ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1970 МАТЕМАТИКА № 4 (95)

УДК 519.55

А. Н. Лившиц

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРА И АППРОКСИМАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

Пусть $U: T^2 \to T^2$ — алгебраический эргодический автоморфизм двумерного тора T^2. Тор будем представлять себе как произведение двух окружностей длины 1. Я. Г. Синай [3] приводит следующую оценку для числа L_n периодических траекторий автоморфизма U длины, не превосходящей n:

$$\ln L_n \sim n \ln \lambda, \tag{1}$$

где λ — большее по модулю собственное число U. Из самой оценки нельзя что-либо заключить о характере расположения периодических точек на торе. Точки с периодом, делящим данный, образуют подгруппу. Для некоторых целей интересно было бы выделить из этой подгруппы меньшую, состоящую из всех точек с рациональными координатами, имеющими знаменатель, делящий фиксированный. Желательно, чтобы этот знаменатель был возможно большим по величине и, например, таким, что приведенная выше оценка (1) реализовывалась бы уже на этом запасе периодических траекторий. Оказывается, отчасти это выполнимо.

Теорема 1. *Существуют последовательность натуральных чисел n_k, содержащая арифметическую прогрессию, константа $C > 0$ и последовательность M_k такие, что $M_k > C\lambda^{n_k^2}$ и любая точка, знаменатель координат которой делит M_k, имеет период, делящий n_k.*

Таким образом, уточнение оценки (1), данное в формулировке теоремы, реализуется уже на множестве точек с данным знаменателем. В дальнейшем $\det U = 1$ и $\operatorname{sp} U = a$ $(\neq \pm 2)$, сопряженный с U автоморфизм $Z \oplus Z$ и автоморфизмы, индуцированные им в модулях над рассматриваемыми кольцами, будут обозначаться тоже через U.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность целых чисел $m_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)$, где λ_i — корни характеристического уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$.

1) $a_n = (m_n, m_{n-1} + 1) > C\lambda^{n^2}$. Действительно, легко проверить, что m_n и $m_{n-1} + 1$ оба делятся на $\sum\limits_{-[(n-1)/2]}^{[(n-1)/2]} \lambda^i$.

2) Выберем последовательность всех таких n, что $(m_n, 2(a^2 - 4)) = 1$. Она содержит арифметическую прогрессию и явится последовательностью n_k, о которой говорится в условии теоремы 1. Зафиксируем какое-либо $n_k = n$; $a_{n_k} = A$.

Для доказательства теоремы разобьем простые множители A на две группы: p_i, по которым $a^2 - 4$ есть квадратичный вычет, и q_i, по которым $a^2 - 4$ есть невычет $A = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s} q_1^{r_1} \ldots q_t^{r_t}$. Рассмотрим кольцо $Q = Z_{p_1^{l_1}} \oplus \ldots \oplus Z_{p_s^{l_s}} \oplus Z_{q_1^{r_1}}(\sqrt{a^2 - 4}) \oplus \ldots \oplus Z_{q_t^{r_t}}(\sqrt{a^2 - 4})$ с покоординатными сложением и умножением. В кольцо Q естественно вкладывается Z_A. Условие $(q_i) p_i \nmid 2(a^2 - 4)$ обеспечивает возможность построения Q.

Докажем, что в кольце Q найдется элемент, который явится общим корнем двух уравнений $p_1(x) = x^n - 1 = 0$ и $p_2(x) = x^2 - ax + 1 = 0$. Остаток от деления $p_1(x)$ на $p_2(x)$ есть $m_n x - (m_{n-1} + 1) = p_3(x)$, но $p_3(Q) = \{0\}$, ибо $A = (m_n, m_{n-1} + 1)$, а уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ разрешимо в Q по самому построению Q. Таким образом, $p_1(x) = 0$ также разрешимо в Q.

Рассмотрим $Q \oplus Q$. Из доказанного следует, что $U^n = E$, если рассматривать действие U в $Q \oplus Q$, как в Q-модуле. Возьмем рациональную сетку со знаменателем A, сопоставим каждой точке этой сетки вектор ее числителей, вложим его в $Z_A \oplus Z_A$, а затем в $Q \oplus Q$. Из приведенных рассуждений вытекает, что период каждой точки этой сетки делит n. В качестве M_k возьмем a_{n_k}, и теорема доказана.

Характер расположения периодических точек уточняет

Теорема 2. *Для бесконечного множества чисел n подгруппа точек периода, делящего n, в точности совпадает с множеством точек, координаты которых имеют данный знаменатель.*

Доказательство. Пусть O_p кольцо целых p-адических чисел. Для почти всех p к O_p можно присоединить собственные числа U, если их там нет (такие p выделяются условием $p \nmid 2(a^2 - 4)$). Будем рассматривать такие S, которые делятся только на такие p. Расширяя Z_S, как в доказательстве теоремы 1, получим Q_S. В Q_S разрешимо уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$. Зафиксировав его корни λ и $1/\lambda$ в Q_S-модуле $Q_S \oplus Q_S$, будем иметь однозначное разложение по собственным векторам, отвечающим этим собственным числам. Теперь, если точка d на T^2 с наименьшим общим знаменателем координат S имеет период n, то, вкладывая вектор числителей в $Q_S \oplus Q_S$, увидим, что собственные векторы имеют период, делящий n, и вся сетка со знаменателем S имеет такой период. Ограничимся теперь такими n, которые не могут быть периодами точек со знаменателями, отличными от принятых нами S (можно показать, что среди этих n содержатся все, удовлетворяющие условию $(n, \beta_p) = 1$, где β_p — порядок группы $SL(2, Z_p)$, равный $(p-1)p(p+1)$ ([2], с. 156). Множество таких n содержит арифметическую прогрессию.

Из сказанного выше следует, что вместе с каждой точкой периода, делящего такое n, входит содержащая ее рациональная „сетка" точек, координаты которых имеют тот же знаменатель; значит, вся группа точек периода, делящего n, есть объединение таких сеток. Но вместе с любыми двумя сетками в нашу группу входит наименьшая, их содержащая (со знаменателем, равным наименьшему общему кратному их знаменателей). Поскольку вся группа конечна, существует наибольшая „сетка", которая и совпадает с нужной подгруппой, что и требовалось доказать. Если воспользоваться формулой Лефшеца [1], то в сочетании с теоремой 2 можно получить теорему 1.

Приведенные теоремы возникли в результате попыток ответить на вопрос, поставленный А. М. Вершиком: как аппроксимировать произвольную инвариантную относительно U меру на торе в смысле слабой сходимости. Например, возможна ли аппроксимация всякой инвариантной эргодической меры дискретными (эргодическими) инвариантными мерами; как связаны свойства инвариантной меры $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \delta_{U^i a}$ с арифметическими свойствами точки a и др.

В качестве приложения полученных фактов к этой проблематике может быть доказана

Теорема 3. *Каждая мера на T^2, инвариантная и эргодическая относительно U, может быть слабо аппроксимирована эргодическими дискретными мерами, т. е. равномерными нагрузками, сосредоточенными на периодических траекториях.*

Доказательство. По эргодической теореме Биркгофа для любой эргодической инвариантной меры μ почти всякая по μ точка x такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)^{-1} \sum\limits_{-n}^{n} f(U^m x) = \int f d\mu$ для любой непрерывной функции f. Нам достаточно показать, что существуют последовательности $\varphi(k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\psi(k) = n_k - o(n_k)$ (n_k из теоремы 1) такие, что для всякой точки x существует x_k, имеющая период n_k, и для $\psi(k)$ точек из $\{U^i x\}$, $-n_k/2 < i \leqslant n_k/2$, верно $\rho(U^i x, U^i x_k) \leqslant \varphi(k)$. Вследствие равномерной непрерывности всякой непрерывной на T^2 функции, отсюда следует сходимость $\mu_k = n_k^{-1} \sum\limits_{n_k/2 < i \leqslant n_k/2} \delta_{U^i x_k}$ к μ. В качестве x_k можно взять рациональное приближение x со знаменателем M_k, тогда x_k имеет период n_k: $(M_k > C\lambda^{n_k/2})$, причем $\psi(k) = n_k - \sqrt{2n_k}$ и $\varphi(k) = C'\lambda^{-\sqrt{n}}$. Теорема доказана.

Заметим, что, вообще говоря, предел эргодических дискретных мер не обязательно есть эргодическая мера.

В заключение я благодарю А. М. Вершика за ценные указания.

г. Ленинград

Поступило
9 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргин М., Мазур Б. О периодических точках. В сб. переводов: „Математика“, 11 : 5, 1967, с. 3—20.

2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. В сб.: „Обобщенные функции“, вып. 6. М., „Наука“, 1966.

3. Синай Я. Г. Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны. ИАН СССР. Сер. матем., т. 30, № 6, 1966, с. 1275—1292.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1970 МАТЕМАТИКА № 4 (95)

УДК 519.40

Е. С. Ляпин

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ПОДПОЛУГРУПП ПОЛУГРУППЫ

В теории полугрупп крайне естественно определяется понятие независимости подполугрупп полугруппы [1] (определение воспроизводится ниже). Соответствующая идея выглядит как естественное перенесение в теорию полугрупп условия, которому в теории групп удовлетворяют компоненты свободного произведения групп. Однако в отличие от теории групп, независимые подполугруппы могут соотноситься между собой весьма нетривиальным образом. Как мы увидим ниже, они могут пересекаться по любой полугруппе. Выяснение вопроса о пересечении двух независимых подполугрупп является одной из основных целей настоящей работы. Выясняется и обратный вопрос, когда заданная амальгама двух полугрупп погружаема в такую полугруппу, в которой исходные полугруппы независимы.

Некоторые из основных положений, развиваемых в данной статье, были опубликованы без доказательства в [1]. Понятию и свойствам идеально единичных полугрупп, существенно используемых в настоящей работе, была посвящена статья [2].

1°. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\Gamma = \{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \in I}$ некоторая совокупность подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}$.

Конечная последовательность элементов из $\mathfrak{M}$: $x_1 x_2 \ldots x_n$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{M}$), называется словом над $\mathfrak{M}$.

Слово называется *приведенным относительно* Γ, если ни для каких двух соседних элементов x_k и x_{k+1} не найдется подполугруппы $\mathfrak{A}_\xi \in \Gamma$, содержащей одновременно и x_k, и x_{k+1}.

2°. Как обычно в алгебраической литературе, $x_1 x_2 \ldots x_n$ часто означает не только само слово, но и его значение, т. е. элемент полугруппы, который получается в результате перемножения данных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3°. Определение. Пара слов над $\mathfrak{M}$, соединенных знаком равенства $x_1 x_2 \ldots x_p = y_1 y_2 \ldots y_q$ ($x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q \in \mathfrak{M}$), называется *соотношением над* $\mathfrak{M}$, если значения слов в $\mathfrak{A}$ равны.

Если оба слова — приведенные относительно Γ, то соотношение называется *приведенным относительно* Γ.

4°. Определение. Совокупность подполугрупп $\Gamma = \{\mathfrak{A}_\xi\}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется *независимой*, если никакая $\mathfrak{A}_{\xi_0}$ ($\xi_0 \in I$) не содержится в объединении остальных $\mathfrak{A}_\xi$ ($\xi \in I \setminus \{\xi_0\}$) и если над множе-