О СПЕКТРАХ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МАРКОВСКИХ КОМПАКТОВ

А. Н. Лившиц

В заметке приводятся новые результаты об адических преобразованиях, введенных в [1], в первую очередь об их спектрах для стационарного случая.

1. В [2] доказано, что всякий автоморфизм пространства Лебега имеет адическую реализацию, причем заданная инвариантная алгебра множеств переходит в алгебру цилиндрических множеств. Следующая теорема уточняет этот результат. Пусть автоморфизм T реализован, как сдвиг в $\prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$, где $Z_i = Z$ — конечный или счетный алфавит [9].

Теорема 1. *Существует такой марковский компакт X и отображение τ: $\prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} Z_i \to X$, определенное почти всюду относительно любой эргодической стационарной меры в $\prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$ с положительными мерами всех цилиндров, которое осуществляет изоморфизм сдвига и адического преобразования компакта X.*

Компакт X и изоморфизм τ строятся явно; адический сдвиг в X является минимальным.

Таким образом, компакт X является в определенном отношении универсальным. Метод доказательства основан на эффективном кодировании последовательностей.

2. Рассмотрим стационарные адические преобразования [2]. Далее формулируется комбинаторный результат о достаточных условиях наличия и отсутствия непрерывной компоненты в спектре. Иной подход — выяснение связей с диофантовыми приближениями корней характеристического полинома матрицы преобразования развивался участниками семинара А. М. Вершика, привлекшего внимание автора к этой тематике. В частности, в доказательстве следующей теоремы используется один теоретико-операторный результат Б. М. Соломяка [10].

Пусть строго эргодическое адическое преобразование имеет пространство состояний $P_i = D = (1, \ldots, m)$, постоянную матрицу переходов M (т. е. стационарно), все элементы которой равны 0 или 1. Сопоставим i-му столбцу матрицы M слово X_i в алфавите D, буквы которого суть все номера ненулевых букв i-го столбца, перечисленные в порядке возрастания. Введем преобразование $\omega_M : \bigcup\limits_{1=k}^{\infty} D^k \to \bigcup\limits_{1=k}^{\infty} D^k$ так:

если $A = a_1, \ldots, a_k$, то $\omega_M(A) = X_{a_1}, \ldots, X_{a_k}$. Мы говорим, что слова U и V в алфавите D имеют одинаковую номенклатуру, если для каждой буквы $i \in D$ число ее вхождений в U равно числу ее вхождений в V.

Задавшись произвольными символами a, $b \in D$, определим последовательности слов $x_L^{a,b}$ и $y_L^{a,b}$ при больш х L. В качестве $x_L^{a,b}$ возьмем подслово слова $\omega_M^L(a)$, начинающееся сразу после первого вхождения b (такое найдется при больших L по транзитивности). В качестве $y_L^{a,b}$ — слово $bx_L^{a,b}$. Будем предполагать, что найдутся два пути $a_1, \ldots, a_l$ и $a'_1, \ldots, a'_l$ с $a'_1 = a$ и $a'_l = a_1$, для которых образы при адическом отображении (предположим, что таковые однозначно определены) имеют разные первые символы, например c и d. Отсутствие таких путей влечет, как нетрудно показать, дискретность спектра. Зафиксируем указанные выше c и d и любые a и b.

Теорема 2. а) *Предположим, что в алфавите D существует конечный набор слов $\{y_i\}$ такой, что для любой пары слов (X, Y) вида (y_{i_1}, y_{i_2}) или вида $(x_L^{a,b}, y_L^{a,b})$ существует натуральное $N_{X,Y}$ такое, что $\omega_L^{N_{X,Y}}(X) = y_{j_1}\ldots y_{j_s}A$ и $\omega_L^{N_{X,Y}}(y) = y_{k_1}\ldots y_{k_s}B$. A или B пустое при любом i: $1 \leqslant i \leqslant s$; y_{j_i}* и *y_{k_i} имеют одинаковую номенклатуру и хоть одно $y_{j_i} = y_{k_i}$. В этом случае спектр адического преобразования дискретен.*

б) *Предположим, что в алфавите D найдется конечный набор слов $\{y_i\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел N_i такие, что при каждом i $\omega_M^{N_i}(c) = y_{j_1}\ldots$*

$\ldots y_{j_s}A$; $\omega_M^{Ni}(d) = y_{k_1}\ldots y_{k_s}B$, *где* A *или* B *— пустое слово, при любом* t: $1 \leqslant t \leqslant s$, $y_{j_t} \neq y_{k_t}$ *и слова* y_{k_t} и y_{j_t} *имеют одинаковую номенклатуру.*

В этом случае спектр адического преобразования имеет непрерывную компоненту.

Как легко видеть, теорема устанавливает связь между стационарными адическими преобразованиями и интенсивно изучаемыми преобразованиями подстановки (см. [3], а также [4], [8]), в частности последовательностями Морса. Не всякая подстановка порождается стационарным адическим преобразованием, но для всякой подстановки, если она строго эргодична, верна теорема 2 с естественно определяемым ω. Условие, предпосланное теореме 2, тоже легко переформулировать.

3. Рассмотрим следующий пример: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Условие (б) теоремы 2 выполнено с $y_1 = 2312$ и $y_2 = 1223$. T_M^4 имеет 4 эргодических компоненты, на каждой из которых он изоморфен автоморфизму, связанному с последовательностью Морса, т. е. T тоже имеет 2-адическую и сингулярную компоненты спектра [5].

Среди адических строго эргодических преобразований имеется много преобразований с чисто непрерывным спектром, например стационарное с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Все они не обладают сильным перемешиванием так же, как и примеры Какутани [6] (см. также [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вершик А. М. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения//ДАН СССР.— 1981.— Т. 259, № 3.— С. 526—529.

[2] Вершик А. М. Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории//Записки научных семинаров ЛОМИ.— 1982.— Т. 115.— С. 72—82.

[3] Dekking F. M., Keane M. Mixing properties of substitutions//ZFW — 1978.— V. 42.— P. 23—33.

[4] Gottshalk W. H. Substitution minimal sets//Tr. Amer. Math. Soc.— 1963.— V. 109.— P. 467—491.

[5] Kakutani S. Strictly ergodic symbolic dynamical systems//Berkeley symposium on math. statist, and probab.— 1972.— V. 6.— P. 319—326.

[6] Kakutani S. Examples of ergodic measure preserving transformations which are weakly mixing but not strongly mixing//Lect. Notes in Math.— 1973.— V. 318.— P. 143—149.

[7] Kamae T. A topological invariant of substitution minimal sets//J. Math. Soc. Japan. 1972.— V. 24, № 2.

[8] Michel P. Coincidence values and spectra of substitutions//ZFW — 1978.— V. 42.— P. 205—207.

[9] Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой//УМН.— 1967.— Т. 22, вып. 5.— С. 3—56.

[10] Соломяк Б. М. Об одной динамической системе с дискретным спектром//УМН, 1986.— Т. 41, вып. 2.— С. 209—210.

ВНИИ медицинской
лабораторной техники

Поступило в Правление общества
10 октября 1985 г.