Библиографическая ссылка:
А.Н.Лившиц
Препринт ПОМИ Р-10-91
С.-Петербург, 1991

В работе I было доказано топологическое перемешивание гомеоморфизма, определяемого подстановкой $\begin{matrix} 0 \to 001 \\ 1 \to 11100 \end{matrix}$. Доказательство существенно учитывало специфику этой подстановки (подстановка с той же матрицей $\begin{matrix} 0 \to 001 \\ 1 \to 11001 \end{matrix}$ топологическим перемешиванием не обладает [1], [2]; в [2] предложено иное описание этой динамической системы). Важным моментом доказательства являлась лемма 5, согласно которой для некоторой вспомогательной подстановки существуют допустимые блоки со сколь угодно большим "эксцессом", определявшимся как $e(B)=2N_a(B)-N_b(B)$, где $\{a,b\}$ – алфавит вспомогательной подстановки, $N_a(B)$ – число букв a в допустимом блоке B, и $N_b(B)$ – число букв b (иначе $|B|_a$ и $|B|_b$).

В рассматриваемой ниже ситуации доказательство тоже будет базироваться на оценках подобного "эксцесса". Возможность достижения сколь угодно больших его значений будет гарантироваться свойствами матрицы подстановки и информацией о его значениях для не слишком длинных допустимых слов. То есть константы в формулах для его оценки можно будет с большой точностью найти с помощью численного эксперимента.

С точки зрения асимптотики эксцесса ситуация, с которой мы будем иметь дело, может быть рассмотрена с помощью методов и результатов работы [3].

В [3] доказано, что если σ –подстановка с примитивной матрицей M, второе по величин собственное число которой $\theta_2 (<\theta)$ – вещественное >1, строго превосходящее по модулю все неравные ему собственные числа, кроме θ, если $\alpha+1$ –порядок θ_2 в минимальном многочлене матрицы M и $\beta=\log_\theta \theta_2$, то для любого отображения f алфавита σ в R, такого, что его значения образуют вектор, ортогональный к собственному подпространству M, отвечающему θ, и любой неподвижной точки σ $(w_i)_{i\geq 1}$ существует вещественная функция $F\in C[1,+\infty)$ такая, что $F(\theta x)=F(x)$ и

$$S^{(f)}(N)=\sum_{1\le i\le N} f(u_i)=(\log_\theta N)^\alpha N^\beta F(N)+O(\Psi(N))$$

где Ψ всегда есть $o((\operatorname{Log} N)^\alpha N^\beta)$. Использованию этого результата для оценки эксцесса мешает то обстоятельство, что для некоторых x может быть $F(x)=0$. При этом, тем не менее, допустимые слова длины $N\approx x$ имеют еще возможность обладать большим значением $S^{(f)}$ (эксцесса), поскольку $\{u_1,\dots,u_N\}$ – лишь один из многих блоков длины N. Дать и строго обосновать соответствующие оценки для некоторого класса случаев и является нашей задачей при исследовании эксцесса.

Рассмотрим сначала подстановку η

$$a\to aab$$
$$b\to abbbb$$

Пусть $T_\eta : X_\eta \to X_\eta$ – гомеоморфизм, определяемый η.

Теорема. Подстановка η обладает топологическим перемешиванием, то есть для любых открытых множеств $U\subset X_\eta$ и $V\subset X_\eta$ найдется $N(U,V)$ такое, что при $n>N(U,V)$: $T_\eta^n U\cap V$ непусто.

Доказательство. Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. Для любого натурального $M>0$ найдется натуральное $N_M>0$ такое, что при любом $n>N_M$ найдется допустимая $(\in X_\eta$ последовательность $\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}$ и натуральное k_n такое, что

$$a^n_{k_n+1}\dots a^n_{k_n+|\eta^M(b)|}=\eta^M(b)\,;\; a^n_{k_n+n+1}\dots a^n_{k_n+n+|\eta^M(b)|}=\eta^M(b)$$

Доказательство. Будут использованы два утверждения.

Факт I. При всех натуральных $|\eta^M(a)|$ и $|\eta^M(b)|$ взаимно просты.

Является очевидным следствием рекуррентных соотношений для $|\eta^M(a)|$ и $|\eta^M(b)|$

Факт 2. Пусть $U(n)$ – наименьшее значение $|A|_b$ для допустимых слов A длины n, $V(n)$ – наибольшее значение $|A|_b$ для допустимых слов A длины n. Тогда существует натуральное L и константы c_1, $c_2>0$ такие, что

$$U(n)\le Cn-c_1 n^{\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})}\,;\; V(n)\ge Cn+c_2 n^{\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})}$$

при $n>L$.

Здесь C – мера цилиндра, соответствующего букве b. Ясно, что $-U(n)+Cn$ и $V(n)-Cn$ – это аналоги эксцесса. Так же как в [3] обозначим $\log_{(3+\sqrt{2})}(3-\sqrt{2})$ через β. Легко убедиться, что $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Мы будем пользоваться тем, что если промежуток $[N_1,N_2]$ достаточно велик и $\mathcal{A}(N_1,N_2)=\{A_i\}^{k(N_1,N_2)}$ – множество всех η – допустимых слов длин от N_1 до N_2, то уже на словах $\{\eta(A_i)\}_1^{k(N_1,N_2)}$, а не на их допустимых расширениях, как в [I], реализуется достаточно большой для индукционного перехода интервал длин и для каждой длины достаточно широкий разброс значений эксцесса.

Обозначим через d_1^N число $\frac{CN-U(N)}{N^\beta}$, через d_2^N – $\frac{V(N)-CN}{N^\beta}$. Рассмотрим некоторый промежуток $[N_1,N_2]$, где N_1, N_2 – натуральные, такие, что $N_2>(3+\sqrt{2})N_1+2N_1^\beta \min\limits_{N_1\le n\le N_2} d_2^n$, где смысл множителя 2 выяснится в дальнейшем.

Обозначим $\min\limits_{N_1\le n\le N_2} d_1^n$ через $C_1(N_1,N_2)$, $\min\limits_{N_1\le n\le N_2} d_2^n$ – через $C_2(N_1,N_2)$,
число $[(3+\sqrt{2})N_2-2C_1(N_1,N_2)N_2^\beta]$ – через N^* и докажем следующее утверждение.

Подлемма. $C_1(N_2+1,N^*)>C_1(N_1,N_2)-\lambda N_2^{-\beta}$

$$C_2(N_2+1,N^*)>C_2(N_1,N_2)\times\Bigl(1-2C_2(N_1,N_2)\bigl(\tfrac{N_2}{3+\sqrt{2}}\bigr)^{\beta}\,\tfrac{1}{3+\sqrt{2}}\Bigr)^{\beta}-\lambda N_2^{-\beta}$$

где $\lambda = 7$

Доказательство. Если слово $A \in \mathcal{A}(N_1, N_2); |A| = p; |A|_a = s; |A|_b = \tau$ то для $\eta(A)$ имеем $|\eta(A)| = 2\tau + 3p; \ |\eta(A)|_b = 3\tau + p$. Зафиксировав $K \in [N_2 + 1, N^*]$, будем искать все такие пары $\tau, p : p \in [N_1, N_2]$ и $cp - c_1(N_1, N_2)p^\beta \leq \tau \leq cp + c_2(N_1, N_2)p^\beta$, (чем заведомо обеспечивается существование A с такими τ и p, поскольку, очевидно, при условии $|A| = p$ все значения из промежутка $[\mathcal{U}(p), \mathcal{V}(p)]$ пробегаются величиной $|A|_b$), что $2\tau + 3p = K$, и смотреть, какой промежуток пробегается величиной $3\tau + p = 1.5K - 3.5p$. Разумеется, крайним значениям этой величины отвечают крайние значения p. Но по нашему условию для p и τ имеем, учитывая, что

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ (3+\sqrt{2})p - 2c_1(N_1, N_2)p^\beta \leq K = 2\tau + 3p \leq (3+\sqrt{2})p + 2c_2(N_1, N_2)p^\beta$$

Для оценки крайних значений p одной четности с K оценим сначала решения p_1 и p_2 уравнений $K = (3+\sqrt{2})p_1 - 2c_1(N_1, N_2)p_1^\beta$ и $K = (3+\sqrt{2})p_2 + 2c_2(N_1, N_2)p_2^\beta$. Они будут использованы для оценки α_1^K и α_2^K. Пусть $\Delta_1 = -\frac{K}{3+\sqrt{2}} + p_1$; $\Delta_2 = \frac{K}{3+\sqrt{2}} - p_2$. Имеем:

$$(3+\sqrt{2})\Delta_1 - 2c_1(N_1, N_2)\left(\frac{K}{3+\sqrt{2}} + \Delta_1\right)^\beta = 0 \qquad \text{и}$$

$$\Delta_1 > 2c_1(N_1, N_2)\left(\frac{K}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta \Big/ (3+\sqrt{2})$$

С другой стороны,

$$0 = 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{K}{3+\sqrt{2}} - \Delta_2\right)^\beta - (3+\sqrt{2})\Delta_2 \qquad \text{(I)}$$

Оценивая разность в скобках сверху числом $\frac{K}{3+\sqrt{2}}$, получаем оценку сверху для Δ_2

$$\Delta_2 \leq \frac{2}{3+\sqrt{2}}\left(\frac{K}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta c_2(N_1, N_2) \leq \frac{2K}{(3+\sqrt{2})^2} \times \left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1} c_2(N_1, N_2)$$

Подставляя мажоранту в то же выражение в скобках, получаем из (I) оценку для Δ_2 снизу

$$\Delta_2 \geq 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{K}{3+\sqrt{2}} - 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{K}{(3+\sqrt{2})^2}\right)^\beta \Big/ (3+\sqrt{2}) =$$

$$= \left(\frac{K}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta 2c_2(N_1, N_2)\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(1 - 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta$$

Теперь можно оценить $[p_1] - 1$ и $2 + [p_2]$ и получить утверждение подлеммы.

Имеем: $-1.5K + 3.5([p_1] - 1) + cK = (c - 1.5)K + 3.5\left(\Delta_1 + \frac{K}{3+\sqrt{2}} - \gamma_1\right) =$

$$= 3.5\Delta_1 - 3.5\gamma_1 > -3.5\gamma_1 + c_1(N_1, N_2)K^\beta$$

где $0 \leq \gamma_1 \leq 2$, и, стало быть, $\alpha_1^K > c_1(N_1, N_2) - 3.5\gamma_1 N_2^{-\beta}$

Далее,
$$1.5K - 3.5([p_2] + 2) - cK > -3.5\gamma_2 + K^\beta c_2(N_1, N_2) \times$$
$$\left(1 - 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta$$

Поэтому

$$\alpha_2^K > c_2(N_1, N_2)\left(1 - 2c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{3+\sqrt{2}}\right)^{\beta-1}\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)^\beta - 3.5\gamma_2 N_2^{-\beta}$$

где $0 \leq \gamma_2 \leq 2$. Подлемма доказана.

Разумеется, промежуток (N_1, N^*) удовлетворяет нашему первоначальному требованию. Преобразование от $[N_1, N_2]$ к $[N_1, N^*]$ можно итерировать. Верхняя грань промежутка будет расти экспоненциально, поэтому неравенства подлеммы дают возможность оценить $c_1(N_1, \infty)$ и $c_2(N_1, \infty)$ снизу, если численный эксперимент дал надлежащую информацию для какого-либо промежутка $[N_1, N_2]$.

Докажем теперь теорему в предположении, что оценки $c_1(N_1, \infty)$ и $c_2(N_1, \infty)$ подтвердили факт 2. Последовательность из леммы $a^n_{K_n+1} \ldots a^n_{K_n+n+|\eta^M(b)|}$ будем искать в виде $\eta^M(\{b\} \| \eta(D))$, где D – допустимое слово, а $\|$ – знак соединения двух последовательностей. Очевидно, что $b \| \eta(D)$ –

допустимое слово. Чтобы условие было удовлетворено, должно иметь место равенство

$$|D|_a\,|\eta^{M+1}(a)| + |D|_b\,|\eta^{M+1}(b)| - |\eta^M(b)| = n \qquad (2)$$

Но если n достаточно велико, то по факту 2 существует слово D' такое, что

$$|D'|_b = \left[\frac{c(n+|\eta^M(b)|)}{c|\eta^{M+1}(b)| + (1-c)|\eta^{M+1}(a)|}\right] \quad \text{и}$$

$$|D'|_a = \left[\frac{(1-c)(n+|\eta^M(b)|)}{c|\eta^{M+1}(b)| + (1-c)|\eta^{M+1}(a)|}\right]$$

Это слово нельзя взять в качестве D, поскольку для него разность R между левой и правой частью не равна нулю, но $-R < |\eta^{M+1}(a)| + |\eta^{M+1}(b)|$

Из факта I вытекает существование целых чисел X и Y: $|X| < |\eta^{M+1}(b)|;\ |Y| < |\eta^{M+1}(a)|$ таких, что

$$X|\eta^{M+1}(a)| + Y|\eta^{M+1}(b)| = 1$$

Если n достаточно велико, то имеем (по факту 2)

$$U\,(|D'| - R(X+Y)) < |D'|_b - RY < V\,(|D'| - R(X+Y))$$

вследствие чего и существует слово D, допустимое и такое, что

$$|D| = |D'|_a - RX\,;\ |D|_b = |D'|_b - RY$$

Для него выполнено (2), что и доказывает лемму.

В общем случае матрицы подстановки $\begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$ условие $\theta > \theta_2 > 1$ эквивалентно $cf < (e-1)(d-1)$, условие на N_1 и N_2

выглядит как $N_2 > \theta N_1 + (c+d-e-f)N_1^{\beta} c_2(N_1, N_2)$, где $\beta = \log_{\theta_0}\theta_2$ и предполагается, что $c+d > e+f$. N^* определяется как $[\theta N_2 - (c+d-e-f)\,c_1(N_1, N_2)\,N_2^{\beta}]$. Если $c+d = e+f$, то это подстановка с постоянной длиной слова и не может быть топологическим перемешиванием.

Выражение для $|\eta(A)|_b$ выглядит как

$$P\left(f - \frac{(d-f)(e+f)}{c+d-e-f}\right) + K\frac{d-f}{c+d-e-f} = K\frac{d-f}{c+d-e-f} - P\frac{de-cf}{c+d-e-f}$$

оценка для Δ_1 – как

$$\Delta_1 \geq \frac{\omega\, c_1(N_1, N_2)\left(\frac{K}{\theta}\right)^{\beta}}{\theta}$$

где $\omega = c+d-e-f$,
оценка для Δ_2 – как

$$\Delta_2 \geq \frac{\omega\, c_2(N_1, N_2)}{\theta}\left(\frac{K}{\theta}\right)^{\beta}\left(1 - \omega\, c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{\theta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}\right)^{\beta}$$

утверждение подлеммы:

$$c_1(N_2+1, N^*) > c_1(N_1, N_2) - \lambda N_2^{-\beta}$$

$$c_2(N_2+1, N^*) > c_2(N_1, N_2)\left(1 - \omega\, c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{\theta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}\right)^{\beta} - \lambda N_2^{-\beta}$$

где $\lambda = de - cf$. Обозначим $\omega\, c_2(N_1, N_2)\left(\frac{N_2}{\theta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\theta}$ через α. Имеем при малых α, β: $(1-\alpha)^{\beta} > 1 + \beta\ln(1-\alpha)$. Разумеется, следует предполагать, что существуют и выбраны такие N_1, N_2, что правые части > 0. Для оценки минорант $c_i(N_1, \infty)$ мы будем заменять неравенства правилами итерационного вычисления минорант на растущих промежутках. Ясно, что минорант c_i при этом будут убывать (как и сами c_i по определению).

Поскольку $\frac{N^*}{N_2} > \theta - \frac{1}{N_2} - \omega\, c_1(N_1, N_2)\, N_2^{\beta-1} = \nu$

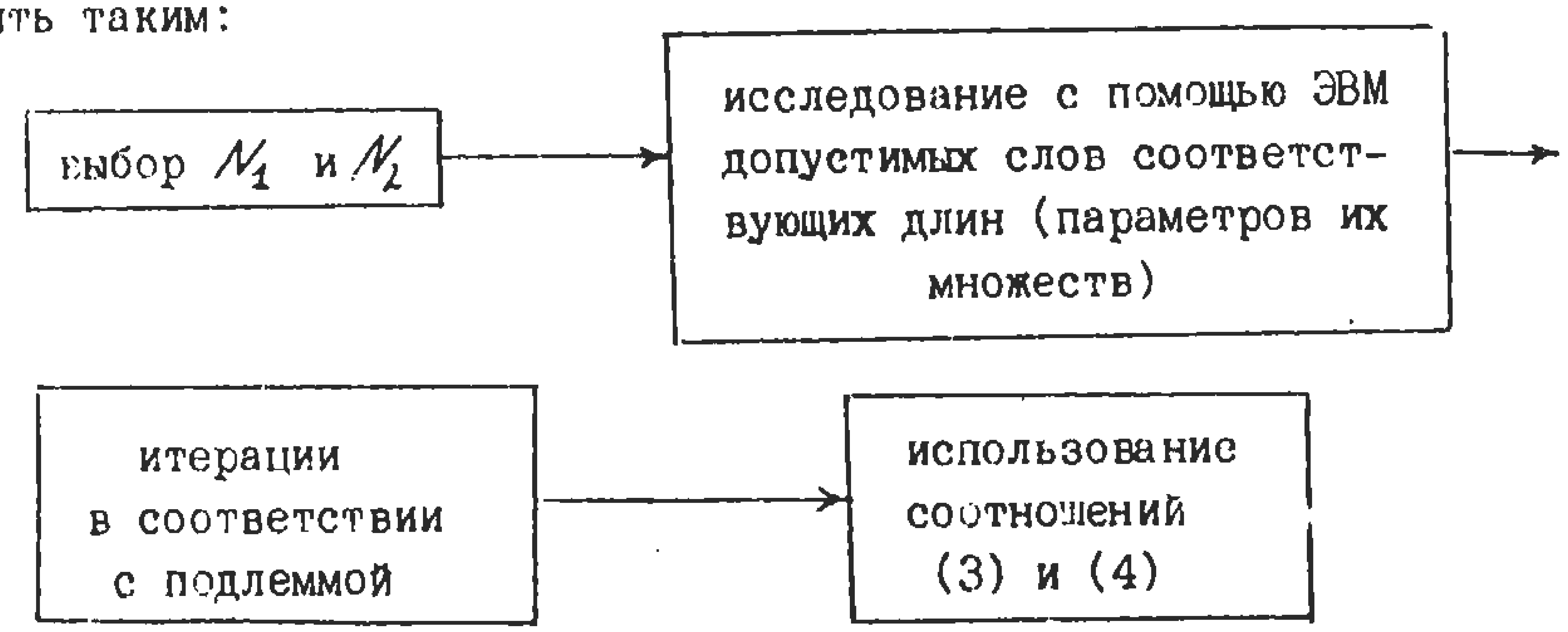
имеем:

$$C_1(N_1,\infty) > C_1(N_1,N_2) - \frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\,\frac{1}{1-\nu^{-\beta}} = C_1(N_1,N_2) - \frac{\lambda S}{N_2^{\beta}} \quad (3)$$

В то же время $C_2(N_2+1, N^*) > C_2(N_1,N_2)(1+\beta\ln(1-\alpha)) - \lambda N_2^{-\beta}$ поскольку $\beta<1$. Поэтому

$$C_2(N_1,\infty) > C_2(N_1,N_2) - \frac{\lambda}{N_2^{\beta}}\,\frac{1}{1-\nu^{-\beta}} + C_2(N_1,N_2)\beta\ln(1-\alpha)\,\frac{1}{1-\nu^{\beta-1}} \quad (4)$$

Разумеется, в (3) и (4) в качестве N_2 может быть взять конец любого получающегося при итерациях промежутка, поэтому, если для каких-либо целей нужна более точная оценка, алгоритм может быть таким:



Для рассмотренного нами частного случая в результате получилось при N_1 = 4525 и N_2 = 20000 : $C_2(N_1,N_2)$ > 0,27 ; $C_1(N_1,N_2)>$ 0,87 ; вычитаемое в формуле (3) $\approx$ 0,32$\times S: S<3$, в формуле (4) — 0,32$\times S$. Последнее недостаточно, но, как легко видеть, если в наших выкладках к словам вида $\eta(A)$ присовокупить их расширения вида $[b]\eta(A)[a]$, то, избавившись от забот о четности, можно в должной мере уменьшить λ , не увеличивая N_2 ($C_1>0$ тоже влечет топологическое перемешивание).

В общем же случае в предположении доказанности фактов I, 2 выбрать D в точности так, как это было сделано, не всегда

удается. Может быть предложен следующий путь. Очевидно, что существует такое натуральное ℓ , что подстановка $\eta'=\eta^{\ell}$ обладает следующими свойствами:

I) для некоторых символов i, j имеем: $\eta'(i)$ начинается на i, $\eta'(j)$ кончается на j ;

2) в слова $\eta'(i)$ и $\eta'(j)$ входит символ b .

Ясно, что если допустимое слово имеет вид iDj , то такой же вид имеет слово $\eta'(iDj)$.

Обозначим через $u_{i,j}(n)$ наименьшее значение содержащей $[C_b n]$ компоненты связности множества значений $|A|_b$ для допустимых слов вида iDj длины n , через $v_{i,j}(n)$ — наибольшее значение этой компоненты связности для допустимых слов вида iDj длины n . Здесь C_b – мера цилиндра, отвечающего однобуквенному слову b .

Если предполагать, что для таких функций $u_{i,j}(n)$ и $v_{i,j}(n)$ доказан факт 2, то топологическое перемешивание можно доказывать так же, как и для нашего частного случая. Действительно, существуют слова E и F , такие, что E есть начинающийся с b конец слова $\eta'(i)$, а F есть кончающееся на b начало слова $\eta'(j)$. Слово $a^n_{k_n+1}\dots a^n_{k_n+n+|\eta'^N(b)|}$ из леммы (формулирующейся без изменений, но, чего вполне достаточно, для подстановки η') ищем в виде $\eta'^N(E\eta'(D)F)$, где iDj – допустимое слово. Ясно, что существуют натуральные числа K_1 и K_2 $(K_1=|E|_b+|F|_b-1;\ K_2=|E|_a+|F|_a)$ такие, что условие леммы выглядит как $|D|_a|\eta'^{N+1}(a)|+|D|_b|\eta'^{N+1}(b)| = n-K_1|\eta'^N(b)|-K_2|\eta'^N(a)|$ Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны частному случаю.

Литература

1. Dekking F.M., Keane M. Mixing Properties of Substitutions. ZFW, 1978, B.42, H.1, p.23-33.
2. Petersen K.E., Shapiro L. Induced Flows. Trans. Amer. Math. Soc. 1973, v.177, p.375-389.

3. Dumont J.-M, Thomas.A. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifsaux substitutions. Theoretical computer science, 1989, v.65, N 2, 28, p.153-169.

РТП ЛИЯФ,зак.38,тир.220,уч.-изд.л.0,5;28/XII-1991г.
Бесплатно