## О ГОМОЛОГИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Лившиц

**1. Определения.** Пусть $M$ — многообразие и $f \in \mathrm{Diff}(M)$. Мы будем считать, что $f$ удовлетворяет аксиоме А Смейла ([1], определения там же).

Аксиома А. а) *Неблуждающее множество* $\Omega$ *гиперболично.* б) *Множество периодических точек плотно в* $\Omega$.

Теорема Смейла. *Пусть* $f\colon M \to M$ *удовлетворяет аксиоме А. Тогда* $\Omega$ *единственным образом представляется в виде конечного объединения замкнутых инвариантных неразложимых множеств, каждое из которых топологически транзитивно*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k;$$

*причем* $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i)$, *где* $W^s(\Omega_i) = \{x \in M \mid f^m(x) \to \Omega_i\}$ *при* $m \to +\infty$ (*аналогично* $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u(\Omega_i)$, *где* $W^u(\Omega_i) = \{x \in M \mid f^{-m}(x) \to \Omega_i$ *при* $m \to \infty\}$.

Почти аналогичным образом формулируется аксиома А$'$ и теорема Смейла для потоков $\varphi_t$ (см. там же [1]).

Пусть $\Gamma$ — некоторая группа Ли и $g$ — некоторая гельдеровская функция $g\colon M \to \Gamma$, тогда мы говорим, что $g$ гомологична нулю, если существует гельдеровская функция $h\colon M \to \Gamma$ такая, что $g(x) = h(x)^{-1}h(fx)$. В случае потока $\varphi_t$, если $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы $\Gamma$, то условие гомологичность функции $g\colon M \to \mathfrak{G}$ нулю таково: $g(x) = t^{-1}\exp^{-1}(h^{-1}(x)h(\varphi_t x))$, где $h$ — некоторая гельдеровская функция $M \to \Gamma$. Если, далее, $q\colon R \to \mathfrak{G}$ — некоторое отображение прямой в алгебру Ли группы $\Gamma$ и $p\colon R \to \Gamma$ таково, что $q(t_0) = \lim\limits_{t' \to 0} t'^{-1}p(t_0)^{-1}p(t_0 + t')$ при всех $t_0 \in R$ и $q(a) = e_\Gamma$, то через $H(q, a, b)$ мы будем обозначать $p(b)$ $(a, b \in R)$.

**2. Результаты.** Сформулируем лемму, являющуюся этапом как формулировки, так и доказательства основной теоремы.

Лемма. *Для того чтобы* $g$ *была гомологична нулю на* $\bigcup \Omega_i = \Omega$, *необходимо и достаточно, чтобы из* $f^n x_0 = x_0$ *следовало*

$$g(x_0)\, g(fx_0) \ldots g(f^{n-1}x_0) = e_\Gamma$$

(*из* $\varphi_T x_0 = x_0$ *следовало* $H(q, 0, t) = e_\Gamma$, *где* $q(t) = g(\varphi_t x_0)$).

Соответствующие функции $h_i$ выбираются с точностью до умножения слева на константы $(h_i\colon \Omega_i \to \Gamma)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $g\colon M \to \Gamma$ $(g\colon M \to \mathfrak{G})$ *была гомологична нулю, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $g$ *гомологична нулю на* $\Omega = \bigcup \Omega_i$ (*или, что эквивалентно, выполняется условие леммы*),

2) *функции* $h_i$ *можно выбрать такими, чтобы из* $x \in W^u(x_1) \cap W^s(x_2)$ $(x_1 \in \Omega_{i_1}$; $x_2 \in \Omega_{i_2})$ *следовало* $g(f^{-n}x) \ldots g(x) \ldots g(f^n x)\, h_{i_1}(f^{-n}x_1)\, h_{i_2}^{-1}(f^n x_2) \xrightarrow[n \to \infty]{} e_\Gamma$

$$\left(H(q, -t, t)\, h_{i_1}(\varphi_{-t}x_1)\, h_{i_2}^{-1}(\varphi_t x_2) \xrightarrow[t \to \infty]{} e_\Gamma\right),$$

*где* $q(t) = g(\varphi_t x)$. *Причем существует такая конечная функция* $C(M, f, \delta)$ $(C(M, \varphi_t, \delta))$, *что если модуль непрерывности* $g$: $\omega_g(\rho) \leqslant K\rho^\delta$, *то модуль непрерывности* $h$: $\omega_h(\rho) \leqslant C(M, f, \delta)\, K\rho^\delta$ $(\omega_h(\rho) \leqslant C(M, \varphi_t, \delta)\, K\rho^\delta)$. *Если* $g \in C^1(M)$, *то и* $h \in C^1(M)$. *Если* $\int\limits_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho} < \infty$, *то* $h \in C(M)$.

Теорема 2. *Если* $f(\varphi_t)$ — *транзитивный Y-каскад класса* $C^2$ (*Y-поток*) [2], *то для того чтобы* $f(\varphi_t)$ *имела интегральный инвариант, необходимо и достаточно, чтобы для любой периодической точки* $x_0$: $f^n x_0 = x_0$ $(\varphi_T x_0 = x_0)$

$$g(x_0) \ldots g(f^{n-1}x_0) = 1 \quad (g_T(x_0) = 1),$$

*где* $g$ — *якобиан* $f$ ($g_t$ — *якобиан* $\varphi_t$) *по некоторой мере, совместимой с гладкостью.*

Достаточность выводится из теоремы 1. Необходимость — из результатов Я. Г. Синая о предельных распределениях Гиббса и видоизменения теоремы 1.

Теорема 1 о гомологиях для потоков может быть тривиальным образом переформулирована для расширений — теории приводимости систем линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь аналог нашей теоремы для сдвига $f$ в пространстве $\Omega_{\Pi}$ [2], где $\Pi$ — матрица переходов некоторой нетранзитивной топологической марковской цепи. Разобьем множество состояний нашей цепи на классы попарно сообщающихся состояний $A_i$.

Рассмотрим введенное Я. Г. Синаем пространство $F_\rho$ отображений $\Omega_{\Pi}$ в $\Gamma$ с «быстрым убыванием зависимости». Пусть $k(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in \Omega_{\Pi})$ есть наименьший модуль номера несовпадающих координат точек $x_1$ и $x_2$. Тогда $g \in F_\rho$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1$ и $x_2$: $d(g(x_1), g(x_2)) < C\rho^{k(x_1, x_2)}$ $(0 < \rho < 1)$, где $C$ — константа, а $d$ — метрика в группе $\Gamma$. Если мы здесь будем через $W^s(x)(W^u(x))$ обозначать множество таких точек $y$, что для некоторого $k$ координаты точек $x$ и $y$ с номерами, меньшими $k$ (большими $k$), совпадают, а через $\Omega_i$ — объединение траекторий, попадающих только в состояния класса $A_i$, то формулировки леммы и основной теоремы не изменяются, причем сопоставление $g \to h$ можно выбрать непрерывным в естественной метрике $F_\rho$.

З а м е ч а н и е. Если $\Gamma$ коммутативна, то условие 2) теоремы 1 можно (в аддитивной форме) писать так: существуют константы $e_i \in \Gamma$ такие, что если $g_1|_\Omega = g|_\Omega$ и $g_1$ гомологично 0 в $M$ (такая $g_1$ существует по условию 1) и потому, что $\Omega_j$ замкнутые, непересекающиеся) и $x \in W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_j)$, то $\sum_{-\infty}^{\infty} (g - g_1)(f^n(x)) = C_j - C_i$.

П р и м е ч а н и е  п р и  к о р р е к т у р е. Теорема 2 имеется в совместной заметке с Я. Г. Синаем, представленной в ДАН СССР. Автор получил результат, который влечет необходимость в теореме 2.

Т е о р е м а. *Пусть $f(\varphi_t)$ — транзитивный $Y$-каскад ($Y$-поток) класса $C^2$ в $M$ с конечной инвариантной мерой $\mu$, совместимой с гладкостью, функция $g\colon M \to R$ непрерывна и $\int_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho} < \infty$. Тогда если для функции $h$, измеримой по $\mu$, п. в. $\mu$: $g(x) = h(fx) - h(x)$ ($\forall T > 0$ п. в.: $\int_0^T g(\varphi_t x)\,dt = h(\varphi_T x) - h(x)$), то $\exists h'\colon M \to R$; $h' \in C(M)$ и*

$$\mu\{x \mid h(x) \neq h'(x)\} = 0.$$


ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С м е й л, Дифференцируемые динамические системы, УМН 25:1 (151) (1970), 113—185.

[2] Я. Г. С и н а й, Марковские разбиения и $У$-диффеоморфизмы, Функц. анализ 2:1 (1968), 64—89.

[3] А. Н. Л и в ш и ц, Некоторые свойства гомологий $У$-систем, Матем. заметки 10:5 (1971), 555—564.


Поступило в Правление общества 2 июля 1971 г.