О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДЕКОДИРУЕМОСТИ ДОПУСТИМЫХ СЛОВ ПРИМИТИВНЫХ ПОДСТАНОВОК

А. Н. Лившиц

Пусть $Z_* = \{1, \ldots, n\}$ – алфавит и $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – набор слов в нем. Определены подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ и матрица $G_{\mathcal{A}}$ (см. [1]), про которую предполагается, что она примитивна. В теории динамических систем с помощью $\omega_{\mathcal{A}}$ определяется некоторое пространство последовательностей, конечные отрезки которых имеют линейную асимптотику сложности, благодаря чему вопросы о кодировании–декодировании для последовательностей из такого пространства и их конечных подслов оказываются весьма специфическими. Эти вопросы о кодировании–декодировании рассматривались рядом авторов, предлагавших и использовавших различные определения при изучении подстановочных динамических систем а также изучавших вопрос о том, для каких подстановок те или иные свойства декодирования имеют место [1–7]. Цель данной заметки – продолжение таких исследований с помощью концепции пространства структурированных последовательностей, для которого, в применении к теории динамических систем, вопрос о декодировании не стоит (так же, как и для адического представления подстановочных динамических систем [1, 7]). Будет предложено описание (в терминах наборов допустимых слов) классов подстановок, для которых не выполнены некоторые сильные условия декодирования – то есть такие, которые для нужд эргодической теории и для построения самого пространства допустимых последовательностей с однозначно определяемой иерархической структурой оказались избыточными, но могут представлять интерес сами по себе.

Сначала приведем определения пространств допустимых последовательностей и структурированных допустимых последовательностей. Первое пространство имеет различные определения. Наиболее

Работа выполнена при поддержке гранта 94-01-00921 Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ).

простое из встречающихся в литературе выглядит следующим образом: $X_{\mathcal{A}} = \{x = \{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \mid$ для любых конечных $p, q, p \leq q$ существуют такие $k, r, s \in N, l \in Z_*$, что $x(p,q) = (\omega_{\mathcal{A}}^k(l))(r,s)\}$, где для любого конечного или бесконечного слова A с пронумерованными символами $A = a_v \dots a_{v+t-1}$ $A(m,n)$ означает $a_m \dots a_n, v \leq m \leq n \leq v+t-1$. В [8] такое определение используется при изучении спектра соответствующих динамических систем.

Если $v > -\infty$, то через A° обозначим слово $B = b_1 \dots b_t$, $b_i = a_{v+i-1}$, $1 \leq i \leq t$. Мы предполагаем в нашем определении, что $\omega_{\mathcal{A}}^k(A^\circ) = \omega_{\mathcal{A}}^k(A^\circ)^\circ$. Вообще, если в слове D не фиксируется нумерация символов, то по умолчанию будем предполагать, что $D = D^\circ$. Слово D с пронумерованными символами назовем допустимым, если найдутся такие m, l, r, s, $m \in Z_*$, что $D^\circ = (\omega_{\mathcal{A}}^l(m))(r,s)^\circ$. Последовательность (бесконечное слово) $x = \{b_j\}_{j=u}^{v}$ называется допустимой, если для любых конечных целых $t_1, t_2, u \leq t_1 \leq t_2 \leq v$ слово $x(t_1, t_2)$ – допустимо. Ясно, что это определение эквивалентно обычному при $u = -\infty$, $v = \infty$, и легко видеть, что если x допустима, то существует такая допустимая последовательность $y = \{y_i\}$, что $x = y(u,v)$.

Для того, чтобы определить второе пространство, введем сначала понятие (обобщенной) структурированной последовательности (см., например, [9]).

Итак, предположим, что фиксированы такие Z_* и $\mathcal{A}$, что $G_{\mathcal{A}}$ – примитивна, и определено отображение $\omega_{\mathcal{A}}$. Структурированная последовательность определяется как пара

$$x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\},$$

где для каждого l, S_x^l последовательность элементов Z_*, $S_x^l = \{i_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}$ и $\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}$ – последовательность таких целых чисел, что:

1) если $l_1 < l_2$, то $\{n_{r,x}^{l_2}\}_{r=-\infty}^{\infty} \subset \{n_{r,x}^{l_1}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ в естественном смысле, если $r_1 < r_2$, то для каждого $l \geq 0$ $n_{r_1,x}^l < n_{r_2,x}^l$,

2) $n_{-1,x}^l \leq 0 \leq n_{0,x}^0$ для каждого $l \geq 0$,

3)$i_{n_r^l+1,x}^0 \dots i_{n_{r+1}^l+1,x}^0 = \omega_{\mathcal{A}}^l(i_{r+1,x}^l), l \geq 0, -\infty < r < \infty$,

4) если для некоторых $r, \varDelta, r'$ в соответствии с 1) мы имеем $n_{r',x}^l = n_{r,x}^{l+1}$, $n_{r'+\varDelta}^l = n_{r+1,x}^{l+1}$, то $\omega_{\mathcal{A}}(i_{r+1,x}^{l+1}) = i_{r'+1,x}^l \dots i_{r'+\varDelta,x}^l$.

Очевидно, что из 4) следует 3). Ясно также, что $n_{r,x}^0 = r$ для любых r, x^s. На множестве структурированных последовательностей с естественно определяемыми слабой топологией и соответствующей ей метрикой действует группа гомеоморфизмов (вообще говоря не минимальных), которая будет обозначаться $\{(T_{\mathcal{A}}^s)^q\}_{q=-\infty}^{\infty}$. Сначала опишем метрику. Пусть ρ-метрика, соответствующая слабой сходимости в пространствах последовательностей элементов Z_* или множества целых чисел $\rho(\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \exp(\min\{-r : a_i = b_i, -r \leq i \leq r, \rho_0 > \rho_1 > \rho_2 \ldots, \sum \rho_i < \infty$ – последовательность положительных вещественных чисел. Имеем $d(x_1^s, x_2^s) = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \rho(S_{x_1}^l, S_{x_2}^l) + \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \rho(\{n_{r,x_1}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}), \{n_{r,x_2}^l\}_{r=-\infty}^{\infty})$. Для любого $l \geq 0$ обозначим через $H(l, q)$ такое p, что $n_{p-1,x}^l + 1 \leq q \leq n_{p,x}^l$(например, $H(0, q) = q$). Через $\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ обозначим последовательность $\{n_{r+H(l,q),x}^l - q\}_{r=-\infty}^{\infty}$ и через $(T_{\mathcal{A}}^s)^q x^s$ -пару $\{\{T^{H(l,q)} S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^{l,q}\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, где T – обычный сдвиг последовательности элементов Z_*. Легко проверить, что для структурированной последовательности $(T_{\mathcal{A}}^s)^q x^s$ выполнены условия 1)–4). Заметим, что в соответствии с 1)–4) знание $S_x^{l_k}, n_{0,x}^{l_k}$ для некоторой последовательности $l_k \to \infty$ однозначно определяет x^s. Пользуясь этим, мы введем некоторый класс конкретных структурированных последовательностей–последовательностей, определяемых с помощью порождающих четверок

Порождающей четверкой [1] называется такая четверка натуральных чисел $(i, j, m, n'), i \leq n, j + 1 \leq |a_i|$, что существуют такие символы $a, b, c, d \in Z_*$, что: 1) c и d являются, соответственно, j и $j + 1$ символами слова A_i; 2) слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(c)$ кончается на a и слово $\omega_{\mathcal{A}}^m(d)$ начинается с b; 3) $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)$ кончается на a и $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b)$ начинается с b. Порождающие четверки существуют для любой подстановки.

Пусть (i, j, m, n') – некоторая порождающая четверка. Определим структурированную последовательность $x^s(i, j, m, n')$ как $\{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$, где все $n_{0,x}^l = 0$ а все $S_x^{in'}$ одинаковы и равны той последовательности (отображению $x^{\infty} : (-\infty, \infty) \to Z_*$), которая была построена в определении $X_{\mathcal{A}}$ из [1] (аналогичном соответствующему определению [10]). Если предполагать, что нумерация – естественная, то можно эту последовательность обозначить $\omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(a)\omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(b) = x(i, j, m, n'), \omega_{\mathcal{A}}^{n'\infty}(b)^{\circ} = x(i, j, m, n')(1, \infty)$.

Структурированная последовательность $x^s = \{\{S_x^l\}_{l=0}^{\infty}, \{\{n_{r,x}^l\}_{r=-\infty}^{\infty}\}_{l=0}^{\infty}\}$ называется допустимой структурированной последовательностью, если дополнительно выполнено следующее условие:

5) Имеют место три возможности:

а) $n_{-1,x}^l \to -\infty, n_{0,x}^l \to \infty$ при $l \to \infty$,

б) существуют такие h, L, что $n_{0,x}^l = h \geq 0$ для всех $l > L$-в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T_{\mathcal{A}}^s)^{-h} x^s(i, j, m, n'),$$

в) существуют такие h, L, что $n_{0,x}^l = h \geq 0$ для всех $l > L$ – в этом случае для некоторой порождающей четверки имеем

$$x^s = (T^s_{\mathcal{A}})^{-h} x^s(i, j, m, n').$$

Пространство всех допустимых структурированных последовательностей со слабой топологией является вполне несвязным компактом. Обозначим его через $X^s_{\mathcal{A}}$, определенный выше гомеоморфизм "сдвига" – также через $T^s_{\mathcal{A}}$.

Естественная проекция $p : X^s_{\mathcal{A}} \to X_{\mathcal{A}}(p(x^s) = S^0_x)$ является сюрьекцией. В случае примитивности $G_{\mathcal{A}}$ наша динамическая система строго эргодична. Теперь приведем определения цикличности, распознаваемости, детерминированности и ОДД [1–7].

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется циклической, если $X_{\mathcal{A}}$ состоит из единственной периодической траектории $T_{\mathcal{A}}$. Слово $w \in (Z_*)^+$ (автоматически допустимое) называется определенным (детерминированным), если для любой такой пары допустимых слов $j^1_0 B'_1 j^1_1 = B_1,\ j^2_0 B'_2 j^2_1 = B_2$ и таких натуральных чисел

$$m^l_j, 1 \le l, j \le 2, \text{что } \omega_{\mathcal{A}}(B_l)(m^l_1, m^l_2)^\circ = w^\circ$$

и $m^l_1 \le |\omega_{\mathcal{A}} j^l_0| < |\omega_{\mathcal{A}}(j^l_0 B'_l)| < m^l_2 \le |\omega_{\mathcal{A}}(B_l)|, 1 \le l \le 2$, имеют место равенства $B'_1 = B'_2, |\omega_{\mathcal{A}} j^1_0| - m^1_1 = |\omega_{\mathcal{A}} j^2_0| - m^2_1$.

При этом, заметим, возмóжно, что $m^1_1 = m^2_1 = 1, j^1_0 \ne j^2_0$.

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется определенной, если существует такое N, что каждое допустимое слово $A \in \Sigma^+$ с $|A| > N$ определенно.

В [4] дается определение детерминированности порядка k. Детерминированность порядка k есть не что иное, как детерминированность относительно $\omega^k_{\mathcal{A}}$.

Подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ называется распознаваемой, если существует такое k, что если для некоторых натуральных чисел r,s,t и допустимого A выполнены следующие 3 условия:

1) $|\omega_{\mathcal{A}}(A)| \ge \max(r + k, s + k)$,
2) $(\omega_{\mathcal{A}}(A))(r + 1, r + k)^\circ = (\omega_{\mathcal{A}}(A))(s + 1, s + k)^\circ$,
3) $|\omega_{\mathcal{A}}(A(1, t))| = r$,

то существует такое $t' \ge 0$, что $|\omega_{\mathcal{A}}(A(1, t'))| = s$.

Подстановка называется ОДД (свойство однозначности допустимого декодирования) [1], если для всякого $x \in X_{\mathcal{A}}$ существует в точности одна последовательность $y = \{y_j\}^\infty_{j=-\infty} \in X_{\mathcal{A}}$, для которой найдется такая последовательность чисел $\{n_r\}^\infty_{r=-\infty}$, $-\infty < \cdots < n_{-l} < 0 \le n_0 < \cdots < \infty$, что $x(n_{r-1} + 1, n_r) = \omega_{\mathcal{A}} y_r$; $-\infty < r < \infty$.

Свойство ОДД в точности эквивалентно биективности выше определявшейся проекции p. Заметим, кроме того, что если $x = p(x^s)$ для некоторого $x^s \in X^s_h$,то $y = S^1_x$ и последовательность $n^1_{r,x}$ является той (одной из тех) последовательностью $\{n_r\}$, о которой говорится в определении ОДД.

В [6] введено понятие двусторонней распознаваемости и доказано, что любая нециклическая примитивная подстановка двусторонне распознаваема. Из этой теоремы можно вывести утверждение о том, что любая примитивная нециклическая подстановка – ОДД, или получить это утверждение несущественным изменением доказательства. В [6] доказано также некоторое условие нераспознаваемости. Ниже доказывается иное условие нераспознаваемости для ОДД-подстановок, формулируется аналогичное условие недетерминированности (неопределенности). Заметим, что изучение неоднозначностей иерархического представления слов представляет самостоятельный интерес. В конце работы вводится дополнительное определение сильной детерминированности и доказывается некоторый критерий сильного детерминизма.

Теорема 1. *ОДД-подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ нераспознаваема тогда и только тогда, когда существует набор допустимых слов M, M_1, M_2, X, Y, D_1, D_2, W_1, W_2, символы $e_1, e_2 \in Z_*, \omega_{\mathcal{A}}(e_1) \neq \omega_{\mathcal{A}}(e_2)$ и натуральное число T, для которых имеет место следующее: слова W_1e_1X и W_2e_2Y допустимы, $\omega_{\mathcal{A}}^T(W_1e_1X) = D_1W_1e_1XM, \omega_{\mathcal{A}}^T(W_2e_2Y) = D_2W_2e_2YM, M \neq \lambda, M_1\omega_{\mathcal{A}}e_1 = M_2\omega_{\mathcal{A}}e_2, \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y)$.*

Теорема 2. *ОДД-подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$ не определенна тогда и только тогда, когда для некоторого набора, состоящего из допустимых слов M, M_1, M_2 , X, X', Y, Y', D_1, D_2, D, W_1, W_2, символов $e_1, e'_1, e_2, e'_2 \in Z_*, e_1 \neq e_2$ и натурального числа T имеет место либо*

(i) *слова $W_1e'_1e_1X$ и $W_2e'_2e_2y$ допустимы,*

$$\omega_{\mathcal{A}}^T(W_1e'_1e_1X) = D_1W_1e'_1e_1XM; \quad \omega_{\mathcal{A}}^T(W_2e'_1e_2Y) = D_2W_2e'_2e_2YM$$

$$M \neq \lambda, \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y), \omega_{\mathcal{A}}(e'_1e_1) = X'D,$$

$$\omega_{\mathcal{A}}(e'_2e_2) = Y'D, |D| > \min(|\omega_{\mathcal{A}}e_1|, |\omega_{\mathcal{A}}e_2|),$$

либо

(ii) *слова $Xe_1e'_1W_1$ и $Ye_2e'_2W_2$ допустимы,*

$$\omega_{\mathcal{A}}^T(Xe_1e'_1W_1) = MXe_1e'_1W_1D_1, \omega_{\mathcal{A}}^T(Ye_2e'_2W_2) = MYe_2e'_2W_2D_2$$

$$M \neq \lambda, \omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(Y),$$

$$\omega_{\mathcal{A}}(e_1e'_1) = DX', \omega_{\mathcal{A}}(e_2e'_2) = DY', |D| > \min\left(|\omega_{\mathcal{A}}e_1|, |\omega_{\mathcal{A}}e_2|\right)$$

Мы будем доказывать лишь теорему 1, поскольку доказательство теоремы 2 отличается малосущественными изменениями.

Доказательство теоремы 1. Достаточность доказывается просто. Предположим, что такой набор существует. $\omega_{\mathcal{A}}^{Tl}(W_1e_1X) = \omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}D_1\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T}D_1D_1W_1e_1XM\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M$ и $\omega_{\mathcal{A}}^{Tl}(W_2e_2Y)=\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}D_2 \ldots D_2W_2e_2YM \ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M$. Пусть Ω произвольное допустимое слово вида $\ldots W_1e_1X\ldots W_2e_2Y\ldots$ (его существование очевидно и связано со свойствами рекуррентности). Предполагая, что условие распознаваемости выполнено для некоторого k, выберем l таким, что $|M\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M| > k$ и возьмем слово $h^{Tl}\Omega$ в качестве A. Рассмотрим подслова $\omega_{\mathcal{A}}(e_1XM\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M) = a_1^1\ldots a_{r_1}^1$ и $\omega_{\mathcal{A}}(e_2YM\ldots\omega_{\mathcal{A}}^{T(l-1)}M) = a_1^2\ldots a_{r_2}^2$ слова $\omega_{\mathcal{A}}(A)$ Рассмотрение начала меньшего из этих слов длины k $a_1^j\ldots a_k^j$ и слова $a_{r_{3-j}-r_j+1}^{3-j}\ldots a_{r_{3-j}-r_j+k}^{3-j}$ приводит к противоречию с определением распознаваемости.

Переходим к доказательству необходимости. Предположим, что наша подстановка не распознаваема. Тогда существует последовательность наборов $(A_l, r_l, s_l, k_l, t_l, t_l', u_l)$, где A_l-допустимые слова, $k_l\to\infty$, $|\omega_{\mathcal{A}}(A_l)| \geq \max(r_k+k_l, s_l+k_l), (\omega_{\mathcal{A}}A)(r_l+1, r_l+k_l)^\circ = (\omega_{\mathcal{A}}A)(s_l+1, s_l+k_l)^\circ, |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,t_l))| = r_l, |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,t_l'))| + u_l = s_l < |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,t_l'+1))|, u_l>0$. Могут представиться две возможности:

1) существуют такие последовательности натуральных чисел $f_l, g_l, k_l' \to\infty$,, что при каждом l имеет место следующее:

$$(1) \qquad |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,f_l+h))| - r_l = |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,g_l+h))| - s_l, h=1,\ldots,k_l'$$

2) таких последовательностей не существует.

Мы будем изучать первую возможность, ибо очевидно, что в противном случае можно выбрать последовательность $l_k\to\infty$ и в словах $(\omega_{\mathcal{A}}(A_l))(r_l+1, r_l+k_l)$ можно изменить нумерацию символов таким образом, чтобы получить в качестве слабого предела допустимую бесконечную в обе стороны последовательность, не удовлетворяющую условию ОДД, что противоречит нашему основному предположению.

При каждом l обозначим через m_l такое неотрицательное целое число, для которого (1) выполнено при $h = 1-m_l, 2-m_l, \ldots, 1$ и не выполнено при $h=-m_l$.

Предположим, не ограничивая общности, что $|\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,f_l-m_l))| - r_l < |\omega_{\mathcal{A}}(A_l(1,g_l-m_l))| - s_l$ для бесконечно многих значений l. Обозначим $B_l = A_l(f_l-m_l, f_l+k_l'), C_l = A_l(g_l-m_l, g_l+k_l')$. Имеем $\omega_{\mathcal{A}}(B_l(1,1)) = V_l\omega_{\mathcal{A}}(C_l(1,1))$, где V_l-непустое слово, $\omega_{\mathcal{A}}(B_l(r,r)) = \omega_{\mathcal{A}}(C_l(r,r))$, $1 < r \leq m_l+k_l'+1$. Выбирая, если нужно, подпоследовательность l_k и переходя к пределу, получим (как в [6]) такие допустимые слова V, B, C, $|V| > 0$, $B = B(1,\infty)$, $C = C(1,\infty)$, что $\omega_{\mathcal{A}}(B(1,1)) = V\omega_{\mathcal{A}}(C(1,1))$, $\omega_{\mathcal{A}}(B(r,r)) = \omega_{\mathcal{A}}(C(r,r))$, $r > 1$. Ясно, что множество таких $r > 1$, что $B(r,r) \neq C(r,r)$, конечно (если непусто), иначе можно было бы, беря надлежащие сдвиги влево $\omega_{\mathcal{A}}(B)$ и $\omega_{\mathcal{A}}(C)$. и переходя к пределу, получить противоречие с ОДД. Обозначим $v_1 = 1 + \max\{r \mid B(r,r) \neq C(r,r)\}$. Поскольку B и C допустимы, существуют такие структурированные последовательности x^s и y^s, что $S^0_x(1,\infty) = B, S^0_y(1,\infty) = C$. Зафиксируем какие либо x^s, y^s с этими свойствами. Рассмотрим последовательности $\{n^1_{r,x}\}$, $\{n^1_{r,y}\}$. Существуют такие $r^1_1 < \infty$ и $r^1_2 < \infty$, что для любого $t > 0$ $n^1_{t+r^1_1,x} = n^1_{t+r^1_2,y}$ и $i^1_{1+t+r^1_1,x} = i^1_{1+t+r^1_2,y}$, иначе, рассматривая x^s_1, y^s_1, мы снова получили бы противоречие с ОДД. Каждому r^1_1 соответствует ровно одно такое r^1_2, что эти условия выполняются(ибо подстановка нециклична), и зависимость по той же причине монотонна. Будем считать, что взято минимальное возможное r^1_1. Продолжая действовать таким же образом, получим такие последовательности r^l_1, r^l_2, $l = 1, 2 \ldots$, что для любых $l, t > 0$ $n^l_{t+r^l_1,x} = n^l_{t+r^1_2,y}$ и $i^l_{1+t+r^l_1,x} = i^l_{1+t+r^l_2,y}$ но $i^l_{1+r^l_1,x} \neq i^l_{1+r^1_2,y}$. Конечно, при всяком l $n^{l+1}_{1+r^{l+1}_1,x} \geq n^l_{1+r^l_1,x}$, $n^{l+1}_{1+r^{l+1}_2,y} \geq n^l_{1+r^l_2,y}$. Не существует такого L, что $n^l_{1+r^l_1,x} = n^L_{1+r^L_1,x}$ при всех $l \geq L$, ибо в этом случае наши последовательности $p(x^s)$ и $p(y^s)$ были бы сдвигами последовательностей вида w_{ab} [10]. Обозначая $Q = n^L_{1+r^L_1,x}$, мы получили бы в этом гипотетическом случае $i^0_{Q,x} = i^0_{Q,y} = a$, $i^0_{Q+1,x} = i^0_{Q+1,y} = b$. Из этого (см., например, [10]) следовало бы $x^s = y^s$, что противоречит определению r^l_1, r^l_2. Обозначим через γ_l максимальное s, для которого $n^l_{1+r^l_1-s,x} \geq n^{l-1}_{1+r^{l-1}_1,x}$, через δ_l – максимальное s, для которого $n^l_{1+r^l_2-s,y} \geq n^{l-1}_{1+r^{l-1}_2,y}$.

Существует такая константа R, что $\gamma_l, \delta_l \leq R$, $1 \leq l < \infty$. В противном случае существовала бы такая последовательность l_k, что $\gamma_{l_k} \to \infty$, откуда, вследствие примитивности подстановки (или вследствие свойств $n^{l-1}_{t+r^{l-1}_1,x}, n^{l-1}_{t+r^{l-1}_2,y}$) вытекало бы, что $\delta_{l_k} \to \infty$ и снова можно было бы, используя допустимые последовательности $\{i^{l_k-1}_{t+r^{l_k-1}_1,x}\}^\infty_{t=2}$, $\{i^{l_k}_{t+r^{l_k}_1-\gamma_{l_k},x}\}^\infty_{t=1}$, $\{i^{l_k}_{t+r^{l_k}_2-\delta_{l_k},y}\}^\infty_{t=1}$, построить с помощью сдвига и предельного перехода допустимую последовательность, для которой нарушалось бы ОДД. Воспользуемся экспоненциальным ростом последовательностей $|\omega^m_{\mathcal{A}} a|$ и равномерной ограниченностью снизу частного $\frac{|\omega^m_{\mathcal{A}} a|}{|\omega^m_{\mathcal{A}} b|}$. Из этих свойств последовательностей вытекает существование такого натурального числа $h > v_1$, что $n^l_{1+r^l_1-h,x} < n^{l-1}_{1+r^{l-1}_1-h,x} < 0$, $n^l_{1+r^l_2-h,y} < n^{l-1}_{1+r^{l-1}_2-h,y} <$

$0,1 \le l$. Рассмотрим теперь для каждого l слова E_l и F_l : $E_l = i^l_{2+r^l_1-h,x} i^l_{3+r^l_1-h,x} ... i^l_{1+r^l_1,x}, F_l = i^l_{2+r^l_2-h,y} i^l_{3+r^l_2-h,y} ... i^l_{1+r^l_2,y}$. Алгоритм определения r^l_j, $j = 1,2$ подсказывает следующее утверждение о последовательности $\{E_l, F_l\}$. Пусть $\omega_{\mathcal{A}}(E_l) = \alpha^l_1 \dots \alpha^l_{p_l}$, $\omega_{\mathcal{A}}(F_l) = \beta^l_1 \dots \beta^l_{q_l}$. Тогда $E_{l-1} = \alpha^l_{p_l-t_l-h+1} \dots \alpha^l_{p_l-t_l}$, $F_{l-1} = \beta^l_{q_l-t_l-h+1} \dots \alpha^l_{q_l-t_l}$, где $t_l = \min\{t \mid \alpha^l_{p_l-t} \ne \beta^l_{q_l-t}\}$. Может оказаться $t_l = 0$. Существует, стало быть, конечное множество $H \subset \{(u,v) \in Z^+_* \times Z^+_*, |u| = |v| = h\}$ и отображение $\phi : H \to H$, для которых $(E_l, F_l) \in H$, $1 \le l \le \infty$ и $(E_{l-1}, F_{l-1}) = \phi((E_l, F_l))$, $2 \le l \le \infty$. Разумеется, второе обстоятельство имеет место и для $l = 1$ с естественно определяемыми E_0, F_0, $E_0 = i^0_{v_1-h,x} \dots i^0_{v_1-1,x}$, $F_0 = i^0_{v_1-h,y} \dots i^0_{v_1-1,y}$. Очевидно, найдется такое T, что $(E_{l+T}, F_{l+T}) = (E_l, F_l)$. Учитывая теперь свойства ранее введенных слов V, B, C, получаем, что в качестве e_1X, e_2Y можно взять, соответственно, подслова E_0 и F_0 : $i^0_{1,x} \dots i^0_{v_1-1,x}$ и $i^0_{1,y} \dots i^0_{v_1-1,y}$ с $E_0 = W_1e_1X$, $F_0 = W_2e_2Y$, в качестве T – найденное нами значение периода. Остальные слова можно получить в соответствии с условиями теоремы (M_1 и M_2 выбираются неоднозначно). Непустота M вытекает из ранее сделанных замечаний о том, что последовательность $n^l_{1+r^l_1,x}$ не стабилизируется. Доказательство окончено.

Теперь будет рассмотрен класс подстановок, к которому будут предъявляться более сильные требования. Пусть задана примитивная подстановка $\omega_{\mathcal{A}}$. Слово w назовем сильно детерминированным, если для любых допустимых слов $j^1_0 B'_1 j^1_1 = B_1; j^2_0 B'_2 j^2_1 = B_2$; и таких натуральных чисел $m^l_j, 1 \le l, j \le 2$, что

$$(\omega_{\mathcal{A}} B_l)(m^l_1, m^l_2) = w, m^l_1 \le |\omega_{\mathcal{A}} j^l_0| < |\omega_{\mathcal{A}}(j^l_0 B'_l)| < m^l_2 \le |\omega_{\mathcal{A}} B_l|, 1 \le l \le 2,$$

имеют место равенства $B_1 = B_2, |\omega_{\mathcal{A}} j^1_0| - m^1_1 = |\omega_{\mathcal{A}} j^2_0| - m^2_1$. Подстановку $\omega_{\mathcal{A}}$ будем называть сильно детерминированной, если существует такое N, что если $|A| > N, A \in Z^+_*$, то A – сильно детерминировано. Очевидно, что если детерминированная подстановка циклична, то она сильно детерминирована. Класс детерминированных ОДД-подстановок обозначим через ДО, класс сильно детерминированных ОДД-подстановок через СДО. Некоторые утверждения К-теории C^*-алгебр – скрещенных произведений для этого класса выглядят иначе, чем в общем случае – если динамическая система порождена подстановкой $\omega_{\mathcal{A}} \in$ СДО, возможен иной способ вычисления группы размерностей.

Теорема 3. *Если $\omega_{\mathcal{A}} \in$ ДО, то $\omega_{\mathcal{A}} \notin$ СДО тогда и только тогда, когда либо*

1) *существуют такие слова* $U, V, B, C, D, \in Z_*^+$ *и символы* $i, j \in Z_*, i \neq j$, *что слова* Ui, Vj*-допустимы и для некоторого натурального* $T : \omega_{\mathcal{A}}^T(Ui) = CUiB, \omega_{\mathcal{A}}^T(Vj) = DVjB$, B*-непусто,*
либо

2) *существуют такие слова* $U, V, B, C, D, \in Z_*^+$ *и символы* $i, j \in Z_*, i \neq j$, *что слова* iU, jV *– допустимы и для некоторого натурального* $T : \omega_{\mathcal{A}}^T(iU) = BiUC, \omega_{\mathcal{A}}^T(jV) = BjVD$, B*-непусто.*

Доказательство. Утверждение “тогда” доказывается просто. Рассмотрим, например, случай 1). Как и в доказательстве теоремы 1 убеждаемся в допустимости бесконечных слов $UiB\omega_{\mathcal{A}}^T(B) \ldots \omega_{\mathcal{A}}^{lT}(B) \ldots$ и $VjB\omega_{\mathcal{A}}^T(B) \ldots \omega_{\mathcal{A}}^{lT}(B) \ldots$. Обозначим их через UiG и VjG. Пусть при $k = 0, \ldots, T$ имеем $\omega_{\mathcal{A}}^k(i) = R_k i_k, \omega_{\mathcal{A}}^k(j) = R'_k j_k$ Очевидно, найдется такое k, $0 \le k \le T-1$, что $i_k \neq j_k, i_{k+1} = j_{k+1}$, откуда следует, что $\omega_{\mathcal{A}} \notin$ СДО, ведь слова $i_k\omega_{\mathcal{A}}^k(G)$ и $j_k\omega_{\mathcal{A}}^k(G)$-допустимы.

Докажем утверждение “только тогда”. Могут представиться две возможности:

1) существуют такие $i, j \in Z_*, i \neq j, l \in Z_*, A, B \in Z_*^+$, бесконечное слово G, что iG, jG - допустимы, $\omega_{\mathcal{A}}(i) = Al, \omega_{\mathcal{A}}(j) = Bl$,

2) существуют такие $i, j \in Z_*, i \neq j, l \in Z_*, A, B \in Z_*^+$, бесконечное слово G, что Gi, Gj - допустимы, $\omega_{\mathcal{A}}(i) = lA, \omega_{\mathcal{A}}(j) = lB$.

Мы будем рассматривать только первый случай. Если $i', j' \in Z_*, i' \neq j'$, то обозначим через $L(i', j')$ множество пар слов $\{(U, V), \exists G', |G'| = \infty$, слова $Vi'G'$ i $Uj'G'$ - допустимы $\}$. Тогда из ОДД следует, что существует такая константа R, что если $i', j' \in Z_*, i' \neq j', (U, V) \in L(i', j')$ и для некоторого B имеет место

$\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B$, to $|B| < R$. А из этого, в свою очередь, следует существование такой константы R' , что если $|U| = |V| > R'; i', j' \in Z_*, i' \neq j', (U, V) \in L(i', j')$ и для некоторого B имеет место $\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B$, то $|\omega_{\mathcal{A}}(Ui')| - |B| > |Ui'|, |\omega_{\mathcal{A}}(Vj')| - |B| > |Vj'|$.

Но из ранее сказанного вытекает, что для любого $M \in N$ непусто множество $\{(U, V) \mid \exists i', j' \in Z_*, i' \neq j' : (U, V) \in L(i', j'), |U|, |V| \ge M\}$. Зафиксируем $M > R'$. Обозначим через $L^M(i', j')$ множество $\{(Ui', Vj') \mid (U, V) \in L(i', j'), |U| = |V| = M\}$. Если $(Ui', Vj') \in L^M(i', j')$ то обозначим $l(Ui', Vj') = \max\{l \mid \exists B : \omega_{\mathcal{A}}(Ui') = D_1B, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = D_2B,\ |B| = l\} \ge 0$.

Введем отображение $\phi : \cup_{(i', j') \in Z_* \times Z_*, i' \neq j'} L^M(i', j') \to \cup_{(i', j') \in Z_* \times Z_*, i' \neq j'} L^M(i', j'), \phi((Ui', Vj')) = (D, E)$, где $\omega_{\mathcal{A}}(Ui') = FDB, \omega_{\mathcal{A}}(Vj') = GEB, |B| = l(Ui', Vj'), |D| = |E| = M + 1$.

В рассматриваемом нами случае существуют, конечно, такие слова U, V, что UiG, VjG-допустимы,$|U| = |V| = M$. Из этого следует (при наших предположениях об $\omega_{\mathcal{A}}$), что существуют такие слова U_1, V_1, G_1, P_1, Q_1 и символы $i_1, j_1, i_1 \neq j_1$, что $U_1 i_1 G_1$ и $V_1 j_1 G_1$-допустимы, $|U_1| = |V_1| = M$ и $\omega_{\mathcal{A}}(U_1 i_1 G_1) = P_1 U i G; \omega_{\mathcal{A}}(V_1 j_1 G_1) = Q_1 V j G$. Ясно , что $(Ui, Vj) = \phi((U_1 i_1, V_1 j_1))$. Действуя таким же образом, найдем такие пары $(U_2 i_2, V_2 j_2)$, что $(U_1 i_1, V_1 j_1) = \phi((U_2 i_2, V_2 j_2))$ и т.д. Очевидно, что найдется такое T, что $(Ui, Vj) = (U_T i_T, V_T j_T)$, причем $l(U_T i_T, V_T j_T) = l(Ui, Vj) > 0$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Литература

1. А. Н. Лившиц, *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*, Мат. заметки **44. вып. 6** (1988), 785–793.
2. J. Martin, *Substitution minimal flows*, Amer. J. of Math. **93** (1971), 503–526.
3. J. Martin, *Minimal flows arising from substitution of nonconstant length*, Math. System Theory **7** (1973), 73–82.
4. B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques definies par des substitutions de longeur variable*, Ergodic Theory and dynamical systemes **6,p.4** (1986), 529–540.
5. M. Queffelec, *Substitutional dynamical systems. Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. **1294** (1987).
6. B. Mossé, *Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes dúne substitution*, Theor. Comp. Sci. **99 no. 2** (1992), 327–334.
7. A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions and related topics*, Advances in Soviet Math.Repres. Theory and Dynamical Systems **9** (1992), 185–204.
8. P. Michel, *Coincidence Values and Spectra of Substitutions*, ZFW **b. 42, H 3** (1978), 205–227.
9. А. Н. Лившиц, *Некоторые свойства подстановочных динамических систем*, Препринт ПОМИ Р–13–94 (94).
10. W. H. Gottshalk, *Substitution minimal sets*, Trans. of Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.

Livshits A. N. On some decoding properties for primitive substitutions.

In this note some properties of decoding for admissible sequences, both old and new, are studied. Some new assertions are proved on the conditions, under which the substitution possesses these properties.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 марта 1995 г.