035-4708

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И КОНСТРУКТОРСКИЙ

ИНСТИТУТ МЕДИЦИНСКОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ ТЕХНИКИ

УДК 517.987.5

Разрешаю на депонирование
Директор ВНИКИ МЛТ
к.т.н. А.А.Опалев

А.И.ЛИВШИЦ

ОБ ОДНОЙ СЛАБОПЕРЕМЕШИВАЮЩЕЙ ПОДСТАНОВКЕ

ВНИИКИ мед.-лабор. техники

ЛЕНИНГРАД

1989

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И КОНСТРУКТОРСКИЙ ИНСТИТУТ МЕДИЦИНСКОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ ТЕХНИКИ

УДК 517.987.5

А.Н.ЛИВШИЦ

ОБ ОДНОЙ СЛАБОПЕРЕМЕШИВАЮЩЕЙ ПОДСТАНОВКЕ

ЛЕНИНГРАД

1989

Многие вопросы о спектре, в основном, решены для динамических систем, порожденных обобщенными последовательностями Морса [I], [2], [3] и др. и подстановками с постоянной длиной слова ([4], [5] и др.). Для систем первого типа R.Nurnberg [6] доказал $\mathcal{L}.B$. Комбинаторное изучение подстановок с непостоянной длиной слова представляется значительно более сложным. Некоторые условия дискретности, смешанности спектра, слабого перемешивания имеются в работах [7], [8] (см.[5]), [9] и в других работах.

В данной работе рассматривается пример, для которого приводится информация о корреляционных функциях (подобно примеру [5], стр.I32; метод позволяет, конечно, её уточнять). Для некоторой последовательности с помощью обобщенного адического представления вычисляется энтропия по Кушниренко. Для этой подстановки совсем легко видеть, что выполняется $\mathcal{L}.B.$ (это, впрочем, верно для всех подстановочных автоморфизмов как преобразований конечного ранга [I5]).

§ I. Корреляции и $\mathcal{L}.B.$

Рассмотрим подстановку $\theta: \theta(1)=221$; $\theta(2)=1$; над алфавитом $\{1,2\}$. Ей отвечает строго эргодический автоморфизм $T_\theta:(X_\theta,\mu_\theta)\circlearrowleft$ ([7], [9]). Имеем $|\theta^n(\{1\})|=\frac{4}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n$; $\ell_n=|\theta^n(\{2\})|=\frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}(-1)^n$. Из этого следует [7], [9], что T_θ –слабое перемешивание. Рассмотрим функцию

$$f: X_\theta\to \mathbb{R};\ f(\{\dots x_{-1}, x_0, x_1,\dots\})=2x_0-3=\begin{cases}1 & x_0=2\\ -1 & x_0=1\end{cases}$$

и зададимся вопросом о корреляционной последовательности $K_m = \int_{X_\theta} f(x) f(T_\theta^m x)\, d\mu_\theta$ и отвечающей ей спектральной мере. Будут вычислены K_{ℓ_m} при $m \geqslant 3$. Разумеется, для любой допустимой последовательности $\{\dots x_{-1}, x_0, x_1 \dots\}$ (т.е. лежащей в X_θ) имеет место $K_{\ell_m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{k=n} (2x_k - 3)$ $\times (2x_{k+\ell_m} - 3)$. Рассмотрим последовательность пар $(\{x_k, x_{k+\ell_m}\})_{k=-\infty}^{\infty}$. Она единственным образом разбивается на куски вида $\{\{x_{\nu+s}, \dots, x_{\nu+\ell_m}\}, \dots \{x_{\nu+s}, x_{\nu+s+m}\}\}$: $\nu, s < \infty$ такие что, если обозначить слово $(x_\nu, \dots, x_{\nu+m})$ через A, а слово $(x_{\nu+s}, \dots, x_{\nu+s+\ell_m})$ через B, то либо $A = B = \theta^m(\{2\})$, либо $A = \theta^m(21)$ и $B = \theta^m(12)$, либо $A = \theta^m(2111)$ и $B = \theta^m(1112)$. Ранее такое разбиение использовалось для проверки дискретности спектра ([5], [8] и более поздние работы).

Исследуем второй и третий случаи, основываясь на том, что если некоторое слово Y имеет вид $22X1$, то $\theta(Y) = 1|1\theta(X)22|1$, а если $Y = 1X22$, то $\theta(Y) = 22|1\theta(X)|11$ где $|$ – знак соединения слов. Имеем $\theta^3(21) = 1|1\theta(1)|22|$ $1|1\theta(1)\theta^2(1))$; $\theta^3(1,2) = 22|(1\theta(1)|1|(1\theta(1)\theta^2(1))$. Обозначим слово $1\theta(1)\dots\theta^k(1)$ через D_k. Имеем $\theta^n(12) = 22D_{n-2}1D_{n-1}$ и $\theta^n(21) = 1D_{n-2}22D_{n-1}$ при n -нечетном и наоборот $(\theta^n(21)$ $= 22D_{n-2}1D_{n-1}, \theta^n(12) = 1D_{n-2}22D_{n-1})$ при n -четном. Для третьего случая аналогично при $n > 2$ имеем: $\theta^n(1112) =$ $22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-1}$; $\theta^n(2111) =$ $1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-2}1D_{n-2}22D_{n-1}$ при n -нечетном и наоборот – при n -четном.

Заметим при этом, что и во втором и в третьем случае компоненты типа D_{n-2}, D_{n-1} одного слова либо сдвинуты относительно компонент другого на I, либо не сдвинуты. Заметим также, что если для произвольного слова B_0 над $(1,2)$: $B_0 = b_1, \dots b_k$ обозначить через $\lambda(B_0)$ число $\sum_{i=1}^{k-1}(2b_i-3)(2b_{i+1}-3)$, то $\lambda(Q_\ell)=0$ при ℓ -четном и -1 при ℓ нечетном. Для проверки надо убедиться в том, что при любом ℓ': $\lambda(\theta^{2\ell'+1}(1)|\theta^{2\ell'+2}(1))=1$ и в том, что слово в скобках начинается с 2 и кончается 1. Это доказывается по индукции с учетом выражения для $\lambda(\theta^2(b_1,\dots b_k))=\lambda(\theta^2(b_1)|\theta^2(b_2)|\dots)$ $=\sum_{i=1}^{k}\lambda(\theta^2(b_i))+\sum_{i=1}^{k-1}q(b_i,b_{i+1})$, где $q(2,2)=-1$; $q(1,1)=1$; $q(1,2)=-1$; $q(2,1)=1$; $\lambda(\theta^2(b))=0$; $b=1,2$

Теперь уже простая выкладка приводит к выражению для среднего по допустимой последовательности

$$K_{\ell_m}=\frac{2}{3}+\frac{C_m}{2^{m+3}}\ ; \qquad C_m=\begin{cases}-21\frac{1}{3} & m\text{- четно}\\ -26\frac{2}{3} & m\text{- нечетно}\end{cases}$$

Подобная информация об иной подстановке приводится в [5] (стр. 132).

$\mathcal{L}.B.$ доказывается следующим образом. Легко проверить, что $\bar{f}(\theta^n(\{22\}),\theta^n(\{1\}))\to 0$ при $n\to\infty$. где $\bar{f}$ -расстояние, входящее в определение $\mathcal{L}.B.$ [6]. Построим произвольную последовательность a_n натуральных чисел, такую что $a_n\to\infty$ и $n2^{-a_n}\to\infty$. При большом n любые два допустимых слова длины n можно, отбросив в каждом два куска длины $o(n)$ разбить на блоки вида $\theta^{a_n}(22)$ и $\theta^{a_n}(1)$, чем и завершено доказательство.

§ 2. Энтропия по Кушниренко

Теперь на основании свойства слов $\theta^n(1112, 2111, 12, 21)$, замеченного в предыдущем параграфе, осуществим вычисление энтропии по Кушниренко для последовательности вида $n_k = |\theta^{2k}(2)|$

Энтропия по Кушниренко определяется следующим образом [IO].

Пусть (X, μ, T)-динамическая система с инвариантной мерой и в пространстве Лебега X; $A = \{n_1, \dots n_k, \dots\}$ последовательность целых чисел. Для произвольного измеримого разбиения ξ пространства X с $H(\xi) < \infty$ положим

$$h_A(T, \xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{m} H\left(T^{n_1}\xi \cdot T^{n_2}\xi \cdot \ldots \cdot T^{n_m}\xi\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{m} H(\xi_m)$$

$$h_A(T) = \sup_{\xi : H(\xi) < \infty} h_A(T, \xi)$$

Эффективно h_A вычисляется с помощью следующего утверждения (лемма 2 из [IO]). Пусть $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n \leqslant \ldots$, $H(\xi_i) < \infty$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \xi_i = \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ -разбиение на отдельные точки})$$

Тогда для любых A и T: $h_A(T) = \lim_{K\to\infty} h_A(T, \xi_K)$. В ряде работ A -энтропия успешно и плодотворно вычислялась для обобщенных последовательностей Морса и подстановок с постоянной длины слова. Вычислялся и её топологический аналог. [II], [I2], [I3] и пр.

Пусть A -последовательность $m_K = |\theta^{2K}(2)|$; $K = 1, \ldots$ Мы вычислим A -энтропию подстановочного автоморфизма. Обозначим через $У$ слово 11122, через W -слово 122. Заметим, что каждая допустимая последовательность a имеет вид $\dots V_{-1}^a V_0^a V_1^a$ где V_i^a равны W или Y и нулевая координата лежит в V_0^a. Заметим также, что $1\theta^2 Y = YYYWW1$; $1\theta^2 W = YWW1$ и $W1\theta^2(Y) = WYYYW(W1)$; $W1\theta^2(W) = WYW(W1)$. Из этого следует, что если обозначить через θ° подстановку над алфавитом (W°, Y°) $\theta^\circ(Y^\circ) = W^\circ Y^\circ Y^\circ Y^\circ W^\circ$; $\theta^\circ(W^\circ) = W^\circ Y^\circ W^\circ$, то её пространство допустимых последовательностей X_{θ° в точности совпадает с множеством последовательностей вида $\{x_i^a\}_{i=-\infty}^{\infty}$, где $a \in X_\theta$ и $x_i^a = W^\circ$, если $V_i^a = W$ и $x_i^a = Y^\circ$ если $V_i^a = Y$.

Через T_{θ° обозначим подстановочный автоморфизм $X_{\theta^\circ} \to X_{\theta^\circ}$. То есть можно рассматривать T_θ как специальный автоморфизм над T_{θ°. Для любого слова B над (W°, Y°): $B = a_1 \dots a_k$ обозначим через B^θ слово соединение $a_1^\theta \dots a_k^\theta$ над $(1,2)$ где слово $a_i^\theta = W$, если $a_i = W_i^\circ$ и $a_i^\theta = Y$, если $a_i = Y^\circ$. Имеем, например, $W1\theta^2(Y) = (\theta^\circ Y)W1$. По аналогии с § I и [5], [9] для оценки действия сдвигов на $-m_k$ мы должны рассматривать блочные пары слов $\binom{Y}{21112}$ и $\binom{W}{212}$ и θ^* от них (также блочные). Поскольку речь идет о словах, применим обозначения: $B_1^{-1} B_2$ для B_3, если $B_1 B_3 = B_2$ и $B_2 B_1^{-1}$ для B_3, если $B_2 = B_3 B_1$. На множества всех слов над $(1,2)$ кроме слова 2 определено отображение $\theta^*: \theta^*(B) = W1\theta^2(B)(W1)^{-1}$. Итерации θ^* от наших блочных пар слов тоже являются однозначно определяемыми блоками, из которых состоит $\binom{a}{T^{-m_k} a}$ для произвольного допустимого a. Имеем для слова C над (W°, Y°):

$$(\theta^\circ C)^\theta = \theta^*(C^\theta) \tag{I}$$

$$\theta^*\binom{Y}{21112} = \binom{WYYYW}{WtttW};\ \theta^*\binom{W}{212} = \binom{WYW}{WtW}$$ где

$t=12211$. Итерируя θ^* далее, мы видим, что основными блоками для пары $\begin{pmatrix} a \\ T^{-m_k}a \end{pmatrix}$ можно взять $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}W \\ \theta^{*k-1}W \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \theta^{*k-1}y \\ \theta^{*k-1}t \end{pmatrix}$

По индукции легко увидим, что вторая пара имеет вид $\begin{pmatrix} C_k 1 C_k 22 \\ C_k 22 C_k 1 \end{pmatrix}$

где $C_k=1$; $C_{k+1}=11220^2(C_k)$. Первое из C_k обозначим C_k^1 второе – C_k^2 (I) показывает, что θ^* можно изучать с помощью θ^0. Для уяснения структуры этих блоков заметим, что все C_k^i из блочных $\theta^{*k-1}y$ являются подсловами C_{k+1}^i из блочных $\theta^{*k}y$ (серединная единица $\theta^{*k}y$ является таковой для одной из компонент $\theta^{*k-1}(\theta^*y)=\theta^{*k-1}(Wyyy W))$. Далее будет использована очевидная оценка для энтропии. Мы предполагаем, что ξ –конечное разбиение. Через ξ_m обозначается произведение $T^{n_1}\xi \dots T^{n_m}\xi$ из определения $h_A(T,\xi)$.

Предложение I.

Для любого $\delta>0$ существует $\varepsilon>0$, такое что

I) если G_m –последовательность множеств меры $<\varepsilon$, то

$$\left|\frac{1}{m}H(\xi_m)-\frac{1}{m}H(\xi_m|_{X-G_m})\right|<\delta \quad \text{при больших } m:$$
$$m>m(\delta,|\xi|)$$

2) Пусть ω_m^1 и ω_m^2 – последовательность измеримых разбиений, таких, что $h(\omega_j^i)<C_j$, где $C_j - o(j)$, и ξ_m^* – последовательность измеримых разбиений таких, что

$$\omega_m^1\xi_m\Big|_{X-G_m}=\omega_m^2\xi_m^*\Big|_{X-G_m}, \text{ то } \frac{1}{m}H(\xi_m|_{X-G_m})-\frac{1}{m}H(\xi_m^*|_{X-G_m})\xrightarrow[m\to\infty]{}0$$

2) вытекает из того, что $h(\omega_m^i|_{X-G_m})<\frac{1}{1-\varepsilon}\left(C_m-(1-\varepsilon)\lg_2(1-\varepsilon)\right)$

Для произвольного слова B обозначим через $[B]$ цилиндрическое множество, ему отвечающее.

Пусть $\xi_s = ([\theta^{2s}(2)], T(\theta^{2s}(2), \ldots, T^{|\theta^{2s}(2)|-1}[\theta^{2s}(2)], [\theta^{2s}(1)], \ldots, T^{|\theta^{2s}(1)|-1}[\theta^{2s}(1)])$. Зафиксируем s и вычислим $h_A(T, \xi_s)$, которая, оказывается, не зависит от s . Последовательность ξ_s , естественно, удовлетворяет нашим требованиям: $h_A(T) = \lim_k h_A(\xi_k, T)$. Назовём слово $\theta^{2s}(1)$ или $\theta^{2s}(2)$ l – хорошо расположенным в допустимой последовательности если при любом $m \geqslant l$ это слово полностью лежит в каком либо C^m из $\theta^{*m-1}y$ или в каком-либо $\theta^{*m-1}W$ на расстоянии, не меньшем 2 от его границы. Для каждого ε найдётся $l_0 = l(s, \varepsilon)$ такое что l_0 –хорошо расположенные слова покрывают долю, большую $1-\varepsilon$, от любой допустимой последовательности.

Рассмотрим множество F_ε допустимых последовательностей, нулевая координата которых находится в l_0 –хорошо расположенном слове. $\mu(F_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ A-энтропия не изменится если последовательность будет начинаться с $m_{l_0+1}: m_{l_0+1} m_{l_0+2}, \ldots$.

Если $a \in F_\varepsilon \cap G$ где G –одно из множеств ξ_s, то для каждого $k \geq l_0$ либо $a \in T^{m_k} G$ (нулевая координата в C^1_k как в $\theta^{*k-1}W$), либо $a \in T^{m_k} G$ (нулевая координата в C^2_k). Из предложения 1 вытекает, что выбор между этими двумя возможностями и определяет $h_A(T, \xi_s)$ (т.е. она не зависит от s и заведомо ≤ 1). Точнее, каждой точке $a \in F_\varepsilon$ отвечает индексирующая последовательность $I^a = (I^a_{l_0}, I^a_{l_0+1}, \ldots)$, где $I_k = 0$ если $a \in T^{m_k} G$ и $I_k = 1$, если $a \in T^{m_k - 1} G$. Пусть H_p энтропия распределения, индуцированного мерой μ на множестве p –отрезков I^a вида $(I^a_{l_0+1}, \ldots, I^a_{l_0+p})$. Имеем $h_A(T) = \lim_{p\to\infty} p^{-1} H_p$.

Пусть, как уже говорилось, (T_θ, X_θ) представлены как специальный автоморфизм над $(T_{\theta^\circ}, X_{\theta^\circ})$ с функцией $f: X_{\theta^\circ} \to N$: определяемой просто номером нулевой координаты точки X_θ в содержащем её слове W или Y.

Если $(T^1_{\mathfrak{A}}, \Omega^1_{\mathfrak{A}})$ – обобщённое адическое представление [9] $(T_{\theta^\circ}, X_{\theta^\circ})$, то перенесем функцию f на $\Omega^1_{\mathfrak{A}}$; $f^*(\omega) = f(\varphi^{-1}(\omega))$ при $\omega \in \Omega^{1'}_{\mathfrak{A}}$. Впрочем, в данном случае f^* продолжается очевидным образом на всё $\Omega^1_{\mathfrak{A}}$. Соответствующий специальный автоморфизм метрически изоморфен (T_θ, X_θ). Для точек ω (за исключением множества малой меры, лежащего $mod\,0$ в проекции на $\Omega^1_{\mathfrak{A}}$ образа $X_\theta - F_\varepsilon$) адическое представление ω определяет индексирующую последовательность, общую для всех $a \in X_\theta$ вида $(\varphi^{-1}(\omega), k)$; $0 \leq k \leq f(\omega) - 1$. Из свойств блочных пар и расположения C^i_k в $\theta^{*k-1} Y$ вытекает следующее правило.

Предложение 2.

Если $\omega = x_0^{(j_0)} \dots x_m^{(j_m)}, \dots,$, то при $a = (\varphi^{-1}(\omega), k) \in F_\varepsilon$: если $x_m = W^\circ$, то $I^a_{m+1} = 0$; если $x_m = Y^\circ$ то пусть $m' > 1$ максимальное $r < m$, такое что $x_r^{(i_r)} \neq Y^{\circ(2)}$. Если $x_m^{(j_m)} = Y^{\circ(3)}$ или $W^{\circ(2)}$ то $I^a_{m+1} = 1$, в противном случае (если не все $x_r^{(j_r)} = W^{\circ(2)}$ при $1 \leq r \leq m$) $I^a_{m+1} = 0$. С учетом предложения I и того, что мера в $\Omega^1_{\mathfrak{A}}$ –центральная, [I4] задача сводится к счету путей в $\Omega^1_{\mathfrak{A}}$, отвечающих каждой индексирующей последовательности. Поскольку мы начинаем с m_{l_0+1}, нас интересуют отрезки $x_{l_0}^{(j_{l_0})}, \dots x_{l_0+k-1}^{(j_{l_0+k-1})}$. Индексирующая последовательность длины k (удобно отсчитывать её в направлении, обратном росту индекса $x_r^{(j_r)}$: первая серия длины m соответствует $x_{l_0+k-1}^{(j_{l_0+k-1})}$, $x_{l_0+k-2}^{(j_{l_0+k-2})}$, $\dots, x_{l_0+k-m}^{(j_{l_0+k-m})}$ и т.д.) представляется в виде последовательности серий из нулей и единиц , т.е. $k = m_1 + n_1 + \dots +$

m_r+n_r – где m_i – длины серий из I, n_i – нулей, все m_i, n_i кроме, может быть, m_1 и n_r, больше 0. Число возможных кусков вида $x_{l_0}^{(i_{l_0})}\ldots x_{l_0+k-1}^{(i_{l_0+k-1})}$, отвечающих $(m_1,\ldots,n_r)$ (при неопределенности, возникающей, если $x_{l_0}^{(i_{l_0})}=y^{o(2)}$, засчитываем кусок с коэффициентом 0,5 для каждой из двух, индексирующей последовательности, для которой он возможен) обозначим через $F(m_1,n_1,\ldots,m_r,n_r)$. Мы докажем, что существует функция от двух натуральных переменных $\pi(m,n)$ и две функции $\pi^1(m,n)$ и $\pi^2(m,n)$ от неотрицательных целых аргументов, такие что

$$F(m_1,n_1,\ldots,m_r,n_r)=\pi_1(m_1,n_1)\,\pi_2(m_r,n_r)\times\prod_{i=2}^{r-1}\pi(m_i,n_i)$$

Если $i>1$ то на $\sum\limits_{j<i}(m_j+n_j)+1=E+1$ месте в индексирующей последовательности стоит I, а $x_{l_0+k-1-E}^{(i_{l_0+k-1-E})}$ определяется однозначно по x_{l_0+k-E}: равно $y^{o(1)}$ если $x_{l_0+k-E}=y^o$ и равно $y^{o(1)}$ если $x_{l_0+k-E}=W^o$ (сочетание $\underset{y^{o(2)}}{01}$ или $\underset{y^{o(2)}}{10}$ невозможно, потому что оба сочетания выглядят как $\underset{y^oy^{o(2)}}{01}$ и $\underset{y^oy^{o(2)}}{10}$ и при последующем "выяснении неоднозначности", связанной с $y^{o(2)}$ по предложению 2, появится противоречие). Отсюда уже следует существование π^1, π^2, π и представление $F(m_1,n_1,\ldots m_r,n_r)$. π вычисляется непосредственно: $\pi(m,n)=2^m\cdot 3^{n-1}$: соответствующие серии длины $m+n$ имеют вид $b_1^1\ldots b_m^1\, b_1^o\ldots b_n^o$, где $b_1^1=y^{o(1)}$, $b_i^1=y^{o(2)}$ или $y^{o(3)}$ $(1<i\leq m)$; b_1^o есть $W^{o(2)}$ или $y^{o(1)}$, а при $1<i\leq n$: b_i^o есть W^o или $y^{o(1)}$ или $y^{o(2)}$ (если $b_{i-1}^o=W^o$ и если $b_{i-1}^o=y^o$ имеются три возможности). Из предложения следует, что концевые эффекты и функции π^1 и π^2 несущественны и комбинаторным ядром вычисления энтропии является следующая задача.

Каждому набору R натуральных чисел $m_1,n_1,\ldots,m_r,n_r$ сопоставим числа $\pi(R)=\prod\limits_{i=1}^{r}\pi(m_i,n_i)$ и $\sum(R)=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i+\sum\limits_{i=1}^{r}n_i$

Для каждого натурального n рассмотрим сумму $\sigma(n)=\sum\limits_{R|\sigma(R)=n} \pi(R)$ и вероятностный вектор $P_n=\left\{\frac{\pi(R)}{\sigma(n)}\middle| R:\Sigma(R)=n\right\}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} H(n)$, где $H(n)$ энтропия P_n.

Решение таково.

Обозначим $\sigma_1(n)=\sum\limits_{R|\Sigma(R)=n;\,\tau=1} \pi(R)$; $P_n^1=\left\{\frac{\pi(R)}{\sigma_1(n)}\middle| R:\Sigma(R)=n;\right.$ $\tau=1$; $h_1(n)$ – энтропия P_n^1

Очевидны рекуррентные соотношения: при $n\geqslant 4$

$\sigma(n)=\sigma_1(n)+\sum\limits_{k=2}^{n-2}\sigma_1(k)\sigma(n-k)$; это позволяет ввести распределение $P_n^2=\left\{\frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)},\frac{\sigma_1(2)\sigma(n-2)}{\sigma(n)},\dots,\frac{\sigma_1(n-2)\sigma(2)}{\sigma(n)}\right.$. Его энтропию обозначим $h_2(n)$.

$$H(n)=h_1(n)\frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)}+\sum_{k=2}^{n-2}\big(h_1(k)+H(n-k)\big)\frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)}+h_2(n) \qquad (2)$$

Имеем P_2^1 и P_3^1 – тривиальны; $\sigma(3)=\sigma_1(3)$; $\sigma(2)=\sigma_1(2)$,

$\sigma_1(n)=\sum\limits_{m=1}^{n-1} 2^m\, 3^{n-m-1}=2\left(3^{n-1}-2^{n-1}\right)$; $\sigma_1(n)$ удовлетворяет, стало быть, рекуррентному соотношению $\sigma_1(n+2)=5\sigma_1(n+1)-6\sigma_1(n)$ $n\geqslant 2$.

Легко написать вытекающее из него рекуррентное соотношение для $\sigma(n)$: $\sigma(n+2)=5\sigma(n+1)-4\sigma(n)$ и, вычислив $\sigma(4)$, формулу $\sigma(n)=\frac{2}{3}(4^n-1)$. Распределения P_n^1 , продолженные в бесконечности нулями, стремятся экспоненциально в метрике l^1 к распределению $\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3},\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2,\dots,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n,\dots\right\}$; распределения P_n^2 — к $\left\{\frac{\sigma_1(2)}{16},\frac{\sigma_1(3)}{64}\dots\frac{\sigma_1(m)}{4^m}\dots\right\}$, $h_2(n)$ стремится к константе h_2.

Если предположить что мы уже вычислили энтропию h_A и, что асимптотически оказалось $H(n)-H(n-k)-h_A k=o(k)$ равномерно по n к $\to 0$ при фиксированном k , то в соответствии с формулой (2) и вышесказанным оказалось бы $h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)}{4^k} = \left(\sum_{k=2}^{\infty} k\frac{\sigma_1(k)}{4^k}\right) h_A$;

$$h_A = \left(h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)}{4^k}\right) \Big/ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\sigma_1(k)}{4^k} \qquad (3)$$

Для того, чтобы "оправдать" этот результат строгим рассуждением, получим ~~рекуррентное~~ соотношение для $q = H(n) - H(n-1)$ и докажем, что q_n экспоненциально стремятся к константе. Обозначим через D_n последовательность $h_2(n) + h_1(n)\frac{\sigma_1(n)}{\sigma(n)} + \sum_{k=2}^{n-2} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)\sigma(n-k)}{\sigma(n)}$. Из вышесказанного ясно, что она экспоненциально стремится к константе, а из (2) – что $h_1(n)$ мажорируется линейной функцией от n. Далее $\frac{\sigma(n-k)}{\sigma(n)} - \frac{\sigma(n-1-k)}{\sigma(n-1)} < \frac{3}{4^{n-1}-1}$. Поэтому из (2) следует, что $q_n = D_n - D_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-3} q_{n-k}\frac{\sigma(n-k)\sigma_1(k)}{\sigma(n)} + E_n$, где E_n экспоненциально сходится к 0. Очевидно, что последовательность q –ограничена. Пусть $Q(z)$ – производящая функция: $Q(z) = \sum_{n=3}^{\infty} q_n z^n$ и пусть $Q^\circ(z) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sigma_1(k)}{4^k} z^k = \frac{z^2}{(4-3z)(2-z)}$ при $|z| < \frac{4}{3}$; $Q^\circ(1) = 1$. Имеем по доказанному, что ряд $Q(z) - Q(z)Q^\circ(z) = Q(z)(1 - Q^\circ(z))$ имеет коэффициенты экспоненциально стремящиеся к 0. Но для каждого ряда вида $z^l/(1-Q^\circ(z))$ коэффициенты экспоненциально стремятся к константе $\frac{4}{3}$. Таким образом мы доказали нашу формулу для h_A. Преобразуем её. Имеем по определению $h_1(k) = -\sum_{R|\Sigma(R)=k}\frac{\pi(R)\log_2\pi(R)}{\sigma_1(R)} + \log_2\sigma_1(k)$; $h_2 = -\sum_2^{\infty}\frac{\sigma_1(k)}{4^k}\log_2\frac{\sigma_1(k)}{4^k}$; $h_2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_1(k)\frac{\sigma_1(k)}{4^k} =$

$$= -\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{R|\Sigma(R)=k}\frac{\pi(R)\log_2\pi(R)}{4^k} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\log_2 4\cdot\sigma_1(k)}{4^k}$$

$$h_A = \log_2 4 - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{R|\Sigma(R)=k} \frac{\pi(R)\log_2 \pi(R)}{4^k} \Big/ \Big(\sum_{k=2}^{\infty} k\,\sigma_1(k)/4^k\Big)$$

Вычислим знаменатель $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k\cdot 2\cdot(3^{k-1}-2^{k-1})}{4^k} = 6$. Найдем числитель $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\Big(\sum\limits_{m=1}^{k-1} 2^m 3^{k-m-1}(m\log_2 2 + (k-m-1)\log_2 3)\Big)/4^k =$
$= \sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{k-1} \frac{2^m 3^{k-m-1}}{4^k} m\,(\log_2 2 - \log_2 3) + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{k} \frac{(k-1)\log_2 3}{4^k}$. Меняя порядок суммирования, для первой суммы имеем $\frac{1}{3}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m \times m \times$
$\times (\log_2 2 - \log_2 3) \times \sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = (\log_2 2 - \log_2 3)\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{2}\right)^m = 2(\log_2 2 - \log_2 3)$
для второй суммы получаем значение $6\log_2 3$. Итак $h_A = 2 -$
$- \frac{2\log_2 2 + 3\log_2 3}{6} = 1\frac{2}{3} - \log_2\sqrt{3}$. Заметим, что если бы $\pi(m,n)$ была тождественной единицей, то в формуле (3) для h_A оба вхождения 4^k заменились бы на 2^k и получилось бы для h_A ожидаемое значение I.

Литература

1. Keane M. Generalized Morse sequences // Zeit.Wahr. 10, 335-353 (1968).
2. Kwiatkowski J. Spectral isomorphism of Morse dynamical systems // Bull.Acad.Pol.Sc. 29, 105-114 (1981).
3. Kwiatkowski J. Metric and spectral isomorphisms of Morse dynamical systems // Ergodic Theory and Related Topics. Proceedings of the conference held in Vitte/Hiddensee (GDR), October 19-23, 1981, 141-146.
4. Dekking F.M. The spectrum of dynamical systems, arising from substitutions of constant length // ZWF, 41 (1978) 221-39.
5. Queffelec M. Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis // Lecture Notes in Mathematics. 1294, 1987.
6. Nurnberg Rolf. All generalized Morse sequences are loosely Bernoully // Math.Zeitschr., 1983, 182, N 3-4, p.403-407.
7. Host B. Valeurs propers des systémes dynamiques definis par des substitutions de longeur variable // Erg.th.et dyn.Syst. 1986. Vol.6. P.4. P.529-540.
8. Mickel P. Coincidence values and spectra of substitutions // ZFW 1978. v.42. P.205-207.
9. Лившиц А.Н. Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований // Математические заметки. 1988. Т.44. Вып.6. 785-793.
10. Кушниренко А.Г. О метрических инвариантах типа энтропии // УМН, 1967, т.XXII вып.5 (137), 57-65.

11. Dekking F.M. Some examples of sequence entropy as an isomorphism invariant // TAMS, 259 (1980) 167, 83.

12. Lemanczyk M. The sequence entropy for Morse shifts and some counterexamples. Studia Mathemat. V.LXXXII (1985), 221-41.

13. Goodman T.N.T. Topological sequence entropy // Proc.London Math.Soc. XXIX (1974) p.2, 331-350.

14. Вершик А.М., Керов С.В. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K -функтор // Современные проблемы математики. Т.26. М.: ВИНИТИ, 1985. С.3-56.

15. Ornstein D.S., Rudolf D.I., Weiss B. Equivalence of measure preserving transformations // Mem.Amer.Math.Soc., N 262 (1982), 1-116.