параллели, вдоль которых происходит изгибание скольжения, сгущаются к максимальной параллели в точке x^*.

Замечание 1. Если поверхность Σ является аналитической и в окрестности второго полюса x_3, причем x_3 — эллиптическая точка для Σ, то уравнение (12) принадлежит классу Фукса. Тогда непосредственными выкладками получаем, что

$$\lim_{x \to x_3} f_{k,2}(x) = +\infty.$$

Отсюда следует (при $r_1'(x_2) < 0$) существование параллелей скольжения при меньших ограничениях на k. Именно, такая параллель существует для каждого $k > N_2$ (в приведенном доказательстве теоремы мы имеем $k > N_3 \geqslant N_2$).

Замечание 2. Аналогичную задачу о нахождении параллелей с изгибанием скольжения можно рассмотреть и для случая поверхностей $\Sigma = S_1 + \ldots + S_n$ ($n > 2$), определенных в [4]. Например, в силу замечания 2 [5] достаточным условием существования параллели скольжения у S_n является выполнение неравенства $r_{n-1}'(x_{n-1,n}) > 0$ — при нечетном n и $r_{n-1}'(x_{n-1,n}) < 0$ — при n четном.

Выражаю искреннюю благодарность И. Х. Сабитову за предложенную тему и руководство при выполнении работы.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 21.VII.1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, Успехи матем. наук, 3, № 2 (1948), 47—158.

[2] Rembs E., Über Gleitverbiegungen, Math. Ann., 111 (1935), 587—595.

[3] Кон-Фоссен С. Э., Нежесткие замкнутые поверхности, Успехи матем. наук, 9, № 1 (1954), 63—81 (а также Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959).

[4] Сабитов И. Х., О жесткости некоторых поверхностей вращения, Матем. сб., 60, № 3 (1963), 506—519.

[5] Иванова-Каратопраклиева И., О нежесткости некоторых составных поверхностей вращения, Матем. заметки, 10, № 3 (1971), 333—344.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 10, № 5 (1971), 555—564

УДК 513.83

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОМОЛОГИИ Y-СИСТЕМ

А. Н. Лившиц

Пусть на многообразии M^m действует Y-система T^t (T^k). Дается критерий гомологичности нулю гельдеровской функции относительно этой динамической системы, некоторые его следствия и обобщение для функций, принимающих значения в произвольной группе Ли. Библ. 2 назв.

Пусть M^m — гладкое замкнутое риманово многообразие класса C^2 с метрикой ρ, $T^t(T^k)$ — гладкий поток (каскад) [1], f — вещественная функция на M^m, удовлетворяющая условию Гельдера. f называется гомологичной нулю в классе гельдеровских функций, если существует гельдеровская g, что

$$f(x) = \frac{d}{dt} g(T^t x)_{t=0} \qquad (f(x) = g(Tx) - g(x)).$$

Основным результатом данной заметки является следующий критерий гомологичности функции нулю.

ТЕОРЕМА 1. *Если T^t — Y — поток (T^k — Y — каскад) [1], имеющий всюду плотные траектории, то для того, чтобы f была гомологична нулю в классе гельдеровских функций, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической траектории $\{T^t x\}_{t=0}^{\tau}$ ($\{T^n x\}_{n=1}^{n_0}$) было верно следующее:*

$$\int_0^{\tau} f(T^t x)\,dt = 0 \qquad \left(\sum_1^{n_0} f(T^n x) = 0\right), \tag{1}$$

причем если гельдеровский модуль непрерывности функции f есть $\omega(\rho) = C\rho^{\delta}$, то модуль непрерывности функции g не превосходит $C_{\delta} C \rho^{\delta}$, где C_{δ} — константа, зависящая от δ и динамической системы.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Будем для простоты рассматривать случай каскада. Многообразие M^m будем предполагать снабженным ляпуновской метрикой, согласованной с условием Y для нашего каскада [2]. Докажем основную лемму.

ЛЕММА. *Существует $K > 0$ такое, что для всякого ε существует N_ε, и если $n > N_\varepsilon$, то из $\rho(T^n x, x) < \varepsilon$ следует, что существует x_0: $T^n x_0 = x_0$ и $\rho(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l < n$*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}^k$ и $\mathfrak{S}^l$ инвариантные, соответственно сжимающееся и расширяющееся слоения. Мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из непрерывной зависимости слоев от начальных точек: существует $a > 0$ такое, что если Π_0 и Π_1 — гладкие площадки, лежащие в слоях $\mathfrak{S}^k$, такие, что любую точку $\omega_0 \in \Pi_0$ можно соединить путем, лежащим в слое $\mathfrak{S}^l$ длины $< a$ с точкой $\omega_1 \in \Pi_1$, то отображение $U\colon \Pi_0 \to \Pi_1$, $u(\omega_0) = \omega_1$ непрерывно, и при малой непрерывной деформации этих площадок отображение меняется непрерывно (см. [1], стр. 26). Поэтому из компактности M^m следует, что все U, построенные таким образом, имеют модули непрерывности, не превосходящие одного общего $\delta(\varepsilon)$ $(\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0)$, где в слоях берется индуцированная метрика. Далее, существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что для любых двух точек A и B многообразия M^m с $\rho(A, B) < \gamma$ можно указать точку S, которая лежит в одном сжимающемся слое с A и в одном расширяющемся слое с B, причем расстояния от S до A и от S до B в слоях меньше $C\rho(A, B)$.

Пусть теперь $\rho(x, T^n x) < \varepsilon$. Рассмотрим для $x, T^n x$ нашу точку $S_{x, T^n x}$. Около точки x в сжимающемся слое опишем шар D радиуса $(C + 1)\varepsilon$. Если ε меньше некоторого фиксированного, а n достаточно велико, то, во-первых, по свойству Y диаметр образа $T^n D$ достаточно мал для того, что было определено отображение U, переводящее $T^n D$ в сжимающийся слой, проходящий через точку x, а во-вторых, при данном ε можно сделать n настолько большим, что $U(T^n D)$ будет лежать в шаре радиуса ε с центром в точке S в сжимающемся слое, ибо $U(T^n x) = S$. Из наличия «универсального» модуля непрерывности для U следует наличие универсального N_ε, которое может быть взято в качестве нижней границы для таких n. Но шар радиуса ε с центром в точке S содержится в первоначальном шаре радиуса $(C + 1)\varepsilon$ с центром в точке x. Следовательно, по теореме Брауэра в круге радиуса $(C + 1)\varepsilon$ с центром в точке x есть неподвижная точка отображения $U \circ T^n$. Эта точка обладает тем свойством, что ее образ при отображении T^n лежит с ней в одном расширяющемся слое и отстоит от нее на расстоянии, меньшем $C'\varepsilon$ вдоль расширяющегося слоя, где C' — некоторая константа. На этом слое T^{-n} является сжимающим отображением, поэтому на расстоянии $< C''\varepsilon$ от нее найдется неподвижная точка отображения T^n. Разумеется, эта точка является искомой периодической. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{T^k x\}_1^\infty$ — некоторая всюду плотная траектория, существующая по предположению теоремы. Зададим на ней функцию g: $g(T^k x) = \sum_0^{k-1} f(T^i x)$. Нам надо доказать, что существует $L > 0$ такое, что

$$|g(T^{l'} x) - g(T^l x)| < L\rho(T^{l'} x, T^l x)^\delta, \tag{2}$$

где $0 < \delta \leqslant 1$ (причем мы докажем, что δ можно взять совпадающим с показателем гельдеровости функции f). Тогда мы сможем по непрерывности продолжить g на все M^m гельдеровским же образом, и продолжение будет искомой функцией. Для доказательства сначала допустим, что $|l - l'| > N_{\rho(T^{l'} x, T^l x)}$ (в обозначениях леммы). Тогда по лемме существует x' такое, что $T^{l'-l} x' = x'$ (пусть $l' > l$) и $\rho(T^{k-1} x, T^{k-l-1} x') < K\rho(T^l x, T^{l'} x)$ при $l + 1 \leqslant K \leqslant l'$. Рассмотрим разность $g(T^{l'} x) - g(T^l x) = \sum_{l+1}^{l'} f(T^k x)$. Вследствие предположения теоремы она равна

$$\sum_{l+1}^{l'} f(T^{k-1} x) - \sum_0^{l'-l-1} f(T^m x^1) =$$

$$= \sum_{l+1}^{l'} [f(T^{k-1} x) - f(T^{k-l-1} x^1)] \tag{3}$$

Каждой паре $T^{k-1} x$ и $T^{k-l-1} x^1$ сопоставим точку S_k, как в доказательстве леммы, причем если $\rho(T^l x, T^{l'} x)$ достаточно мало, то можно считать, что при любом k $S_{k+1} = TS_k$, и каждую разность (3) можно представить в виде $|f(T^{k-1}x) - f(S_k)| + |f(S_k) - f(T^{k-l-1}x^{-1})| \leqslant$ $\leqslant L'\rho(T^{k-1}x, S_k)^\delta + L'\rho(S_k, T^{k-l-1}x^1)^\delta$, где L' — константа гельдеровости функции f. Но

$$\sum_{l+1}^{l'} L'\rho(T^{k-1}x, S_k)^\delta < \sum_{l+1}^{\infty} L'\rho(T^{k-1}x, S_k)^\delta \leqslant$$
$$\leqslant L''\rho(T^l x_1 S_{l+1})^\delta \leqslant L'''\rho(T^l x, T^{l'} x)^\delta.$$

Сходимость и оценка ряда следует из того, что $T^{k-1}x$ и S_k лежат в одном сжимающемся слое, и, значит, общий член ряда меняется экспоненциально. Аналогично оценивается сумма вторых слагаемых из (3). Таким образом, для рассматриваемого случая оценка (2) доказана. Для произвольных же l и l' доказательство сводится к тому, что вследствие всюду плотности траектории точки x при сколь угодно больших N найдутся $n > N$ с $T^n x$ близкие как угодно к $T^l x$, и к применению (2) к $T^l x$ и $T^n x$ и к $T^{l'}x$ и $T^n x$. Теорема доказана. Доказательство для потоков существенно ничем не отличается, кроме формулировки леммы. Для потоков она гласит.

ЛЕММА. *Существуют K_1, K_2 такие, что для всякого ε существует N_ε, и если $t > N_\varepsilon$, то из $\rho(T^t x, x) < \varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0 с $|t_0 - t| < K_1\varepsilon$, $\rho(T^s x, T^s x_0) < K_2\varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \min(t_0, t)$ и $T^{t_0}x_0 = x_0$.*

Доказательство вполне аналогично. Происхождение K_1 следующее. Если $T^t x$ близко к x, то существует t_0, близкое к t, такое, что $T^{t_0}x$ можно соединить с x двузвенной ломаной из сжимающегося и расширяющегося отрезка.

Замечание 1. Рассмотрим непрерывную функцию на многообразии M^m, удовлетворяющую условию сходимости интеграла $\int_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f.

В этом случае равенство нулю сумм по периодическим траекториям в случае каскада или интегралов по периодическим траекториям в случае потока влечет гомологичность f нулю в $C(M^m)$, что следует из доказательства теоремы 1.

Разумеется, функция g получается в этом случае тоже продолжением с всюду плотной траектории.

Замечание 2. Гомологичность нулю функции, удовлетворяющей условию замечания 1 в классе существенно ограниченных измеримых функций, влечет ее гомологичность нулю в $C(M^m)$. Действительно, пусть для некоторой функции f, удовлетворяющей условию замечания 1, есть существенно ограниченная измеримая функция такая, что $f(x) = g(Tx) - g(x)$ при почти всех x (мы рассматриваем для простоты случай каскада). Если предположить, что для какой-нибудь периодической траектории $\{T^k x_0\}_1^n$ верно $\sum_1^n f(T^k x_0) = c \neq 0$, то $\left|\sum_1^{mn} f(T^k x_0)\right| = |mc| \leqslant v\,\mathrm{rai}\,\sup \times$ $\times \left|\sum_1^{mn} f(T^k x)\right|$ вследствие непрерывности f, но $\sum_1^{mn} f(T^k x) =$ $= g(T^{mn+1}x) - g(x)$, т. е., устремляя m к бесконечности, мы видим, что нарушается условие существенной ограниченности g. Таким образом, суммы по периодическим траекториям равны 0, и, согласно замечанию 1, f гомологична 0 в C.

Замечание 3. Если M есть тор, T — его автоморфизм или эндоморфизм, то для функции f, удовлетворяющей условию Гельдера и условию абсолютной сходимости ряда Фурье, гомологичность нулю в $L'(M, \mu)$, где μ — мера Лебега, эквивалентна гомологичности нулю в C. Действительно, если f гомологична нулю в L', и существует $g \in L'$ такая, что при почти всех x: $f(x) = g(Tx) - g(x)$, то, рассматривая ряд Фурье функции g по характерам тора, мы увидим, что в разложении функции f суммы коэффициентов Фурье по любой полной траектории сопряженного к T эндоморфизма группы характеров равна 0.

Пусть $\{T^k x_0\}_1^m$ — периодическая траектория T в торе. Докажем, что $\sum_1^m f(T^k x_0) = 0$. В самом деле, любой полной траектории T^* в группе характеров тора (T^* — сопряженный эндоморфизм) соответствует $S = \{T^{*p}\gamma\}_0^\infty$ (или $S = \{T^{*p}\gamma\}_{-\infty}^{+\infty}$), взяв функцию $\varphi_S = \sum_{T^{*p}\gamma \in S} a_p^S T^{*p}\gamma$, где a_p^S — коэффициенты Фурье f при $T^{*p}\gamma$, имеем

$$\sum_1^m \varphi_S(T^k x_0) = \sum_1^m \sum_{T^{*p}\gamma \in S} a_p^S T^{*p}\gamma(T^k x_0) =$$
$$= \sum_{p:T^{*p}\gamma \in S} a_p^S \sum_{p+1}^{p+m} \gamma(T^k x_0) = \sum_{p:T^{*p}\gamma \in S} a_p^S \sum_1^m \gamma(T^k x_0) = 0$$

(так как $T^m x_0 = x_0$), но поскольку $f = \sum_S \varphi_S$, то и для f: $\sum_1^m f(T^k x_0) = 0$. Следовательно, по замечанию 1 f гомологична 0 в C.

ТЕОРЕМА 2. *Гомологичность 0 непрерывно дифференцируемой функции f в классе существенно ограниченных измеримых функций эквивалентна ее гомологичности нулю в классе непрерывно дифференцируемых функций.*

Доказательство. Согласно замечанию 2 f гомологична нулю в C, и соответствующую функцию g можно получать продолжением с всюду плотной траектории каскада T^n (мы снова для удобства ограничимся случаем каскада). Рассмотрим теперь произвольную точку A, «сжимающийся» вектор X единичной длины, гладкую кривую $a(t)$; $a(0) = A$; $0 \leqslant t \leqslant t_0$; $A(t)$ лежит в сжимающемся слое, и касательный вектор к $a(t)$ в точке A при $t = 0$ есть X. Пусть $\{T^k x\}_0^\infty$ — всюду плотная траектория, с которой мы продолжаем функцию g. Выберем $t' \in [0, t_0]$, тогда найдутся пары (n, n') натуральных чисел со сколь угодно большой разностью $n' - n$ такие, что $T^n x$ как угодно близко к A, а $T^{n'} x$ как угодно близко к $a(t')$. Если t' достаточно мало, то при достаточно большом $n' - n$ будет существовать периодическая точка A' периода $n' - n$, аппроксимирующая точку $T^n x$ согласно лемме, причем из доказательства леммы видно, что, сделав $n' - n$ достаточно большим, а $T^n x$ достаточно близким к $a(0) = A$ и $T^{n'} x$ достаточно близким к $a(t')$ можно добиться того, чтобы наша периодическая точка A' была близка к $a(t')$. Тогда разность $g(a(t')) - g(A)$ близка к

$$g(T^{n'} x) - g(T^n x) = \sum_n^{n'-1} f(T^k x) = \sum_n^{n'-1} [f(T^k x) - f(T^{k-n} A')]$$

Если теперь $n' - n$ устремлять к $+\infty$ за счет изменения n и n' так, чтобы $T^n x$ стремилось к A, а $T^{n'} x$ к $a(t')$, то наша разность будет стремиться, с одной стороны, к $g(a(t')) - g(A)$, а с другой, к $\sum_1^\infty [f(T^k A) - f(T^k(a(t')))]$ (последний ряд сходится ввиду того, что A и $a(t)$ лежат в одном сжимающемся слое, а f дифференцируема). Пусть касательный вектор к $a(t)$ в точке $a(t)$ есть $\xi(t)$, тогда $f(T^k A) - f(T^k(a(t'))) = -\int_0^{t'} \tilde{T}^k(\xi(t)), df T^k(a(t))$, где $\tilde{T}^k$ —

дифференциал диффеоморфизма T^k. Ввиду того, что $\xi(t)$ — «сжимающийся» вектор, сразу получим, что g дифференцируема по направлению $\xi(0) = X$, и производная равна $-\sum_1^\infty (\tilde{T}^k(X), df(T^k A))$. Аналогично получим дифференцируемость вдоль любого «расширяющегося» неравенства, рассматривая, конечно, T^{-1}. Из трансверсальности сжимающегося и расширяющегося слоений, непрерывной зависимости слоев от начальных данных можно легко усмотреть теперь дифференцируемость функции g (учтя равномерную сходимость ряда для производной).

Замечание. В общем случае, по-видимому, неочевидно, дифференцируема ли функция g столько же раз, сколько f, даже если предполагать f дифференцируемой лишь дважды. Тем не менее, для полупростых эргодических эндоморфизмов тора (т. е. таких, матрицы которых имеют одномерные клетки Жордана) верно следующее: если $f \in C^{r+\delta}$, где $\delta \leqslant 1$ и все r-е производные имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, то из гомологичности f нулю в C следует ее гомологичность нулю в $C^{r+\delta}$. Наметим план доказательства существования смешанных производных по собственным направлениям эндоморфизма — этого достаточно. Если выбранные нами собственные направления таковы, что произведения соответствующих собственных значений отличны от единицы, то существование смешанной производной доказывается так же, как в теореме 2 (соответствующий ряд сходится, конечно, к гельдеровской функции с показателем δ). Если же произведение собственных чисел равно единице, и тем самым ряд расходится, то обозначим через D соответствующий оператор дифференцирования. Если $g(Tx) - g(x) = f(x)$ и если бы существовала непрерывная функция Dg, то, вследствие равенства единице произведений собственных чисел, имеем

$$Dg(Tx) - Dg(x) = Df(x).$$

То есть прежде всего надо доказать, что Df гомологична нулю в C. Рассмотрим ряды Фурье и Df. Из того, что произведение собственных чисел равно единице, легко видеть, что эти ряды вдоль траекторий сопряженного к T эндоморфизма группы характеров тора отличаются постоянными множителями, и поэтому суммы коэффициентов вдоль траекторий равны нулю у f и

Df одновременно. Действуя теперь, как в замечании 3 к предыдущей теореме, мы убедимся в гомологичности нулю функции Df в C и, тем самым, в пространстве гельдеровских функций. Среди функций, осуществляющих эту гомологичность, выберем ту, которая в разложении Фурье имеет нулевой коэффициент при тривиальном характере. Она и будет Dg. Действительно, если формально применить оператор D к ряду Фурье функции g, то в пространстве формальных рядов Фурье полученный ряд тоже будет осуществлять гомологичность f нулю и поэтому разность между ними и рядом Фурье найденной нами функции постоянна на траекториях сопряженного к T эндоморфизма группы характеров. Но на каждой траектории эта постоянная есть нуль, ибо коэффициенты Фурье функции g и формального ряда Dg отличаются множителями, постоянными на траекториях и, значит, одновременно стремятся к нулю вдоль траекторий так же, как и у ряда Фурье нашего «кандидата» в Dg, и так же, следовательно, как у изучаемой разности. Таким образом, Dg существует вследствие обычных теорем о дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов. Ее гельдеровость с показателем следует из теоремы 1.

Представляет интерес изучение гомологий Y-систем с коэффициентами в произвольной группе Ли. Пусть на римановом многообразии M^m действует группа G, а Γ — некоторая группа Ли. Пусть $\Gamma(M)$ обозначает группу гельдеровских отображений M в Γ (понятие гельдеровости не зависит от метрики вследствие компактности M). Циклом называется функция $f(x, g)$, отображающая $M \times G$ в Γ и такая, что

$$f(x, g_1)\, f(xg_1, g_2) = f(x, g_1g_2).$$

Два цикла f_1 и f_2 называются гомологичными, если

$$f_1(x, g) = \varphi^{-1}(x)\, f_2(xg)\, \varphi(xg)$$

для некоторой гельдеровской функции $\varphi\colon M \to \Gamma$. В случае $G = Z$ цикл определяется функцией $\bar f(x) = f(x, 1)$ и условие гомологичности

$$\bar f_1(x) = \varphi^{-1}(x)\, \bar f_2(x)\varphi(Tx),$$

где T — действие образующего элемента группы G. Если G — аддитивная группа вещественных чисел и если потребовать дифференцируемости циклов и функций $\varphi(xg)$ по g, то цикл определится функцией $\bar f\colon M \to \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы Γ):

$$\bar f(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \exp^{-1} [f(x, 0)^{-1} f(x, t)],$$

где $\exp^{-1}$ определено при малых t, а условие гомологичности цикла нулю будет в терминах $\bar f$ таково:

$$\bar f(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \exp^{-1} (\varphi^{-1}(x)\, \varphi(T^t x)),$$

где T^t — поток, определяемый действием группы R, а φ — некоторая функция

$$\varphi\colon M \to \Gamma.$$

Тем самым оправдываются определения, предпосланные теореме 1, и мы можем говорить о функциях, гомологичных нулю. Сформулируем без доказательства теорему, обобщающую теорему 1.

ТЕОРЕМА 3. *Если группа G есть Z или R и ее действие на римановом многообразии M^m определяет Y-каскад (или Y-поток), имеющий всюду плотную траекторию, то в каждой группе Ли Γ существует окрестность единицы U (в алгебре Ли группы Γ существует окрестность нуля U), что гельдеровская функция*

$$\bar f\colon M \to U$$

определяет нулевой элемент $H'(G, \Gamma(M))$ тогда и только тогда, когда для соответствующего цикла $f(x, g)$ $xg = x$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$.

З а м е ч а н и е 1. Если группа Γ имеет двусторонне инвариантную метрику или конечно-мерна, то в качестве U можно взять всю группу Γ (всю алгебру Ли группы Γ). Для действия Z достаточно, чтобы Γ имела двусторонне инвариантную метрику, не обязательно являясь группой Ли.

З а м е ч а н и е 2. Разумеется, условие теоремы 3 эквивалентно равенству e_Γ произведений по периодическим траекториям аналогично теореме 1, и в случае двусторонне инвариантной метрики в группе доказательство теоремы 3 есть простой пересказ доказательства теоремы 1.

При доказательстве леммы 1 об аппроксимации произвольной траектории периодическими мы пользовались замечаниями, сделанными Г. А. Маргулисом.

Теорема 3 является ответом на вопрос, поставленный А. М. Вершиком в связи с теоремой 1.

Ленинградский государственный университет

Поступило 23.III.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 90 (1967).

[2] Аносов Д. В., О касательных полях трансверсальных слоений в Y-системах, Матем. заметки, 2, № 5 (1967), 539—549.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 10, № 5 (1971), 565—570

УДК 519.2

ОБ УСЛОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЯХ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ ПЕТТИСА ФУНКЦИЙ

В. И. Рыбаков

В заметке строится пример интегрируемой в смысле Петтиса функции, для которой не существует условного математического ожидания относительного некоторой σ-подалгебры. Построенный пример показывает, в частности, что утверждение теоремы 6.1 в статье М. М. Rao (РЖ мат., 1968, 9Б680) неверно. Библ. 4 назв.

В математической литературе появилось много работ, посвященных изучению X-мартингалов (см., в частности, [1—2]). Однако при этом рассматриваются функции, интегрируемые в смысле Бохнера. Естественно попытаться рассмотреть более общую ситуацию: мартингалы для векторнозначных функций, интегрируемых хотя бы в смысле Петтиса. Но здесь прежде всего встает вопрос о существовании условных ожиданий.

В данной заметке строится пример, показывающий, что, вообще говоря, не существует условного ожидания для функции, интегрируемой в смысле Петтиса (кратко: P-интегрируемой).

В статье [3] указывалось, что если функция f, определенная на пространстве с конечной мерой (S, Σ, μ) (где Σ — σ-алгебра подмножеств множества S) со значениями в $L(X, Y)$ *), такова, что для произвольного $x \in X$ функция $f(\cdot)x$ интегрируема в смысле Бохнера,

*) $L(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y.