[7] Ю. Г. Дмитриев, Ф. П. Тарасенко, Об оценивании функционалов от плотности вероятностей и ее производных, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 3 (1973), 662—668.
[8] W. Hoeffding, A class of statistics with asymptotically normal distributions, Ann. Math. Statist., 19 (1948), 293—325.
[9] D. A. S. Fraser, Nonparametric Methods in Statistics, Wiley, 1957.
[10] J. L. Hodges, E. L. Lehmann, Efficiency of some nonparametric competitors of *t*-test, Ann. Math. Statist., 27, (1956), 324—335.

ON A CLASS OF NONPARAMETRIC ESTIMATES OF NONLINEAR FUNCTIONALS OF A DENSITY

Yu. G. DMITRIEV, F. P. TARASENKO (TOMSK)

(*Summary*)

A new class of nonparametric estimated of functionals of the type $J = \int F(g(x))dx$ (where $F(\cdot)$ is a certain function and $g(x)$ is the unknown density function) is proposed. The estimates are based on combination of Rosenblatt — Parzen's estimate of the density and Hoeffing's U-statistic. They are called quasi-U-statistics. The performance of quasi-U-statistics is demonstrated by an example of estimation of the squared density integral.

К ПРОБЛЕМЕ ИЗОМОРФИЗМА СХЕМ БЕРНУЛЛИ

А. Н. ЛИВШИЦ

Пусть $Z = \{a_j\}_1^m$ $(0 < m \leqslant \infty)$ — конечный или счетный алфавит. *Словом* в алфавите Z называется конечная последовательность букв из Z: $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $b_i \in Z$; $i = 1, \ldots, n$. *Длина* слова A — число букв в нем обозначается $|A|$. *Кодом над* Z назовем конечную или счетную последовательность слов $A = \{A_j\}$, $0 < j \leqslant n < \infty$. Код $A = \{A_j\}$ $(A_j = \{b_1^j, \ldots, b_{k_j}^j\})$ называется *S-кодом*, если выполнены два условия: U и V.

U: Если для каких-либо j_1, j_2 и ω верно побуквенно $b_\omega^{j_1} \ldots b_{\omega+k_{j_2}-2}^{j_1} = b_1^{j_2} \ldots b_{k_{j_2}}^{j_2}$, то $\omega = 1$ и $j_1 = j_2$. (Никакое слово не есть часть другого.)

V: Если для каких-либо j_1, j_2 и ω верно побуквенно $b_1^{j_1} \ldots b_\omega^{j_1} = b_{k_{j_2}-\omega+1}^{j_2} \ldots b_{k_{j_2}}^{j_2}$, то $\omega = k_{j_1}$ и $j_1 = j_2$. (Начало любого слова не есть конец другого.)

С помощью S-кодов можно осуществлять кодирование (и декодирование) случайных последовательностей. Одновременно S-коды позволяют построить процедуру, реализующую изоморфизм двух схем (автоморфизмов) Бернулли. Примеры изоморфизма автоморфизмов Бернулли, в основе которого лежат идеи кодирования, имеются у Мешалкина [1], Блюма и Хэнсона [2], Заславского [3], Зайдмана (неопубликованная работа). Р. А. Зайдману принадлежит и название S-код. Независимо от А. Х. Заславского S-коды рассматривал по другому поводу В. И. Левенштейн [4], который называл их вполне регулярными.

Интересной проблемой является изучение условий на m и совокупность чисел k_j, позволяющих реализовать их в качестве, соответственно, объема алфавита и длин слов S-кода. С этой целью в настоящей работе проводится комбинаторное изучение S-кодов, которое применяется здесь к этой проблеме и к проблеме изоморфизма схем Бернулли.

Уместно сказать о том, что методы кодирования, близкие изучавшимся в данной работе, нашли применение в теории образующих. Именно, В. Кригер использовал метод, близкий методу работы [2], в сочетании с другими новыми идеями, доказывая свою известную теорему о минимальном числе элементов образующей эргодического автоморфизма с конечной энтропией.

Предположим, что Z — алфавит и $X_Z = \prod_{-\infty}^{\infty} Z_i$, $Z_i = Z$,— бесконечное в обе стороны произведение счетного числа Z, T — сдвиг влево на X_Z. Пусть P — мера на Z и μ_P — прямое произведение мер $P_i = P$ на Z_i. Тогда (X_Z, μ_P, T) называется *схемой Бернулли с состояниями Z и вероятностью P*, а T как преобразование (X_Z, μ_P), сохраняющее меру,— *автоморфизмом Бернулли*. Предположим, что $\{A_j\}_{j=1}^n$ — S-код в алфавите Z и $|A_j| = k_j$ — длины слов.

Всякое слово в алфавите Z: $A = \{b_1, \ldots, b_r\}$ порождает цилиндрическое множество $\bar{A}$ на X_Z определяемое следующим образом $\bar{A} = \{\{x_i\} \in X_Z : x_i = b_i, i = 1, \ldots, r\}$. Тем самым код $\{A_j\}$ порождает систему цилиндрических множеств $\{\bar{A}_j\}$.

Теорема 1. *Пусть заданы натуральные k_j, $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant \infty$, где не все k_j равны 1, а также числа q_j: $0 < q_j < 1$. Для существования алфавита Z, S-кода $\{A_j\}_1^n$ и меры P на Z, таких, что*

$$|A_j| = k_j, \quad \mu_P \bar{A}_j = q_j$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного s ряд $f(t) = 1 - t + \sum q_j t^{k_j}$ сходился на $[0, s]$ и $f(s) = 0$.

Доказательство. Пусть сначала N конечно. Докажем необходимость. Пусть $D_N = X_Z \Big\backslash \bigcup_j \bigcup_{l=0}^{N-k_j} T^l \bar{A}_j$ — последовательность множеств. Будем подсчитывать их меры, согласно известной формуле комбинаторики:

$$\mu\left(\bigcup_j B_j\right) = \sum_j \mu B_j - \sum_{j_1, j_2} \mu(B_{j_1} \cap B_{j_2}) + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{j_1, \ldots, j_r} \mu(B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_r}) + \ldots,$$

$$\mu_P(D_N) = 1 - \mu_P\left(\bigcup_j \bigcup_{l=0}^{N-k_j} T^l \bar{A}_j\right) = 1 - \sum_j (N - k_j + 1) q_j + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^v \sum_{j_1, \ldots, j_v;\ l_1, \ldots, l_v} \mu_P\left(\bigcap_{r=1}^{v} T^{l_r} \bar{A}_{j_r}\right) + \ldots.$$

Абсолютная величина каждого члена нашей альтернированной суммы может быть для удобства интерпретирована следующим образом. Пусть в последовательности из N букв алфавита Z, начиная с номеров l_r, расположены слова A_{j_r}, где $1 \leqslant r \leqslant v$. Мы должны просуммировать вероятности всех таких событий по всевозможным наборам j_r и l_r. Однако по определению S-кода слова A_{j_r} не могут налегать одно на другое. Поэтому если рассматривать все те наборы A_{j_r}, в которые каждое A_j входит с кратностью a_j: $\sum_1^n a_j = v$, то вклад вероятностей их различных расположений среди N букв в нашу сумму будет равен

$$\prod_j q_j^{a_j} C_{N - a_1(k_1 - 1) - \ldots - a_n(k_n - 1)}^{v} C_v^{a_1, \ldots, a_n},$$

где первое число сочетаний есть, как нетрудно усмотреть, наибольшее число попарно неэквивалентных способов расположения наших v слов в последовательности из N букв, причем два расположения считаются эквивалентными, если для любого $i: 0 \leqslant i < v$ совпадают расстояния (количества букв, не попавших в наши v слов) между последней буквой i-го слова и первой буквой $i + 1$ слова одного расположения и между последней буквой i-го и первой буквой $i + 1$ слов другого расположения,

а также совпадают числа букв, предшествующих первым словам расположений. Второе число сочетаний есть число различных расположений наших v слов в фиксированном классе эквивалентности. Но наше произведение можно записать как

$$C^{a_1,\ldots,a_n}_{N-a_1(k_1-1)-\ldots-a_n(k_n-1)}\prod_j q_j^{a_j},$$

и, наконец,

$$\mu_P(D_N)=\sum_{\{a_j\}} C^{a_1,\ldots,a_n}_{N-a_1(k_1-1)-\ldots-a_n(k_n-1)}\prod(-q_j)^{a_j},$$

где суммирование идет по всем наборам целочисленных a_j. Из свойств сочетаний следует рекуррентное соотношение

$$C^{x_1,\ldots,x_n}_y=C^{x_1,\ldots,x_n}_{y-1}+\sum_{i=1}^{n} C^{x_v,\ldots,x_i-1,\ldots,x_n}_{y-1},$$

откуда

$$\mu_P(D_{N+\sum_1^n k_j})=\mu_P(D_{N-1+\sum_1^n k_j})+\sum_j(-q_j)\,\mu_P(D_{N-k_j+\sum_1^n k_i}).$$

Для того чтобы найти общий вид последовательности, удовлетворяющей такому соотношению, надо найти ненулевые корни $Z_1, \ldots, Z_{\max k_j}$ полинома

$$Z^{1}-Z^{1}+\sum_j q_j Z^{1}$$

и тогда

$$\mu_P(D_N)=\Sigma B_{ij}N^iZ_j^N,$$

где B_{ij} — некоторые константы [5, стр. 37]. Среди Z_j выберем то (те), которое (ые) имеет (ют) наибольший модуль, а среди последних — то (те), которое (ые) имеет (ют) ненулевые коэффициенты B_{ij} с наибольшим i. Докажем, что среди выбранных нами Z_j в этом случае будет вещественное положительное. Переобозначим выбранные Z_j через $u_1, \ldots, u_r$. Рассмотрим часть разложения для $\mu_P(D_N)$: $F_N=N^i\sum_1^r S_v u_v^N$, где i есть выбранное наибольшее, $S_v=B_{ij}$, где $j=$ номер нашего u_v среди Z_l. Докажем, что F_N вещественно и не отрицательно. Действительно, пусть $u>0$ есть общий модуль u_v, тогда

$$F_N=u^NN^i\sum_1^r S_v\left(\frac{u_v}{u}\right)^N=u^NN^ih_N,$$

где h_N — почти периодическая последовательность [6, стр. 208]. Если предположить, что хотя бы для одного значения N соответствующее $h_N^i=h$ будет иметь ненулевой аргумент, то, вследствие почти периодичности для бесконечной подпоследовательности $N_lh_{N_l}$ будет лежать в окрестности h, отделенной от положительного луча вещественной прямой. Но в этом случае по самому определению u_v

$$\mu_P(D_{N_l})=u^{N_l}N_l^ih_{N_l}+o(u^{N_l}N_l^ih_{N_l});$$

значит, $\mu_P(D_{N_l})$ имеет ненулевой аргумент, чего, конечно, не может быть, Итак, $F_N\geqslant 0$. Отсюда последует, что одно из u_v вещественно и положительно, с помощью утверждения, которое мы сейчас докажем, в несколько более общей форме, чем нам это здесь необходимо.

Лемма. *Пусть* σ *— комплексная дискретная мера ограниченной вариации на единичной окружности;* $a_0, \ldots, a_l, \ldots$ *— ее коэффициенты Фурье с неотрицательными номерами. Если все* $a_l \geqslant 0$, *то либо все* $a_l = 0$ *и* $\sigma = 0$, *либо* σ *содержит ненулевую нагрузку в единице окружности.*

Доказательство. Пусть σ сосредоточена в точках $z_1, z_2, \ldots$ и нагрузка в z_i равна $b_i : \Sigma \mid b_i \mid < \infty$; тогда $a_i = \Sigma b_i z_i^l$. Если все $z_j \neq 1$, то чезаровские средние $\mid l^{-1}(z_i + \ldots + z_i^l) \mid$ стремятся к нулю при $l \to \infty$, так как

$$\mid l^{-1}(z_i + \ldots + z_i^l) \mid \to 0;\ \Sigma \mid b_i \mid < \infty.$$

Докажем, что в условиях леммы это может быть лишь при $\sigma = 0$. Действительно, a_l есть почти периодическая последовательность, и потому она либо вся нулевая, либо хотя бы один ее член не нулевой, и тогда вследствие неотрицательности и почти периодичности ее чезаровское среднее строго больше нуля. Следовательно, $\sigma \neq 0$ может быть, лишь если $z_i = 1$ для некоторого i. Лемма доказана.

Применяя лемму к той мере, с помощью которой строится почти периодическая последовательность h_N, имеем $u_v/u = 1$ для некоторого v: $1 \leqslant v \leqslant r$, и, значит, полином

$$Z^{1}{}^{\sum_1^n k_j} - Z^{1}{}^{\sum_1^n k_j - 1} + \sum_1^n q_j Z^{1}{}^{\sum_i^n k_i - k_j}$$

имеет вещественный положительный нуль. Положив $1 = 1/u$, мы и получим необходимость при $n < \infty$.

Докажем теперь необходимость при $n = \infty$. Пусть $\{q_j\}_1^\infty$; $\{k_j\}_1^\infty$ — вероятности и длины слов нашего кода и $f_l(t) = 1 - t + \sum_1^l q_j t^{k_j}$. Очевидно, каждый из полиномов $f_l(t)$ имеет два корня $x_1^l > 0$ и $x_2^l > 0$, причем $f_l(t) < 0$ при $x_1^l < t < x_2^l$, $f_l(t) > 0$ при $t < x_1^l$ и $t > x_2^l$. Далее, $x_1^{l+1} > x_1^l$ и $x_2^{l+1} < x_2^l$, потому что $f_{l+1}(t) > f_l(t) > 0$ на $(0, x_1^l)$ и (x_2^l, ∞) и нули f_{l+1} тем самым — внутри (x_1^l, x_2^l). Пусть $s = \lim\limits_{l \to \infty} x_1^l$, тогда при $0 \leqslant t \leqslant s$ $f_{l+1}(t) \geqslant f_l(t)$ и $f_l(t) \leqslant 1$ при каждом l. Значит, $f(t)$ сходится на $[0, s]$. Далее, очевидно, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ $f(t) \leqslant 0$. Но у ряда $f(t) = 1 - t + \Sigma q_j t^{k_j}$ скачок может быть только вверх, значит, $f(s) = 0$, что и доказывает требуемое.

Докажем достаточность. Пусть

$$Z = \{a_j\}_0^n \text{ и } A_j = a_j \underbrace{a_0 \ldots a_0}_{k_j - 1 \text{ раз}}.$$

В этом случае, очевидно, что существование искомого распределения P на Z в точности эквивалентно нашему условию, как при $n < \infty$ так и при $n = \infty$. Действительно, если положить $P(a_0) = 1/s$ и $P(a_j) = q_j s^{k_j - 1}$, то

$$\sum_0^n P(a_j) = \frac{1}{s} + \sum_1^n q_j s^{k_j - 1} = 1$$

по условию теоремы, и $\mu_p(\tilde{A}_j) = q_j$, что и требовалось. Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть мы имеем алфавит $Z = \{a_i\}_1^n$ из n букв. От слов также потребуем, чтобы они имели n букв. Каково максимальное количество слов в таком S-коде?

Рассмотрим на алфавите Z распределение с вероятностями равными $1/n$. Пусть наш набор слов суть $\{A_j\}_1^k$; $\mu_p(\tilde{A}_j) = 1/n^n$. Необходимо, чтобы полином $1 - t + \frac{k}{n^n} t^n$ имел вещественный положительный корень. Легко видеть, что максималь-

ным среди положительных (а не натуральных) k будет то, при котором полином $1 - t + \frac{k}{n^n} t^n$ имеет кратный вещественный положительный корень. Но это возможно лишь при $k = (n-1)^{n-1}$. Таким образом, мы получили с помощью теоремы 1 оценку сверху для числа слов в нашем S-коде. Она достигается. В самом деле, рассмотрим совокупность всех слов $A = \{a_1, a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-1}}\}$, где $j_l \neq 1$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Это, очевидно, S-код с числом слов $(n-1)^{(n-1)}$.

В общем случае необходимое условие реализации S-кода, получаемое из теоремы 1, рассмотрением схемы Бернулли с равными вероятностями, таково

Следствие. *Для того чтобы существовал S-код $A = \{A_j\}_1^n$, $|A_j| = k_j$, с элементами из алфавита $Z = \{a_j\}_1^m$, $0 < m < \infty$, необходимо, чтобы для некоторого положительного 1 ряд $f(t) = 1 - t + \sum_1^n \left(\frac{1}{m}\right)^{k_j} t^{k_j}$ сходился на $[0, s]$ и $f(s) = 0$.*

Это условие, по существу, доказано в работе В. И. Левенштейна [7].

Мы уже видели, что последнее условие близко к достаточному, но существует пример, показывающий, что оно не достаточно. Действительно, будем составлять S-коды, состоящие из семибуквенных слов над алфавитом $Z = \{a_1, a_2\}$. Из нашей теоремы следует, как легко сосчитать, что число слов в таком коде не больше 8. Однако проверка показывает, что эта оценка сверху не достигается и максимальное число слов в S-коде есть 7.

Мы рассмотрим теперь вопрос о применении S-кодов к проблеме изоморфизма сдвигов Бернулли. Будет использован метод кодирования, сходный с методом Мешалкина. Суть его состоит в следующем. Пусть имеется S-код $A = \{A_j\}$. Назовем его слова *словами первого рода*. Если *слова n-го рода*, построены, то слово B мы назовем *словом $(n+1)$-го рода* в том и только в том случае, когда оно имеет вид $B_1 A_j B_2$, где B_1 и B_2 — непустые слова, а слово $B_1 B_2$ n-го рода. Например, из слов первого рода 01 и 002 можно построить слово третьего рода 00002102.

Пусть (X_Z, μ_P, T) — схема Бернулли и A — S-код в алфавите Z. Занумеруем как-либо слова всех родов $\{B_j\}$. Построим систему цилиндрических множеств $\{\widetilde{B}_j\}$. Мы скажем, что S-код покрывает схему (X_Z, μ_P, T), если почти каждая реализация нашей схемы есть двусторонняя последовательность, являющаяся объединением связных кусков — слов некоторого рода, или, что эквивалентно, если совокупности множеств $T^k \widetilde{B}_j$ при всех k, j, образуют базис пространства (X_Z, μ_P) (минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все множества этой совокупности есть σ-алгебра всех измеримых множеств).

Докажем теперь теорему, которая, по-видимому, неявно использовалась, но нигде достаточно четко не формулировалась.

Теорема 2. *Пусть $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ и $(X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$ — две схемы Бернулли и $A' = \{A_j'\}_1^{n'}$ и $A'' = \{A_j''\}$ — S-коды в алфавитах Z' и Z'' соответственно. Предположим, что*

$$0 < n' = n'' = n \leqslant \infty, \quad |A_j'| = |A_j''|; \quad \mu_{P'}(A_j') = \mu_{P''}(A_j''), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда:

1) *Если коды A' и A'' покрывают схемы $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ и $(X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$ соответственно, то автоморфизмы T' и T'' изоморфны.*

2) *Если код A' покрывает схему $(X_{Z'}, \mu_P, T')$, то T' и T'' изоморфны.*

Доказательство. 1) Из простых комбинаторных соображений [3] вытекает, что слова всех родов из одного алфавита и другого можно естественным образом привести во взаимно однозначное соответствие. При надлежащей нумерации $\{B_j'\}$ и $\{B_j''\}$ слов из обоих алфавитов можно считать, что слово B_l' соответствует слову B_j''. Обозначим $\{B_{j_l, m_l}^{'(m)}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ двустороннюю последовательность — объединение слов $B_{j_l}^{'(m)}$, начинающихся с номеров m_l. В таком случае изоморфизм осуществляется следующим образом:

$$\{B_{j_l, m_l}'\}_{l=-\infty}^{\infty} \leftrightarrow \{B_{j_l, m_l}''\}_{l=-\infty}^{\infty}.$$

То есть осуществляется взаимно-однозначное соответствие (кодирование-декодирование [3]) двусторонних последовательностей — объединений слов некоторого рода. Такое определение корректно (не зависит от способа представления последовательностей в виде $\{B'_{j_l} m_l^{(n)}\}_{l=-\infty}^{\infty}$, что проверяется непосредственно). Это соответствие инвариантно относительно сдвига, сопоставляет, по предположению, множества полной меры в $X_{Z'}$ и $X_{Z''}$, сохраняет меру на σ-алгебрах, порожденных совокупностями множеств $T'^k\widetilde{B}'_j$ и $T''^k\widetilde{B}''_j$, но, поскольку последние совокупности суть базисы своих пространств с мерой, наше соответствие, действительно является метрическим изоморфизмом. Можно дать другое эквивалентное определение этого изоморфизма, как продолжения с базисов $\{T''^k\widetilde{B}''_j\}$ и $\{T'^k\widetilde{B}'_j\}$ соответствия $T'^k\widetilde{B}'_j \leftrightarrow T''^k\widetilde{B}''_j$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, n$; $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$.

2) Мы докажем, что коды A' и A'' покрывают или не покрывают соответствующие схемы Бернулли одновременно и воспользуемся утверждением 1. Для доказательства приведем формулировку условия покрываемости схемы Бернулли S-кодом в других терминах. А именно, если (X_Z, μ_P, T) — схема Бернулли и $\{A_j\}$ — S-код, то пусть $\{B_j\}$ — как-либо занумерованные слова всех родов и $|B_j| = \omega_j$. Тогда необходимое и достаточное условие того, что $\{A_j\}$ покрывает схему (X_Z, μ_P, T), как легко видеть из определения, состоит в том, что $\mu_P(\bigcup_j \bigcup_1^{\omega_j} T^{-l}\widetilde{B}_j) = 1$. Но теперь непосредственно проверяется, что $\mu_P(\bigcup_j \bigcup_1^{\omega_j} T^{-l}\widetilde{B}_j)$ зависит только от набора чисел $k_j = |A_j|$ и $q_j = \mu_P(\widetilde{A}_j)$. Поэтому для схем $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$ и $(X_{Z''}, \mu_{P''}, T'')$ и кодов $\{A'_j\}$ и $\{A''_j\}$ это условие одновременно выполняется или не выполняется, что и требовалось доказать.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы S-код $\{A_j\}_1^n$ покрывал схему Бернулли (X_Z, μ_P, T), необходимо и достаточно чтобы ряд*

$$f(t) = 1 - t + \sum_1^n \mu_P(\widetilde{A}_j)\, t^{|A_j|}$$

имел кратный вещественный положительный корень в круге сходимости.

Доказательство. Назовем *каноническим S-кодом* над алфавитом $Z' = \{a_i\}_0^n$; $0 < n \leqslant \infty$, код $A' = \{A'_j\}_1^n$, $A'_j = \{a_j \underbrace{a_0 \ldots a_0}_{k_j - 1 \text{ раз}}\}$, где $k_j = |A'_j|$ — натуральные числа.

Пусть $|B|_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$,— число вхождений буквы a_j в B. Воспользуемся комбинаторной леммой.

Лемма. [3]. *Для того чтобы слово B в алфавите Z было словом некоторого рода для канонического S-кода $A = \{A_j\}_1^n$ $|A_j| = k_j$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: $|B|_0 = \sum_1^n (k_j - 1)|B|_j$ и для любого слова C, являющегося началом слова B, $|C|_0 < \sum_1^n (k_j - 1)|C|_j$.*

Построим теперь канонический S-код $\{A'_j\}_1^n$ над алфавитом $Z' = \{a_i\}_0^n$; $|A'_j| = |A_j|$, где $\{A'_j\}_1^n$ — S-код из условия теоремы. Из того что $\{A_j\}$ — S-код по теореме 1 следует, что $f(t)$ имеет вещественный положительный корень, а потому (см. конец доказательства теоремы 1) существует мера P' на Z', такая, что мера $\mu_{P'}$ на $X_{Z'}$, построенная указанным ранее способом, удовлетворяет равенству $\mu_{P'}(\widetilde{A}'_j) = \mu_{P''}(\widetilde{A}''_j)$. Но из леммы и эргодической теоремы видно, что для того чтобы канонический S-код $\{A'_j\}_1^n$ над алфавитом Z' покрывал схему Бернулли $(X_{Z'}, \mu_{P'}, T')$, необходимо

и достаточно, чтобы $\sum_1^n P'(a_j)\,|\,A_j'\,|=1$. В самом деле, если код покрывает схему, то для почти всякой последовательности x найдется бесконечное число ее сколь угодно длинных в обе стороны (конечных) отрезков B, для которых по лемме $|\,B\,|_0=\sum_1^n (k_j-1)\,|\,B\,|_j$ и $|\,B\,|=|\,B\,|_0+|\,B|_1+\ldots+|\,B\,|_n=\sum_1^n k_j\,|\,B\,|_j$, что влечет по эргодической теореме требуемое. Обратно, если равенство $\sum_1^n P'(a_j)\,|\,A_j'\,|=1$ имеет место, то по эргодической теореме в применении к схемам Бернулли (эргодическое среднее почти для всех последовательностей бесконечное число раз оказывается больше и бесконечное число раз меньше своего предела) обнаружим, что для почти всякой последовательности с каждой ее буквы a_j, $j\neq 0$, начинается слово, удовлетворяющее условию леммы. Но последнее равенство, как легко видеть, эквивалентно наличию общего корня у ряда $f(t)$ и его производной, то есть кратного корня $f(t)$. Применяя теперь полученные в доказательстве части 2 предыдущей теоремы утверждение о том, что коды $\{A_j\}$ и $\{A_j'\}$ одновременно покрывают или не покрывают соответствующие схемы Бернулли, мы и получим искомый результат. Теорема доказана.

Все примеры, построенные Л. Д. Мешалкиным, являются частными случаями теоремы 3. Нахождение новых примеров эффективного кодирования схем Бернулли является интересной задачей, несмотря на наличие теоремы Д. С. Орнстейна о том, что полным метрическим инвариантом для автоморфизмов Бернулли является энтропия. Теорема 3 в сочетании с предыдущим утверждением является источником таких примеров. Так, если

$$Z=\{a_1,\ldots,a_n\},\ 0<n<\infty,\ P=\left\{\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right\}$$

и код $\{A_j\}$ состоит из всех слов длины n вида

$$\{a_1a_{j_1}\ldots a_{j_{n-1}}\};\ j_l\neq 1,\ 1\leqslant l\leqslant n-1,$$
$$Z=\{b_0,\ b_1\ldots b_{(n-1)^{n-1}}\}$$

и код $\{A_j'\}$, $1\leqslant j\leqslant (n-1)^{n-1}$, канонический,

$$A_j'=b_j\underbrace{b_0\ldots b_0}_{n-1\text{ раз}}\ \text{а}\ P'(b_0)=\frac{n-1}{n};\ P'(b_j)_{j>0}=\frac{1}{n(n-1)^{n-1}},$$

то автоморфизм $(X_{Z'},\ \mu_{P'},\ T')$ изоморфен автоморфизму $(X_Z,\ \mu_P,\ T)$. Действительно, $f(t)=1-t+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}t^n$.

Заметим, что если один из наших S-кодов канонический, то соответствующий метрический изоморфизм схем Бернулли сохраняет σ-алгебру прошлого, в чем легко убедиться.

Автор благодарит рецензента за сообщение о работах В. И. Левенштейна.

Поступила в редакцию
13.5.71

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Л. Д. Мешалкин,** Один случай изоморфизма схем Бернулли, ДАН СССР, **128,** 1 (1959), 41—44.

[2] **J. R. Blum, D. L. Hanson,** On the isomorphism problem for Bernoulli schemes, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 221—223.

[3] **А. Х. Заславский,** К проблеме изоморфизма стационарных процессов, Теория вероят. и ее примен., **IX,** 2 (1964), 318—326.

[4] **В. И. Левенштейн,** Декодирующие автоматы, инвариантные относительно начального состояния, Проблемы кибернетики, **12** (1964), 125—136.

[5] **М. Холл,** Комбинаторика, М., изд-во «Мир», 1970.

[6] **Л. Люмис,** Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

[7] **В. И. Левенштейн,** О максимальном числе слов в кодах без перекрытий, Проблемы передачи информации, **4** (1970), 88—90.

ON THE ISOMORPHISM PROBLEM FOR BERNOULLI SCHEMES

A. N. LIVŠIC (LENINGRAD)

(*Summary*)

Applications of coding in ergodic theory are discussed. Theorems are proved concerning the existence of some codes and use of them in the isomorphism problem for Bernoulli schemes.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение и основные результаты. Пусть ξ_i, $i = \overline{1, \infty}$,— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что

$$M\xi_1 = 0, \quad D\xi_1 = 1, \quad c_3 = M\,|\,\xi_1\,|^3.$$

Пусть функции $g_i(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$g_2(t) < g_1(t), \quad g_2(0) < 0 < g_1(0),$$

$$|\,g_i\,(t+h) - g_i(t)\,| < Kh, \quad i = 1, 2, \quad \text{при всех } h > 0, \tag{1}$$

где K — некоторая постоянная.

Фиксируем некоторое число $T > 0$, не исключая случая $T = \infty$. Введем обозначения

$$W_n(T) = P\left(g_1\left(\frac{k}{n}\right) > \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} \xi_i > g_2\left(\frac{k}{n}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant nT\right),$$

$$W(T) = P\,(g_1(t) > \xi(t) > g_2(t),\ 0 < t < T),$$

где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\xi(0) = 0$.

Задача получения оценки для разности $|\,W_n(T) - W(T)\,|$ при $T < \infty$ изучалась многими авторами. Наиболее сильный результат получен, по-видимому, С. В. На-