ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
36(1972), 1296—1320

УДК 517.9

А. Н. ЛИВШИЦ

КОГОМОЛОГИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе сформулирован и доказан критерий когомологичности нулю функций на фазовых пространствах различных динамических систем (*У*-системы, топологические цепи Маркова, системы Смейла) с коэффициентами в некоторых группах и изучены приложения этого критерия. (В простейшем случае преобразования $T: M\longrightarrow M$ когомологичность нулю вещественной функции f означает, что $f(x)=g(Tx)-g(x)$.)

В работе ([1]) изучались гомологии *У*-систем с коэффициентами в аддитивной группе вещественных чисел и в других группах. Цель данной заметки заключается в том, чтобы дать подробное доказательство анонсированных и не доказанных там полностью фактов. Кроме того, одна теорема работы ([1]) будет обобщена и усилена. Также мы укажем некоторые приложения доказанных фактов: к проблеме расширений динамических систем, к проблеме приводимости систем линейных дифференциальных уравнений, к проблеме существования интегрального инварианта. Будут рассмотрены также и другие вопросы.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Пусть на замкнутом римановом многообразии гладко действует группа G, а Γ — некоторая топологическая группа с единицей e_Γ, являющаяся полным метрическим пространством. Пусть $\Gamma(M)$ обозначает группу непрерывных отображений $M\to\Gamma$. Коциклом называется функция $f(x, g)$, отображающая $M\times G$ в Γ и такая, что $f(x, g_1)\times f(xg_1, g_2)=f(x, g_1g_2)$. Два коцикла f_1 и f_2 называются когомологичными, если

$$f_1(x, g)=\varphi^{-1}(x)f_2(x, g)\varphi(xg)$$

для некоторой непрерывной функции $\varphi: M\to\Gamma$. В случае, когда группа $G=\mathbf{Z}$, для которой мы перейдем к аддитивной записи, коцикл определяется функцией $\bar f(x)=f(x, 1)$, а условие когомологичности имеет вид

$$\bar f_1(x)=\varphi^{-1}(x)\bar f_2(x)\varphi(Tx),$$

где T — действие образующего элемента группы G. Если G — аддитивная группа вещественных чисел и если потребовать, чтобы коциклы и

функции $\varphi(xg)$ по g были дифференцируемы и чтобы Γ была группой Ли, то коцикл определится функцией $\bar f: M\to\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы Γ),

$$\bar f(x)=\lim_{t\to 0} t^{-1}\exp^{-1}(f(x, 0)^{-1}f(x, t)),$$

где $\exp^{-1}$ определено при малых t, а условие когомологичности коцикла нулю будет в терминах $\bar f$ таково:

$$\bar f(x)=\lim_{t\to 0} t^{-1}\exp^{-1}((\varphi(x))^{-1}\varphi(T^tx)),$$

где T^t — поток, определенный действием группы R, а φ — некоторая функция $\varphi: M\to\Gamma$.

§ 2. Случай двусторонне инвариантной метрики в Γ

В ([1]) по сути дела доказана следующая теорема (теорема 1 и замечания к теореме 3), которая будет нами неоднократно использована.

ТЕОРЕМА 0. *Если группа G есть $\mathbf{Z}$ (или $\mathbf{R}$) и ее действие на римановом многообразии M^n определяет топологически транзитивный У-каскад (или У-поток), то для любой полной группы Γ с двусторонне инвариантной метрикой гёльдеровская функция $\bar f: M\to\Gamma$ ($\bar f: M\to\mathfrak{G}$) определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $xg=x$ влечет $f(x, g)=e_\Gamma$, причем соответствующая функция φ тоже гёльдеровская.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть S — эндоморфизм тора $\mathbf{T}^n$, представляющийся матрицей с простыми элементарными делителями, все собственные значения которой вещественны и отличны от ± 1. Если для некоторой функции $f\in C^{r+\delta}$, где $r\geqslant 1$, $0<\delta\leqslant 1$, все r-ые смешанные производные имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, существует такая функция $g\in L^1(T^n)$, что почти всюду $f(x)=g(Sx)-g(x)$, то функция g совпадает почти всюду с функцией $g'\in C^{r+\delta}$ и при всех x из $\mathbf{T}^n$ $f(x)=g'(Sx)-g'(x)$.*

Доказательство. В ([1]) (замечание 3 к теореме 1 и теорема 2) показано, что g' может быть взята из $C^1(\mathbf{T}^n)$, и сосчитана производная вдоль произвольного вектора X, сжимающегося под действием S:

$$g'_X(a)=\sum_0^\infty(\tilde S^kX, df(S^ka)),$$

где a — точка, в которой считается производная, $\tilde S^k$ — дифференциал диффеоморфизма S, и, аналогично, для расширяющегося вектора X

$$g'_X(a)=\sum_0^\infty(\tilde S^{-k}X, df(S^{-k}a)).$$

Вследствие предположенной в условии теоремы полупростоты $\tilde S$ в касательном пространстве к $\mathbf{T}^n$, в каждой точке может быть выбран базис из собственных векторов $\tilde S$. В связи с параллелизуемостью тора мы будем считать, что все рассматриваемые нами в дальнейшем векторы отнесены к одной точке. Достаточно доказать, что существуют и лежат в $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$ все смешанные производные g' порядков до r включительно вдоль собственных направлений S.

Будет использован тот очевидный факт, что если $f\in C^{r+\delta}$ и все r-ые смешанные производные имеют абсолютно суммируемые ряды Фурье, то $f\in C^{r'+\delta}$ и все r'-ые смешанные производные f также имеют абсолютно суммируемые ряды Фурье, если $r'<r$. Допустим, что для всех r', меньших данного r, наша теорема доказана. Поскольку, как уже отмечалось, для $r=1$ она доказана в ([1]) даже без предположения абсолютной суммируемости рядов Фурье производных, достаточно совершить индукционный переход. Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — некоторый набор собственных векторов S единичной длины, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — соответствующие собственные значения.

I случай. $|\lambda_1\ldots\lambda_r|\neq 1$. Допустим, что $|\lambda_1\ldots\lambda_r|<1$ (случай $|\lambda_1\ldots\lambda_r|>1$ аналогичен). Расположим собственные векторы и собственные числа S в следующем порядке:

$$y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_r;\ \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_r,$$

где β_i — собственное число, отвечающее собственному вектору y_i, $|\beta_1|<1, \ldots, |\beta_k|<1, |\beta_{k+1}|>1, \ldots, |\beta_r|>1$.

Докажем существование непрерывной производной $g_{y_1,\ldots,y_n}$. Тем самым с помощью индукционного предположения и обычных теорем о повторных производных I случай будет полностью рассмотрен. Но из нашей формулы для производной g_{y_1} последовательным дифференцированием ее по y_i как функционального ряда (это дифференцирование законно вследствие расположения β_i) мы получаем, что $g_{y_1,\ldots,y_r}(A)$ существует, равна

$$\sum_0^\infty (\beta_1\ldots\beta_r)^k f_{y_1\ldots y_r}(S^kA)$$

в каждой точке $A\in T^n$ и тем самым принадлежит $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$.

II случай. $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r=\pm 1$. Если $\lambda_1\ldots\lambda_r=-1$, то заменяя S на S^2, а $f(x)$ — на $f_1(x)=f(x)+f(Sx)$, мы сводим все к случаю $\lambda_1\ldots\lambda_2\simeq 1$, который мы и будем впредь рассматривать. Пусть D — оператор смешанного дифференцирования вдоль направлений $X_1, \ldots, X_r$, отвечающих, соответственно, собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$:

$$(Dg)(x) = g_{X_1\ldots X_r}(x).$$

Если $g(Sx)-g(x)=f(x)$ и если бы существовала непрерывная функция $Dg(x)$, то мы имели бы $D(U_Sg)-Dg=Df$, где $(U_Sg)(x)=g(Sx)$ вследствие $\lambda_1\ldots\lambda_r=1$, и $Dg(Sx)-Dg(x)=Df(x)$. Таким образом, мы должны доказать, что Df гомологична нулю в C. Рассмотрим ряды Фурье f и Df:

$$f=\sum_\chi c_\chi\chi,\quad Df=\sum_\chi b_\chi\chi,$$

где χ пробегает характеры тора. Очевидно, что $D\chi=a_\chi\chi$, где a_χ — некоторое число; это следует из общего вида χ:

$$\chi = e^{2\pi i\sum m_j\theta_j},$$

где θ_j — циклические координаты на торе $\mathbf{T}^n$. Но так как $(D(U_S\chi))(x) = D\chi(Sx)$, то $a_\chi = a_{U_S\chi}$. Из вышесказанного следует, что a_χ постоянно на любой траектории Q преобразования U_S в группе характеров тора. А поскольку $\sum\limits_{\chi\in Q} c_\chi=0$ (вследствие когомологичности f нулю в $L^1(\mathbf{T}^n)$), то и $\sum\limits_{\chi\in Q} b_\chi=\sum\limits_{\chi\in Q} a_\chi c_\chi=0$. Докажем теперь, что для любой периодической траектории $\{S^kx_0\}_1^m$ в торе $\mathbf{T}^n$

$$\sum_1^m (Df)(S^kx_0)=0.$$

В самом деле, $Df=\sum\limits_Q\varphi_Q$, где $\varphi_Q=\sum\limits_{\chi\in Q} b_\chi\chi$,

$$\sum_1^m\varphi_Q(S^kx_0)=\sum_1^m\sum_{\chi\in Q} b_\chi\chi(S^kx_0)=\sum_{\chi\in Q} b_\chi\sum_1^m\chi(S^kx_0).$$

Но для периодической точки x_0, $S^mx_0=x_0$, сумма $\sum\limits_1^m\varkappa(S^kx_0)$ для всех $\varkappa$ из одной траектории Q одинакова, ибо если $\varkappa_1=U_{S^l}\varkappa_2$, то

$$\sum_1^m\varkappa_1(S^kx_0)=\sum_1^m\varkappa_2(S^{k+l}x_0)=\sum_{1-l}^{m-l}\varkappa_2(S^{k+l}x_0)=\sum_1^m\varkappa_2(S^kx_0).$$

Поэтому $\sum\limits_1^m\varphi_2(S^kx_0)=0$ и $\sum\limits_1^m(Df)(S^kx_0)=0$ (мы неоднократно использовали абсолютную сходимость ряда Фурье Df). Из теоремы 0 следует теперь, что Df когомологична 0 в $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$.

Среди функций $U(x)$ таких, что $U(Sx)-U(x)=(Df)(x)$, выберем ту, которая в разложении Фурье имеет нулевой коэффициент при тривиальном характере. Но эта функция и будет Dg. Действительно, пусть $g=\sum\limits_\varkappa d_\varkappa\varkappa$ — ряд Фурье функции g. Применив к нему формально оператор D, получим ряд $\sum\limits_\varkappa a_\varkappa d_\varkappa\varkappa$. Мы знаем, что $(Dg)(Sx)-(Dg)(x)=(Df)(x)$ в множестве формальных рядов Фурье. Пусть, далее, ряд Фурье нашей функции есть $\sum\limits_\varkappa p_\varkappa\varkappa$. В пространстве формальных рядов Фурье теперь окажется

$$((Dg)(Sx)-U(Sx))-((Dg)(x)-U(x))=0,$$

т. е.

$$a_\varkappa d_\varkappa - p_\varkappa = a_{U_S\varkappa} d_{U_S\varkappa} - p_{U_S\varkappa}.$$

Таким образом, последняя разность постоянна на траектории в группе характеров. Но мы видели, что $a_\varkappa$ постоянна на траектории в группе характеров; $d_\varkappa$ стремится к 0 вдоль траекторий как коэффициент Фурье функции g; $p_\varkappa$ — стремится к 0 вдоль траекторий как коэффициент Фурье функции U. Поэтому $a_\varkappa d_\varkappa - p_\varkappa = 0$, т. е. $Dg = \Sigma p_\varkappa \varkappa = U$, где $u \in \mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$. Таким образом, мы доказали, что ряд Фурье функции g имеет формальные смешанные производные порядков до r включительно, являющиеся рядами Фурье функций из $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$. Докажем, что из этого следует принадлежность g к $C^{r+\delta}$.

Будем для удобства изучать дифференцируемость не по собственным направлениям S, а по θ_i, где θ_i — циклические координаты на торе. Пусть нам нужно доказать существование производной $g_{\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_r}}$. Согласно предположению индукции существует $g_{\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_r}}$ и лежит в $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$. Зафиксируем значения всех координат θ_i, кроме θ_{i_1}. Пусть

$$\varphi(\theta_{i_1}) = g_{\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_r}}(\theta_1 \ldots \theta_{i_1} \ldots \theta_r),$$

где θ_{i_1} — переменная координата. Тогда ряд Фурье $\varphi(\theta_{i_1})$ и формальный ряд Фурье $\varphi'(\theta_{i_1})$ равномерно сходятся как ряды Фурье гёльдеровских функций. Теперь уже существование производной $g_{\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_r}}$ и принадлежность ее к $\mathrm{Lip}^\delta(\mathbf{T}^n)$ следует из ранее доказанного и теоремы о дифференцировании функциональных рядов. Теорема доказана.

Как известно, функция на n-мерном торе, лежащая в $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье (доказательство такое же, как для одномерного случая — см. ([8]), т. I, стр. 384). Таким образом, «утрата гладкости» — $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, и если $f \in C^\infty$, то $g \in C^\infty$. По тем направлениям, для которых произведения собственных значений отличны от единицы по модулю, дифференцируемость не утрачивается даже и без предположения о полупростоте $\widetilde{S}$ над R.

Сейчас будут даны некоторые обобщения и усиления теоремы 0.

§ 3. Более сложные группы Γ

Определение. Топологическая группа Γ называется хорошей, если она допускает эквивалентные правоинвариантную и левоинвариантную метрики ρ_Π и ρ_Λ такие, что Γ, метризованная посредством этих метрик, является полным метрическим пространством, и для любой пары точек $(x_1, x_2) \in \Gamma \times \Gamma$

$$\frac{\rho_\Lambda(x_1, x_2)}{\rho_\Lambda(gx_1g^{-1}, gx_2g^{-1})} \to 1, \qquad \frac{\rho_\Pi(x_1, x_2)}{\rho_\Pi(gx_1g^{-1}, gx_2g^{-1})} \to 1$$

при $g \to e_\Gamma$. Это стремление равномерно по (x_1, x_2) в Γ на ограниченных множествах.

Разумеется, все конечномерные группы Ли хороши. Вероятно, возможна аналогичная трактовка для некоторых бесконечномерных групп.

ТЕОРЕМА 2. *Если группа G есть $\mathbf{Z}$ (или $\mathbf{R}$) и ее действие (класса C^2) на многообразии M определяет У-каскад (или У-поток) со свойством топологической транзитивности, то в каждой хорошей группе Γ, существует такая окрестность единицы U (в алгебре Ли хорошей группы Ли Γ существует такая окрестность нуля U), что гёльдеровская функция $\bar{f}: M \to U$ определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $f(x, g) = e_\Gamma$.*

Доказательство. Рассмотрим случай каскада $\{T^n\}_{-\infty}^{\infty}$. В работе ([1]) была использована следующая лемма (мы предполагаем, что многообразие M снабжено ляпуновской метрикой $d(x, y)$ относительно T ([2])).

ЛЕММА. *Существует $K>0$ такое, что для всякого $\varepsilon>0$ можно найти такое N_ε, что если $n>N_\varepsilon$, то из $d(T^n x, x)<\varepsilon$ следует, что существует точка x_0, для которой $T^n x_0 = x_0$ и $d(T^l x_0, T^l x) < K\varepsilon$ при $1 \leqslant l \leqslant n$.*

Пусть $\{T^n x\}^\infty$ — всюду плотная траектория. Будем, как и в работе ([1]), строить на ней и пытаться продолжить с нее по непрерывности функцию $\varphi(T^n x) = f(x) f(Tx) \ldots f(T^{n-1}x)$. Воспользуемся сейчас левоинвариантной метрикой ρ_Λ в группе Γ. Допустим, что $d(T^{m-1}x, T^{n-1}x) < \varepsilon$ и, для начала, $|m-n| > N_\varepsilon$. Тогда существует периодическая точка x_0 из леммы, а также лежащая с ней в одном сжимающемся слое точка S, такие, что $T^{n-m+1}x_0 = x_0$,

$$d(T^k S, T^k x_0) < CQ^{m-k} \times d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)$$

и

$$d(T^k S, T^k x_0) < Q^{k-n} \times C \times d(T^{m-1}x, T^{n-1}x), \quad m < k \leqslant n-1,$$

где $C>0$, $Q>1$ — константы, зависящие лишь от У-системы T на M. Это легко следует из леммы и определения У-системы. Из левоинвариантности ρ_Λ следует, что

$$\rho_\Lambda(\varphi(T^{m-1}x), \varphi(T^{n-1}x)) = \rho_\Lambda(e_\Gamma, \bar{f}(T^m x) \ldots \bar{f}(T^{n-1}x)) =$$
$$= \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m x_0) \ldots \bar{f}(T^{n-1}x_0), \bar{f}(T^m S) \ldots \bar{f}(T^{n-1}S))$$

в силу условия теоремы, которое для $G = \mathbf{Z}$ как раз и означает, что для периодической точки x_0

$$\bar{f}(T^m x_0) \ldots \bar{f}(T^{n-1}x_0) = e_\Gamma.$$

Следовательно,

$$\rho_\Lambda(\varphi(T^{n-1}x), \varphi(T^{m-1}x)) \leqslant \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m x_0) \ldots \bar{f}(T^{n-1}x_0), \bar{f}(T^m S) \ldots \bar{f}(T^{n-1}S)) +$$
$$+ \rho_\Lambda(\bar{f}(T^m S) \ldots \bar{f}(T^{n-1}S), \bar{f}(T^m x) \ldots \bar{f}(T^{n-1}x)).$$

Допустим, что показатель гёльдеровости функции f равен δ. Обозначим $\bar{f}(T^{m+k-1}x_0)$ через a_k, $\bar{f}(T^{m+k-1}S)$ — через b_k, $\bar{f}(T^{m+k-1}x)$ — через c_k, $d(\varphi(T^{n-1}x),\ \varphi(T^{m-1}x))$ — через ε. Из определения $У$-системы, гёльдеровости f и условия теоремы следует, что

$$a_1 \dots a_{n-m} = e_\Gamma, \quad \rho_\Lambda(a_k, b_k) < K_1 Q^{-\delta(k-1)} \varepsilon^\delta,$$
$$\rho_\Lambda(b_k, c_k) < K_1 Q^{-\delta(n-m-1-k)} \varepsilon^\delta. \tag{1}$$

План дальнейшего доказательства следующий. Мы установим существование такой окрестности U единицы e_Γ группы Γ (она и будет искомой окрестности из условия), что если $a_i \in U$, $b_i \in U$, $c_i \in U$, то существует константа K_2 такая, что выполнение соотношений (1) влечет оценку $\rho_\Lambda(e_\Gamma, c_1, \dots, c_n) < K_2 \varepsilon^\delta$. Тем самым для нашего случая будет доказано, что

$$\rho_\Lambda(\varphi(T^m x), \varphi(T^n x)) < K_2 \times d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)^\delta,$$

если $|m-n| > N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}$ (см. лемму). Если $|m-n| < N_{d(T^{m-1}x, T^{n-1}x)}$, то, как и в работе ([1]), пользуясь всюду плотностью нашей траектории $\{T^1 x\}_0^\infty$, найдем такое q, что

$$d(T^q x, T^{m-1}x) < d(T^{m-1}x, T^{n-1}x), \quad d(T^q x, T^{n-1}x) < d(T^{m-1}x, T^{n-1}x),$$
$$|q-m| > N_{d(T^{m-1}x,\, T^{n-1}x)}, \quad |q-n| > N_{d(T^{m-1}x,\, T^{n-1}x)}$$

и, стало быть, предыдущее неравенство будет доказано для любых m и n, а функция φ будет продолжима по непрерывности на все многообразие.

Кроме метрики ρ_Λ мы будем пользоваться также правоинвариантной метрикой ρ_Π в группе Γ, для которой тоже справедливы соотношения (1). Поскольку ρ_Λ и ρ_Π эквивалентны, то существует окрестность единицы V в Γ, в которой

$$\frac{1}{R}\rho_\Pi(v_1, v_2) < \rho_\Lambda(v_1, v_2) < R\rho_\Pi(v_1, v_2),$$

где R — некоторая константа, v_1, v_2 — любые элементы из V. Пусть U — такая окрестность e_Γ, все элементы u которой обладают следующим свойством:

$$\rho_\Pi(g_1, g_2) < D\rho_\Gamma(ug_1u^{-1}, ug_2u^{-1}), \quad \rho_\Lambda(g_1, g_2) < D\rho_\Lambda(ug_1u^{-1}, ug_2u^{-1}),$$

где g_1, g_2 — любые элементы Γ, а $D: 1 < D < Q^\delta$ — некоторая константа. Пусть, наконец, ε столь мало, что шары в метриках ρ_Π и ρ_Λ с центром в e_Γ и радиусом $H = (R+1) \times K_1,\ \varepsilon^\delta(1 - DQ^{-\delta})^{-1}$ лежат в V. Тогда

$$\rho_\Pi(a_1, \dots, a_{n-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) < \rho_\Pi(a_1, \dots, a_{n-m}, b_1 a_2, \dots, a_{n-m}) +$$
$$+ \rho_\Pi(b_1 a_2, \dots, a_{n-m}, b_1 b_2 a_3, \dots, a_{n-m}) + \dots + \rho_\Pi(b_1, \dots, b_{n-m-1} a_{n-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) =$$
$$= A_1 + \dots + A_{n-m}.$$

Но $A_1 < C_1 \varepsilon^\delta < H_1$, значит, $b_1 a_2, \dots, a_{n-m} \in V$,

$$A_2 = \rho_\Pi(b_1 a_2, \dots, a_{n-m}, b_1 b_2 a_3, \dots, a_{n-m}) < D\rho_\Pi(a_2, \dots, a_n b_1^{-1}, b_2 a_3, \dots, a_n b_1^{-1}) =$$
$$= D\rho_\Pi(a_2, b_2) < KDQ^{-\delta}\varepsilon^\delta$$

(что следует из (1)). Следовательно, $A_2 + A_1$ меньше H и $b_1 b_2 a_3, \dots, a_{n-m} \in V$. Поступая и далее таким же образом, мы убедимся, во-первых, что $b_1, \dots, b_{n-m} \in V$ и, во-вторых, что

$$\rho_\Pi(a_1, \dots, a_{n-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) < K_1 \varepsilon^\delta (1 - DQ^{-\delta})^{-1}.$$

Теперь оценим $\rho_\Lambda(b_1, \dots, b_{n-m}, c_1, \dots, c_{n-m})$:

$$\rho_\Lambda(b_1, \dots, b_{n-m}, c_1, \dots, c_{n-m}) < \rho_\Lambda(b_1, \dots b_{n-m}, b_1 b_2, \dots, b_{n-m-1} c_{n-m}) +$$
$$+ \rho_\Lambda(b_1 b_2, \dots, b_{n-m-1} c_{n-m}, b_1, \dots b_{n-m-2} c_{n-m-1} c_{n-m}) + \dots$$
$$\dots + \rho_\Lambda(b_1 c_2, \dots, c_{n-m}, c_1, \dots, c_{n-m}) = B_1 + B_2 + \dots + B_{n-m}, \quad B_1 > K_1 \varepsilon^\delta$$

(вследствие (1)), значит,

$$\rho_\Lambda(a_1, \dots, a_{n-m}, c_1 \dots, c_{n-m-1} b_{n-m}) < RK_1 \varepsilon^\delta (1 - DQ^{-1})^{-1} + B_1 < H,$$

т. е. $c_1, \dots, c_{n-m-1} b_{n-m} \in V$.

Далее,

$$B_2 = \rho_\Lambda(b_1 b_2, \dots, b_{n-m-1} c_{n-m}, b_1, \dots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} c_{n-m}) < D \times$$
$$\times \rho_\Lambda(c_{n-m}^{-1} b_1, \dots, b_{n-m-1}, c_{n-m}^{-1} b_1, \dots, b_{n-m-2} c_{n-m-1}) < DK_1 Q^{-\delta} \varepsilon^\delta.$$

Поэтому

$$\rho_\Lambda(a_1, \dots, a_{n-m}, b_1, \dots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} c_{n-m}) <$$
$$< RK_1 \varepsilon^\delta (1 - DQ^{-\delta})^{-1} + B_1 + B_2 < H,$$

т. е. $b_1, \dots, b_{n-m-2} c_{n-m-1} c_{n-m} \in V$ и так далее. Окончательно мы получаем:

$$\rho_\Lambda(a_1, \dots, a_{n-m}, c_1, \dots, c_{n-m}) \leqslant H = K_1(R+1)(1 - DQ^{-\delta})^{-1} \varepsilon^\delta,$$

т. е. в качестве искомого K_2 для малых ε можно взять $K_1(R+1)(1 - DQ^{-\delta})^{-1}$. Значит, для случая $У$-каскада теорема доказана.

Для $У$-потока соответствующая лемма о периодических траекториях гласит следующее [см. ([1])].

ЛЕММА. *Существуют P_1, P_2 такие, что для всякого ε можно найти F_3, что если $t > F_\varepsilon$, то из $d(T^t x, x) < \varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0, $t_0 < |t_0 - t| < P_1 \varepsilon$, для которых $T^{t_0} x_0 = x_0$ и $d(T^s x, T^s x_0) < P_2 \varepsilon$ при $0 < s \leqslant \min(t_0, t)$.*

По аналогии со случаем $У$-каскада мы должны доказать существование такой окрестности U нуля в алгебре Ли группы Γ, что если ρ' — метрика в алгебре Ли,

$$A: [0, T] \to U, \quad B: [0, T] \to U, \quad C: [0, T] \to U$$

— три любых непрерывных отображения отрезка $[0, T]$ в U,

$$F_A:[0,T]\to\Gamma,\quad F_B:[0,T]\to\Gamma, F_C:[0,T]\to\Gamma$$

— отображения того же отрезка в Γ такие, что $F_A(0)=F_B(0)=F_c(0)=e_\Gamma$ и $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}\exp^{-1}(F_X(t_0)^{-1}F_X(t_0+t))=X(t_0)$, ($X$ — это A, B, C), то если $F_A(T)=e_\Gamma$, $\rho'(A(t), B(t))<K_1Q^{-\delta t}\varepsilon^\delta$, $\rho'(B(t), C(t))<K_1Q^{-\delta t}\varepsilon^\delta$, $0\leqslant t\leqslant T$, то $\rho_\Lambda(e_\Gamma, F_C(T))<K_2\varepsilon^\delta$, где ρ_Λ — левоинвариантная метрика, порожденная метрикой в алгебре Ли, а K_2 — константа. Рассуждения, необходимые для доказательства этого факта, практически ничем не отличаются от тех, которые были только что проведены для случая каскада. Сформулируем лишь новое определение U. U — это такая окрестность нуля в алгебре Ли, что

$$\rho_\Pi(g_1, g_2)< D^t\rho_\Pi(\exp(tu)\,g_1\exp(-tu), \exp(tu)\,g_2\exp(-tu)),$$
$$\rho_\Lambda(g_1, g_2)< D^t\rho_\Lambda(\exp(tu)\,g_1\exp(-tu), \exp(tu)\,g_2\exp(-tu)),$$

где g_1, g_2 — любые элементы Γ, а D, $1<D<Q^\delta$, — некоторая константа (через Q обозначен «коэффициент расширения $У$-потока на единицу длины). После этого редукция к рассуждениям для каскада получается тривиальным применением метода сеток. Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай конечномерной группы Ли.

ТЕОРЕМА 3. *Если группа G есть $\mathbf{Z}$ (или $\mathbf{R}$) и ее действие (класса C^2) на многообразии M определяет $У$-каскад ($У$-поток), имеющий всюду плотную траекторию, то для каждой конечномерной группы Ли Γ гёльдеровская функция $\bar f$: $M\to\Gamma$ ($\bar f: M\to\mathfrak{G}$) определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $xg=x$ влечет $f(x, g)=e_\Gamma$.*

Доказательство. Сформулируем известный результат.

ЛЕММА 1. *Для любой связной группы Ли Γ существует последовательность $\Gamma=\Gamma_1\xrightarrow{i_1}\Gamma_2\xrightarrow{i_2}\dots\xrightarrow{i_{n-1}}\Gamma_r=KN$, где K — компактная группа, N — односвязная разрешимая, i_k — эпиморфизмы с коммутативными ядрами* [(3), стр. 149 150, 248, 257].

ЛЕММА 2. *Если A — замкнутый коммутативный нормальный делитель группы C и для группы C/A теорема 3 верна, то она верна и для группы C.*

ЛЕММА 3. *Теорема 3 верна для группы вида KN.*

Рассуждения в доказательствах леммы 2 и леммы 3 весьма схожи. Мы рассмотрим полностью технически наименее громоздкий частный случай леммы 2, достаточный в случае, когда Γ односвязна.

ЛЕММА 2′. *Если утверждение теоремы 3 верно для групп Ли Γ_1 и Γ_2 и группа Γ_2 гладко действует автоморфизмами на Γ_1, то это утверждение верно и для полупрямого произведения $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ этих групп.*

Доказательство. Обозначим для элемента $y\in\Gamma_2$ через $\varphi(y)$ автоморфизм группы Γ_1 — действие y. Тогда если x, $x'\in\Gamma_1$ и y, $y'\in\Gamma_2$, то умножение в $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ будет следующим:

$$(x, y)\,(x', y')=(x\cdot\psi(y)\,(x'), y\cdot y').$$

Пусть функция $\bar f: M^l\to\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ имеет вид $\bar f(x)=(f_1(x), f_2(x))$. Из определения умножения в группе $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ и из условия теоремы 3 следует, что для любой периодической точки x_0, $T^mx_0=x_0$ (T — действие образующей группы $G=\mathbf{Z}$)

$$\bar f(x_0)\cdot\bar f(Tx_0)\dots\bar f(T^{m-1}x_0)=e_{\Gamma_1\cdot\Gamma_2}$$

и, значит,

$$f_2(x_0)\dots f_2(T^{m-1}x_0)=e_{\Gamma_2}.$$

Отсюда вытекает, что f_2 когомологична нулю в группе гёльдеровских отображений M в Γ. Следовательно, существует отображение $\varphi_2: M\to\Gamma$ такое, что $f_2(x)=\varphi_2(x)^{-1}\varphi_2(Tx)$ с гёльдеровской функцией φ_2. Учитывая это, снова используем тот факт, что

$$\bar f(x_0)\cdot\bar f(Tx_0)\dots\bar f(T^{m-1}x_0)=e_{\Gamma_1}\cdot e_{\Gamma_2}.$$

Из него следует, что

$$(f_1(x_0)\cdot\psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(Tx_0))\,(f_1(Tx_0))\times$$
$$\times\psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(T^2x_0))\,(f_1(T^2x_0))\dots\psi(\varphi_2(x_0)^{-1}\varphi_2(T^{m-1}x_0))\,(f(T^{m-1}x_0))$$

(по формуле умножения в полупрямом произведении), значит,

$$\psi(\varphi_2(x_0))^{-1}[(\psi(\varphi_2(x_0))\,(f_1(x_0))]\,[\psi(\varphi_2(Tx_0)\,(f_1(Tx_0))]\dots$$
$$\dots[\psi(\varphi_2(T^{m-1}x_0))\,(f_1(T^mx_0))]=e_{\Gamma_1}.$$

Таким образом,

$$[\psi(\varphi_2(x_0))\,(f_1(x_0))]\dots[\psi(\varphi_2(T^{m-1}x_0))\,(f_1(T^{m-1}x_0))]=e_{\Gamma_1}$$

для любой периодической точки x_0. Но функция $g(x)=\psi(\varphi_2(x))\,(f_1(x))$ гёльдеровская и, стало быть, удовлетворяет условию когомологичности нулю в Γ_1. Поэтому для некоторой функции $\varphi_1(x)$ имеем:

$$g(x)=\psi(\varphi_2(x))\,(f_1(x)).$$

Теперь из определения нашего полупрямого произведения непосредственно можно получить, что для отображения $\varphi: M\to\Gamma$, $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$,

$$\bar f(x)=\varphi^{-1}(x)\,\varphi(Tx).$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Случай потока рассматривается аналогично.

Замечание 1. Доказательство леммы 2 протекает аналогично доказательству леммы 2′.

Если мы обозначим $\mathbf{C}/A$ через P, то групповая структура C может быть определена на $A\times P$ с помощью гомоморфизма $\psi: P\to \mathrm{Aut}(A)$ и системы факторов $f: P\times P\to A$ (f разрывна), $f(x, 1)=0=f(1, y)$,

$$\psi(x)(f(y, z))+f(x, yz)=f(x, y)+f(xy, z) \tag{1}$$

(групповая операция в A записывается аддитивно; в P — мультипликативно). Тогда имеем:

$$(a_1, p_1)+(a_2, p_2)=(a_1+\psi(p_1)(a_2)+f(p_1, p_2),\ p_1p_2).$$

Предполагая теорему выполненной для группы P, мы проведем, пользуясь (1), формальные выкладки, аналогично лемме для односвязных групп, и получим, что для некоторой функции $g: M\to A$ суммы по периодам — нулевые, но она не гёльдеровская, потому что в нее уже будет входить разрывное (возможно) отображение f, задающее систему факторов. Однако если мы функцию $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ будем получать по $f=(f_1, f_2)$ стандартным методам продолжения с всюду плотной траектории, то достаточно показать следующее: для каждого куска траектории $T^m x, \ldots$ $\ldots, T^n x$, для которого $\rho(T^m x, T^n x)$ мало, сумма $\sum\limits_{m+1}^{m} g(T^i x)$ тоже мала при каком-нибудь выборе системы факторов в том же классе двумерных когомологий, что и f. Действительно, тогда вследствие предположенных коммутативности A и справедливости теоремы для P, влекущей существование непрерывной φ_2, будут близки

$$((f_1(x), f_2(x))\ldots(f_1(T^m x), f_2(T^m x))) \text{ и } ((f_1(x), f_2(x))\ldots(f_1(T^n x), f_2(T^n x)))$$

(при этом, как и выше, надо использовать непрерывность φ_2 на M). Но если мы возьмем y и z такие, что $T^{n-m}z=z$, y лежит в одном сжимающемся слое с z и в одном расширяющемся с $T^m x$, $\rho(y, z)$ и $\rho(T^n x, T^{n-m} y)$ малы (как обычно), то, конечно, можно, выбрать систему факторов так, чтобы наши обычные экспоненциальные оценки для $g(T^i y)$, $g(T^i z)$, $g(T^{m+i}x)$ (как в [1] или здесь в теореме 2) сохранялись, что и требовалось. В случае потока мы будем методом сеток заменять интегралы суммами и после этого варьировать выбор системы факторов. Доказательство леммы 3, конечно, тоньше, ввиду отсутствия в произведении KN структуры расширения, но компактность группы K спасает дело.

Разумеется, снова приходится пользоваться леммой о периодической аппроксимации и тем фактом, что разрешимая односвязная группа получается из прямой R несколькими полупрямыми умножениями на R.

То, что алгебраические конструкции теоремы 3 работают, естественно: ведь верна «локальная» теорема 2.

Замечание 2. Аналогично работе [1] можно доказать, что во всех рассмотренных случаях когомологичности коцикла нулю гладкость отображения $\bar{f}$ влечет гладкость соответствующего отображения φ. Кроме того, если $\bar{f}$ — гёльдеровская, то φ — гёльдеровская и ее гёльдеровский модуль непрерывности не превосходит гёльдеровского модуля непрерывности $\bar{f}$, умноженного на некоторую положительную константу. И, наконец, требование гёльдеровости f можно заменить требованием

$$\int\limits_0 \frac{\omega(\rho)}{\rho}<\infty,$$

где $\omega(\rho)$ — модуль непрерывности, и тогда φ будет непрерывным отображением M в Γ. Легко, тем не менее, показать что непрерывности функции f недостаточно.

§ 4. Топологические цепи Маркова и системы Смейла

Рассмотрим теперь аналог нашей теоремы для сдвига f в пространстве Ω_Π [4], где $\Pi=\{\pi_{ij}\}$ — матрица переходов некоторой транзитивной топологической цепи Маркова, т. е. Ω_Π — пространство последовательностей $\omega=\{\ldots i_{-n}\ldots i_0\ldots i_n\ldots\}$, для которых $\pi_{i_s i_{s+1}}=1$ при всех s. Транзитивность означает, что матрица Π^m для достаточно больших m имеет только строго положительные элементы.

Я. Г. Синай ввел пространство F_ρ функций на Ω_Π с «быстрым убыванием зависимости». Несколько обобщая его определение, мы будем через $F_{\rho,\Gamma}$ обозначать группу отображений M в Γ, где Γ — произвольная группа Ли со следующим свойством: для любых x_1 и x_2

$$d(g(x_1), g(x_2))<C_g\rho^{K(x_1,x_2)},\quad 0<\rho<1,$$

где C_g — константа, d — метрика в группе Γ, а $K(x_1, x_2)$, $x_1, x_2\in\Omega_\Pi$, есть наименьший модуль номера несовпадающих координат точек x_1 и x_2. Определение когомологичности прежнее.

ТЕОРЕМА 4. *Если $g\in F_{\rho,\Gamma}$, то g когомологична нулю тогда и только тогда, когда для всякой точки $\omega_1\in\Omega_\Pi$, $f^n\omega_1=\omega_1$, верно $g(\omega_1)\ldots$ $\ldots g(f^{n-1}\omega_1)=e_\Gamma$, причем соответствующая функция h лежит в $F_{\rho,\Gamma}$ и сопоставление $g\to h$ можно выбрать непрерывным в естественной метрике $F_{\rho,\Gamma}$.*

Доказательство. Мы будем предполагать, что Γ имеет двусторонне инвариантную метрику d. Редукция задачи к этому случаю проведена в доказательстве предыдущей теоремы. Поскольку наша топологическая марковская цепь транзитивна, найдется такая точка $\omega\in\Omega_\Pi$, что ее траектория $\{f^n\omega\}$ будет всюду плотна в Ω_Π в слабой топологии. Зададим на ней функцию $h: h(f^n\omega)=g(f^{-1}\omega)\ldots g(f^{n-1}\omega)$. Пусть $K(f^l\omega, f^j\omega)=K$. Тогда ω имеет вид $\{\ldots i_{-n}\ldots i_0\ldots i_n\ldots\}$, причем для $|r|\leqslant K$ $i_{l+r}=i_{j+r}$. Отсюда и из определения топологической марковской цепи очевидным образом следует, что существует точка $\omega'\in\Omega_\Pi$, имеющая период $j-l$ и в местах с номерами $-k+l+1\ldots j+1$ координаты, совпадающие с координатами ω (этими требованиями ω' определена однозначно). Из двусторонней инвариантности метрики d, определения ω' и принадлежности g группе $F_{\rho,\Gamma}$ следует теперь, что

$$d(g(f^l\omega')\dots g(f^{j-1}\omega'), g(f^l\omega)\dots g(f^{j-1}\omega)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l}^{j-1} d(g(f^r\omega), g(f^r\omega')) \leqslant 2C_g\rho^k(1+\rho+\dots+\rho^{\left[\frac{j-l}{2}\right]+1}) \leqslant C'C_g\rho^K,$$

где C' зависит только от $\rho\left(C' = \frac{2}{1-\rho}\right)$. Значит, на множестве $\{f^n\omega\}_0^\infty$ функция h тоже принадлежит $F_{\rho,\Gamma}$. Теперь мы можем продолжить ее по непрерывности и получить искомую функцию $h\in F_{\rho,\Gamma}$ на всем множестве Ω_Π. Непрерывного сопоставления $g\to h$ можно добиться следующим образом. Очевидно, что при фиксированном g функцию h можно слева умножать на любую константу. Зафиксировав точку $\omega\in\Omega_\Pi$ и потребовав, чтобы $h(\omega)=e_\Gamma$, мы однозначно определим искомую функцию h для любой g. Теорема доказана.

Перейдем теперь к случаю нетранзитивной цепи Маркова $\Omega_{\Pi'}$. Разобьем множество состояний цепи на классы A_k попарно сообщающихся состояний. Обозначим через $W^s(\omega)$ $(W^u(\omega))$ множество таких точек $\omega_0\in\Omega_\Pi$, что для некоторого l координаты точек ω и ω' с номерами, меньшими l (большими l), совпадают, через Ω_k — объединение траекторий, попадающих только в состояния класса A_k.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы функция $g\in F_{\rho,\Gamma}$ была когомологична нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *g когомологична нулю на $\bigcup\Omega_i$;*

2) *соответствующие функции $h_i:\Omega_i\to\Gamma$ путем умножения слева на константы можно выбрать такими, чтобы из*

$$\omega\in W^u(\omega_1)\cap W^s(\omega_2)\quad(\omega_1\in\Omega_{i_1},\ \omega_2\in\Omega_{i_2})$$

следовало

$$g(f^{-n}x)\dots g(x)\dots g(f^nx)\,h_{i_2}^{-1}(f^nx_2)(f^{-n}x_1)\underset{n\to\infty}{\to}e_\Gamma,$$

причем сопоставление $g\to h$ можно снова выбрать непрерывным в естественной метрике F_ρ.

Доказательство. Мы снова будем считать, что Γ обладает двусторонне инвариантной метрикой d, ибо снова редукция задачи к этому случаю проводится чисто формально почти аналогично теореме 3. Прежде всего для всякой точки $\omega\in\Omega_\Pi$ найдутся точки ω_1 и ω_2 из условия 2) теоремы 5. Для точки ω рассмотрим последовательность

$$h^{(n)}(\omega) = h_{i_1}(f^{-n}\omega_1)\,g(f^{-n}\omega)\,g(f^{-n+1}\omega)\dots g(f^{-1}\omega).$$

Из определения h_{i_1} мы получим, что

$$h^{(n+1)}(\omega) = h_{i_1}(f^{-n}\omega_1)\,g(f^{-n-1}\omega_1)^{-1}g(f^{-n-1}\omega)\,h_{i_1}^{-1}(f^{-n}\omega_1)\,h^{(n)}(\omega)$$

и

$$d(h^{(n+1)}(\omega), h^{(n)}(\omega)) = d(g(f^{-n-1}\omega_1), g(f^{-n-1}\omega))$$

вследствие двусторонней инвариантности метрики d. Но поскольку g принадлежит F_ρ и поскольку $\omega\in W^u(\omega_1)$, мы видим, что, начиная с некоторого N, последовательность $d(h^{n+1}(\omega), h^{(n)}(\omega))$ экспоненциально стремится к нулю, поэтому $h^{(n)}(\omega)$, как последовательность Коши, будет иметь предел $h(\omega)$. Можно было бы определить $h(\omega)$ как $\lim\limits_{h\to\infty} h_*^{(n)}(\omega)$, где $h_*^{(n)}(\omega) = h_{i_2}(f^n\omega_2)(g(\omega)\dots g(f^{n-1}\omega)^{-1})$ (здесь h_{i_2} и ω_2 из условия 2) теоремы 5). Аналогично предыдущему этот предел существует и из того же условия 2) (согласованности) следует, что он равен значению h, полученному с помощью точки ω_1. Выбор точек ω_1 и ω_2 в условии 2) теоремы 5, вообще говоря, неоднозначен, что же касается выбора Ω_{i_1} и Ω_{i_2}, то он однозначен. Нам нужно доказать последнее и то, что $h(\omega)$, построенное выше, не зависит от выбора ω_1 и ω_2.

ЛЕММА. *Любая точка $\omega=\{\dots i_{-n}\dots i_0\dots i_n\dots\}$, не принадлежащая $\bigcup\Omega_k$, имеет вид $\{\dots i_{-n}\dots i_0\dots i_n\dots\}=\{B_1\dots B_n\}$, где B_1 — бесконечная слева, B_2 — бесконечная справа, остальные — конечные последовательности символов, причем символы из B_s принадлежат множеству A_{k_s}.*

Доказательство. Напомним, что A_k — это множества попарно сообщающихся состояний, поэтому между двумя элементами из одного A_k в представлении точки ω не может стоять элемент из другого A_k, откуда и следует утверждение леммы. Теперь видно, что для точки ω, в обозначениях леммы, $\Omega_{i_1}=\Omega_{k_n}$, а $\Omega_{i_2}=\Omega_{k_1}$ и, конечно, Ω_{i_1} и Ω_{i_2} определяется однозначно.

Докажем теперь независимость $h(\omega)$, например, от выбора точки ω_1. Для этого зафиксируем точку $\omega_2\in\Omega_{i_2}\cap W^s(\omega)$. Из условия 2) теоремы 5, как мы знаем, следует, что независимо от точки ω_1 значение $h(\omega)$, полученное с помощью ω_1, равно значению $h(\omega)$, полученному с помощью ω_2, т. е. не зависит от ω_1.

Необходимо проверить теперь принадлежность построенной нами функции h группе $F_{\rho,\Gamma}$. Пусть для точек ω' и ω'' верно $K(\omega',\omega'')=K$. Тогда ω' имеет вид $\{XAY\}$, а ω'' имеет вид $\{ZAT\}$, где A — слово длины $2K+1$, $A=\{i_{-k}\dots i_0\dots i_k\}$. Согласно определению марковской цепи, существует точка $\omega'''=\{XAT\}$. Значит, для точек ω'' и ω''' существует общая точка ω_1. С ее помощью мы и будем получать $h(\omega'')$ и $h(\omega''')$. Из определения $F_{\rho,\Gamma}$ и представления точек ω'' и ω''' следует, что $d(g(f^{-s}\omega''), g(f^{-s}\omega'''))\leqslant C\rho^{k+s}$. Поэтому из двусторонней инвариантности метрики d следует, что

$$d(h^{(n)}(\omega''), h^{(n)}(\omega'''))\leqslant C\sum_1^n \rho^{k+s}$$

и

$$d(h(\omega''), h(\omega'''))\leqslant C\frac{\rho}{1-\rho}\rho^k.$$

Аналогичная оценка верна и для $d(h(\omega'), h(\omega'''))$, но оба значения h получаются уже с помощью общей ω_2. Отсюда и следует с помощью неравенства треугольника, что $h \in F_{\rho, \Gamma}$. Соответствие $g \to h$ можно теперь установить аналогично теореме 4. Гладкими аналогами нетранзитивных топологических цепей Маркова являются диффеоморфизмы Смейла, а для непрерывного времени — потоки Смейла. Пусть M — многообразие и f — диффеоморфизм M (φ_t — поток на M). Мы будем считать, что $f(\varphi_t)$ удовлетворяет аксиоме A(A′) Смейла [см. ([6]), обозначения — там же]. Напомним аксиому A и теорему Смейла для диффеоморфизмов.

А к с и о м а А. а) *Неблуждающее множество Ω гиперболично.*

б) *Множество периодических точек плотно в Ω.*

Мы введем еще аксиому L, не вдаваясь в вопрос о связи ее с аксиомой A и другими аксиомами Смейла. Пусть ρ — риманова метрика в M.

А к с и о м а L(L′). *Существуют константы $\gamma > 0$, C_1, C_2, λ, $0 < \lambda < 1$, такие, что если $\rho(x_1, x_2) < \gamma$, то существует точка x_3: $\rho(x_3, x_i) < C_1 \rho(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, такая, что*

$$\rho(f^n x_1, f^n x_3) < C_2 \lambda^n \rho(x_1, x_3), \quad \rho(f^{-n} x_2, f^{-n} x_3) < C_2 \lambda^n \rho(x_2, x_3)$$

при $n > 0$,

$$(\rho(\varphi^{t+t_0} x_1 \varphi^t x_3) < C_2 \lambda^t \rho(x_1, x_3), \quad \rho(\varphi^{-t} x_2, \varphi^{-t} x_3) < C_2 \lambda^t \rho(x_2, x_3)$$

при $t > 0$, $|t_0| < C_1 \rho(x_1, x_2)$).

Эта аксиома введена нами для того, чтобы при изучении вопроса о гомологиях динамической системы f или, аналогично, φ_t можно было провести параллель с рассуждениями о топологических марковских цепях. После того, как будет сформулирована теорема 6 для систем Смейла, читатель с легкостью увидит, что единственное место в доказательстве теоремы 5, которое трудно перевести на язык диффеоморфизмов или, аналогично, потоков на многообразии — это доказательство принадлежности функции h к F_ρ (аналог гёльдеровости), а именно, построение по точкам $\omega' = \{XAY\}$ и $\omega'' = \{ZAT\}$ точки $\omega''' = \{XAT\}$. Но наша точка x_3 и есть аналог точки ω'''. Предположим, что $f(\varphi_t)$ удовлетворяет аксиомам A(A′) и L(L′). Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы гёльдеровская функция g: $M \to \Gamma$ ($g: M \to \mathfrak{G}$) была когомологична нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *g когомологична нулю на $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.*

2) *Соответствующие функции $h_i: \Omega_i \to \Gamma$ путем умножения слева на константы можно выбрать такими, чтобы из*

$$x \in W^u(x_1) \cap W^s(x_2) \quad (x_1 \in \Omega_{i_1},\ x_2 \in \Omega_{i_2})$$

следовало

$$g(f^{-n} x) \ldots g(x) \ldots g(f^n x)\, h_{i_2}^{-1}(f^n x_2)\, h_{i_1}(f^{-n} x_1) \xrightarrow[n \to \infty]{} e_\Gamma,$$

$$(H(g, -t, t)\, h_{i_1}(\varphi_{-t} x_1)\, h_{i_2}^{-1}(\varphi_t x_2) \xrightarrow[t \to +\infty]{} e_\Gamma,$$

где $g(t) = g(\varphi_t x)$, причем существует конечная функция $C(M, f, \delta) \cdot (C(M, \varphi_t, \delta))$ такая, что если модуль непрерывности $g: \omega_g(\rho) \leqslant K\rho^\delta$, то модуль непрерывности $h: \omega_R(\rho) \leqslant K\rho^\delta C(M, f, \delta)$ $(\omega_h(\rho) < K\rho^\delta C(M, \varphi_t, \delta))$.

Если $g \in C^1(M)$, то и $h \in C^1(M)$. Если g — не гёльдеровская, но $\int\limits_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta} < \infty$, то теорема верна и $h \in C(M)$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 5.

Для удобства в усмотрении этой аналогии в теоремах 5 и 6 за понятиями, соответствующими друг другу, закреплены одинаковые обозначения. Единственность Ω_{i_1} и Ω_{i_2} для данной точки еще более очевидна, чем в теореме 5.

З а м е ч а н и е. Теоремы 4, 5 и 6 верны и в предположении, что Γ — хорошая группа (для потоков — хорошая группа Ли). Надо только потребовать, чтобы значения функции g лежали в некоторой окрестности единицы группы Γ (нуля ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$). Метод доказательства сходен с методом доказательства теоремы 2.

§ 5. Приложения

Рассмотрим вопрос об интегральном инварианте (инвариантной мере с плотностью >0 почти всюду из L^1 по гладкой мере).

ТЕОРЕМА 7. *Если $f(\varphi)$ — топологически транзитивный У-каскад класса C^2 (У-поток класса C^2), то для того чтобы $f(\varphi_t)$ имела интегральный инвариант, достаточно, чтобы для любой периодической точки $x_0: f^n x_0 = x_0$ $(\varphi_T x_0 = x_0)$ было*

$$g(x_0) \ldots g(f^{n-1} x_0) = 1 \ (g_T(x_0) = 1),$$

где g — якобиан f (g_t — якобиан φ_t) по некоторой гладкой мере.

Действительно, в этом случае g когомологична нулю в мультипликативной группе положительных вещественных чисел $\left(g_* = \frac{d \ln g}{dt}\Big|_{t=0}\right.$ в ее алгебре Ли), поэтому очевидно, что соответствующую функцию h можно взять в качестве плотности искомой инвариантной меры по исходной мере, причем эта плотность окажется гладкой.

З а м е ч а н и е. Оказывается, что условие теоремы 7 не только достаточно, но и необходимо для существования интегрального инварианта. Это следует из результатов Я. Г. Синая о предельных распределениях Гиббса для У-систем и леммы усиления теоремы 0. Мы приведем эту лемму.

ЛЕММА. *Пусть группа G есть $\mathbf{Z}$ (или $\mathbf{R}$) и ее действие на римановом многообразии определяет топологически транзитивный У-каскад (У-поток), а U — произвольное открытое подмножество M. Для любой конечномерной группы Ли Γ гёльдеровская функция $\bar{f}: M \to \Gamma$ определяет когомологичный нулю коцикл $f(x, g)$ тогда и только тогда, когда $xg = x$ при $x \in U$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$, $xg = x$ при $x \in U$ влечет $f(x, g) = e_\Gamma$.*

Доказательство леммы требует малосущественных дополнений по сравнению с теоремой 3. Эти дополнения относятся, главным образом, к лемме о периодических траекториях (начало доказательства теоремы 2). Рассмотрим их.

Пусть ρ — метрика на нашем многообразии. Тогда существуют такие $\gamma>0$ и $C>0$, что для любых двух точек A и B многообразия с $\rho(A, B)<\gamma$ можно указать точку S, которая лежит в одном сжимающемся слое с A ([2]) и в одном расширяющемся слое с B ([2]), причем расстояния от S до A и от S до B в слоях меньше $C\rho(A, B)$. Мы обозначим S через $[A, B]$. В случае потока T^t существуют такие $\gamma>0$ и $C>0$, что при $\rho(A, B)>\gamma$ существуют t_1, $|t_1|<C\rho(A, B)$, и точка S, лежащая в одном сжимающемся слое ([2]) с $T^{t_1}A$ и в одном расширяющемся слое с B, причем расстояния от S до $T^{t_1}A$ и от S до B меньше $C\rho(A, B)$. Обозначим S через $[A, B]$. И в случае потока и в случае каскада точка $[A, B]$ определена при $\rho(A, B)<\gamma$. Сформулируем нашу новую лемму для каскада $\{T^n\}$ (здесь она будет подлеммой).

Подлемма для каскада. *Существует $K>0$ такое, что для всяких ε, δ можно найти такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что если $n>N_{\varepsilon,\delta}$, то из $\rho(T^n x, x)<\varepsilon$ следует, что существует x_0 такая, что $T^n x_0=x_0$ (или x_0' такая, что $T^n x_0'=x_0'$), $\rho(T^l x_0, T^l x)<K\varepsilon$ при $1\leqslant l\leqslant n$ $(\rho(T^l x_0', T^l x)<K\varepsilon)$ и $\rho(x_0, [x, T^n x])<\delta$ $(\rho(x_0', [T^n x, x])<\delta)$.*

Подлемма для потока. *Существует K такое, что для всяких ε, δ можно найти такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что если $t>N_{\varepsilon,\delta}$, то из $\rho(T^t x, x)<\varepsilon$ следует, что существуют x_0 и t_0, $|t_0-t|<K\varepsilon$, такие, что $T^{t_0}x_0=x_0$ (x_0' с теми же свойствами), $\rho(T^s x, T^s x_0)<K\varepsilon$ при $0\leqslant s\leqslant \min(t_0, t)$ и $\rho(x_0, [x, T^t x)<\delta$ $(\rho(x_0', [T^t x, x])<\delta)$.*

Доказательство подлеммы для каскада. Пусть G^k и G^l — инвариантные, соответственно, сжимающиеся и расширяющиеся слоения. Мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из непрерывной зависимости слоев от начальных точек: существует такое $a>0$, что если Π_0 и Π_1 — гладкие площадки, лежащие в слоях G^k, такие, что любую точку $\omega_0\in\Pi_0$ можно соединить путем, лежащим в слое G^l, длины $<a$ с точкой $\omega_1\in\Pi_1$, то отображение $Q:\Pi_0\to\Pi_1$, $Q(\omega_0)=\omega_1$, непрерывно и при малой непрерывной деформации этих площадок меняется непрерывно [([7]), стр. 26]. Поэтому из компактности многообразия следует, что все Q, построенные таким образом, имеют модули непрерывности, не превосходящие одного $\delta(\varepsilon)$ $(\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0)$, где в слоях берется индуцированная метрика.

Пусть теперь $\rho(x, T^n x)<\varepsilon$. Около точки x в сжимающемся слое опишем шар D радиуса $\varepsilon(C+1)$ (C определено перед формулировкой леммы). Если ε меньше некоторого фиксированного, а n достаточно велико, то, по свойству $У$, диаметр образа $T^n D$ достаточно мал для того, чтобы было определено отображение Q, переводящее $T^n D$ в сжимающийся слой, проходящий через точку x. Кроме того, при данном ε можно сделать n настолько большими, что $Q(T^n D)$ будет лежать в шаре радиуса ε с центром в точке $[x, T^n x]$ в сжимающемся слое, ибо $Q(T^n x)=[x, T^n x]$. Но шар радиуса ε с центром в точке $[x, T^n x]$ содержится в первоначальном шаре радиуса $(C+1)\varepsilon$ с центром в точке x. Следовательно, по теореме Брауэра в круге радиуса $(C+1)\varepsilon$ с центром в точке x имеется неподвижная точка y отображения $Q\circ T^n$. Мы видим из определения y, что y и $T^n y$ лежат в одном расширяющемся слое и находятся друг от друга на расстоянии, меньшем, чем $C'\varepsilon$ в метрике этого слоя, где C' — некоторая константа. Но на этом слое T^n — сжимающее отображение, поэтому оно имеет неподвижную точку y', причем $\rho(y, y')<C''\times\lambda^{-n}\varepsilon$, где $|\lambda|<1$ — константа. Теперь, используя наличие универсального модуля непрерывности отображений, мы получим, что существует такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что диаметр (в многообразии, а не в слое) множества $Q(T^n D)$ есть $\frac{\delta}{2}$ и $\rho(y, y')<\frac{\delta}{2}$ при $n>N_{\varepsilon,\delta}$; отсюда $\rho([x, T^n x], y')<\delta$ и, очевидно, $\rho(T^l x_0, T^l x)<K\varepsilon$ при $1\leqslant l\leqslant n$ (для некоторого K). Теперь берем y' в качестве x_0 и аналогично ищем x_0'. Подлемма доказана.

Подлемма для потоков доказывается аналогично.

При доказательстве леммы заметим прежде всего, что наше открытое множество U можно считать всюду плотным и относительно инвариантным, поскольку если $f(x, g)=e_\Gamma$, то, кроме точки x, это верно и для всей траектории этой точки, поэтому вместо U можно взять $\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n U$, а оно уже всюду плотно, так как наша $У$-система имеет всюду плотную траекторию. Рассмотрим случай каскада. Прежде всего мы построим точку x' со всюду плотной траекторией $\{T^k x'\}_0^\infty$, такую, что если для натуральных m и n точка $[T^m x', T^n x']$ определена, то $[T^m x', T^n x']\in U$. Пусть V_1, ..., V_n, ... — последовательность таких открытых множеств из M, что $\operatorname{diam} V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\bigcup_l^\infty M_n$ плотно в M при всех $l>0$ (она, очевидно, существует). Мы будем пользоваться следующим простым утверждением. Если m и n — натуральные числа и если D — шар с центром в точке x, в котором определено $[T^m y, T^n y]$, то, во-вторых, $f(y)$ непрерывно зависит от y и, во-вторых, $f(D)$ содержит некоторый шар D' с центром в точке $f(x)$. Утверждение это очевидным образом следует из трансверсальности слоений и непрерывной зависимости слоев от начальной точки. Теперь мы построим последовательность вложенных замкнутых шаров $D_n: D_n\subset\subset D_{n-1}\subset M$ указанным далее способом. Именно, множество пар различных натуральных чисел (m, n) можно пересчитать, т. е. указать функцию $(m(k), n(k))$ натурального аргумента k такую, что все значения ее различны и пробегают всевозможные пары различных натуральных чисел. Тогда, задавшись произвольным шаром D_0, мы будем строить дальнейшие шары индуктивно. Предположим, что шары $D_0, D_1, \ldots, D_{2k}$ построены. Могут быть два случая:

1) для любой точки $x\in D_{2k}$ имеем $\rho(T^{m(k+1)}x, T^{n(k+1)}x)\geqslant\gamma$. Тогда в качестве D_{2k+1} берем любой шар, лежащий в $\operatorname{Int} D_{2k}$;

2) для некоторой точки $x \in \operatorname{Int} D_{2k}$ имеем $\rho(T^{m(k+1)}x, T^{n(k+1)}x) < \gamma$. Тогда функция $f(y) = [T^{m(k+1)}y, T^{n(k+1)}y]$ определена в некотором шаре D' с центром в точке x, причем $f(D')$ содержит некоторый шар. Внутренность последнего имеет непустое пересечение с нашим всюду плотным открытым множеством U. Прообраз этого пересечения при отображении f открыт, так как f непрерывно, и содержит, следовательно, некоторый шар D'', который мы и возьмем в качестве D_{2k+1}. Пусть теперь шары $D_0, D_1, \ldots, D_{2k+1}$ построены. Тогда множество $\bigcup_1^\infty T^{-l}V_k$ открыто и всюду плотно, поэтому $\operatorname{Int} D_{2k+1} \cap \bigcup_1^\infty T^{-l}V_{k+1}$ содержит некоторый шар. Возьмем такой шар и обозначим его D_{2k+2}. Таким образом, шары D_n построены. Последовательность D_n имеет непустое пересечение. Очевидно, что если $x' \in \bigcap_0^\infty D_n$, то траектория x' всюду плотна (из определения V_{2k} и шаров D_{2k}). Из определения же шаров D_{2k+1} не менее очевидным образом следует, что x' удовлетворяет требуемому условию.

Теперь, если учесть проведенную редукцию случая групп Ли к случаю группы с двусторонне инвариантной метрикой и другие ранее проведенные рассуждения, например, в теореме 2, мы увидим, что для достижения желаемого результата достаточно для любых двух точек $T^m x'$ и $T^n x'$ с $\rho(T^m x', T^n x') < \frac{\gamma}{C}$ найти третью $T^S x'$ с $S > \max(m, n)$ такую, что

$$\rho(T^m x', T^S x') < C \times \rho(T^m x', T^n x'),$$

$$\rho(T^S x', T^n x') < C \times \rho(T^m x', T^n x'),$$

причем периодическая точка, соответствующая $T^m x'$ и $T^S x'$ (в смысле подлеммы), и периодическая точка, соответствующая $T^S x'$ и $T^n x'$, должна лежать в U. Действительно, $z = [T^m, x', T^n x'] \in U$ вместе с некоторым кругом с центром z радиуса r. Выберем S таким, чтобы $T^S x'$ было близко к z настолько, чтобы

$$\rho([T^m x', T^S x'], z) < \frac{r}{2} \quad \text{и} \quad \rho([T^S x', T^n x'], z) < \frac{r}{2}.$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$S-m > N_{\rho(T^m x', z)+\frac{r}{2}, \frac{r}{2}} \quad \text{и} \quad S-n > N_{\rho(T^n x', z)+\frac{r}{2}, \frac{r}{2}}.$$

Это можно сделать, вследствие всюду плотности траектории точки x'. Таким образом, точка $T^S x'$ удовлетворяет всем требуемым условиям, что и доказывает нашу лемму.

З а м е ч а н и е. Может возникнуть впечатление, что достаточно ограничиться еще меньшим запасом периодических траекторий, чем даже указано в последней лемме. Мы сейчас приведем, однако, пример гладкой функции на многообразии M, где действует транзитивный У-диффеоморфизм T, которая имеет нулевые суммы по периодическим траекториям, заполняющим всюду плотное множество в M, и тем не менее не когомологичную нулю в $C(M)$.

Пусть $T' : N \to N$ — топологически транзитивный У-диффеоморфизм класса C^2 многообразия N. В качестве T возьмем $T' \times T' : N \times N \to N \times N$ $(M = N \times N)$. Разумеется, T топологически транзитивен (это следует, например, из теории марковских разбиений для У-диффеоморфизмов — «квадрат» транзитивной топологической цепи Маркова транзитивен). Если теперь f_1 — гладкая функция на N, когомологичная нулю, x, y — точки N такие, что $T'^n x = x$, $T'^m y = y$ с взаимно простыми m и n, то $T^{mn}(x, y) = (x, y)$, причем mn — наименьший период точки (x, y) многообразия M и среди точек $T^j(x, y)$, $1 \leq j \leq mn$, встретятся по одному разу все пары $(T'^k x, T'^l y)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$. Поэтому для гладкой функции f на $M : f(x, y) = f_1(x) f_1(y)$ имеем

$$\sum_1^{mn} f(T^j(x, y)) = \sum_1^m f_1(T'^l y) \sum_1^n f_1(T'^k x) = 0,$$

так как f_1 когомологична нулю, не периодические точки (x, y) с $(m, n) = 1$ всюду плотны в M. Это тривиальным образом следует из леммы, формулируемой ниже.

ЛЕММА. *Если $T' : N \to N$ — топологически транзитивный У-диффеоморфизм, то для любого $\varepsilon > 0$ существует K такое, что при любом $k > K$ точки $x \in N$ такие, что $T'^k x = x$, образуют ε-сеть.*

Лемма известна и вытекает, например, из теории марковских разбиений.

Построенная функция f и является искомым примером; то, что она не когомологична нулю, легко увидеть, рассматривая периодические траектории, лежащие на диагонали $\{(x, y) : x = y\}$, суммы по которым все, конечно, не могут быть равны нулю, если только f_1 — не тождественный нуль. Легко, разумеется, построить пример транзитивного У-потока и гладкой функции, не когомологичной нулю, но имеющей нулевые интегралы по всюду плотному множеству периодических траекторий, пользуясь предыдущим примером и известной конструкцией специального потока над построенным диффеоморфизмом по функции, тождественно равной 1. Вместо f при этом берется гладкая функция g такая, что для любой точки базы x:

$$\int_0^1 g(T^t x)\, dt = f(x).$$

Такая g, конечно, существует.

Перейдем теперь к расширениям и приводимости. Пусть $U(x, y)$ — множество всех непрерывных отображений многообразия X в многообразие Y. Пусть группа G действует на $X(T_g: X \to X)$, а Γ — на $Y(S_\gamma: Y \to Y)$. Пара $(X \times Y, \hat{T}_g)$ называется расширением динамической системы (X, T_g) с группой Γ, если при всех $g \in G$, $x \in X$, $y \in Y$ верно $\hat{T}_g(x, y) = (T_g x, S_{h(x,g)} y)$, где $h: X \times G \to \Gamma$ — такое отображение, что $\hat{T}_g$ определяет действие группы G на $X \times Y$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$h(T_{g_1} x, g_2) \times h(x, g_2) = h(x, g_1 g_2).$$

Расширения $X \times Y$, $\hat{T}^1_g$ и $(X \times Y, \hat{T}^2_g)$ называются изоморфными, если существует гомеоморфизм $S: X \times Y \to X \times Y$, $S(x, y) = (x, S_{\varphi(x)} y)$, и $h_2(x, g) = \varphi(T_g x) \times h_1(x, g) \times \varphi^{-1}(x)$, где φ — непрерывное отображение X в Γ [см. ([5])].

Рассмотрим важный частный случай. Пусть T^t — поток на многообразии X, определяемый системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — элемент касательного пространства в x.

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y} = A(x) y, \\ \dot{x} = \omega(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = B(x) y, \\ \dot{x} = \omega(x), \end{cases}$$

где $y: X \to C^k$ и $A: X \to GL(k, C)$; $B: X \to GL(k, C)$.

Две такие системы называются приводимыми одна к другой ([5]), если существует замена переменных $C: X \to GL(x, C)$, переводящая одну систему в другую, или, иначе, $A(x) = C^{-1}(x) \times B(x) C(x) - C^{-1}(x) \dot{C}(x)$. Разумеется, система дифференциальных уравнений является расширением динамической системы T^t с группой $GL(k, C)$, где $h(x, t) = Y_x(t)$ — решение соответствующей матричной системы с начальными условиями $Y(0) = E$, $x(0) = x$.

Приводимость двух систем друг к другу означает изоморфизм соответствующих расширений. Будем теперь считать, что G и Γ снабжены метрикой, а $h \in \mathrm{Lip}^\alpha(X \times G)$.

ТЕОРЕМА 8. 1) *Если T^t — У-поток (T^k — У-каскад) на многообразии X и $\Gamma \in \mathrm{Diff}$ у хороша, то в Γ существует такая окрестность единицы U, что если $h(x, t) \in U$ при всех x и $t \in [0, 1]$, то для изоморфности расширения тривиальному необходимо и достаточно, чтобы из $T^t x = x$ следовало $h(x, t) = e_\Gamma$.*

2) *Если Γ — конечномерная группа Ли, то в качестве U можно взять все Γ.*

3) *Система линейных дифференциальных уравнений приводима к тривиальной ($A = 0$) тогда и только тогда, когда она приводима к тривиальной на каждой периодической траектории.*

4) *Если $R \in \mathrm{Lip}^\alpha(X \times R)$, то $\varphi \in \mathrm{Lip}^\alpha(X)$; если $h \in C^1(X \times R)$, то $\varphi \in C^1(X)$, причем сопоставление $h \to \varphi$ можно выбрать непрерывным в метрике соответствующего пространства.*

Доказательство. Поскольку условие изоморфности расширения тривиальному означает, что $h(x, t)$ ($h(x, n)$) — коцикл, когомологичный нулю, теорема 8 является следствием теорем 2 и 3.

Аналогичным образом можно переформулировать и теоремы для потоков Смейла для применений к теории приводимости.

§ 6. Измеримые коэффициенты

Наряду с изложенным ранее существует другой подход к доказательству необходимого условия теоремы 7, а именно, применение нижеследующей теоремы автора. Доказательство этой теоремы, близкое к нижеприведенному, получил также, как стало известно автору, Д. В. Аносов.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть f (φ_t) — транзитивный У-диффеоморфизм (У-поток) класса C^2 в M, имеющий инвариантную конечную меру μ, совместимую с гладкостью*, $g: M \to R$ — непрерывная функция и $\int_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho} < \infty$. Тогда если для функции h, измеримой по μ, почти всюду по μ $g(x) = h(fx) - h(x)$ (при любом $T > 0$ почти всюду $\int_0^T g(\varphi_t x) = h(\varphi_T x) - h(x)$), то существует непрерывная функция h', почти всюду совпадающая с h.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай каскада. Пусть $\mu(M) = 1$. Из теории функций вещественной переменной следует, что существует функция h'', $\mu\{x \mid h''(x) \neq h(x)\} = 0$, и замкнутое множество C, $\mu(C) = 1$ такие, что h'' непрерывна на C. Рассмотрим множество

$$M^C = \Big\{ x \mid x \in M: \frac{1}{h} \sum_0^n \chi_C(f^i x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(C), \ \frac{1}{n} \sum_{-n}^0 \chi_C(f^i x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(C), \ g(f^i x) = h''(f^{i+1} x) - h''(f^i x), \ -\infty < i < +\infty \Big\}.$$

Известно, что мера μ эргодична ([7]), значит, $\mu(M^C) = 1$. Для каждой точки x рассмотрим множества $A_R(x)$ и $B_R(x)$, где R — любое число, большее нуля, $A_R(x)$ — открытый круг в сжимающемся слое радиуса R в индуцированной с M метрике, $B_R(x)$ — открытый круг в расширяющемся слое радиуса R в индуцированной метрике. Пусть μ^C и μ^P — меры на сжимающемся и расширяющемся слоях, индуцированные римановым объемом, а ρ^C и ρ^P — метрики, индуцированные римановой метрикой. Построим последовательность множеств M_i: $M_0 = M^C$; $M_{n+1} = \{x \mid x \in M_n$, $\mu^C(A_R(x) \setminus M_n) = 0$, $\mu^P(B_R(x) \setminus M_n') = 0\}$ и $M_\infty = \bigcap_0^\infty M_n$. Из абсолютной непрерывности слоений [см. ([7])] следует, что $\mu(M_\infty) = 1$ и для любого $x \in M_\infty$ имеем:

$$\mu^C(A_R(x) \setminus M_\infty) = 0, \qquad \mu^P(B_R(x) \setminus M_\infty) = 0.$$

---

* Под этим подразумевается, что она эквивалентна мере, индуцированной римановым объемом.

ЛЕММА. *Пусть ρ — риманова метрика в M. Тогда найдутся $K>0$, $\tau>0$ такие, что если $\rho(X, Y)<\tau$, $X, Y\in M_\infty$, то найдутся точки $C\in M_\infty$, $D\in M_\infty$, $E\in M_\infty$ такие, что X и C лежат в одном сжимающемся слое, C и D — в одном расширяющемся, D и E — в одном сжимающемся, E и Y — одном расширяющемся слое и*

$$\rho^C(X, C)<K\rho(X, Y), \quad \rho^P(C, D)<K\rho(X, Y);$$

$$\rho^C(D, E)<K\rho(X, Y), \quad \rho^P(E, Y)<K\rho(X, Y).$$

Доказательство. Выберем τ таким, чтобы $A_R(x)\cap B_R(Y)\neq\varnothing$, если $\rho(X, Y)<\tau$. Это можно сделать вследствие трансверсальности слоений и компактности M. Можно выбрать (по непрерывности сжимающегося и расширяющегося слоений и компактности M) константу $K>0$ такую, что для некоторой точки $H\in A_R(X)\cap B_R(Y)$ (если R с самого начала достаточно мало, то H единственна) имеем:

$$\rho^C(X, H)<K\rho(X, Y), \quad \rho^P(Y, H)<K\rho(X, Y).$$

Если теперь в достаточно малой окрестности точки H зафиксировать в $A_R(X)$ точку C из M_∞, то выбором точки E в этой окрестности из $M_\infty\cap B_R(Y)$ мы однозначно можем определить D с помощью канонического изоморфизма расширяющихся слоев ([4]). Поскольку канонический изоморфизм абсолютно непрерывен ([4]) и по определению M_∞ мы можем добиться того, чтобы и D и E лежали в M_∞, а также чтобы выполнялись наши неравенства. Лемма доказана.

Пусть точки U и V из M_∞ лежат в одном сжимающемся слое. Тогда

$$h''(U)-h''(V)=h''(f^nU)-h''(f^nV)+$$
$$+g(V)+g(fV)+\ldots+g(f^nV)-(g(U)+g(fU)+\ldots+g(f^nU))=$$
$$=h''(f^nU)-h''(f^nV)+g(V)-g(U)+(g(fV)-g(fU))+\ldots$$
$$\ldots+(g(f^nV)-g(f^nU)).$$

Расстояния $\rho(f^nU, f^nV)$ убывают как геометрическая прогрессия, по свойству Y, а так как функция g обладает свойством Дини $\left(\int\limits_0 \frac{\omega_g(\rho)}{\rho}<\infty\right)$, то

$$\sum_0^\infty (g(f^nV)-g(f^nU))<P(\rho(U, V))<+\infty,$$

где $P(z)\to 0$ при $z\to 0$, $z\in R$. Поэтому, если быть уверенным в том, что найдется бесконечная последовательность $n_k<\infty$ такая, что $h''(f^{n_k}U)-h''(f^{n_k}V)\to 0$ при $n_k\to\infty$, то будет очевидным, что

$$h''(U)-h''(V)<P(\rho(U, V)).$$

Но n_k существует по определению M_∞: ведь $M_\infty\subset M^C$ и $\mu(C)>\frac{1}{2}$. По определению M^C видно также, что можно было считать, что U и V лежат в одном расширяющемся слое. Применяя теперь нашу лемму, мы видим, что h'' равномерно непрерывна на M_∞ с модулем непрерывности, меньшим чем $4KP(\rho)$. Но M_∞ всюду плотно в $M(\mu(M_\infty)=1)$, поэтому продолжим h'' на M и получим h'. Очевидно, всюду $g(x)=h'(fx)-h'(x)$. Случай каскадов рассмотрен.

Переходим к случаю потока φ_t. Представляются две возможности ([7]). Первая — в спектре потока есть дискретная компонента и он специальный над транзитивным $У$-диффеоморфизмом f' на многообразии M'; вторая — диффеоморфизм $f=\varphi_1$ эргодичен. В обоих случаях найдутся замкнутое множество C, $\mu(C)>\frac{1}{2}$, и функция h'', непрерывная на C и почти всюду равная h, такие, что если

$$M^C=\Big\{x\,|\,x\in M:\ \frac{1}{n}\sum_0^n \chi_C(f^ix)\to\mu(C);\quad \frac{1}{n}\sum_{-n}^0 \chi_C(f^ix)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(C);\quad \int\limits_n^{n+1} g(\varphi_tx)\,dt=$$
$$=h''(\varphi_{n+1}x)-h''(\varphi_nx) \text{ при любом целом } n\Big\},$$

то $\mu(M^C)=1$ (в случае специального потока берем C' в M' для f', а в качестве C берем $\bigcup\limits_{t=0}^{1}\varphi_tC'$). Рассмотрим μ^m и ρ^m — естественные меры и метрики на траекториях (задаваемые временем) и для каждой точки x множество $C_R(x)=\bigcup\limits_{-R}^{R}\varphi_tx$. Пусть

$$M_0=M^C;\quad M_{n+1}=\{x\,|\,x\in M_n,\ \mu^C(A_R(x)\setminus M_n)=0,$$
$$\mu^P(B_R(x)\setminus M_n)=0,\ \mu^m(C_R(x)\setminus M_n)=0\}\quad\text{и}\quad M_\infty=\bigcap_0^\infty M_n.$$

Изменим также формулировку леммы.

ЛЕММА. *Пусть ρ — риманова метрика в M. Тогда найдутся $K>0$, $\tau>0$ такие, что если $X, Y\in M_\infty$, $\rho(X, Y)<\tau$, то найдутся точки $X'\in M_\infty$, $C\in M_\infty$, $D\in M_\infty$, $E\in M_\infty$ такие, что $X'=\varphi_tX: |t|<K\rho(X, Y)$, X' и C лежат в одном сжимающемся слое, C и D — в одном расширяющемся, D и E — в одном сжимающемся, E и Y — в одном расширяющемся и*

$$\rho^C(X^P, C)<K\rho(X, Y), \quad \rho^P(C, D)<K\rho(X, Y),$$
$$\rho^C(D, E)<K\rho(X, Y), \quad \rho^P(E, Y)<K\rho(X, Y).$$

Доказательство леммы и дальнейшее доказательство теоремы проходят так же, как и в случае диффеоморфизма. Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 очевидно вытекает теорема 7: ведь если $g(g_t)$ — якобиан $f(\varphi_t)$ по отношению к риманову объему, то условие теоремы 9 выполнено для функции $\ln g\left(\frac{d}{dt}\ln g_t|_{t=0}\right)$.

Автор благодарит Д. В. Аносова за полезные замечания.

Поступило
27.XII.1971

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лившиц А. Н., Некоторые свойства гомологий У-систем, Матем. заметки, т. 10, № 5 (1971), 555—564.

[2] Аносов Д. В., О касательных полях трансверсальных слоений в У-системах, Матем. заметки, т. 2, № 5 (1967), 539—540.

[3] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, М., ИИЛ, 1967.

[4] Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, Функциональный анализ, 2: 1 (1968), 64—89.

[5] Каток С. Б., Линейные расширения динамических систем и условия приводимости, Матем. заметки, т. 8, № 4 (1970), 451—463.

[6] Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, Успехи матем. наук, т. XXV, вып. 1 (151) (1970), 113—185.

[7] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, XC, 1967.

[8] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

36(1972), 1321—1347

УДК 513.83

Я. М. ЭЛИАШБЕРГ

ХИРУРГИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В статье излагается метод перестроек (хирургия) особенностей гладких отображений, который позволяет для гладких многообразий M и Q строить отображения $M\longrightarrow Q$ с заданными особенностями. Результаты, получаемые этим методом в настоящей работе, были частично анонсированы в ([7]).

§ 1. Введение

1.1. Многообразия, подмногообразия, отображения понимаются в статье в смысле дифференциальной топологии. Подмногообразия, если не оговорено противное, предполагаются замкнутыми (как подмножества). Касательное расслоение многообразия X обозначается через $T(X)$. Для векторных расслоений ξ_1 и ξ_2 гомоморфизмом $\xi_1\to\xi_2$ называется послойно линейное отображение.

1.2. Для гладкого отображения f многообразия M размерности n в q-мерное ($q\leqslant n$) многообразие Q точка $m\in M$ называется *точкой складки* (особой точкой типа Σ^1), если существуют локальные системы координат с началами в точках $m\in M$ и $f(m)\in Q$, в которых отображение f имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\left(\sum_{1}^{\mu} x_j^2-\sum_{\mu+1}^{n-q+1} x_i^2, x_{n-q+2}, \ldots, x_n\right). \qquad (*)$$

Число $\nu=\min(\mu, n-q+1-\mu)$ не зависит от выбора таких систем координат и называется (приведенным) *индексом* особой точки $m\in M$ отображения $f: M\to Q$ (ср. с п. 6.2). Множество $\Sigma^1(f)\subset M$ точек складки является локально замкнутым $(q-1)$-мерным подмногообразием многообразия M. Оно замкнуто, если все особые точки (т. е. точки, в которых ранг отображения f меньше q) суть точки складки. Сужение $f|_{\Sigma^1(f)}: \Sigma^1(f)\to Q$ является погружением. Множество $\Sigma^1_\nu(f)\subset\Sigma^1(f)$ с $0\leqslant\nu\leqslant k=\left[\frac{n-q+1}{2}\right]$ точек складки индекса ν есть объединение нескольких компонент многообразия $\Sigma^1(f)$.

Пространство гладких отображений $M\to Q$ (с естественной C^∞-топологией), все особые точки которых суть точки складки, обозначим через $\mathfrak{M}(M, Q)$. Через $\mathfrak{m}(M, Q)$ обозначим пространство гомоморфизмов $\Phi: T(M)\to T(Q)$, для каждой особой точки (т. е. точки падения ранга)