем существование слабых пределов последовательностей $\nu_{11}^n, \nu_{12}^n, \nu_{21}^n, \nu_{22}^n$. Заметим сначала, что существуют пределы $b_{ik}^n(1)/b_{ij}^n(1)$. Действительно, $B_n(1) = A(1)^n = E \cdot A(1)^n$. Поскольку $A(1)$ -примитивная матрица для ее действия справа существует единственный положительный собственный вектор-строка, отвечающий наибольшему по модулю собственному числу λ - по теореме Перрона-Фробениуса (будет использована ее версия, содержащаяся в [102], предложение 6.3). Пусть вектор ϕ имеет координаты ϕ_1, ϕ_2 . Тогда очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{ik}^n(1)}{b_{ij}^{n+1}(1)} = \frac{\phi_k}{\lambda \phi_j}$. Для нашей матрицы имеем

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, (\phi_1, \phi_2) = (1, \lambda/2 - 1) = (1, \frac{\sqrt{17} - 1}{4}) = (1, \omega_1),$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\sqrt{17} + 1}{4} = \omega_2 \quad .$$

Очевидно, что нас интересуют лишь предельные меры для строки ν_{11}^n, ν_{12}^n , поскольку, если из наших соотношений по аналогии с одномерным случаем должны следовать существование и единственность предельных мер ν_{ij} , то $\nu_{11}^n = \nu_{21}^n, \nu_{12}^n = \nu_{22}^n$. Компоненты мер, отвечающие соотношению (4.6), представлены на рис.4.2. При этом отрезки для мер ν_{11}^n и ν_{12}^n изоб-

ражены "в масштабе 2:1".

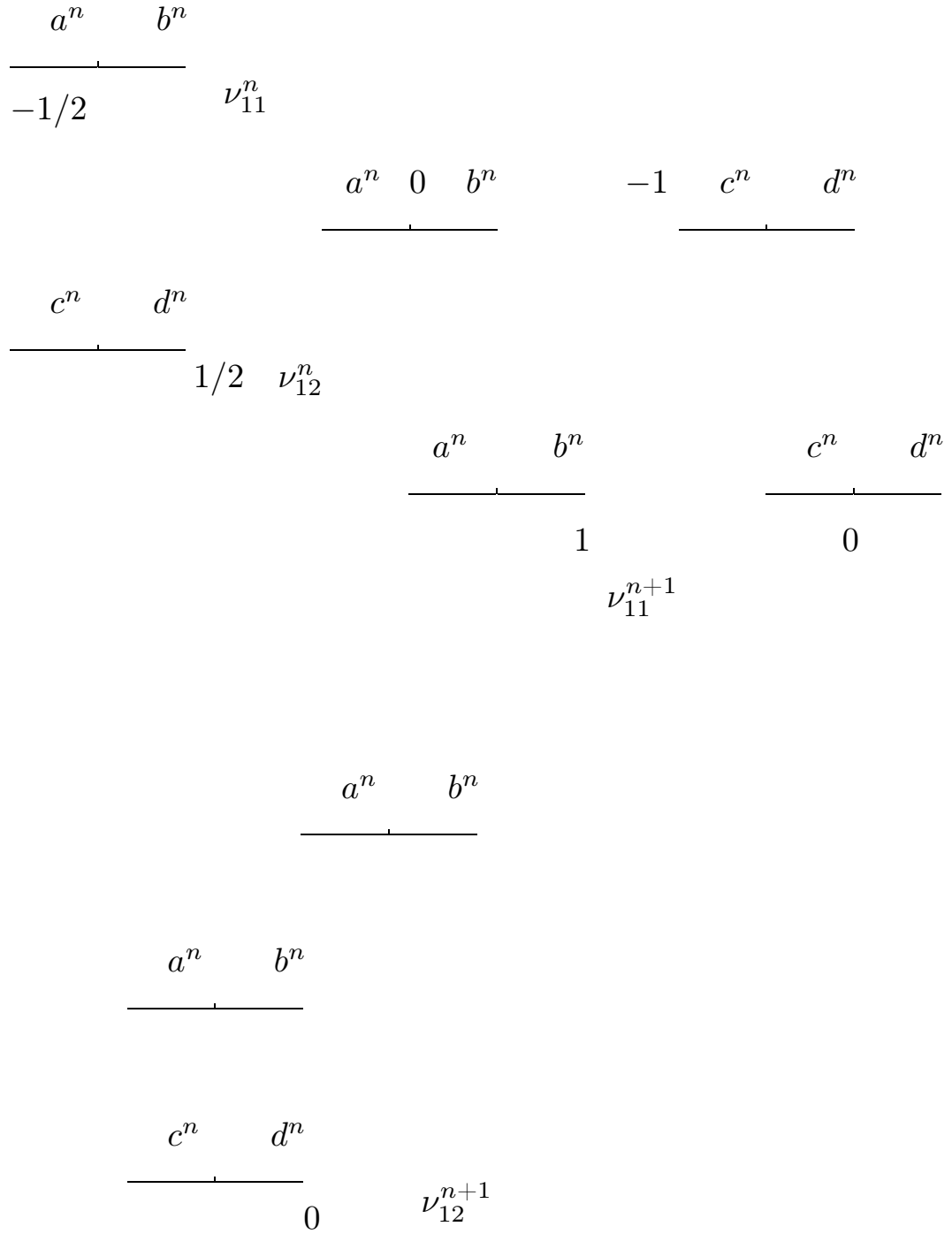


Рис. 4.2

Пусть $\nu_{11}^n(\{-1/2\}) = \Delta_1^n, \nu_{12}^n(\{-1/2\}) = \Delta_2^n, \nu_{11}^n([-1/2, 0]) = a^n, b^n = 1 - a^n, \nu_{12}^n([-1/2, 0]) = c^n, 1 - c^n = d^n$. Тогда для некоторого $\beta, 0 < \beta < 1$

имеем

$$\begin{aligned}
 a^{n+1} &= \frac{a^n + \Delta_1^n}{\lambda} + \frac{(d^n + 2c^n)\omega_1}{\lambda} + \chi_n^a, \\
 b^{n+1} &= \frac{2b^n + a^n - \Delta_1^n}{\lambda} + \frac{d^n\omega_1}{\lambda} + \chi_n^b, \\
 c^{n+1} &= \frac{(a^n + b^n + \Delta_1^n)\omega_2}{\lambda} + \frac{c^n + d^n}{\lambda} + \chi_n^c, \quad d^{n+1} = \frac{(a^n + b^n - \Delta_1^n)\omega_2}{\lambda} + \chi_n^d, \\
 (4.8) \quad \Delta_1^{n+1} &= \frac{\omega_1\Delta_2^n}{\lambda}, \quad \Delta_2^{n+1} = \frac{\omega_1\Delta_1^n + \Delta_2^n}{\lambda},
 \end{aligned}$$

где $\chi_n^{(\cdot)} < D\beta^n$. Очевидно, что $\Delta_n^i \rightarrow 0, i = 1, 2$ и достаточно усмотреть наличие положительного решения у соответствующей однородной системы. Но поскольку $a^n + b^n = c^n + d^n = 1$, имеем $d^n \rightarrow \frac{\omega_2}{\lambda}, c^n \rightarrow \frac{\omega_2+1}{\lambda}, d^n + 2c^n = c^n + 1 \rightarrow 1 + \frac{\omega_2+1}{\lambda}$ и $a_n \rightarrow (1 - 1/\lambda)^{-1}(1 + \frac{\omega_2}{\lambda})\frac{\omega_1}{\lambda} = 0.5$. Такой же предел имеет b^n . Доказательство слабой сходимости последовательностей ν_{11}^n, ν_{12}^n завершается так же, как в одномерном случае. Непрерывность предельных мер можно доказывать методом, аналогичным тому, который использовался в одномерном случае: из рисунка 4.2 легко видеть, что для любых натуральных n, k :

$$\begin{aligned}
 \max_{j=1,2; 0 \leq i \leq 2^k-1} \nu_{1j}^{n+1} \left(\left(\frac{i}{2^k} - \frac{1}{2}, \frac{i+1}{2^k} - \frac{1}{2} \right] \right) &< \frac{2 + \omega_1}{\lambda} \times \\
 \max_{j=1,2; 0 \leq i \leq 2^{k-1}-1} \nu_{1j}^n \left(\left(\frac{i}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}, \frac{i+1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Разумеется, и для этого случая (и вообще всегда, когда матрица $A(1)$ -примитивна) существование и единственность предельных распределений можно получить с помощью гармонического анализа. Мы проведем соответствующее рассуждение. Итак, сейчас будет доказано следующее

Предложение. Если $A(t) = (a_{ij}(t))$ -полиномиальная матрица, все коэффициенты всех полиномов которой неотрицательны, и матрица $A(1)$ -примитивна, то последовательности мер ν_{ij}^n слабо сходятся к предельным.

Доказательство. Для последовательности мер ν_{ij}^n может быть написана система, аналогичная (4.6). Применяя преобразование Фурье к правым и левым частям каждого из ее уравнений, умноженного на b_{ij}^{n+1} , получаем систему уравнений

$$\tilde{\nu}_{ij}^{n+1}(t)b_{ij}^{n+1} = \sum_l a_{lj}(\exp(\pi it))\tilde{\nu}_{il}^n(t/2)b_{il}^n$$

. Обозначим вектор $\{\tilde{\nu}_{ij}^s(t)b_{ij}^s\}_{j=1}^k, s = 1, 2, \dots, k$ через $U_i^s(t)$. Имеем $U_i^{n+1}(t) = U_i^n(t/2)A(\exp(\pi it))$. Поскольку (если λ по-прежнему собственное число Перрона-Фробениуса матрицы $A(1)$) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\{b_{ij}^s\}_{i,j=1}^k}{\lambda^s} = \{\phi_j \phi_i^*\}_{i,j=1}^k$, где $\{\phi_j\}, \{\phi_i^*\}$ -некоторые собственный вектор-строка и собственный вектор-столбец матрицы $A(1)$, отвечающие λ . Поэтому достаточно доказать сходимость при каждом t последовательности $\frac{U_i^n(t)}{\lambda^n}$, если i - фиксировано. Мы будем выводить эту сходимость не из начального определения мер ν_{ij}^n , а из полученного рекуррентного соотношения для преобразований Фурье в предположении, что матрица $\{\nu_{ij}^0\}$ это произвольная матрица борелевских вероятностных мер на прямой с компактным носителем (для простоты). Имеем для произвольного m :

$$\lambda^{-m-n}U_i^{m+n}(t) = \lambda^{-n}U_i^n(\frac{t}{2^m})\frac{A(\exp\frac{2\pi it}{2^m})}{\lambda} \dots \frac{A(\exp\frac{2\pi it}{2})}{\lambda}$$

Существуют такие $c > 0$ и δ , что при $0 < v < \delta$ имеет место неравенство $|a_{ij}(e^{iv})| < (1 + cv)a_{ij}(1), 1 \leq i, j \leq k$

Поэтому при фиксированном t найдутся такое m_0 и такая константа L , что если $x = \{x_i\}_{i=1}^k$ - некоторый вектор, то при любом $l > 0$ и $m > m_0$

$$\|x \frac{A(\exp\frac{2\pi it}{2^{m+l}})}{\lambda} \dots \frac{A(\exp\frac{2\pi it}{2^m})}{\lambda}\| < L\|x\|$$

, где $\|\{y_i\}\| = \max_i |y_i|$. Действительно, существует такое $L_0 > 0$, что $|x_i| < L_0\|x\|\phi_i^*, 1 \leq i \leq k$, и если $\pi t 2^{m_0} < v$, то выражение в левой части мажорируется величиной $L_0\|x\| \cdot \|\{\phi_i\}\|(1 + cv)(1 + \frac{cv}{2}) \dots (1 + \frac{cv}{2^l})$.

Обозначим через $v_i^m(t)$ вектор $\phi_i^* \{ \phi_j \} \frac{A(\exp \frac{2\pi i t}{2^m})}{\lambda} \dots \frac{A(\exp \frac{2\pi i t}{2})}{\lambda}$. Очевидно, с одной стороны, по вышедоказанному, что последовательность $v_i^m(t)$ есть последовательность Коши, следовательно, она сходится. С другой стороны, если m и n велики, то мало разнятся векторы $\lambda_{-m-n} U_i^{m+n}(t)$ и $v_i^m(t)$, поскольку из наших рекуррентных соотношений с очевидностью следует существование компакта, содержащего носители всех мер ν_{ij}^n , откуда вытекает и существование предела и его независимость от выбора $\{\nu_{ij}^0\}$. Предложение доказано.

Из рекуррентных соотношений типа (4.6) могут быть легко выведены соотношения, связывающие предельные меры, которые, оказывается, образуют вектор, самоподобный в смысле [103]. Обозначим через μ_{ij} меры $b_{ij}^1 \nu_{ij}^1 = a_{ij}(1) \nu_{ij}^1$. Тогда для любого отрезка $[e, f]$ имеем:

$$(4.9) \quad \phi_j \nu_j([e, f]) = \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \phi_i \mu_{ij} * \nu_i \right)([2e, 2f]); 1 \leq j \leq k$$

, где λ -собственное число Перрона-Фробениуса и $\{\phi_i\}$ - соответствующий собственный вектор-строка матрицы $A(1)$.

Поскольку существование предельных мер доказано, существование отрезков следует из этого автоматически, но при нахождении мер произвольных двоичных отрезков с помощью рекуррентных соотношений сами отрезки необходимо знать, поэтому самостоятельное рассмотрение задачи об отрезках (вполне стандартное) весьма важно. Приведем теорему существования и единственности.

Теорема. Пусть $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - две вещественные матрицы, причем $c_{ij} \leq b_{ij}, (i, j) \in D \subset [1, \dots, n] \times [1, \dots, n]$, где D -такое множество пар индексов, что для любого j существует такое i , что $(i, j) \in D$ (можно считать, что только для таких $((i, j))$ определены c_{ij}, b_{ij}). Тогда существуют и единственны такие векторы

$u = \{u_1, \dots, u_n\}, v = \{v_1, \dots, v_n\}$, что

$$(4.10) \quad u_j = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in D}} (u_i + b_{ij})/2, v_j = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in D}} (v_i + c_{ij})/2, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для вектора u . Рассмотрим множество F таких векторов $u' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$, что $u'_j \geq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in D}} (u'_i + b_{ij})/2, 1 \leq j \leq n$. Очевидно, что F - непустое замкнутое множество. Следовательно, существует такой $u^* \in F, u^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$, на котором принимает минимальное значение функция $S : S(u') = \sum_{j=1}^n u'_j$. Очевидно, что он удовлетворяет нашим требованиям. Действительно, предположим, что для какого-то $j : u_j^* = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in D}} (u_i^* + b_{ij})/2 = E$. Тогда очевидно, что вектор $u^{**} = \{u_1^*, \dots, u_{j-1}^*, E, u_{j+1}^*, \dots, u_n^*\}$ лежит в F , что противоречит определению u^* .

Существование доказано. Докажем теперь единственность. Совокупность индексов $i = i_0, i_1, \dots, i_l, i_{l+1} = j$ назовем (i, j, l, D) - цепочкой, если $(i_k, i_{k+1}) \in D, 0 \leq k \leq l$.

Подставим в правую часть соотношения (4.10) вместо u_j их выражения в соответствии с (4.10). Имеем

$$\begin{aligned} u_j &= \max_{\substack{1 \leq i, k \leq n \\ (k,i) \in D, (i,j) \in D}} \left(\frac{u_k}{4} + \frac{b_{ki}}{4} + \frac{b_{ij}}{2} \right) = \\ &= \max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \exists i / (k,i) \in D, (i,j) \in D}} \left(\frac{u_k}{4} + \max_{\substack{(k,i) \in D \\ (i,j) \in D}} \left(\frac{b_{ki}}{4} + \frac{b_{ij}}{2} \right) \right) = \\ &= \max_{1 \leq k \leq n, \exists i / (k,i) \in D, (i,j) \in D} \left(\frac{u_k}{4} + b'_{kj} \right) \end{aligned}$$

. Продолжая так же дальше и учитывая, что все u_i ограничены сверху, мы получим последовательность таких матриц $\{b_{ki}^{(l)}\}$, что для некоторой последовательности $\epsilon_n \rightarrow 0$ имеем $|u_j - \max_{k | \exists (k,j,l,D) \text{ — цепочка}} b_{kj}^{(l)}| < \epsilon_n$, чем и доказана единственность а вместе с ней теорема.

Замечание. На самом деле для $\{u_i\}$ может быть получено "конечное" выражение. Действительно, если $\{u_i\}$ удовлетворяют соотношению (4.10), то для каждого j найдется такое $i(j)$, что $u_j = (u_{i(j)} + b_{i(j)j})/2$ (выделим одно из них, если их несколько). Очевидно, найдутся такие $s = s(j), k = k(j) < n$, что $\underbrace{i(i(i \dots (i(i(\dots(j)) \dots)) \dots))}_{k} = \underbrace{i(i(i \dots (i(i(\dots(j)) \dots)) \dots))}_{s} = i(i(\dots(j)) \dots) = i_s(j)$. Ясно, что итерациями можно для $u_{i_s(j)}$ получить уравнение вида $u_{i_s(j)} 2^{-k} + d = u_{i_s(j)}; (1 - 2^{-k})^{-1} d = u_{i_s(j)}$, после чего можно все u_j выразить через соответствующие $u_{i_s(j)}$.

С помощью доказанной теоремы можно для любой полиномиальной матрицы с выделенным (удовлетворяющим условию теоремы) множеством индексов D , соответствующим, на деле множеству ненулевых полиномов, строить наши отрезки (которые, конечно, могут вырождаться в точки). Вычислять можно с помощью естественного итерационного процесса, который будет сходиться при любом выборе начального вектора. Сходимость можно доказывать так же, как доказывалась единственность. Фактически для матрицы B построен вектор

$$(4.11) \quad B^\infty = \{b_l^{(\infty)}\}; b_l^{(\infty)} = \sup_{\{i_s\}_{-\infty}^0, i_0=l, (i_k, i_{k+1}) \in D, k < 0} \sum_{k=-\infty}^{-1} b_{i_k i_{k+1}} 2^k$$

и доказано, что для b_l^∞ выполнено (4.10) (аналогично для c).

Если же элементы полиномиальной матрицы $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^m$ имеют вид $a_{ij}(t) = t^{\lambda_{ij}} r_{\lambda_{ij}} + \dots + t^{\lambda'_{ij}} r_{\lambda'_{ij}}$, то при построении матриц $B_n(t)$ по вышеописанному правилу: $B_{n+1}(t) = A(t)B_n(t^2), B_0(t) \equiv E$ будем иметь для $s_n(i, j)$ и $y_n(i, j)$ следующие рекуррентные соотношения:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} y_{n+1}(i, k) &= \max_{j/(j,k) \in D, (i,j) \in D} (2^n \lambda'_{jk} + y_n(i, j)), \\ s_{n+1}(i, k) &= \min_{j/(j,k) \in D, (i,j) \in D} (2^n \lambda_{jk} + s_n(i, j)). \end{aligned}$$

То есть $\frac{y_{n+1}(i,k)}{2^{n+1}} = \max_{i_1, \dots, i_n; (i, i_1), \dots, (i_n, k) \in D} (\lambda'_{ii_1} 2^{-n-1} + \lambda'_{i_1 i_2} 2^{-n} + \dots + \lambda'_{i_n k})$. Отсюда ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}(i,k)}{2^{n+1}}$ не зависит от i и вычисляется согласно выражению (4.11) с $b_{ij} = \lambda'_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$. Поэтому нахождение этого предела эквивалентно решению системы (4.10).

Решим с помощью задачи о матрицах задачу о полиномиальных векторах. Пусть $f_0 = f = \{f_1^0(t), \dots, f_m^0(t)\}$ - полиномиальный вектор и $f_{n+1}(t) = A(t)f_n(t^2)$. Пусть $f_n(t) = \{f_1^n(t), \dots, f_m^n(t)$, где $f_i^n(t) = \sum_{l=h(i,n)}^{g(i,n)} P_{l,i,n} t^l$. Существуют ли и если да, то каковы предельные меры для последовательностей мер

$$\mu_i^n = (\sum_l \delta(\frac{l}{2^n}) P_{l,i,n} t^l) \quad ?$$

Имеем $f_{n+1}(t) = B_{n+1}(t)f_0(t^{2^{n+1}})$. Сведем задачу о мерах μ_i^n к задаче о мерах ν_{ij}^n . Ясно, что $\mu_i^n = (\sum_{j=1}^m b_{ij}^n(1) \nu_{ij}^n * \mu_j^0) (\sum_{j=1}^m b_{ij}^n(1) f_j^0(1))^{-1}$. Собственный вектор Перрона-Фробениуса входит с ненулевым коэффициентом в разложение каждой строки единичной матрицы (см. , например, [102]). Поэтому, очевидно, из существования пределов ν_{ij} последовательностей мер ν_{ij}^n следует, что

$$(4.13) \quad \mu_i^n \rightarrow \mu_i = \frac{\sum_{j=1}^m \phi_j \nu_{ij} * \mu_j^0}{\sum_{j=1}^m \phi_j f_j(1)}.$$

Напомним, что в рассматриваемых задачах ν_{ij} не зависят от i .

Перейдем теперь непосредственно к вычислениям для последовательности Рудина-Шапиро. Сейчас мы рассмотрим задачу о распределениях μ_k значений $(S(n + n_k) - S(n))2^{1-k}; 0 \leq n < \infty$. Имеем в двоичной записи $n_k = \underbrace{1010 \dots 10}_k$. Мы изучим рекуррентные соотношения, связывающие μ_k , и некоторые их компоненты, которые будут выделены для различных подмножеств значений n . Пусть двоичная запись n имеет вид $\dots b_2 b_1 a_1 a_0$, а запись $n_k + n$ — вид $\dots d_2 d_1 c_1 c_0$.

Мы будем рассматривать некоторые ситуации.

Ситуация α : для некоторого m $d_{2m} \dots d_1 = 1011 \dots 1$ или для некоторого m $d_{2m+1} \dots d_1 = 001 \dots 1$.

Ситуация β : для некоторого m $d_{2m} \dots d_1 = 001 \dots 1$ или для некоторого m $d_{2m+1} \dots d_1 = 101 \dots 1$.

Ситуация γ : $d_2 d_1 = 10$.

Ситуация δ : $d_2 d_1 = 00$.

Ситуация ϵ : $a_1 a_0 = 00$.

Ситуация λ : $a_1 a_0 = 01$.

Ситуация θ : $a_1 a_0 = 10$.

Ситуация ω : $a_1 a_0 = 11$.

Будут рассматриваться также "сложные" ситуации типа $\alpha\theta$ а также типа $xyzt$, где $z = a(n), t = a(n + n_k), x \in \{\epsilon, \lambda, \theta, \omega\}, y \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Обозначим для произвольной ситуации $F = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ и произвольного натурального k через $G_{F,k}$ множество таких n , что для нашей пары $(n, n + n_k)$ имеет место ситуация F . Допустим, что при некотором k для каждой ситуации F мы доказали, что $\Delta_k(n) = (S(n + n_k) - S(n))2^{1-k}$ имеет распределения $\mu_{F,k}$, когда n пробегает $G_{F,k}$. В этом случае можно доказать существование $\mu_{F,k+1}$ и выразить вектор мер $\{\mu_{F,k+1}\}$ через вектор $\mu_{F,k}$.

Существование вытекает из следующего обстоятельства : если фиксировано l $0 \leq l \leq 3$ и если для некоторой пары $(n, n + n_k)$ имеет место ситуация F , то этим однозначно определена ситуация для пары $(4n + l, 4n + l + n_{k+1})$ а также число $\Delta_{k+1}(4n + l) - \Delta_k(n)$. В то же время, если "переход" от ситуации F к ситуации F' возможен, то лишь при единственном значении l . Отсюда видно, что множества $G_{F,k+1}$ выражаются через множества $G_{F,k}$, а вектор мер $\{\mu_{F,k+1}\}$ выражается через вектор $\{\mu_{F,k}\}$ с помощью соотношений для производящих функций

рассматривавшегося выше вида (возведение t в квадрат соответствует соотношениям (4.4)) . Связь между параметрами ситуаций проверяется просто: $x(4n+l, 4n+l+n_{k+1})$ определяется числом l . Что касается остальных параметров, то надо учесть, что поскольку $4n+l = \dots b_2 b_1 a_1 a_0 uv$, то $\dots b_2 b_1 a_1 a_0$ и есть аналог $\dots b_2 b_1$ для n , $n_{k+1} = 4n_k + 2$, аналог $\dots d_2 d_1$ для нового числа есть попросту $\dots d_2 d_1 c_1 c_0$ или двоичная запись $1 + \dots d_2 d_1 c_1 c_0$ в зависимости от l (был перенос или нет). Параметрами F, l полностью определяются также и изменения коэффициентов Рудина-Шапиро и Δ_k . Для того, чтобы выразить вектор мер $\{\mu_{F,k+1}\}$ через вектор $\mu_{F,k}$ посредством написания полиномиальной матрицы, связывающей векторы производящих функций, мы приведем таблицу соответствующих изменений параметров и значений $2^k(\Delta_{k+1}(4n+l) - \Delta_k(n))$, но предварительно- две вспомогательные таблицы.

Пусть для некоторого натурального v имеем $v = 8p + 4q + r$, где $q = 0, 1; 0 \leq r \leq 3$. Пусть при этом $v + 4 = 8p' + 4q' + r$, где $q' = 0, 1$. Нас интересует соотношение между $a(v+4)$ и $a(2p' + q')$, между $a(v)$ и $a(2p + q)$, зависимость от $q, r, a(2p + q)$ разности $S(v) - 2S(2p + q) = \delta_1$ и зависимость от $q', r, a(2p' + q)$ разности $S(v+4) - 2S(2p + q) = \delta_2$. Итак, таблица 4.1 это таблица пар значений $\frac{a(v+4)}{a(2p'+q')}$ и $\frac{\delta_2}{a(2p'+q')}$ в зависимости от q' и r (для случаев, когда перенос имел место), таблица 4.2 - таблица пар $\frac{a(v)}{a(2p+q)}, \frac{\delta_1}{a(2p+q)}$ в зависимости от q и r (для случаев, когда переноса не было). r представлено в двоичной системе.

Таблица 4.1

0 00	1 1	0 01	1 2	0 10	1 3	0 11	-1 2
1 00	1 1	1 01	1 2	1 10	-1 1	1 11	1 2

Таблица 4.2

0 00	1 −1	0 01	1 0	0 10	1 1	0 11	−1 0
1 00	1 −1	1 01	1 0	1 10	−1 −1	1 11	1 0

Наличие соответствующих зависимостей и правильность таблиц могут быть проверены помощью *Satz 3* [92], а также с помощью формулы (4.4). Обозначим $a(n)$ через a , $a(n + n_k)$ -через b . Ниже приводится таблица 3, описывающая соотношения параметров ситуаций пар $(n, n + n_k)$ и пар $(4n + l, 4n + l + n_{k+1})$. В предпоследнем столбце содержится информация о том, каковы при переходах от одной ситуации к другой отличия $S(4n + l + n_{k+1}) - S(4n + l)$ от $2 * (S(n + n_k) - S(n))$. Составление таблицы 4.3 существенно облегчается вследствие наличия таблиц 4.1 и 4.2. С помощью таблицы 4.3 мы сможем сформировать нашу полиномиальную матрицу. Далее, мы должны будем найти начальный ($k = 1$) вектор производящих функций $\{f_F(t')\}$ (доказательство- весьма простое- существования соответствующих мер и будет базой индукции доказательства существования $\mu_{F,k}$, индукционный же переход уже совершен). После этого мы должны будем решать задачу по ранее описанной схеме, получить 64-мерный вектор мер и, на основе вычисления вероятностей ситуаций предельное распределение, являющееся окончательным результатом.

Таблица 4.3

$\begin{matrix} l \\ x(4n+l) \end{matrix}$	$x(n)$	$\begin{matrix} b_2 b_1 a_1 a_0 \\ d_2 d_1 c_1 c_0 \\ \text{для } 4n+l \end{matrix}$	$y(n)$	$\begin{matrix} a(4n+l) \\ a(4n+l \\ +n_{k+1}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2^k(\Delta_{k+1}(\\ 4n+l) \\ -\Delta_k(n)) \end{matrix}$	$y(4n+l)$
0	ϵ	$\begin{smallmatrix} 0000 \\ 1010 \end{smallmatrix}$	α	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	γ
	θ	$\begin{smallmatrix} 1000 \\ 0010 \end{smallmatrix}$	α	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	δ
ϵ	λ	$\begin{smallmatrix} 0100 \\ 1110 \end{smallmatrix}$	α	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	α
	ω	$\begin{smallmatrix} 1100 \\ 0110 \end{smallmatrix}$	α	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	β
	ϵ	$\begin{smallmatrix} 0000 \\ 1010 \end{smallmatrix}$	β	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	γ
	θ	$\begin{smallmatrix} 1000 \\ 0010 \end{smallmatrix}$	β	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	δ
	λ	$\begin{smallmatrix} 0100 \\ 1110 \end{smallmatrix}$	β	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	β
	ω	$\begin{smallmatrix} 1100 \\ 0110 \end{smallmatrix}$	β	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	β
	ϵ	$\begin{smallmatrix} 0000 \\ 1010 \end{smallmatrix}$	γ	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	γ
	θ	$\begin{smallmatrix} 1000 \\ 0010 \end{smallmatrix}$	γ	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	δ
	λ	$\begin{smallmatrix} 0100 \\ 1110 \end{smallmatrix}$	γ	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	α
	ω	$\begin{smallmatrix} 1100 \\ 0110 \end{smallmatrix}$	γ	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	α
	ϵ	$\begin{smallmatrix} 0000 \\ 1010 \end{smallmatrix}$	δ	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	γ
	θ	$\begin{smallmatrix} 1000 \\ 0010 \end{smallmatrix}$	δ	$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	$a+b$	δ
	λ	$\begin{smallmatrix} 0100 \\ 1110 \end{smallmatrix}$	δ	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	β
	ω	$\begin{smallmatrix} 1100 \\ 0110 \end{smallmatrix}$	δ	$\begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix}$	$a-b$	α

Продолжение табл. 4.3

$\begin{matrix} l \\ x(4n+l) \end{matrix}$	$x(n)$	$\begin{matrix} b_2b_1a_1a_0 \\ d_2d_1c_1c_0 \\ \text{для } 4n+l \end{matrix}$	$y(n)$	$\begin{matrix} a(4n+l) \\ a(4n+l \\ +n_{k+1}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2^k(\Delta_{k+1}(\\ 4n+l) \\ -\Delta_k(n)) \end{matrix}$	$\begin{matrix} y(4n \\ +l) \end{matrix}$
$\begin{matrix} 2 \\ \theta \end{matrix}$	ϵ	$\begin{matrix} 0010 \\ 1100 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-a-b$	α
	θ	$\begin{matrix} 1010 \\ 0100 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$-a+b$	β
	λ	$\begin{matrix} 0110 \\ 0000 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$a+b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1110 \\ 1000 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$a-b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0010 \\ 1100 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$-a-b$	β
	θ	$\begin{matrix} 1010 \\ 0100 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$-a+b$	β
	λ	$\begin{matrix} 0110 \\ 0000 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$a-b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1110 \\ 1000 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$a-b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0010 \\ 1100 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-a-b$	α
	θ	$\begin{matrix} 1010 \\ 0100 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$-a+b$	α
	λ	$\begin{matrix} 0110 \\ 0000 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$a+b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1110 \\ 1000 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$a+b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0010 \\ 1100 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-a-b$	β
	θ	$\begin{matrix} 1010 \\ 0100 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$-a+b$	α
	λ	$\begin{matrix} 0110 \\ 0000 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$a-b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1110 \\ 1000 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$a+b$	γ

$\begin{matrix} l \\ x(4n+l) \end{matrix}$	$x(n)$	$\begin{matrix} b_2 b_1 a_1 a_0 \\ d_2 d_1 c_1 c_0 \\ \text{для } 4n+l \end{matrix}$	$y(n)$	$\begin{matrix} a(4n+l) \\ a(4n+l \\ +n_{k+1}) \end{matrix}$	$2^k(\Delta_{k+1}(4n+l) - \Delta_k(n))$	$y(4n+l)$
1	ϵ	$\begin{matrix} 0001 \\ 1011 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	γ
λ	θ	$\begin{matrix} 1001 \\ 0011 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	δ
	λ	$\begin{matrix} 0101 \\ 1111 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	α
	ω	$\begin{matrix} 1101 \\ 0111 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	β
	ϵ	$\begin{matrix} 0001 \\ 1011 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	γ
	θ	$\begin{matrix} 1001 \\ 0011 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	δ
	λ	$\begin{matrix} 0101 \\ 1111 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	β
	ω	$\begin{matrix} 1101 \\ 0111 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	β
	ϵ	$\begin{matrix} 0001 \\ 1011 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	γ
	θ	$\begin{matrix} 1001 \\ 0011 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	δ
	λ	$\begin{matrix} 0101 \\ 1111 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	α
	ω	$\begin{matrix} 1101 \\ 0111 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	α
	ϵ	$\begin{matrix} 0001 \\ 1011 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	γ
	θ	$\begin{matrix} 1001 \\ 0011 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	0	δ
	λ	$\begin{matrix} 0101 \\ 1111 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	β
	ω	$\begin{matrix} 1101 \\ 0111 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	α

Продолжение табл. 4.3

$\begin{matrix} l \\ x(4n+l) \end{matrix}$	$x(n)$	$\begin{matrix} b_2 b_1 a_1 a_0 \\ d_2 d_1 c_1 c_0 \\ \text{для } 4n+l \end{matrix}$	$y(n)$	$\begin{matrix} a(4n+l) \\ a(4n+l \\ +n_{k+1}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2^k(\Delta_{k+1}(\\ 4n+l) \\ -\Delta_k(n)) \end{matrix}$	$\begin{matrix} y(4n \\ +l) \end{matrix}$
$\begin{matrix} 3 \\ \\ \omega \end{matrix}$	ϵ	$\begin{matrix} 0011 \\ 1101 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	α
	θ	$\begin{matrix} 1011 \\ 0101 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$2b$	β
	λ	$\begin{matrix} 0111 \\ 0001 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$2b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1111 \\ 1001 \end{matrix}$	α	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0011 \\ 1101 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	β
	θ	$\begin{matrix} 1011 \\ 0101 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$2b$	β
	λ	$\begin{matrix} 0111 \\ 0001 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$2b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1111 \\ 1001 \end{matrix}$	β	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0011 \\ 1101 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	α
	θ	$\begin{matrix} 1011 \\ 0101 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$2b$	α
	λ	$\begin{matrix} 0111 \\ 0001 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$2b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1111 \\ 1001 \end{matrix}$	γ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$2b$	γ
	ϵ	$\begin{matrix} 0011 \\ 1101 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	β
	θ	$\begin{matrix} 1011 \\ 0101 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}$	$2b$	α
	λ	$\begin{matrix} 0111 \\ 0001 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}$	$-2b$	δ
	ω	$\begin{matrix} 1111 \\ 1001 \end{matrix}$	δ	$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	$2b$	γ

Множество D искомой полиномиальной матрицы на основании таблицы 4.3 описывается следующим образом. Для ситуаций F', F соответствующий полином от t' -элемент $a_{F',F}(t')$ матрицы $A(t')$ окажется ненулевым $(F', F) \in D$, если для некоторой строки таблицы 4.3 первый и последний элемент суть параметры x и y ситуации F (индексирующей строку матрицы $A(t')$), второй и четвертый суть параметры x и y ситуации F' , (индексирующей столбец), пятый- отражает фактическое соотношение

между параметрами z и t двух ситуаций. При этом $a_{F'F}(t') = t'^{g_{F'F}}$, где $g_{F'F} = 2^k(\Delta_{k+1}(4n+l) - \Delta_k(n))$, $(F', F) \in D$. Мы будем выражать $g_{F'F}$ через параметры z и t ситуации F' , потому что, как показывает рассмотрение таблицы 4.3, $g_{F'F}$ только от них и зависит. Вспомогательная таблица 4.4, приводимая ниже, создает более точное представление о матрице $A(t')$. Эта таблица является матрицей 16×16 (индексируемой парами параметров x и y ситуаций F' и F), описывающей требуемое соотношение между их параметрами z и t . Все $g_{F'F}(t')$ непосредственно определяются элементами таблицы 4.4.

Таблица 4.4

	$\epsilon\alpha$	$\epsilon\beta$	$\epsilon\gamma$	$\epsilon\delta$	$\theta\alpha$	$\theta\beta$	$\theta\gamma$	$\theta\delta$	$\lambda\alpha$	$\lambda\beta$	$\lambda\gamma$	$\lambda\delta$	$\omega\alpha$	$\omega\beta$	$\omega\gamma$	$\omega\delta$	
$\epsilon\alpha$									$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$				$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$t + z$
$\epsilon\beta$										$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$			$t + z$
$\epsilon\gamma$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$													$t + z$
$\epsilon\delta$					$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$									$t + z$
$\theta\alpha$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$				$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$									$t - z$
$\theta\beta$		$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$											$t - z$
$\theta\gamma$													$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$t - z$
$\theta\delta$									$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$					$t - z$
$\lambda\alpha$									$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$				$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	0
$\lambda\beta$										$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$		0
$\lambda\gamma$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$													0
$\lambda\delta$					$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$									0
$\omega\alpha$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$				$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$									$2t$
$\omega\beta$		$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} - \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$											$2t$
$\omega\gamma$													$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$2t$
$\omega\delta$									$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$					$2t$

Справа приведены выражения значений $g_{F'F} = g_{F'}$ через $z(F')$ и $t(F')$. Элемент $\mp$, стоящий, скажем, на пересечении строки $\omega\alpha$ и столбца $\theta\gamma$, интерпретируется следующим образом.

$$a_{(\omega,\alpha,1,1)(\theta,\gamma,-1,1)}(t') = t'^2, a_{(\omega,\alpha,1,-1)(\theta,\gamma,-1,-1)}(t') = t'^{-2},$$

$$a_{(\omega,\alpha,-1,1)(\theta,\gamma,1,1)}(t') = t'^2, a_{(\omega,\alpha,-1,-1)(\theta,\gamma,1,-1)}(t') = t'^{-2} = t'^{2t},$$

$$(x, y)(F') = (\omega, \alpha) \ \& \ (x, y)(F) = (\theta, \gamma) \Rightarrow z(F') = -z(F) \ \& \ t(F') = t(F).$$

Матрица $A(1)$ примитивна. Это может быть проверено непосредственно или с помощью учета природы этой матрицы. В самом деле, пусть $m = m_1 4^{r+s} + m_2$, где $m_2 < 4^s, m_1 > 64$ - натуральные. Тогда, если r достаточно велико, то для произвольного натурального k параметры x и y ситуаций $F_k(m_1)$ и $F_{k+s+r}(m)$ т.е. -ситуаций пар $(m_1, m_1 + n_k)$ и $(m, m + n_{k+s+r})$ не зависят одни от других, "коррекцию" же параметров z и t ситуации $F_{k+s+r}(m)$ можно осуществить заменой нескольких из $2r$ нулей единицами

10101010101	0101010101	10101010101
<u>00001100000</u>	<u>0000110000</u>	<u>00000010000</u>
10110110101	0110000101	10101100101

Легко видеть, что матрица $\frac{1}{4}A(1)$ - бистохастическая.

Примитивность этой матрицы облегчает вычисление отрезков (типа $[x^{ij}, y^{ij}]$ для мер ν_{ij}), поддающееся алгоритмизации и программированию - диагональные элементы матрицы A дают информацию о том, какие точки заведомо лежат в отрезках. Далее, используя систему (4.9), можно (например, методом последовательных приближений) вычислять меры двоичных отрезков, то есть, соответствующих долей найденных отрезков.

Вернемся к задаче о доказательстве существования и нахождении вектора мер $\{\mu_{F,1}\}$. Задача существенно упрощается, если использовать интерпретацию коэффициентов Рудина -Шапиро с помощью подстановки Рудина -Шапиро ([27] и начало данного параграфа). Если, в соответствии с нашими обозначениями , $\omega_{\mathcal{A}}^{\infty}(1) = v_0, v_1, \dots$, то, как нетрудно понять из нашего определения параметров ситуаций, для любого натурального n ситуация $F(n)$ и значение $\Delta_1(n)$ определяются совокупностью символов $v_{4k}, \dots, v_{4k+11}$, где $4k \leq n \leq 4k+3$. Именно, $x(F)$ определяется остатком от деления n на 4: $0 - \epsilon, 1 - \lambda, 2 - \theta, 3 - \omega$. $y(F)$ определяется парой символов $v_k v_{k+1}$, если $x(F) = \epsilon$ или $x(F) = \lambda$ и парой символов

$v_{k+1}v_{k+2}$, если $x(F) = \theta$ или $x(F) = \omega$ по следующему единому правилу, сопоставляющему паре символов значение $y = y(u, u')$, $y(24) = y(31) = \alpha$, $y(21) = y(34) = \beta$, $y(12) = y(43) = \gamma$, $y(13) = y(42) = \delta$.

На самом деле y зависит еще от четности k (нечетности соответствуют α и β , делимости на 4 - δ), но, оказывается, что для подстановки Рудина-Шапиро все определяется самой парой u, u' . α отличается от β отношением $\tau(u')/\tau(u)$. Для β оно есть -1 . Заметим еще, что символы v_k, v_{k+1}, v_{k+2} рассматривались здесь только потому, что $\omega_{\mathcal{A}}^2(v_k v_{k+1} v_{k+2}) = v_{4k} \dots v_{4k+11}$, $z(n) = \tau_{v_n}$, $t(n) = \tau_{v_{n+2}}$, $\Delta_1(n) = \tau_{v_{n+1}} + \tau_{v_{n+2}}$. Поскольку наша динамическая система строго эргодична, ясно, что распределения $\mu_{F,1}$ существуют и определяются мерами цилиндрических множеств в пространстве этой динамической системы, отвечающих различным сочетаниям " F - значение Δ_1 ". Перебор ситуаций, результаты которого содержатся в таблице 4.5, упрощается вследствие свойств допустимых последовательностей и инвариантной меры нашей динамической системы: имеется 8 допустимых двухбуквенных слов с мерами цилиндрических множеств, равными $1/8$, и 16 трехбуквенных с мерами $1/16$, причем если $v_n = 1$ или 4 , то $v_{n\pm 1} = 2$ или 3 и наоборот.

Таблица 4.5. $\Delta_1(x, y, z, t)$

	-1	-1-1	11	-11	1
$\epsilon\alpha$		0	0		
$\lambda\alpha$	0				0
$\theta\alpha$	0	2	-2		0
$\omega\alpha$	-2	2	-2		2
$\epsilon\beta$		0	0		
$\lambda\beta$	0				0
$\theta\beta$	0	2	-2		0
$\omega\beta$	-2	2	-2		2
$\epsilon\gamma$	-2				2
$\lambda\gamma$		0	0		
$\theta\gamma$	0	2	-2		0
$\omega\gamma$	-2	2	-2		2
$\epsilon\delta$	-2				2
$\lambda\delta$		0	0		
$\theta\delta$	0	2	-2		0
$\omega\delta$	-2	2	-2		2

Вероятности для каждой из заполненных клеток, отвечающих ситуациям, возможным при $k = 1$, суть $1/64$, если клетка находится в полностью заполненной строке, $1/32$, если нет. Как видно из таблицы (впрочем, в этом можно и непосредственно убедиться), Δ_1 однозначно определяется ситуацией - $\mu_{F,1}$ - δ - мера. По таблице 4.5 получаем исходный полиномиальный вектор, т.е. искомый вектор производящих функций $\{f_F(t')\}$, $f_F = P(F)t'^{\Delta_1(F)}$, где $P(F)$ -вероятность ситуации. Например, $f_{\theta,\alpha,-1,1} = \frac{1}{64}t'^2$, $f_{\epsilon,\gamma,-1,-1} = \frac{1}{32}t'^{-2}$. Из бистохастичности матрицы $A(1)/4$ следует, что $\mu_{F'} = \sum_{\{F\}} \nu_{F'F}$ (в соответствии с формулой (4.13)). Окончательным ответом нашей задачи должна служить сумма μ_i с коэффициентами, отвечающими предельным вероятностям ситуаций, т.е. в обозначениях общего случая

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m \mu_j^n f_j^n(1) \right) / \sum_{j=1}^m f_j^n(1).$$

Стало быть, $\mu = \frac{1}{64} \sum_F \mu_F$. Но все слагаемые в этой формуле, как мы знаем, одинаковы.

§3. Пример вычисления корреляций и энтропии по Кушниренко.

В [88] и [60] приводится пример слабоперемешивающей (с метрической точки зрения) подстановки, не обладающей топологическим перемешиванием. Более просто она может быть представлена как $\omega_{\mathcal{A}}$ с $\mathcal{A} = \{221, 1\}$. Для этой подстановки могут быть вычислены корреляции и энтропия по Кушниренко для некоторых последовательностей моментов времени. Интересно то, что специфика символического представления для этого класса динамических систем позволяет применить к слабоперемешивающей подстановке методы теории систем с дискретным спектром— подобные аналогии всегда привлекали внимание специалистов по эргодической теории.

Обозначим $|\omega_{\mathcal{A}}^n(2)|$ через l_n . $l_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$, $|\omega_{\mathcal{A}}^n(1)| = \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$. Отсюда следует, что $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ слабо перемешивает. Рассмотрим функцию $f : X_{\mathcal{A}} \rightarrow R$

$$f(\{\dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}) = 2x_0 - 3 = \begin{cases} 1, & x_0 = 2, \\ -1, & x_0 = 1, \end{cases}$$

и вычислим значения корреляционной последовательности $K_m = \int_{X_{\mathcal{A}}} f(x)f(T_{\mathcal{A}}^m x)d\mu$, где μ -единственная инвариантная мера нашей динамической системы, для значений m , равных $l_n, n = 3, 4, \dots$.

Для любой допустимой последовательности $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ нашей строго эргодической динамической системы имеет место :

$$K_{l_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} (2x_k - 3)(2x_{k+l_n} - 3)$$

Рассмотрим последовательность пар $(\{x_k, x_{k+l_n}\})_{k=-\infty}^{\infty}$. Ее можно единственным образом разбить на такие куски вида

$$\{\{x_v, x_{v+l_n}\}, \dots, \{x_{v+s}, x_{v+s+l_n}\}\}$$

, что если слово $(x_v \dots x_{v+s})$ обозначить через A а слово $(x_{v+l_n} \dots x_{v+s+l_n})$ обозначить через B , то либо $A = B = \omega_{\mathcal{A}}^n(2)$, либо $A = \omega_{\mathcal{A}}^n(21)$ и $B = \omega_{\mathcal{A}}^n(12)$, либо $A = \omega_{\mathcal{A}}^n(2111)$ и $B = \omega_{\mathcal{A}}^n(1112)$. Такое разбиение применяется, как мы знаем, при проверке дискретности спектра. Исследуем, пользуясь методом индукции, вторую и третью пары слов. Заметим, что если некоторое слово Y имеет вид $22X1$, то $\omega_{\mathcal{A}}(Y) = 1|1\omega_{\mathcal{A}}(X)|221$, если же $Y = 1X22$, то $\omega_{\mathcal{A}}(Y) = 22|1\omega_{\mathcal{A}}(X)|11$. Обозначим слово $1\omega_{\mathcal{A}}(1) \dots \omega_{\mathcal{A}}^k(1)$ через D_k . Получаем по индукции $\omega_{\mathcal{A}}^n(1) = 1D_{n-1}$ при n -чётном, $\omega_{\mathcal{A}}^n(1) = 22D_{n-1}$ при n нечётном (свойство, близкое к локальной катенативности [34] : для каждого фиксированного n похожие локально-катенативные DOL -системы являются, с точностью до переобозначения символов и обращения времени, системами, соответствующие подстановкам с дискретным спектром, исследованными Б.М.Соломяком [63], [64]). Имеем, $\omega_{\mathcal{A}}^n(2) = \omega_{\mathcal{A}}^{n-1}(1) = 1D_{n-2}$ при n -нечётном, $\omega_{\mathcal{A}}^n(2) = 22D_{n-2}$ - при n -чётном. Следовательно, при n -чётном:

$$D_{n-1} = D_{n-2}22D_{n-2}, \omega_{\mathcal{A}}^n(21) = 22D_{n-2}1D_{n-1},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(2111) = 22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(12) = 1D_{n-2}22D_{n-1},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(1112) = 1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}22D_{n-2},$$

при n -нечётном:

$$D_{n-1} = D_{n-2}1D_{n-2}, \omega_{\mathcal{A}}^n(21) = 1D_{n-2}22D_{n-1},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(2111) = 1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}22D_{n-2},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(12) = 22D_{n-2}1D_{n-1},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}^n(1112) = 22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}.$$

Заметим, что из этого представления можно вывести отсутствие топологического перемешивания. Включая в рассмотрение пары первого вида $(\omega_{\mathcal{A}}^n(2), \omega_{\mathcal{A}}^n(2))$, видим, что основные компоненты D_{n-2} и $\omega_{\mathcal{A}}^n(2)$ либо вообще не сдвинуты относительно своих аналогов, либо сдвинуты на 1. Но, как доказано в [58], существует такое N , что ни для какого A слово $\underbrace{A \dots A}_N$ не является допустимым. Отсюда сразу получается грубая оценка : если B -допустимое слово и $|B| > 2N + 2$, то для достаточно больших n не существует такого допустимого слова BCB , что $l_n + 1 < |CB| < l_n + \frac{|B|-2}{2N}(\frac{|B|-2}{2})$ - оценка части слова B , лежащей в компоненте).

Если для произвольного слова над Z_* $B_0 = b_1 \dots b_k$ обозначить через $\lambda(B_0)$ число $\sum_{i=1}^{k-1} (2b_i - 3)(2b_{i+1} - 3)$, то $\lambda(D_l) = 0$ при l -чётном и $\lambda(D_l) = 1$ -при l -нечётном. Провести индукционное рассуждение помогает следующее наблюдение :для любого слова $c_1 \dots c_k$ $\lambda(\omega_{\mathcal{A}}^2(c_1 \dots c_k)) = \sum_{i=1}^k (\omega_{\mathcal{A}}^2(c_i)) + \sum_{i=1}^{k-1} q(c_i, c_{i+1})$, где $q(a, b) = \begin{cases} -1, & b = 2, \\ 1, & b = 1. \end{cases}$. Поскольку $\lambda(\omega_{\mathcal{A}}^2(c) = 0)$, $c = 1, 2$, имеем $\lambda(\omega_{\mathcal{A}}^2(c_1 \dots c_k)) = |c_2 \dots c_k|_1 - |c_2 \dots c_k|_2$. В свою очередь, если для любого слова F обозначить через $g(F)$ число $|F|_1 - |F|_2$, то легко видеть, что $g(\omega_{\mathcal{A}}^2(F)) = -g(F)$. В силу этого для любого l можно вычислить $\lambda(\omega_{\mathcal{A}}^{2l+1}(1)\omega_{\mathcal{A}}^{2l+2}(1))$ и $\lambda(\omega_{\mathcal{A}}^{2l}(1)\omega_{\mathcal{A}}^{2l+1}(1))$. Получится, соответственно, 1 и -1 . Поскольку первое из этих слов при

любом l есть $2 \dots 1$, второе $-1 \dots 1$, мы видим, что $\lambda(D_l)$ зависит лишь от четности l . Для дальнейших выкладок важен следующий

Факт. Если $B = bC, b \in Z_*$ - допустимое слово $|B| = N$, то число вхождений слова 21112 в $\omega_{\mathcal{A}}^2(B)$ равно $|C|_1$, число вхождений 212 в $\omega_{\mathcal{A}}^2(B)$ равно $|C|_2$.

Утверждение проверяется непосредственно. Поскольку $\mu(\tilde{1}) = \mu(\tilde{2}) = 1/2$, можно, пользуясь нашими представлениями для компонент и фактом, написать выражение для коэффициента корреляции: $K_{l_n} =$

$$\frac{\mu(\tilde{1})(3(-4 + \lambda(D_{n-2}) + |D_{n-2}|) + \mu(\tilde{2})(-4 + \lambda(D_{n-2}) + |D_{n-1}|) + |\omega_{\mathcal{A}}^n(2)|}{\mu(\tilde{1})|\omega_{\mathcal{A}}^{n+2}(1)| + \mu(\tilde{2})|\omega_{\mathcal{A}}^{n+2}(2)|}$$

Все слагаемые числителя и знаменателя нам известны. В итоге получаем:

$$K_{l_n} = \frac{2}{3} + \frac{c_n}{2^{n+3}}; c_n = \begin{cases} -21\frac{1}{3} & n\text{-четно} \\ -26\frac{2}{3} & n\text{-нечетно.} \end{cases}$$

По аналогии с примером, рассмотренным в ([27], стр.132), могут быть получены и некоторые предельные соотношения для корреляционной последовательности. Зададимся, например, вопросом о пределе $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{m|D_n|}$, где m -фиксированное натуральное число. Воспользуемся для вычисления полученными ранее соотношениями между D_n и D_{n-1} . Из них следует существование для любого n допустимой односторонней последовательности вида $D_n x_1 D_n x_2 D_n x_3 D_n \dots$, где $x_i = \begin{cases} 1 & i = a \cdot 2^b \text{ } a \text{ нечетно, } b \text{ - четно,} \\ 22 & i = a \cdot 2^b \text{ } a \text{ нечетно, } b \text{ - нечетно.} \end{cases}$ Для длины слова x_i имеем $|x_i| = \frac{\alpha(i-1)+1}{2} + 1$, где α - хорошо известный коцикл, соответствующий представлению динамической системы, порожденной подстановкой Морса в виде косоугольного произведения над 2-адическим сдвигом (одометром). Рассмотрим для каждого k меру на N μ_k , определяемую следующим соотношением $\mu_k(t) = Fr\{n \in N \mid |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+k}| = t\}$. Теперь уже совершенно очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{m|D_n|} = \sum_{t \in N} \mu_m(t) K_t$. Меры μ_m могут

быть легко вычислены. Обозначим через y_i число $|x_i| - 1, 1 \leq i < \infty$. Легко видеть, что $y_{2i} = 1 - y_i, 1 \leq i < \infty$. Обозначим через μ_m^* меру $\delta_{-m} * \mu_m$ и через $\bar{\mu}_m^*$ меру, определяемую следующим равенством : $\bar{\mu}_m^*(\{m - t\}) = \mu_m^*(\{t\})$. Из наших соотношений теперь легко получить, что $\mu_1^*(0) = 2/3, \mu_1^*(1) = 1/3, \mu_{2n}^* = \bar{\mu}_n^*; \mu_{2n+1}^* = \frac{\bar{\mu}_n^* + \bar{\mu}_{n+1}^*}{2}$. Обозначим для произвольной положительной нормированной меры μ на N через P_μ производящую функцию меры μ $P_\mu(x) = \sum_{i \in N} \mu(\{i\})x^i$ и через $Q_i - P_{\mu_i^*}$. Тогда имеем:

$$Q_{2n}(x) = x^n Q_n(x^{-1}), Q_{2n+1}(x) = \frac{x^n Q_n(x^{-1}) + x^{n+1} Q_{n+1}(x^{-1})}{2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} Q_{4k}(x) &= x^k Q_k(x), Q_{4k+1}(x) = \frac{2x^k Q_k(x) + x^{k+1} Q_k(x) + x^k Q_{k+1}(x)}{4}, \\ Q_{4k+2}(x) &= \frac{x^{k+1} Q_k(x) + x^k Q_{k+1}(x)}{2}, \\ Q_{4k+3}(x) &= \frac{2x^{k+1} Q_{k+1}(x) + x^{k+1} Q_k(x) + x^k Q_{k+1}(x)}{4}. \end{aligned}$$

То есть существует такой набор полиномов $P_i^0, P_i^1, i = 0, 1, 2, 3$ (таблица 4.6), что $Q_{4k+i}(x) = (P_i^0(x)Q_k(x) + P_i^1 Q_{k+1}(x))x^k, 1 \leq k; i = 0, 1, 2, 3$.

Таблица 4.6

i	$P_i^0(x)$	$P_i^1(x)$
$i = 0$	1	0
$i = 1$	$\frac{2+x}{4}$	$\frac{1}{4}$
$i = 2$	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$
$i = 3$	$\frac{x}{4}$	$\frac{1+2x}{4}$

А из этого, в свою очередь, следует, что существуют такие полиномиальные 2×2 -матрицы $A_i(x)$, что $(Q_{4k+i}(x), Q_{4k+i+1}(x)) = x^k A_i(x)(Q_k(x), Q_{k+1}(x))$, где при $i = 0, 1, 2$ $A_i(x) = \begin{pmatrix} P_i^0(x) & P_i^1(x) \\ P_{i+1}^0(x) & P_{i+1}^1(x) \end{pmatrix}$, при $i = 3$ $A_i(x) = \begin{pmatrix} x/4 & (1+2x)/4 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Это позволяет определить μ_m^* по представлению m в четверичной системе счисления. Появляется возможность при надлежащем масштабировании и центрировании находить предельные точки этой последовательности мер. Задача изучения последовательности μ_m^* важна не только для рассматриваемой задачи. Она имеет отношение к суммированию координатных случайных величин, заданных на фазовом пространстве подстановочной динамической системы ([91], §1, §2 настоящей главы, цитируемые в них работы по смежным вопросам), т.е. к предельным теоремам для стационарных последовательностей. Соответствующая подстановка есть $\omega_{\mathcal{A}}$ с $\mathcal{A} = \{23, 24, 31, 32\}$, функция- $f : f(2) = f(3) = -1; f(1) = f(4) = 1$. Разумеется, это π - произведение над $\{22, 21\}$.

Рассмотренное ранее представление допустимых последовательностей с помощью слов D_k весьма похоже на представление допустимых последовательностей автоморфизма Чекона [104], то есть, по сути дела, интегрального автоморфизма над автоморфизмом, отвечающим подстановке $F \rightarrow FGF, G \rightarrow FGG$ (см. также [105], где пример упомина-

ется в связи с топологическими минимальными самопересечениями и *proximal orbit dense* -потокami) (последовательность блоков $\sigma(n)$ строится по правилам $\sigma(n) = \sigma(n-1)(\sigma(n-1)1)\sigma(n)$ т.е. $\sigma(n)1 = \sigma(n-1)(\sigma(n-1)1)(\sigma(n-1)1)$ и т.д.). Для этого автоморфизма в [106] доказано, что его централизатор тривиален, то есть состоит из циклической группы, порожденной самим автоморфизмом. Аналогичные соображения позволяют доказать это утверждение и в нашем случае (разумеется, и здесь речь идет о интегральном автоморфизме над подстановочным, имеющим дискретный спектр $\mathcal{A} = \{21, 11\}$). Приведем их для полноты изложения.

Из свойств D_k следует, что и наш автоморфизм может быть построен с помощью последовательности блоков $D_{2k}, D_0 = 1, D_{2(k+1)} = D_{2k}22D_{2k}1D_{2k}22D_{2k}$. По индукции легко доказывается, что при каждом k декодирование каждой допустимой последовательности с помощью блоков D_{2k} , отвечающее этому способу построения, однозначно. Пусть $\tau : X_{\mathcal{A}} \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ -измеримое отображение, коммутирующее с $T_{\mathcal{A}}$. Для любого $\epsilon > 0$ существует такое $k(\epsilon)$ и такое отображение $l_{\epsilon} : Z_*^{(2k(\epsilon)+1)} \rightarrow Z_*$, что для точек $x \in X_{\mathcal{A}}$, образующих множество меры, большей чем $1 - \epsilon$, имеет место следующее : если $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}; \tau(x) = \{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, то $l_{\epsilon}(\{x_{-k(\epsilon)}, \dots, x_0, \dots, x_{k(\epsilon)}\}) = y_0$. Построим отображение $\tau_{\epsilon} : X_{\mathcal{A}} \rightarrow \{\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty} : y_i \in Z_*, -\infty < i < \infty\}; \tau_{\epsilon}(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \{y_i^*\}_{i=-\infty}^{\infty}, y_s^* = l_{\epsilon}(x_{s-k(\epsilon)}, \dots, x_s, \dots, x_{s+k(\epsilon)}), -\infty < s < \infty$. Из эргодической теоремы следует, что для почти всякой точки $x \in X_{\mathcal{A}}, x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ имеет место $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{i | 0 \leq i < N-1, y_i \neq y_i^*\}}{N} < \epsilon, \lim_{N \rightarrow -\infty} \frac{\#\{i | 1-N \leq i < 0, y_i \neq y_i^*\}}{N} < \epsilon$. Из выкладок, проведенных нами при вычислении корреляций, видно, что существуют такие M, ϵ_0 , что если $A = v_1 \dots v_R v_{R+1}, R > M$ - допустимое слово, то $\frac{\#\{i | 1 \leq i \leq R, v_i \neq v_{i+1}\}}{R} > \epsilon_0$. Предполагая, что ϵ достаточно мало ($\ll \epsilon_0$), зафиксируем x с описанными выше свойствами. Можно считать, что (для

почти всех точек это так) для каждого k , большего некоторого, существуют такие R_k, L_k , что $x_{-L_k} \dots x_0 = D_{2k} A_{-15}^k \dots D_{2k} A_{-1}^k C^k; x_1 \dots x_{R_k} = B^k A_0^k D_{2k} A_1^k \dots D_{2k} A_{14}^k$, где $C^k B^k = D_{2k}$, $A_i^k = 22$ или $A_i^k = 1$ при $-15 \leq i \leq 14$

Рассмотрим слово $V_k = y_{-L_k} \dots y_0 y_1 \dots y_{R_k} = D'_{-15}^k A'_{-15}^k \dots D'_{-1}^k A'_{-1}^k C'^k B'^k A'_0{}^k D'_1{}^k A'_1{}^k \dots D'_{14}{}^k A'_{14}{}^k$, где $|C^k| = |C'^k|, |B^k| = |B'^k|, |D_i^k| = |D_{2k}|, |A^k| = |A'^k|, -15 \leq i \leq 14$. Поскольку слово V_k допустимо, можно считать (без ограничения общности), что для каждого $i, -15 \leq i \leq 14$ существуют такие слова E_i^k, F_i^k, G_i^k , что $E_i^k F_i^k G_i^k = D_i^k, G_i^k A_i^k E_{i+1}^k = D_{2k}, -15 \leq i \leq 13$. Некоторые из E_i^k, F_i^k, G_i^k могут быть пустыми. Возможны многие варианты. Но мы рассмотрим один из них: слова G_0^k и E_1^k -непусты. Во первых, рассмотрение остальных вариантов аналогично, во вторых - если рассмотреть и приблизить конечными кодами набор преобразований $T_{\mathcal{A}}^i \tau, -3 \leq i \leq 3$, то для почти всех x задача сведется к этому случаю. Предположим, что $|G_0^k| > |E_1^k|$. Тогда, если k -велико, из того, что $\epsilon \ll \epsilon_0$, получаем, что все слова D_i^k попарно близки в метрике Хэмминга, а потому (в силу определения ϵ_0) $|A_i^k| = |F_{i+1}^k|$ (при $-15 \leq i \leq 13$) и, следовательно, все $|G_i^k|$ одинаковы для этих i (если $|G_0^k| \leq |E_1^k|$, то заведомо для $i \in [-14, 13]$). Обозначим это общее значение через d_k . Существует, как легко видеть, такое K и такое $C = C(x)$, что если $k > K$, то $d_k = C(x)$.

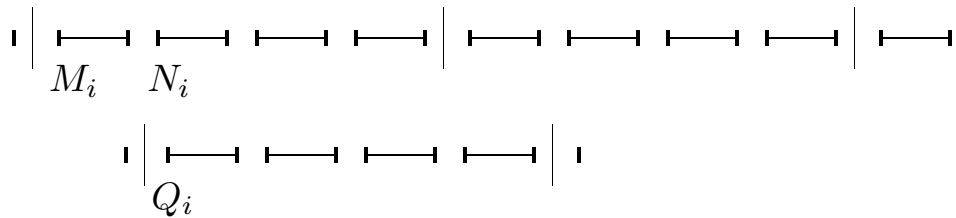


Рис 4.3

В самом деле, если бы переход "от k к $k + 1$ " произошел бы таким образом, как это изображено на рисунке 4.3, то для всех i (i -номер "боль-

шого" отрезка) соблюдались бы равенства $M_i = Q_i$ (уровень $k + 1$) и $N_i = Q_i$ (уровень k), но N_i не зависит от i а M_i -зависит. Поскольку $C(x)$ - функция, инвариантная относительно $T_{\mathcal{A}}$ и измеримая, приходим к требуемому, как и в [106].

Вопрос о централизаторах для других подстановочных динамических систем рассматривался в [107], где доказано ,что любая конечная группа может быть реализована в качестве существенного централизатора динамической системы, определяемой подстановкой с постоянной длиной слова.

Применительно к функции f , которую мы рассматривали при вычислении корреляций, естественно задаться также вопросом, является ли мера σ_f мерой Дирихле [27]? Отрицательный ответ на вопрос вытекает из формулируемого ниже очевидного утверждения: существуют такие $c_1, c_2 > 0$, что верно нижеследующее.

Если N достаточно велико, то пусть $k(N) = k$ – наименьшее k_0 , для которого $|D_{k_0}| > N$, и для любой допустимой последовательности $\{x_i\}$ пусть $\{i_s\}_{s=-\infty, -\infty}^{\infty} \dots i_{-R} < \dots < i_0 < \dots < i_R < \dots < \infty$ - соответствующая ранее описанному кодированию последовательность всех таких номеров i , что $x_{i_s+1} \dots x_{i_s+|D_k|} = D_k$ и слова $x_{i_s+1} \dots x_{i_s+|D_k|}$ являются блоками этого кодирования. Введем события H_1^N и $H_2^N: H_j^N = \{-\infty < i < \infty, \exists s : i_s < i \leq i_s + |D_k|, i + N - 1 \geq i_{s+1} + 1, i_{s+1} - i_s - |D_k| = j\}$, Тогда $Fr(H_j^N) \geq c_j, j = 1, 2$.

Но для любого i существует такое $r : 0 < r < 5$, что $x_{i+r} \neq x_{i+r+1}$. В то же время, если для некоторого t_1 имеет место событие H_1^N , а для t_2 - событие H_2^N ,а также для некоторых p и q выполнено $i_p < t_1 < i_{p+1}, i_q < t_2 < i_{q+1}, t_1 - i_p = t_2 - i_q$, то $(2x_{t_1} - 3)(2x_{t_1+N} - 3) + (2x_{t_2} - 3)(2x_{t_2+N} - 3) = 0$. Стало быть, $K_N < 1 - \frac{2 \min(c_1, c_2)}{6}$.

Энтропия по Кушниренко будет вычисляться для последовательности

$l_{2k} = |\omega_{\mathcal{A}}^{2k}(2)|$. Приведем определение энтропии по Кушниренко [108].

Пусть (X, μ, T) - динамическая система с инвариантной мерой в пространстве Лебега X , $A = \{n_1, \dots, n_k, \dots\}$ -последовательность целых чисел. Для произвольного измеримого разбиения ξ пространства X с конечной энтропией положим:

$$\begin{aligned} h_A(T, \xi) &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H(T^{n_1} \xi \vee T^{n_2} \xi \vee \dots T^{n_m} \xi) = \\ &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H(\xi^m), \\ h_A(T) &= \sup_{\xi: H(\xi), \infty} h_A(T, \xi). \end{aligned}$$

. A -энтропия -метрический инвариант, весьма успешно использовавшийся в эргодической теории. Вычисление или оценку A -энтропии можно эффективно осуществлять для конкретных динамических систем с помощью следующего утверждения (лемма 2 из [108]).

Пусть $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots, H(\xi_i) < \infty, i = 1, \dots, \prod_{i=1}^{\infty} = \epsilon$ (разбиение на отдельные точки). Тогда для любых A, T : $h_A(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_A(T, \xi_k)$.

В ряде работ A -энтропия вычислялась для обобщенных последовательностей Морса и подстановок с постоянной длиной слова [109],[110]. Оказалось, например, что с помощью A -энтропии можно устанавливать неизоморфность T и T^{-1} . Вычислялся и топологический аналог A -энтропии [111].

Итак, в нашем случае [112] $A = \{l_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. В дальнейших выкладках мы не будем пользоваться теорией структурированных последовательностей. Вместо этого мы будем использовать то очевидное обстоятельство, что $\omega_{\mathcal{A}}$ есть ОДД-подстановка ([15], глава 2 настоящей работы). Из него следует, что для любой допустимой последовательности $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ и любого $k > 0$ существует единственная последовательность пар $\{(y_i^k, n_i^k)\}_{i=-\infty}^{\infty}, y_i^k \in Z_*, n_i^k \in Z, n_i^k < n_{i+1}^k, -\infty < i < \infty$ со следующими свойствами : $\{y_i^k\}$ -допустима , при любом i $x_{n_{i+1}^k} \dots x_{n_i^k} = \omega_{\mathcal{A}}^k(y_{i+1}^k), n_{-1}^k + 1 \leq 0 \leq n_0^k$ (для данного $\mathcal{A}$ можно допустимости $\{y_i^k\}$ и не требовать- она получится автоматически).

Поскольку $\omega_{\mathcal{A}}^2(1) = 11221, \omega_{\mathcal{A}}^2(2) = 221$, можно заметить, что если обозначить $Y = 11122, W = 122$, то существует единственная последовательность пар $\{v_i, n'_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, v_i \in \{Y, W\}, x_{n'_i+1} \dots x_{n'_{i+1}} = v_i, n'_{-1} + 1 \leq -1 \leq n'_0$ - при этом, очевидно, оказывается, что $n'_i = n_i^2 - 1, \infty < i < \infty$.

Рассмотрим теперь абстрактный алфавит $\{Y^0, W^0\}$. Если последовательности $\{v_i\}$ сопоставить последовательность $\{v_i^a\}$: $v_i^a = \begin{cases} Y^0, & \text{если } v_i = Y \\ W^0, & \text{если } v_i = W \end{cases}$, то она окажется допустимой для подстановки θ : $\theta(Y^0) = Y^0 Y^0 W^0 W^0 Y^0, \theta(W^0) = W^0 W^0 Y^0$. Но множество допустимых последовательностей для этой подстановки в точности совпадает с множеством допустимых последовательностей для подстановки θ^0 :

$$\theta^0(Y^0) = W^0 Y^0 Y^0 Y^0 W^0, \theta^0(W^0) = W^0 Y^0 W^0.$$

Эта подстановка может быть проинтерпретирована в терминах слов Y и W и сопоставлена с исходной. Имеет место $W1\omega_{\mathcal{A}}^2(Y) = WY Y Y W(W1), W1\omega_{\mathcal{A}}^2(W) = WY W(W1)$. Если через T_{θ^0} обозначить подстановочную динамическую систему, отвечающую подстановке θ^0 , то $T_{\mathcal{A}}$ будет интегральным автоморфизмом над T_{θ^0} . Если $A = a_1 \dots a_s$ -слово над $\{Y^0, W^0\}$, то через A^θ будем обозначать слово-конкатенацию $a_1^\theta \dots a_s^\theta$, где $(Y^0)^\theta = Y, (W^0)^\theta = W$.

Поскольку речь идет о словах, обозначим $B_1 B_2^{-1} = B_3$, если $B_1 = B_3 B_2$. На множестве всех слов над Z_* определено отображение θ^* : $\theta^*(B) = W1\omega_{\mathcal{A}}^2(B)(W1)^{-1}$. Очевидно, что оно переводит допустимые (для $\omega_{\mathcal{A}}$) блоки в допустимые и $\theta^*(A^\theta) = (\theta^0 A)^\theta$, если A -слово над $\{Y^0, W^0\}$.

Если $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_{\mathcal{A}}$, то пара $\left(\begin{smallmatrix} x \\ T_{\mathcal{A}}^{-1} x \end{smallmatrix}\right)$ единственным образом разбивается на пары блоков вида $\left(\begin{smallmatrix} Y \\ 21112 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} W \\ 212 \end{smallmatrix}\right)$. При каждом же $k > 1$ пара $\left(\begin{smallmatrix} x \\ T_{\mathcal{A}}^{-l_{2k}} x \end{smallmatrix}\right)$ единственным образом разбивается на пары блоков вида $\left(\begin{smallmatrix} \theta^{*k}(Y) \\ \theta^{*k}(21112) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \theta^{*k}(W) \\ \theta^{*k}(212) \end{smallmatrix}\right)$. Изучим эти блоки: $\theta^*\left(\begin{smallmatrix} Y \\ 21112 \end{smallmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix} WY Y Y W \\ W t t t W \end{pmatrix}$, $\theta^* \begin{pmatrix} W \\ 212 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WY W \\ W t W \end{pmatrix}$, где $t = 12211$. Отсюда видно, что $\begin{pmatrix} x \\ T_{\mathcal{A}}^{-l_{2k}} x \end{pmatrix}$ единственным образом разбивается на блоки $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}(W) \\ \theta^{*k-1}(W) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}(Y) \\ \theta^{*k-1}(t) \end{pmatrix}$. По индукции легко увидеть, что $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}(Y) \\ \theta^{*k-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_k 1 C_k 22 \\ C_k 22 C_k 1 \end{pmatrix}$, где $C_1 = 1, C_{k+1} = 1221\omega_{\mathcal{A}}^2(C_k)$, откуда следует, что $C_k = D_{2k-2}$, где D_i определены при вычислении корреляций. Первое из C_k обозначим через C_k^1 , второе- через C_k^2 . По индукции легко доказывается

Лемма 1. Пусть $k > 1$. 1) Если соединение RC_k -допустимое слово и $|R| > 1$, то либо $R = \dots 1$, либо $R = \dots 22$. 2) Если $m < 2k - 1$, то каждое из слов $1C_k, 22C_k$ единственным образом разбивается на блоки вида $\omega_{\mathcal{A}}^m(1)$ и $\omega_{\mathcal{A}}^m(2)$. Причем существует такое слово B_k^m , что $C_k = A_k^m B_k^m$ и для некоторого $B_k'^m$ $B_k^m = \omega_{\mathcal{A}}^m(B_k'^m)$ и пара слов $\omega_{\mathcal{A}}^m(1B_k'^m)$ и $\omega_{\mathcal{A}}^m(22B_k'^m)$ суть неупорядоченная пара $(1C_k, 22C_k)$.

Конечно, $A_k^m = D_{m-1}, B_k^m$ непусто при $m \leq 2(k-1) - 1$. Вообще, для любого $k > 1$: $1D_k = \omega_{\mathcal{A}}^2(1D_{k-2}) = \omega_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}}(1D_{k-2}))$, $22D_k = \omega_{\mathcal{A}}^2(22D_{k-2}) = \omega_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}}(22D_{k-2}))$ и это единственные разбиения на соответствующие блоки. Заметим, кстати, что всякий допустимый блок вида $1\dots 1$ или $22\dots 1$ единственным образом разбивается на блоки вида $221, 1$.

Теперь для произвольной точки $x \in X_{\mathcal{A}}$ мы можем описать последовательность $T_{\mathcal{A}}^{-l_{2k}}(x)$. Если $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, то для каждого k существует и единственна такая последовательность пар $\{(v_i^k, m_i^k)\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $v_i^k = Y^0, W^0, m_i^k < m_{i+1}^k, -\infty < i < \infty, m_{-1}^k + 1 \leq 0 \leq m_0^k$, что $x_{m_{i+1}^k} \dots x_{m_{i+1}^k} = \theta^{*k-1}((v_{i+1}^k))$, $-\infty < i < \infty$. В этом случае $T_{\mathcal{A}}^{l_{2k}} x = \{y_i\}$, где $y_{m_{i+1}^k} \dots y_{m_{i+1}^k} = x_{m_{i+1}^k} \dots x_{m_{i+1}^k}$, если $v_{i+1}^k = W^0$ и $y_{m_{i+1}^k} \dots y_{m_{i+1}^k} = \theta^{*k-1}(t)$, если $v_{i+1}^k = Y^0$. При вычислении энтропии по Кушниренко важную роль будет играть то обстоятельство, что эти представления при различных k согласованы. Например, $m_{i_0}^k \in \{m_i^{k'}\}$, если $k' < k$. Бо-

лее того, из наших утверждений о связи между θ^* и θ^0 следует, что при $k > 2$ и любом i_0 имеем $x_{m_{i_0+1}^k} \dots x_{m_{i_0+1}^k}^k = \theta^{*k-2}((\theta^0(v_{i_0+1}^k))^\theta)$, причем символы слова $\theta^0(v_{i_0+1}^k)$ входят в последовательность $\{v_i^{k-1}\}$. Таким образом, иерархическая структура, соответствующая подстановке θ^0 , помогает изучать интересующие нас сдвиги.

Исследование блоков $\theta^{*k-1}(W)$ с точки зрения разбиения на блоки вида $\omega_{\mathcal{A}}^m(a)$, $a \in Z_*$ несколько сложнее. Проведем соответствующие выкладки (хотя могли бы воспользоваться общей теорией). Обозначим: $X_{-1} = 1, X_1 = 22$. Тогда $X_{-i}\theta^*(W)1 = \omega_{\mathcal{A}}(X_i t), i = \pm 1$. Далее, обозначим через E_s слово $1\omega_{\mathcal{A}}^2(21) \dots \omega_{\mathcal{A}}^{2s}(21)$, являющееся, как легко доказать методом индукции, концом слова $\omega_{\mathcal{A}}^{2s+2}(2) = \omega_{\mathcal{A}}^{2s}(221)$. Тогда, пользуясь тем, что для любого $u : \omega_{\mathcal{A}}^2(u) = (W1)^{-1}\theta^*(u)W1$ легко можно показать по индукции, что при любом $s > 1$:

$$X_{(-1)^s i} \theta^{*s}(W) E_{s-1} = \omega_{\mathcal{A}}^{2s-1}(X_i t), i = \pm 1.$$

Из этого следует, что если слово $X_j \theta^{*s}(W)$ присутствует в допустимой последовательности, то, вследствие свойств однозначности декодирования (уже отмеченных), его начало расшифровывается однозначно как $\omega_{\mathcal{A}}^{2s-1}(X_{(-1)^s j} 1221)$, но уже следующий после начала символ определяет последний символ 1 слова t . Следовательно, присутствие слова $\theta^{*s}(W)$ влечет наличие следующего за ним слова E_{s-1} .

Далее, поскольку $\omega_{\mathcal{A}}(X_i B) = X_{-i} 1 \omega_{\mathcal{A}}(B), i = \pm 1$, для любого B , имеем: если $X_{(-1)^s i} \theta^{*s}(W) E_{s-1} = \omega_{\mathcal{A}}^m(X_i B)$, то $X_{(-1)^{s+k} i} \theta^{*s+k}(W) E_{k+s-1}$

$= \omega_{\mathcal{A}}^m(X_{(-1)^k j} R)$, где R не зависит от $j = \pm 1$. Конечно, $\omega_{\mathcal{A}}^m(X_j B') = X_{(-1)^m j} D_{m-1} \omega_{\mathcal{A}}^m(B')$.

Отсюда вытекает

Лемма 2. *Если $m \leq 2(k-1) - 1$, то существует такое слово F_k^m , что $\theta^{*k-1}(W) = D_{m-1} F_k^m$, причем существует и единственно такое R_k^m , что $F_k^m = \omega_{\mathcal{A}}^m(R_k^m)$.*

Как расположены блоки C_k^i относительно блоков C_{k+1}^i ? Поскольку нам известна иерархия блоков вида $\theta^{*m}(W)$ и $\theta^{*m}(Y)$, участвующих в представлении любой допустимой последовательности, мы можем ответить на этот вопрос. Итак,

$$C_{k+1}^1 \underline{1} C_{k+1}^2 \underline{2} \underline{2} = \theta^{*k}(Y) = \theta^{*(k-1)}(WY Y Y W) = \theta^{*(k-1)}(W) C_k^1 \underline{1} C_k^2 \underline{2} \underline{2} C_k^1 \underline{1} C_k^2 \underline{2} \underline{2} C_k^1 \underline{1} C_k^2 \underline{2} \underline{2} \theta^{*(k-1)}(W),$$

причем подчеркнутые единицы совпадают. Остальные C_k^i не пересекаются ни с какими C_{k+1}^i . Всякое участвующее в представлении $\theta^{*k}(W)$ есть $\theta^{*(k-1)}(W) C_k^1 \underline{1} C_k^2 \underline{2} \underline{2} \theta^{*(k-1)}(W)$.

Далее мы будем использовать простые оценки для энтропии. Для произвольного измеримого множества U и произвольного не более чем счётного измеримого разбиения $\eta = \{V_1, V_2, \dots\}$ через $H(\eta | U)$ мы будем обозначать $-\sum_i \mu(U \cap V_i) \log_2 \mu(U \cap V_i)$. Для произвольного конечного разбиения ξ мы сохраняем обозначение ξ^m из определения $h_A(T, \xi)$.

Предложение 1. 1) Для любых натурального k и $\delta > 0$ существует такое $\epsilon(k, \delta)$, что если $|\xi| < k$, то для любой последовательности G_m измеримых множеств меры, меньшей $\epsilon(k, \delta)$

$$\left| \frac{1}{m} H(\xi^m) - \frac{1}{m} H(\xi^m |_{X \setminus G_m}) \right| < \delta$$

.

2) Если ξ -конечное измеримое разбиение, G_m -последовательность измеримых множеств $0 < \mu G_m < 1$ и ω_m^1, ω_m^2 -последовательности та-

ких измеримых разбиений, что $H(\omega_j^i) < R_j$, где $R_j = o(j)$ и ξ^{*m} -последовательность таких измеримых разбиений, что $\omega_m^1 \vee \xi^m |_{X \setminus G_m} = \omega_m^2 \vee \xi^{*m} |_{X \setminus G_m}$, то

$$\frac{1}{m}H(\xi^m |_{X \setminus G_m}) - \frac{1}{m}H(\xi^{*m} |_{X \setminus G_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Если B - произвольное измеримое множество, $0 < \mu(B) < 1$, $\alpha = \{C_i\}_{i=1}^s$ -его измеримое разбиение, то, как известно, $-\sum_i \mu C_i \lg_2 \mu C_i = H_B(\alpha)\mu B - \mu B \lg_2 \mu B$, где $H_B(\alpha)$ -условная энтропия при условии B . Заметим, что $H(\xi^m |_{X \setminus G_m}) + H(\xi^m |_{G_m}) = H(\xi^m \vee (X \setminus G_m, G_m))$. Поэтому $H(\xi^m |_{X \setminus G_m}) < H(\xi^m) - \mu G_m \lg_2 \mu G_m - \mu(X \setminus G_m) \lg_2 \mu(X \setminus G_m)$. С другой стороны, $H(\xi^m |_{X \setminus G_m}) > H(\xi^m) - H(\xi^m |_{G_m})$. Но $H(\xi^m |_{G_m}) = H_{G_m}(\xi^m)\mu G_m - \mu G_m \lg_2 \mu G_m$, где условная энтропия $H_{G_m} < m \lg_2 k$, откуда вытекает утверждение 1).

Аналогично предыдущему имеем :

$$H(\omega_m^i |_{X \setminus G_m}) < H(\omega_m^i) + H(G_m, X \setminus G_m) - H(\omega_m^i |_{G_m}) <$$

$$R_m - \mu G_m \log_2 \mu G_m = o(m).$$

Значит, $H_{X \setminus G_m}(\omega_m^i)\mu(X \setminus G_m) = o(m)$. Однако, по условию, $H_{X \setminus G_m}(\xi^m) < H_{X \setminus G_m}(\xi^{*m}) + H_{X \setminus G_m}(\omega_m^2)$ и $H_{X \setminus G_m}(\xi^{*m}) < H_{X \setminus G_m}(\xi^m) + H_{X \setminus G_m}(\omega_m^1)$, т.е.

$$|H_{X \setminus G_m}(\xi^m) - H_{X \setminus G_m}(\xi^{*m})| < \max_i \mu(X \setminus G_m) H_{X \setminus G_m}(\omega_m^i),$$

откуда вытекает требуемое.

Последовательность разбиений $\xi_s, s > 1$, которая требуется для вычисления энтропии, будет построена с помощью введенного ранее соответствия $x \rightarrow \{\{y_i^k, n_i^k\}_{i=-\infty}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\xi_s = \{A_{a,l}^s : a \in Z_*, 0 \leq l \leq |\omega_{\mathcal{A}}^l(a)| - 1\}$$

, где $A_{a,l}^s = \{x \mid y_0^s = a, l + n_{-1}^s + 1 = 0\}$. Сейчас с помощью другого вводимого нами иерархического представления для произвольных натуральных s, p будет определено понятие s, p -хорошей допустимой последовательности.

Допустимая последовательность $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ называется s, p -хорошей, если для каждого $p' > p$ для представления $\{(v_i^{p'}, m_i^{p'})\}$ выполнено одно из нижеперечисленных условий:

- 1) $v_0^{p'} = W^0$ и $-m_{-1}^{p'} > |D_{s-1}|$,
- 2) $v_0^{p'} = Y^0$ и $|C_{p'}| \geq -m_{-1}^{p'} > |D_{s-1}|$,
- 3) $v_0^{p'} = Y^0$ и $2|C_{p'}| + 1 \geq -m_{-1}^{p'} > |C_{p'}| + 2 + |D_{s-1}|$.

Эти условия означают, что нулевая координата лежит в одном из определявшихся ранее слов $B_{p'}^s$ и $F_{p'}^s$, причем в случае $C_{p'}^2$ не является первой буквой $B_{p'}^s$.

Если фиксировать s , то для каждого $\epsilon > 0$ найдётся такое $p = p(s, \epsilon)$, что мера множества (s, p) -хороших допустимых последовательностей $> 1 - \epsilon$. Предполагая, что p -минимальное возможное, мы будем обозначать это множество через F_ϵ . Вычислим $h_A(T_A, \xi_s)$. Мы увидим, что эта энтропия от s не зависит. A -энтропия не изменится, если из последовательности A исключить первые $p(s, \epsilon) - 1 = p - 1$ членов. Если $a \in G \cap F_\epsilon$, где G - одно из множеств-элементов ξ_s , то при каждом $p' > p$ либо $a \in T_A^{l_{2k}}$ (выполнено условие 1) или 2) определения s, p -хорошей д.п.), либо $a \in T_A^{l_{2k}} T_A^{-1}$ (выполнено условие 3)) . Интуитивно ясно, (в соответствии с предложением 1) , что выбор между этими двумя возможностями и определяет $h_A(T_A, \xi)$, которая поэтому не зависит от s и заведомо < 1 . Точнее, сопоставим каждой точке $a \in F_\epsilon$ индексующую последовательность $I^{a, \epsilon} = \{I_{p'}^a\}_{p'=p}^{\infty} : I_{p'}^a = 0$, если выполнено условие 1) или условие 2) определения s, p -хорошей допустимой последовательности , $I_{p'}^a = 1$, если выполнено условие 3).

Обозначим через η_q^ϵ разбиение $X_{\mathcal{A}}$ на множества: $X \setminus F_\epsilon$ и все множества вида $M_{b_1 \dots b_q}$, где $b_1 \dots b_q$ пробегает все возможные наборы нулей и единиц, $M_{b_1 \dots b_q} = \{a \in F_\epsilon \mid I_{p'+i-1}^a = b_i, 1 \leq i \leq q\}$. Тогда, по определению F_ϵ , имеем $T^{l_{2p'}} \xi_s \vee T^{l_{2(p'+1)}} \xi_s \vee \dots \vee T^{l_{2(p'+q-1)}} \xi_s \mid_{F_\epsilon} = \eta_q^\epsilon \vee T_{\mathcal{A}}^{-1} \xi_s \vee \xi_s \mid_{F_\epsilon}$. По предложению 1 отсюда следует, что для некоторой последовательности пар (q_n, ϵ_n) , $\epsilon_n \rightarrow 0, q_n \rightarrow \infty$ имеем $h_A(T_{\mathcal{A}}, \xi_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^{-1} H(\eta_{q_n}^{\epsilon_n} \mid F_{\epsilon_n})$. Будет ясно даже, что при фиксированном малом ϵ $h_A(T_{\mathcal{A}}, \xi_s) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} H(\eta_q^\epsilon \mid F_\epsilon) (\mu F_\epsilon)^{-1}$ вследствие марковских свойств наших иерархических представлений.

Мы воспользуемся обобщенным адическим представлением для подстановки θ^0 ([15],[16]), глава 2 настоящей работы): $T_{\theta^0}^1 : \Omega_{\theta^0}^1 \rightarrow \Omega_{\theta^0}^1$. Поскольку $T_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ есть интегральный автоморфизм над $T_{\theta^0} : X_{\theta^0} \rightarrow X_{\theta^0}$, он метрически изоморфен интегральному автоморфизму над обобщенным адическим преобразованием. Алфавит отмеченных символов есть $\{(W^0, 1), (W^0, 2), (Y^0, 1), (Y^0, 2), (Y^0, 3)\}$. Пространство интегрального автоморфизма над обобщенным адическим преобразованием есть совокупность пар $\{(\{ \dots (v_i, n_i), \dots, (v_1, n_1) \}, l) \mid 0 \leq l \leq |v_1^\theta| - 1, \{ \dots (v_i, n_i), \dots, (v_1, n_1) \} \in \Omega_{\theta^0}^1\}$. Дальнейшие выкладки можно проводить и для интегрального автоморфизма над $T_{\theta^0} \mid_{X'_{\theta^0}}$. Пусть ϕ_{sp} есть гомеоморфизм пространства интегрального автоморфизма над $T_{\theta^0}^1 \mid_{\Omega'^1_{\theta^0}}$ и пространства интегрального автоморфизма над $T_{\theta^0} \mid_{X'_{\theta^0}}$, отвечающий гомеоморфизму $\phi : \Omega_{\theta^0}^1 \rightarrow X'_{\theta^0}$, устанавливающему эквивалентность динамических систем. Обозначим $\Gamma_\epsilon = \phi_{sp}^{-1}(F_\epsilon)$. Из соотношения между θ^0 и θ^* и расположения блоков C_k^i в $\theta^{*k-1}(Y)$ вытекает следующее правило определения индексирующей последовательности.

Предложение 2. Предположим, что

$$\phi_{sp}^{-1}(a) = (\{ \dots (v_i, n_i), \dots, (v_1, n_1) \}, l) \in \Gamma_\epsilon \text{ и } i \geq p .$$

1) Если $v_i = W^0$, то $I_i^a = 0$.

2) Если $v_i = Y^0$ и $(v_{i-1}, n_{i-1}) = (W^0, 1)$ или $(Y^0, 1)$, то $I_i^a = 0$.

3) Если $v_i = Y^0$ и $(v_{i-1}, n_{i-1}) = (Y^0, 3)$ или $(W^0, 2)$, то $I_i^a = 1$.

4) Если $v_i = Y^0$ и $(v_{i-1}, n_{i-1}) \neq (Y^0, 2)$, то пусть i' -максимальный номер $< i$, для которого $(v_{i'}, n_{i'}) = (Y^0, 2)$ (такой найдётся, так как $s > 1$ и $a \in F_\epsilon$). Если $(v_{i'}, n_{i'}) = (W^0, 1)$ или $(v_{i'}, n_{i'}) = (Y^0, 1)$, то $I_i^a = 0$, в противном случае $I_i^a = 1$.

Поскольку мера в $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ -центральная, задача сводится к счету путей, отвечающих каждому набору значений индексирующей последовательности. Мы начинаем с l_{2p} , поэтому при оценке энтропии η_q^ϵ нас интересуют отрезки путей $(v_{p+q-1}, n_{p+q-1}), \dots, (v_{p-1}, n_{p-1})$ (и их продолжения при применении правила 4) предложения 2). Индексирующая последовательность, перечисляемая в обратном порядке, $I_{p+q-1}^a, \dots, I_p^a$ (и зависящая, как мы поняли, только от $(\{(v_{p+q-1}, n_{p+q-1}), \dots, (v_1, n_1)\}, l)$) разбивается на серии из единиц и серии из нулей: $q = m_1 + k_1 + \dots + m_r + k_r$, где m_i -длины серий из 1, k_i -длины серий из 0, причем только среди m_1, k_r могут быть нули. Мы предполагаем, что $r \geq 3$ -при больших q мера множества тех точек, где $r < 3$, очень мала. Первая серия длины m_1 соответствует координатам путей $(v_{p+q-1}, n_{p+q-1}), \dots, (v_{p+q-m_1}, n_{p+q-m_1})$, следующая, длины k_1 - координатам $(v_{p+q-m_1-1}, n_{p+q-m_1-1}), \dots, (v_{p+q-m_1-k_1}, n_{p+q-m_1-k_1})$ и т.д.. Обозначим через $F_v(m_1, k_1, \dots, m_r, k_r), v = Y^0, W^0$ число таких отрезков $(\{(v_{p+q-1}, n_{p+q-1}), \dots, (v_1, n_1)\}, l)$, что $v_{p+q-1} = v$, что индексирующая последовательность имеет серии $(m_1, k_1, \dots, m_r, k_r)$ и что обеспечено попадание допустимой последовательности с таким отрезком в Γ_ϵ . ϵ и p по-прежнему фиксированы.

Предложение 3. Существуют такие функции неотрицательных целых аргументов $\pi_1^v(m_1, k_1), v = Y^0, W^0, \pi_2(m_r, k_r)$ и функция натуральных ар-

гументов $\pi(m, k)$, что

$$F_v(m_1, k_1, \dots, m_r, k_r) = \pi_1^v(m_1, k_1) \prod_{i=2}^{r-1} \pi(m_i, k_i) \pi_2(m_r, k_r).$$

Доказательство. Предложение 2 позволяет довольно легко перечислить ситуации, которые могут возникнуть. Обозначим

$$\beta_i = \sum_{j \leq i} (m_j + k_j), 1 \leq i < r.$$

Пусть индексирующая последовательность имеет предписанные серии. Тогда, каким бы ни было $v_{p+q-\beta_i} (1 \leq i < r) : (v_{p+q-\beta_i-1}, n_{p+q-\beta_i-1}) = (Y^0, 1)$. Первый компонент пары определяется требованием $I_{p+q-\beta_i-1}^a = 1$, второй- требованием $I_{p+q-\beta_i}^a = 0$ и тем, что если бы было $n_{p+q-\beta_i-1} = 2$, то пришлось бы применять правило 4) предложения 2), что привело бы к противоречию, поскольку это правило "обслуживало" бы одновременно $I_{p+q-\beta_i}^a$ и $I_{p+q-\beta_i-1}^a$. Теперь уже очевидно существование всех требуемых функций и представление для $F_v(m_1, k_1, \dots, m_r, k_r)$, поскольку если $r-1$ координату мы определили, "заполнение" всех возникших r "лакун", удовлетворяющее предъявленным требованиям, происходит независимо.

Функция π вычисляется непосредственно: $\pi(m, n) = 2^m 3^{n-1}$. Последовательности координат длины $m + n$ имеют вид $b_1^1, \dots, b_m^1, b_1^0, \dots, b_n^0$, где $b_0^1 = (Y^0, 1)$; $b_0^1 = (Y^0, 1)$, $b_i^1 = (Y^0, 2)$ или $(Y^0, 3)$, $1 < i \leq m$, $b_1^0 = (W^0, 2)$ или $(Y^0, 3)$; при $i > 1$, если $b_{i-1}^0 = (W^0, \cdot)$, то либо $b_i^0 = (W^0, 1)$, либо $b_i^0 = (Y^0, 1)$, либо $b_i^0 = (W^0, 2)$; если $b_{i-1}^0 = (Y^0, \cdot)$, то либо $b_i^0 = (W^0, 1)$, либо $b_i^0 = (Y^0, 1)$, либо $b_i^0 = (Y^0, 2)$, то есть всякий раз предоставляются три возможности. Предложение 3 доказано.

Ясно, что при больших q очень мала мера множества тех точек, для которых, например, $m_1 + k_1 + m_2 + k_2 > \sqrt{q}$ (в частности, при больших m и n $\pi(m, n) \ll \sum_{m'+m''=m, n'+n''=n} \pi(m', n) \pi(m'', n'')$). Следовательно, наше

утверждение о $\lim_{q \rightarrow \infty} H(\eta_q^\epsilon |_{F_\epsilon})$ будет доказано, а энтропия по Кушн-ренко вычислена, если мы решим следующую комбинаторную задачу.

Сопоставим произвольному набору R натуральных чисел $m_1, k_1, \dots, m_r, k_r$ числа $\pi(R) = \prod_{r=1}^r \pi(m_i, k_i)$ и $\Sigma(R) = \sum_{i=1}^r (m_i + k_i)$. Для каждого натурального n рассмотрим сумму

$$\sigma(n) = \sum_{R | \Sigma(R)=n} \pi(R)$$

и вероятностный вектор

$$P_n = \{\pi(R)/\sigma(n) \mid R : \sigma(R) = n\}.$$

Доказать существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H(n)$, где $H(n)$ - энтропия $P(n)$ и вычислить этот предел.

Предлагается следующее решение этой задачи. Обозначим

$$\sigma_1(n) = \sum_{R | \sigma(R)=1, r=1} \pi(R); P_n^1 = \{\pi(R)/\sigma_1(n) \mid R : \sigma(R) = n, r = 1\},$$

$h_1(R)$ - энтропия распределения P_n^1 . Для $n \geq 4$ очевидно следующее рекуррентное соотношение :

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sum_{k=2}^{n-2} \sigma_1(k) \sigma(n-k).$$

Мы можем, стало быть, ввести распределение

$$P_n^2 = \left\{ \frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)}, \frac{\sigma_1(2)\sigma(n-2)}{\sigma(n)}, \dots, \frac{\sigma_1(n-2)\sigma(2)}{\sigma(n)} \right\}.$$

Обозначим его энтропию через $h_2(n)$. Имеем

$$(4.14) \quad H(n) = h_1(n) \frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)} + \sum_{k=2}^{n-2} (h_1(k) + H(n-k)) \frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)} + h_2(n) .$$

Очевидно, P_2^2 и P_3^2 -тривиальны: $\sigma(2) = \sigma_1(2), \sigma(3) = \sigma_1(3)$ и

$$\sigma_1(n) = \sum_{m=1}^{n-1} 2^m 3^{n-m-1} = 2(3^{n-1} - 2^{n-1})$$

Стало быть, $\sigma_1(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, откуда следует, что $\sigma_1(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sigma(n+2) = 5\sigma(n+1) - 4\sigma(n).$$

Вычислив $\sigma(4)$, получаем формулу $\sigma(n) = \frac{2}{3}(4^{n-1} - 1)$. Последовательность распределений P_n^1 , продолженных до бесконечности нулями, стремится (например, в метрике l^1) к распределению

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^2, \dots, \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n, \dots \right\}.$$

Последовательность P_n^2 стремится к

$$\left\{ \frac{\sigma_1(2)}{16}, \frac{\sigma_1(3)}{64}, \dots, \frac{\sigma_1(m)}{4^m}, \dots \right\},$$

$h_2(n)$ стремится к константе h_2 . Предположим, что мы уже сосчитали энтропию $h_A(T_A) = h_A$ и что оказалось, что $H(n) - H(n-k) = o(k)$ равномерно по n и при фиксированном k левая часть стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. В этом случае в соответствии с формулой (4.14) и вышесказанным мы имели бы

$$h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k) \frac{\sigma_1(k)}{4^k} = h_A \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k},$$

$$(4.15) \quad h_A = \frac{h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k) \frac{\sigma_1(k)}{4^k}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k}}.$$

Докажем теперь эту формулу строго. Для этого мы изучим разность $q_n = H(n) - H(n-1)$ и с помощью рекуррентного соотношения докажем, что q_n экспоненциально стремятся к некоторому числу. Обозначим через D_n число

$$h_2(n) + h_1(n) \frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)} + \sum_{k=2}^{n-2} h_1(k) \frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)}.$$

Ясно, что D_n экспоненциально стремятся к некоторому числу. Из (4.14) следует, что $H(n)$ мажорируется некоторой линейной функцией от n . Кроме того, при любом $k : 2 \leq k \leq n-3$, имеет место неравенство

$$\frac{\sigma(n-k)}{\sigma(n)} - \frac{\sigma(n-1-k)}{\sigma(n-1)} < \frac{1}{4^{n-2}-1}.$$

Далее, из (4.14) следует, что

$$q_n = D_n - D_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-3} q_{n-k} \frac{\sigma(n-k)\sigma_1(k)}{\sigma(n)} + E_n,$$

где E_n экспоненциально сходится к 0. Это и есть наше рекуррентное соотношение. Очевидно, что последовательность q_n ограничена. Пусть $Q_n(z)$ – производящая функция: $Q(z) = \sum_{n=3}^{\infty} q_n z^n$ и пусть

$$Q^0(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k} z^k = \frac{z^2}{(4-3z)(2-z)}$$

для $|z| < 4/3$, $Q^0(1) = 1$. Из вышедоказанного следует, что ряд $Q(z) - Q(z)Q^0(z) = Q(z)(1-Q^0(z))$ имеет коэффициенты, экспоненциально стремящиеся к 0. Но у каждого ряда $z^l/(1-Q^0(z))$ коэффициенты экспоненциально стремятся к $1/6$. Таким образом, наше утверждение о q_n а вместе с ним формула (4.15) доказаны. Найдём теперь, пользуясь ею,

точное выражение для h_A . Имеем

$$\begin{aligned}
 h_1(k) &= - \sum_{R|\Sigma(R)=k} \frac{\pi(R) \log_2 \pi(R)}{\sigma_1(k)} + \log_2 \sigma_1(k), \\
 h_2 &= - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(k)}{4^k} \log_2 \frac{\sigma_1(k)}{4^k}, \\
 h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k) \frac{\sigma_1(k)}{4^k} &= - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{R|\Sigma(R)=k} \frac{\pi(R) \log_2 \pi(R)}{4^k} + \log_2 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \sigma_1(k)}{4^k}, \\
 h_A &= \log_2 4 - \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \sigma_1(k)}{4^k} \right)^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{R|\Sigma(R)=k} \frac{\pi(R) \log_2 \pi(R)}{4^k}.
 \end{aligned}$$

Вычислим знаменатель:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \cdot 2 \cdot (3^{k-1} - 2^{k-1})}{4^k} = 6.$$

Найдем числитель:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=2}^{\infty} 4^{-k} \left(\sum_{m=1}^{k-1} 2^m 3^{k-m-1} (m \log_2 2 + (k-m-1) \log_2 3) \right) = \\
 &\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{2^m 3^{k-m-1}}{4^k} m (\log_2 2 - \log_2 3) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot 3^k \cdot \log_2 3}{4^k} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^m.
 \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, для первой суммы получаем $\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{3} \cdot m \cdot (\log_2 2 - \log_2 3) \cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{3^k}{4} = 2(\log_2 2 - \log_2 3)$. Вторая сумма есть $5 \log_2 3$. Таким образом, имеет место

Предложение 4. $h_A = 1 \frac{2}{3} - \log_2(\sqrt{3})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vershik A.M., *A theorem on Markov periodic approximation in ergodic theory.*, Ergodic Theory and Related Topics. Math. Research **12** (1982), 195–206.
2. Herman R.H., Putnam I.F., Scau C.F., *Ordered Brattely diagramms, dimension groups and topological dynamics.*, International Journal of Math. **3** (1992), 827–864.
3. Вершик А.М., *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.*, Докл. АН СССР **259** (1981), no. 3, 526–529.
4. Putnam I.F., *The C^* -algebras, associated with minimal homeomorphisms of the Cantor sets.*, Pacific Journal of Mathematics **136** (1989), no. 2, 329–354.
5. Thierry G., Putnam I.M., Skau, C.F., *Topological orbit equivalence and C^* -crossed products.*, preprint. Mathematics (1993), no. 11.
6. Dye H., *On the groups of measure preserving transformations I.*, Amer. J. of Math. **81** (1959), 119–159.
7. Dye H., *On groups of measure preserving transformations II.*, Amer. J. of Math. **85** (1963), 551–576.
8. Ornstein D.S., Weiss B., *Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma.*, Bull. A.M.S. **2** (1980), no. 1, 161–164.
9. Krieger W., *On ergodic flows and isomorphism of factors*, Math. Annalen **223** (1976), 19–70.
10. Connes A., *Classification of injective factors, cases $II_1, II_\infty, III_\lambda, \lambda \neq 1$* , Ann. of Math. **104** (1976), 73–115.
11. Лодкин А.А., Рубштейн Б.А., *Структура и классификация факторов*, Современные проблемы математики. ВИНТИ **26** (1985), 127–170.
12. Connes A., Feldman J., Weiss B., *Amenable equivalence relations are generated by single transformation*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **1** (1981), 431–450.
13. Lodkin A.A., Vershik A.M., *Approximation for actions of amenable groups and transversal automorphisms*, Lecture Notes in Math. **1132** (1985), 785–793.
14. Livshits A.N., *On the construction of Markov compacta.*, St. Petersburg Math. Journal **3** (1992), no. 1, 137–146.
15. Лившиц А.Н., *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*, Мат. заметки **44** (1988), no. 6, 785–793.
16. Vershik A.M., Livshits A.N., *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics*, Advances in Soviet Math. Repres. Theory and Dynamical Systems **9** (1992), 185–204.
17. Вершик А.М., Керов С.В., *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор*, Современные проблемы математики, ВИНТИ **26** (1985), 3–56.
18. Ito Sh., *A construction of transversal flows for maximal Markov automorphisms*, Second Japan–USSR Symp. on Probab. Theor., Kyoto **3** (1972), 12–17.
19. Лившиц А.Н., *О спектрах адических преобразований марковских компактов*, Успехи мат. наук **42** (1987), no. 6, 189–190.
20. Livshits A.N., *Some examples of adic transformations and substitutions*, Selecta Mathematica Sovietica **11** (1992), 83–104.
21. Каток А.Б., Степин А.М., *Аппроксимации в эргодической теории*, Успехи мат. наук **22** (1967), no. 5, 81–106.

22. Ornstein D.S., *On the root problem in ergodic theory*, Proc. VI Berkeley Symposium on Math. Statistics and probability **II** (1972), 347–356.
23. Rudolf D., *An example of a measure preserving map with minimal self-joinings and applications*, J.Analyse Math. **35** (1979), 97–122.
24. Bourgain J., *On the spectral type of Ornstein's class one transformation*, IHES/M **14** (1992).
25. Ornstein D.S., *Ergodic Theory , Randomness and Dynamical Systems*, Jale University Press, New Haven and London, 1974.
26. Del Junco A., *A transformation of simple spectrum, which is not rank one*, Canadian Journal of Mathematics **29** (1977), 655–693.
27. Queffelec M., *Substitutional dynamical systems. Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. **1294** (1987).
28. Chacon R.V., *Approximation and spectral multiplicity*, Lect. Notes in Math. **160** (1970), 18–27.
29. Jacobs K., Keane M., *0-1- sequences of Toeplitz type*, ZFW **13** (1969), 123–131.
30. Neveu J., *Sur les suites de Toeplitz*, ZFW **13** (1969), 132–134.
31. Keane M., *Generalized Morse sequences*, ZFW **10** (1968), 335–353.
32. Kwiatkowski J., *Spectral isomorphism of Morse dynamical systems.*, Bull. Acad. Pol. Sci. **29** (1981), 105–114.
33. Kwiatkowski J., *Isomorphism of regular Morse dynamical systems*, Studia Math. **62** (1982), 59–89.
34. Саломая А., *Жемчужины теории формальных языков*, "Мир", М., 1986.
35. Dekking F.M., *Recurrent sets*, Adv. in math. **44** (1982), 78–104.
36. Brujn N.G., *Updown generation of Penrose patterns*, Indagationes mathematicae. New series **1** (1990), no. 2, 201–220.
37. Morse M., *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. of Amer. Math. Soc. **22** (1921), 84–100.
38. Gottshalk W.H., Hedlund G.A., *Topological Dynamics*, Colloquium publications **XXXVI** (1955).
39. Gottshalk W.H., *Substitution minimal sets*, Trans. of Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.
40. Kamae T., *A topological invariant of substitution minimal set*, Jour. Math. Soc. of Japan **24** (1972), no. 2, 285–306.
41. Dekking F.M., *The spectrum of dynamical systems, arising from substitutions of constant length*, ZFW **41** (1978), no. 3, 221–239.
42. Gottshalk W.H., *An irreversible minimal set*, Ergodic Theory (proc. Internat. Symposium. Tulane Univ. New Orleans, 1961) Academic Press, New York (1963), 135–150.
43. Keane M., *Strongly mixing g -measures*, Invent. Math. **16** (1972), 309–324.
44. Petersen K., *A topologically strongly mixing minimal set*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 603–612.
45. Cobham A., *Uniform tag sequences*, Math. Syst. Theory **6** (1972), 164–192.
46. Markley N.G., *Substitution-like minimal sets*, Israel Journal of Mathem. **22** (332–353), no. 3–4, 1975.
47. Shalit J., *A generalization of automatic sequences*, Theor. Comp. Sci. **61(1)** (1988), 1–16.
48. Pansiot J.J., *On various classes of infinite words, obtained by iterated morphisms*, Lecture notes in computer sci. **192** (1985), 188–198.

49. Brattely O., *Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 195–234.
50. Рохлин В.А., *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*, Успехи мат. наук **22** (1967), 3–56.
51. Krieger W., *On entropy and generators of measure-preserving transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **149**, (1970), no. 2, 453–464.
52. Krieger W., *On generators in exhaustive σ -algebras of ergodic measure preserving transformations*, ZFW **20** (1971), no. 1, 75–82.
53. Krieger W., *On unique ergodicity*, Proc. VI Berkeley Symp. Math. Statist. and probability **2** (1972), 327–346.
54. Лившиц А.Н., *Образующие автоморфизмов с конечной энтропией*, Вестник ЛГУ **1** (1973), 32–36.
55. Michel P., *Coincidence Values and Spectra of Substitutions*, ZFW **42**, (1978), no. 3, 205–227.
56. Martin J., *Substitution minimal flows*, Amer. J. of Math. **93** (1971), 503–526.
57. Martin J., *Minimal flows arising from substitution of nonconstant length*, Math. System Theory **7** (1973), 73–82.
58. Mossé B., *Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution*, Theor. Comp. Sci. **99** (1992), no. 2, 327–334.
59. Michel P., *Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitutions*, C.r. Acad. Sci. Paris, Ser. A, **278** (1974), 811–813.
60. Dekking F.M., Keane M., *Mixing properties of substitutions*, ZFW **42** (1978), no. 1, 23–33.
61. Биллингслей П., *Эргодическая теория и информация*, "Мир", М., 1969.
62. Muralidharan S., *Coincidence densities and spectra of a class of substitutional minimal sets*, Jour. of Indian Math. Society, new series **XLIX** (1985), no. 3–4, 185–200.
63. Соломяк Б.М., *Об одной динамической системе с дискретным спектром*, Успехи мат. наук **41** (1986), no. 2, 209–210.
64. Solomyak B., *On the spectral theory of adic transformation*, Advances of Soviet Mathematics **9** (1992), 217–230.
65. Host B., *Valeurs propres des systèmes dynamiques définies par des substitutions de longueur variable*, Ergodic Theory and dynamical systems **6** (1986), no. 4, 529–540.
66. Касселс Дж. В. С., *Введение в теорию диофантовых приближений*, Изд. ИЛ, Москва, 1961.
67. Гельфонд А.О., *Исчисление конечных разностей*, "Наука", М., 1967.
68. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В., *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
69. Livshits A.N., *On certain sequence of matrices*, POMI preprint **2** (1994).
70. Solomyak M., *On simultaneous action of Markov shift and adic transformation*, Advances of Soviet Mathematics **9** (1992), 231–239.
71. Anzai H., *Ergodic skew-product transformations on the torus*, Osaka J. Math. **3** (1951), 83–99.
72. Parry W., *Compact abelian group extensions of discrete dynamical systems*, ZFW **19** (1969), 95–113.
73. Parry W., Walters P., *Minimal skew-product homeomorphisms and coalescence*, Compositio Math. (3) **22** (1970), 283–288.
74. Veech W.A., *Finite group extensions of irrational rotations*, Israel journal of Math. **21** (1975), 240–259.

- 75. Helson H., Parry W., *Cocycles and spectra*, Arkiv för Math. **16** (1978), 195–206.
- 76. Newton D., *On canonical factors of ergodic dynamical systems*, J. London Math. Soc. (2) **19** (1979), 129–136.
- 77. Matthew J., Nadkarni M.G., *A measure-preserving transformation, whose spectrum has Lebesgue component of multiplicity two.*, Bull. Lon. Math. Soc. **16** (1984), 402–406.
- 78. Filipowicz I., Kwiatkowski J., Lemanczik M., *Approximation of Z_2 -cocycle and shift dynamical systems*, Publ. Mathématiques **32** (1988), 91–110.
- 79. Siemaszko A., *On group extensions of 2-fold simple ergodic actions*, Studia Math. **110** (1994), no. 1, 53–64.
- 80. Queffelec M., *Ubiquite et paradoxes des suites automatiques*, Universite de Paris-Sud Mathematiques Seminaire de l'analyse harmonique (Année 1989/1990), 87–138.
- 81. Rider D., *Transformations of Fourier coefficients*, Pacific Journ. of Math. **19** (1966), 347–355.
- 82. Queffelec M., *Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro*, Université Paris-Nord, pré-publications mathématiques **62**.
- 83. Теория групп Ли. Топология групп Ли. Семинар Софус Ли, Изд. ИЛ, М., 1962.
- 84. Бейтмен, Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, т.2*, Наука, Москва, 1974.
- 85. Goodman F., Harpe P. de la, Jones V., *Coxeter-Dynkin Diagrams and Towers of Algebras*, prep. IHES **no.6** (Mars, 1987).
- 86. Фаддеев Д.К., Соминский И.С., *Сборник задач по высшей алгебре*, Наука, М., 1977.
- 87. Гельфонд А.О., Линник Ю.В., *Элементарные методы в аналитической теории чисел*, ФМ, М., 1962.
- 88. Petersen K.E., Shapiro L., *Induced Flows*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 375–389.
- 89. Лившиц А.Н., *Способ доказательства топологического перемешивания для одного класса подстановок*, Препринт ПОМИ **P-10-91** (1991).
- 90. Dumont J.M., Thomas A., *Systemes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theoret. Comp. Sci. **65** (1989), no. 2, 153–169.
- 91. Лившиц А.Н., *Об одной стационарной последовательности случайных величин*, Препринт ПОМИ **P-5-92** (92).
- 92. Brillhart J., Morton P., *Über Summen von Rudin-Shapiroschen Koeffizienten*, Illinois J. of Math. **22** (1978), no. 1, 126–148.
- 93. Brillhart J., Erdős P., Morton P., *On sums of Rudin-Shapiro coefficients II*, Pacific J. of Math. **107** (1983), no. 1, 39–69.
- 94. Rauzy G., *Sequences defined by iterated morphisms*, Sequences (Naples) Positano, 1988 (1990), Springer, New York–Berlin, 275–286.
- 95. Rudin W., *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 855–859.
- 96. Shapiro H.S., *Extremal problems for polynomials and power series*, Master Thesis, MITV, Cambridge, Mass., 1951.
- 97. Kahane J.-P., Salem R., *Ensembles parfaites et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.
- 98. Graham Colin C., McGehee O. Carruth, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1979.

99. Прохоров Ю.И., Розанов Ю.А., *Теория вероятностей*, Изд."Наука", Москва, 1973.
100. Carlitz J., *Single variable Bell polynomials*, Seminario Mathematico de Barcelone. Collectanea Mathematica **14** (1962), 3–25.
101. Wenn Z.-X., Wenn Z.-Y, *Mots infinis et produits des matrices a coefficients polinomiaux*, Informatique théorique et applications **26** (1992), no. 4, 310–344.
102. Рюэль Д., *Статистическая механика. Строгие Результаты*, Мир, Москва, 1971.
103. Strichartz R.S., *Self-similar measures and their Fourier transforms III*, Indiana University Mathem. Journal **42** (1993), no. 2, 367–412.
104. Chacon R.V., *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), no. 3, 559–563.
105. Markley N.G., *Topological minimal self-joinings*, Ergodic theory and dynamical systems **3** (1983), no. 4, 579–599.
106. del Junco A., *A simple measure preserving transformation with trivial centralizer*, Pacific J. of Math. **79** (1978), 357–362.
107. Lemańczyk M., Mentzen M.K., *On metric properties of substitutions*, Compositio Mathematica **65** (1988), no. 3, 241–263.
108. Кушниренко А.Г., *О метрических инвариантах типа энтропии*, Успехи мат. наук *XXII* (1967), no. 5, 57–66.
109. Dekking F.M., *Some examples of sequence entropy as an isomorphism invariant*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), no. 1, 167–183.
110. Lemańczyk M., *The sequence entropy for Morse shifts and counterexamples*, Studia Math. **82** (1985), 221–241.
111. Goodman T.N.T., *Topological sequence entropy*, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1974), 331–350.
112. Livshits A.N., *About a Certain Weakly Mixing Substitution*, Adv. in Sov. Math. **9** (1992), 241–251.