Труды Санкт-Петербургского математического общества
Январь 2004
Том 10. С. 249–264

ГАРАЛЬД ИСИДОРОВИЧ НАТАНСОН

О. Л. Виноградов, В. В. Жук
В. Л. Файншмидт, В. П. Хавин

1. Краткие биографические сведения

24 июля 2003 г. в Санкт-Петербурге на 74-м году жизни скончался известный ученый Гаральд Исидорович Натансон.

Г. И. Натансон родился в Ленинграде 9 мая 1930 г. в семье выпускников математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. Его отец — Исидор Павлович Натансон — замечательный педагог и математик — доктор физико-математических наук, профессор, автор 63 работ, в том числе двух прекрасных и широко известных книг "Теория функций вещественной переменной" и "Конструктивная теория функций". Мать — Елизавета Петровна Натансон (урожденная Соколова) — статистик-демограф, кандидат наук.

Родители уделяли много внимания воспитанию сына и, в частности, активно содействовали развитию его математических способностей, проявившихся довольно рано.

В 1938 г. Гаральд Исидорович поступил сразу во 2-й класс школы в Ленинграде. Со своими одноклассниками по довоенной начальной школе он встречался до последнего времени. В 1941 г. семья была эвакуирована в город Барнаул, откуда возвратилась в 1944 г. Г.И. поступил в 8-й класс школы No 155. Учась в 9-м классе, он начал заниматься в математическом кружке Ленинградского Дворца пионеров. Через год стал одним из победителей Ленинградской городской математической олимпиады школьников-выпускников. С руководителем этого кружка, прекрасным педагогом и математиком В. А. Залгаллером, Гаральд Исидорович дружил до последних дней своей жизни.

Окончив в 1947 г. школу, Гаральд Исидорович поступил на математико-механический факультет ЛГУ. Он был одним из лучших студентов курса и в 1952 г. получил диплом с отличием. Во время учебы, наряду с обязательными дисциплинами, он прослушал много факультативных курсов и участвовал в нескольких семинарах, относящихся к различным разделам математики и механики, в частности, посещал лекции И. П. Гинзбурга по механике сплошной среды, С. М. Лозинского по вычислительной математике, Л. В. Канторовича по функциональному анализу, И. П. Натансона по конструктивной теории функций.

Гаральд Исидорович был разносторонним человеком. Несмотря на плохое зрение, он имел разряд по борьбе самбо, прекрасно ездил на велосипеде, являлся капитаном шахматно-шашечной команды матмеха. В летние каникулы неоднократно в составе студенческих стройотрядов работал землекопом на строительстве сельских ГЭС (разумеется, как и все в то время, бесплатно). Был общителен и с удовольствием участвовал в различных студенческих развлечениях.

После окончания математико-механического факультета он был принят в аспирантуру кафедры математического анализа Ленинградского педагогического института им. А. И. Герцена, а затем проработал на этой кафедре до 1966 г., причем в последние годы был ее заведующим. В 1957 г. он защитил кандидатскую диссертацию "О некоторых применениях асимптотических формул в конструктивной теории функций".

В 1960 г. Гаральд Исидорович организовал в педагогическом институте работающий и поныне научный семинар по конструктивной теории функций, который впоследствии перерос в общегородской. Среди первых участников семинара были И. П. Натансон, Б. А. Рымаренко, Н. А. Лебедев. В работе семинара, наряду с ленинградскими математиками, нередко принимали участие специалисты из разных городов СССР и зарубежья. Как правило, все диссертации по конструктивной теории функций, защищавшиеся в Ленинграде, а также те, на которые ленинградские математики давали отзывы, вначале обсуждались на этом семинаре.

Имея большие познания в различных областях математики и обладая редкой способностью быстро вникать в содержание новых для него работ, Гаральд Исидорович был идеальным руководителем семинара. Мимо его внимания практически не проходили ошибки или неточности, содержавшиеся в излагаемых докладах.

В 1966 г. Г. И. Натансон перешел на кафедру математического анализа Ленинградского университета, где и работал до конца жизни. В 1968 г. он защитил докторскую диссертацию "Приближение функций некоторыми линейными полиномиальными операторами".

Будучи профессором кафедры, Гаральд Исидорович читал лекции по общему курсу математического анализа, вел спецкурсы и спецсеминары по конструктивной теории функций. Под его руководством было написано большое число дипломных работ. Пятнадцать его учеников стали кандидатами физико-математических наук, двое позже защитили докторские диссертации.

Гаральд Исидорович был прекрасным лектором. Его лекции были глубоко содержательными, логически стройными и тщательно продуманными с методической стороны. Они высоко ценились слушателями. Такими же достоинствами обладали и научные доклады Гаральда Исидоровича.

Он был весьма доброжелательным человеком, и потому к нему нередко обращались с вопросами как студенты, так и сложившиеся специалисты в различных областях науки. Гаральд Исидорович любил беседовать с математиками различных специальностей, что приводило, как правило, к взаимному профессиональному обогащению. С ним было интересно обсуждать и темы, стоящие далеко от математики. Еще в студенческие годы однокурсники называли его "ходячей энциклопедией". Например, историю Древнего Рима он знал на уровне специалистов в этой области. Очень много читал, был большим любителем русской литературы.

Г. И. Натансон является автором 74 печатных работ. С начала работы Ленинградского математического общества на протяжении более 20 лет он — член его правления. С 1974 г. по 2002 г. возглавлял жюри городской математической олимпиады для ВТУЗов.

Гаральд Исидорович был прекрасным семьянином. Его жена Ариадна Людвиговна (урожденная Ярошевич) — выпускница исторического факультета ЛГУ, историк-этнограф, специалист по Армении. Сын Ярослав, продолжая семейную традицию, тоже окончил математико-механический факультет ЛГУ, стал программистом.

Старший внук Игорь окончил аспирантуру Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, младший внук Дмитрий — школьник.

2. О математических работах Г. И. Натансона

В первых работах Г. И. Натансона [**1, 2**] исследуется применение метода суммирования Бернштейна — Рогозинского к рядам Фурье — Якоби. Этому же посвящена статья [**10**].

Приведем некоторые из полученных Г. И. Натансоном результатов.

Теорема 1. *Пусть* $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *— вес Якоби* ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), $f \in L_p^2[-1,1]$, $S_n(f,x)$ *— частная сумма ряда Фурье функции* f *по многочленам Якоби* $P_n^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2n+\alpha+\beta+1}$,

$$x_1 = x\cos\alpha_n - \sqrt{1-x^2}\sin\alpha_n, \quad x_2 = x\cos\alpha_n + \sqrt{1-x^2}\sin\alpha_n.$$

Положим

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2}\big\{S_n(f,x_1) + S_n(f,x_2)\big\}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x)$$

в любой точке Лебега функции f*, лежащей в интервале* $(-1,1)$*. Если, кроме того,* $f \in C[-1,1]$*, то на любом отрезке* $[-1+h, 1-h]$*, где* $0 < h < 1$*, справедлива оценка*

$$|f(x) - B_n(f,x)| \leqslant C(h,\alpha,\beta)\omega(f, \frac{1}{n}),$$

где ω *— модуль непрерывности* f *на* $[-1,1]$.

Аналогичные выводы были получены Г. И. Натансоном для многочленов Чебышева — Эрмита (вес e^{-x^2}), Чебышева — Лагерра (вес $e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$) и полиномов (С. Н. Бернштейн), ортогональных по весу $\dfrac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, где на функцию g наложены некоторые ограничения.

Г. И. Натансон также показал, что описанный выше метод суммирования рядов Фурье — Якоби эквивалентен (в смысле равносходимости в интервале $(-1,1)$) методу множителей с матрицей

$$\left(\cos\frac{2k+\alpha+\beta+1}{2}\alpha_n\right) \quad (k = \overline{0,n},\ n \in \mathbb{Z}_+).$$

В [**10**] аналогичные результаты были получены для интерполяционных процессов с узлами в корнях многочленов Якоби. В той же работе Г. И. Натансон применил метод Бернштейна — Рогозинского к суммированию рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. При этом пришлось выйти за пределы отрезка $[0, \pi]$, на котором рассматривалась краевая задача Штурма — Лиувилля.

Приближению функции линейными комбинациями собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля посвящены работы [**3, 4, 11**].

В частности, в [**4**] дано уточнение прямых теорем аппроксимации, принадлежащих Джексону, и найдены аналоги обратных теорем теории периодических функций в той форме, как они незадолго до этого были установлены С. М. Лозинским. Особо отметим следующее утверждение.

Теорема 2. *Чтобы наилучшее приближение $E_n^{SL}(f)$ функции $f \in C[0, \pi]$ удовлетворяло соотношению*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n E_n^{SL}(f) < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $\widetilde{f}$ — четное 2π-периодическое продолжение f — была квазигладкой на $\mathbb{R}$, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$$\overline{\lim}_{h\to 0+} h^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x+h) + \widetilde{f}(x-h) - 2\widetilde{f}(x)| < +\infty.$$

То обстоятельство, что в теореме 2 пришлось привлечь свойства продолженной функции, весьма неожиданно.

В [**11**] введен интерполяционный оператор

$$L_n^{SL}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n(x)}{(x-x_k)u_n'(x_k)} f(x_k),$$

аналогичный интерполяционному многочлену Лагранжа. Здесь u_n — n-я собственная функция задачи Штурма–Лиувилля, x_k — ее корни. При естественных предположениях для $x \in [a, \pi - a]$, где $a \in (0, \pi/2)$, получена оценка

$$\left|f(x) - L_n^{SL}(f,x)\right| \leqslant C(a) \left(\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\max_{[0,\pi]}|f(x)|\right) \ln n.$$

Упомянутые выше работы составили основу кандидатской диссертации [**8**] Г. И. Натансона, защищенной им в 1957 г. при оппонентах С. М. Лозинском и М. К. Гавурине.

В [**8**, с. 33-35] дано новое доказательство неравенства Е. Карлсон для линейных комбинаций функций Штурма — Лиувилля (аналога известного неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического полинома). Это доказательство при менее ограничительных предположениях занимает чуть более одной страницы против 10 страниц доказательства Е. Карлсон. Диссертация получила высокие отзывы; в частности, профессор Б. А. Рымаренко отметил, что каждая из двух частей работы достаточна, чтобы ее считать полноценной диссертацией.

Особняком стоит интересная работа [**6**], посвященная взаимоотношению между узким и широким интегралами Данжуа, выполненная совместно с И. П. Натансоном — отцом и учителем Гаральда Исидоровича.

Научные результаты Г. И. Натансона следующего десятилетия составили его докторскую диссертацию “Приближение функций некоторыми линейными полиномиальными операторами", защищенную им в июне 1968 г. на Ученом совете математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. Оппонентами были В. С. Виденский, В. К. Дзядык, С. М. Лозинский.

Диссертация состоит из шести глав, содержит 232 страницы.

Работа посвящена одной из основных задач конструктивной теории функций — исследованию свойств аппроксимационных процессов. В ней рассматриваются приближения в равномерной метрике линейными полиномиальными операторами. Под полиномиальными понимаются операторы, значения которых суть полиномы (алгебраические или тригонометрические). Исследуются такие приближающие процессы: сумматорные формулы, полученные применением метода множителей к интерполяционному процессу Лагранжа с узлами в корнях многочленов Якоби; операторы, полученные с помощью множителей из тригонометрического ряда Фурье; частные суммы ряда Фурье по многочленам Эрмита; интерполяционный процесс Лагранжа с узлами в корнях многочленов Якоби; частные суммы рядов Фурье по многочленам Якоби; частные суммы тригонометрического ряда Фурье. Кроме того, отдельная глава посвящена так называемой проблеме насыщения.

В значительной части перечисленных случаев целью исследования являлось нахождение асимптотической формулы для величины

$$\sup_{f\in G} |U_n(f,x) - f(x)|, \tag{1}$$

где G — определенный класс функций, а U_n — изучаемый оператор. Г. И. Натансону удалось получить асимптотическое выражение для (1), когда в качестве U_n фигурируют частные суммы рядов Фурье по многочленам Эрмита и многочленам Якоби. Здесь автору пришлось преодолеть значительные принципиальные и технические трудности.

В теории приближений важная роль принадлежит функциям Лебега аппроксимационных процессов. Автором получены (и это существенное достижение) окончательные по порядку двусторонние оценки указанных функций для двух классических процессов — интерполяционного процесса с узлами Якоби и сумм Фурье — Якоби.

Явлению Гиббса при различных конкретных методах суммирования рядов Фурье посвящено много работ. Г. И. Натансон дает легко проверяемые достаточные условия наличия явления Гиббса, приложимые к широкому классу методов.

В теории тригонометрических рядов Фурье автором выделены естественные классы функций, для которых суммы Фурье дают приближение порядка наилучшего приближения.

Мы не станем давать систематического изложения результатов диссертации, так как они полностью опубликованы в работах [**5**, **12**, **13**, **22**, **23**, **25**] [**15**]–[**20**], [**27**]–[**31**].

Работы Г. И. Натансона после защиты докторской диссертации можно разбить на три группы: приближение алгебраическими многочленами [**32**, **42**, **47**, **52**, **53**] [**62**]–[**64**], [**67**]–[**69**], тригонометрическими многочленами [**34**, **35**, **43**, **44**, **49**, **54**, **61**], [**37**]–[**41**] и сплайнами [**45**, **48**, **50**].

В [**32**] уточняются границы для остаточного члена асимптотической формулы Лапласа в случае ультрасферических многочленов, и результат применяется для уточнения границ корней этих многочленов.

В [**42**] устанавливается общая теорема об оценке полунормы в $W_p^{(r)}[a,b]$ посредством интегральных модулей непрерывности. Эта теорема применяется к вопросу приближения функций и их производных полиномами С. Н. Бернштейна и их производными. Полиномы Бернштейна рассматривались также в [**47, 62, 63, 68, 69**]. В [**47**] вводятся и исследуются аппроксимационные операторы

$$Q_{n,r}(f)=\Big(I-\prod_{k=1}^{r}(I-d_{n,k}B_n)\Big)(f),$$

где I — тождественный оператор, $B_n(f)$ — полином Бернштейна функции f, $d_{n,k}=\dfrac{n^k(n-k)!}{n!}$.

В [**62**] (развернутое изложение см. в [**68**]) рассматриваются полунормы, заданные на пространстве непрерывных функций, определенных на стандартном симплексе. Для этих полунорм получены оценки через модули непрерывности первого и более высоких порядков. В качестве приложений установлены оценки для отклонений аналогов многочленов С. Н. Бернштейна. В [**69**] найдена точная постоянная в неравенстве

$$n\|B_n(f)-f\|_{C[0,1]}\leqslant C\|x(1-x)f''(x)\|_{C[0,1]},$$

полученном ранее Х. Беренсом и Г. Лоренцом с $C=7$. А именно, Г. И. Натансон показал, что точное значение C есть $\ln 2$.

В [**52**] получена новая оценка для отклонения $R_m(f,a,b)$ классической квадратурной формулы Ньютона — Котеса с $m+1$ узлами (m четное):

$$|R_m(f,a,b)|\leqslant C_m(b-a)^3\int_0^1(1-u)\omega_m\left(f'',\frac{(b-a)u}{m}\right)du,$$

где ω_m — модуль непрерывности порядка m; константа

$$C_m=-\frac{2}{m^3m!}\int_0^{m/2}\prod_{k=0}^{m/2}(t^2-k^2)dt$$

точная. Здесь существенным является то обстоятельство, что модуль непрерывности может иметь порядок выше первого.

С. Н. Бернштейн в 1931 г. установил неравенство для производной многочлена Лежандра $P_n(x)$: при $x\in[-1,1]$

$$(1-x^2)^{3/4}|P_n'(x)|\leqslant\left(n+\frac12\right)\sqrt{\frac{6}{\pi n}}.$$

В [**53**] найдена точная постоянная в этом неравенстве.

В теории приближения часто возникает потребность оценить значение полунормы, определенной на пространстве $L_p[a,b]$, посредством модулей непрерывности высоких порядков. Основным источником вопросов такого рода являются задачи об оценках уклонения методов приближения. В [**64**] развивается новый подход к решению задач такого рода, позволяющий получать требуемые неравенства с константами, близкими к наилучшим. Кроме того, в работе строится ненасыщенный полиномиальный метод приближения, реализующий точность аппроксимации, гарантируемую улучшенной теоремой Джексона для модуля непрерывности любого порядка.

Пусть $\|\sigma_n^*\|$ — норма суммы Фейера — Лежандра, рассматриваемой как оператор из $C[-1,1]$ в $C[-1,1]$. В [**67**] Г. И. Натансон доказывает, что $\|\sigma_n^*\| < 1,495543$,

$$\|\sigma_n^*\| = \int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^x J_0(t)dt - xJ_0(x) \right| \frac{dx}{x^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,29634\ldots,$$

где J_0 — функция Бесселя.

Перейдем к обзору работ Г. И. Натансона, относящихся к приближению тригонометрическими многочленами.

Хорошо известно, что тригонометрический ряд Фурье непрерывной функции ограниченной вариации сходится к ней равномерно. В [**34**] устанавливается изящная оценка для скорости этой сходимости, а именно

$$\|S_n(f) - f\| \leqslant \frac{2}{\pi n} \int\limits_{\frac{4}{\pi n}}^{\pi} \frac{\omega(2t)}{t^2} dt + \frac{V(\pi)}{\pi n},$$

где

$$V(t) = \operatorname*{Var}_{-\pi}^{t} f, \quad \omega(\delta) = \sup_{|x-y|\leqslant\delta} |V(x) - V(y)|.$$

Постоянная $2/\pi$ точная.

В [**35**] изучается задача определения структурных свойств функции по известной скорости роста производных некоторых приближающих агрегатов этой функции. Установлены оценки модулей непрерывности различных порядков функции и ее производных через нормы производных полиномов наилучшего приближения, сумм Фейера и Пуассона.

Пусть L_p — пространство 2π-периодических функций, суммируемых на периоде с p-й степенью, с обычной нормой, H_n — множество тригонометрических полиномов порядка не выше n,

$$\ell(p) = \sup_{n+1\in\mathbb{N}} \inf_{U\in A_n} \sup_{f\in L_p} \frac{\|f - U(f)\|_p}{\omega(f, \frac{\pi}{n+1})_p},$$

$$\ell^+(p) = \sup_{n+1\in\mathbb{N}} \inf_{U\in B_n} \sup_{f\in L_p} \frac{\|f - U(f)\|_p}{\omega(f, \frac{\pi}{n+1})_p},$$

где A_n — множество линейных операторов, действующих из L_1 в H_n, B_n — множество положительных операторов из A_n. В [**37**] показывается, что

$$\ell(p) \leqslant \frac{19}{16}, \quad \ell^+(p) \leqslant 1,3504.$$

Пусть $f \in L_1$,

$$J_n(f,x) = 4\pi \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{n}\right) \frac{\cos^2(t/2)}{(t^2 - \pi^2)^2} dt$$

— известный интеграл Бомана — Коровкина. В [**38**] строится сумматорный аналог этого интеграла и подробно рассматриваются его аппроксимативные свойства.

В [**39**] изучается точность приближения функций, заданных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$, сингулярными интегралами с положительными ядрами. Здесь устанавливается ряд теорем общего характера в виде, удобном для применения к конкретным ядрам.

Пусть L_n — множество линейных операторов, действующих из пространства 2π-периодических функций C в H_n. В силу хорошо известного результата Н. И. Ахиезера — М. Г. Крейна и Ж. Фавара для любого $r \in \mathbb{N}$ существует оператор $X_{n,r} \in L_n$ такой, что

$$\inf_{U \in L_n} \sup_{f \in C^{(r)}} \frac{(n+1)^r \|f - U(f)\|}{\|f^{(r)}\|} = K_r,$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Позднее было показано (В. В. Жук, А. А. Лигун), что при $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$ и $h \geqslant \frac{\pi}{n+1}$ имеет место равенство

$$\inf_{U \in L_n} \sup_{f \in C^{(r)}} \frac{2(n+1)^r \|f - U(f)\|}{\omega_1(f^{(r)}, h)} = K_r.$$

В [**40**] устанавливается, что

$$\inf_{U \in L_n} \sup_{f \in C^{(r)}} \frac{2(n+1)^r \|f - U(f)\|}{\omega_1(f^{(r)}, h)} > K_r \quad (r/2, n+1 \in \mathbb{N}, h > 0),$$

$$\inf_{U \in L_n} \sup_{f \in C^{(r)}} \frac{4(n+1)^r \|f - U(f)\|}{\omega_2(f^{(r)}, h)} \geqslant \frac{2^{r+1}}{2^{r+1} - 1} K_r > K_r$$

$$(r, n+1 \in \mathbb{N}, h > 0).$$

Пусть

$$\sigma_{n,m}(f) = \frac{1}{m} \sum_{l=n}^{n+m-1} S_l(f)$$

— суммы Валле Пуссена, $E_n(f) = \min_{T \in H_n} \|f - T\|$ (норма берется в пространстве C). В [**41**] найдено усиление неравенства В. Дамена — С. Б. Стечкина

$$\|f - \sigma_{n,m}(f)\| \leqslant A \sum_{l=0}^{n+m-1} \frac{E_{n+l}(f)}{m+l},$$

установленного незадолго до этого.

Пусть $k, n+1 \in \mathbb{N}$. В [**43**] доказывается неравенство

$$\left(\prod_{k=1}^{n} E_k(f) \right)^{1/n} \leqslant C(k) \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right),$$

несколько обобщающее классическое соотношение

$$E_n(f) \leqslant C_1(k) \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right).$$

В [**44**] доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $n+1, r+1, m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(m)}$, $v \in (0,\pi]$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{(r+m)(r+m+1)}{m(m+1)} \frac{1}{\sin^r(v/2)} \frac{1}{(n+1)^m} \omega_r\left(f^{(m)}, \frac{v}{n+1}\right),$$

если $r+m$ *четногт;*

$$E_n(f) \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{(r+m+1)(r+m+2)}{m(m+1)} \frac{1}{\sin^r(v/2)} \frac{1}{(n+1)^m} \omega_r\left(f^{(m)}, \frac{v}{n+1}\right),$$

если $r+m$ *нечетно.*

Новизна приведенных оценок состоит в значениях постоянных, которые при $r \geqslant 2$ являются значительно более аккуратными, чем ранее известные.

Пусть C^* — пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой, $\omega_2(f,h)$ — модуль непрерывности второго порядка функции f, $S_{h,r}(f)$ — r-я функция В. А. Стеклова. В [**49**] устанавливается, что в неравенствах

$$\omega_2(f,\lambda h) \leqslant (\lambda^2 + A)\omega_2(f,h),$$
$$||f - S_{h,3}(f)||_{C^*} \leqslant B\omega_2(f,h),$$
$$||f - S_{h,4}(f)||_{C^*} \leqslant C\omega_2(f,h)$$

значения постоянных $A=2$, $B=\frac{13}{24}$, $C=\frac{7}{12}$ не могут быть улучшены.

Пусть

$$S_\nu(f) = S_{[\nu]}(f), \quad \sigma_{\alpha,\beta}(f) = \frac{1}{\beta}\int_\alpha^{\alpha+\beta} S_\nu(f)d\nu, \quad ||\sigma_{\alpha,\beta}|| = \sup_{f\in C}\frac{||\sigma_{\alpha,\beta}(f)||}{||f||}.$$

В [**54**] Г. И. Натансон доказывает, что

$$\sup_{\alpha,\beta>0}\left\{||\sigma_{\alpha,\beta}|| - \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)\right\} = 1,27035\ldots,$$
$$\sup_{\alpha,\beta>0}\left\{||\sigma_{\alpha,\beta}|| - \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{2\alpha}{\beta}+1\right)\right\} = 1,$$
$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}\left\{||\sigma_{n,k}|| - \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{n}{k}+1\right)\right\} = 1,$$
$$\inf_{n,k\in\mathbb{N}}\left\{||\sigma_{\alpha,\beta}|| - \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{2n}{k}+1\right)\right\} \in [0,97883, 0,97995].$$

Кроме того, в [**54**] показано, что для сумм Фейера

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$$

справедливо неравенство

$$||f - \sigma_n(f)|| \leqslant \frac{3,539892}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k(f). \tag{2}$$

Ранее неравенство (2) было известно с менее точной постоянной.

В [**61**] установлено, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x) - S_k(f,x)| \leqslant 3,8378411 \sum_{k=0}^{n-1} E_k(f).$$

Последнее неравенство интересно сопоставить с (2): оно сильнее, чем (2), в порядковом смысле, но зато здесь стоит и несколько большая постоянная.

Остановимся на работах Г. И. Натансона, относящихся к сплайновой аппроксимации. Обратные теоремы конструктивной теории функций для случая приближения периодических функций в равномерной метрике тригонометрическими полиномами получили к началу 60-х годов законченный вид. Аналоги этих результатов для случая сплайнов в весьма общей ситуации рассматривались рядом авторов. В [**45**] для интерполяционных периодических сплайнов нечетной степени по равноотстоящим узлам устанавливаются упомянутые обратные теоремы в существенно более завершенной форме.

В статье [**48**] получены явные выражения (через гиперболические функции) для фундаментальных интерполяционных сплайнов и для функции Лебега, найдено представление производных интерполяционных сплайнов в узлах через конечные разности интерполируемой функции. Кроме того, установлены оценки производных сплайна через соответствующие конечные разности интерполируемой функции, получены оценки отклонения сплайна через модуль непрерывности третьего порядка от производной приближаемой функции. Все константы, входящие в доказанные оценки, либо точные, либо близки к окончательным.

Приводимая ниже лемма, установленная в этой работе, в дальнейшем неоднократно использовалась как ее авторами, так и другими математиками.

Лемма 1. *Пусть функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$, $m \in \mathbb{N}$, $h=(b-a)/m$, $x_k = a+kh$, $\omega(x) = \prod\limits_{k=0}^{m}(x-x_k)$,*

$$\lambda_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}, \quad J_m(f,x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\lambda_k(x).$$

Тогда

$$f(x) - J_m(f,x) = \frac{\omega(x)}{h^m m!}\int\limits_0^1 \Delta_{uh}^m(f', au + x(1-u))\,du.$$

В [**50**] с помощью леммы 1 получены удобные выражения для отклонений первой и второй производных интерполяционного многочлена по равноотстоящим узлам от соответствующих производных интерполируемой функции. Даны приложения этих представлений к вопросам численного дифференцирования и теории кубических сплайн-приближений. Кроме того, с помощью сплайнов получена оценка модулей непрерывности высших порядков через конечные разности значений функции в двоично-рациональных точках.

Остановимся подробно на предпоследней по времени написания работе Г. И. Натансона [**74**] (последней является работа [**72**]), находящейся в печати.

Пусть $L_p(E)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространство суммируемых на промежутке E с p-й степенью функций с обычной нормой, $\omega_r(f,h)_p$ — модуль непрерывности r-го порядка в $L_p(E)$. Неравенства вида

$$\omega_r(f,h)_p \leqslant h^r\Big\{C_1(r,j)\int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j}(f,t)_p}{t^{r+1}}dt + C_2(r,j)\frac{\omega_r(f,2A)_p}{A^r}\Big\}, \tag{3}$$

где $C_\nu(r,j)$ зависят только от r и j, в литературе принято называть *неравенствами типа Маршо.* В случае $1<p<\infty$ А. Зигмунд и М. Ф. Тиман усилили неравенство (3) (в смысле порядка). При этом константы стали зависеть от p. Доказательства Зигмунда и Тимана опирались на глубокую теорему Литтлвуда — Пэли и имели сложный характер. Дицианом был найден элементарный подход к доказательству неравенств типа Зигмунда — Тимана, пригодный для широкого класса пространств. В [**74**] существенно расширена трактовка обсуждаемого вопроса.

В § 2 работы установлены следующие теоремы общего характера.

Теорема 4. *Пусть X — векторное пространство, p — полунорма в X, $U: X\to X$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию $p(U(x))\leqslant Kp(x)$ для всех $x\in X$. Тогда при $r,m\in\mathbb{N}$, $x\in X$ справедливо неравенство*

$$p\big((U-I)^r(x)\big)\leqslant \frac{1}{2^{mr}}p\left((U^{2^m}-I)^r(x)\right)+C_3(K,r)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^{kr}}p\left((U^{2^k}-I)^{r+1}(x)\right).$$

Здесь I — тождественный оператор,

$$C_3(K,r)=\frac{(K+1)^r-2^r}{(K-1)2^r},\quad C_3(1,r)=\frac{r}{2}.$$

Следствие 1. *Если в теореме 1 положить $K=1$, то*

$$p((U-I)^r(x))\leqslant\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{kr}}p((U^{2^k}-I)^{r+1}(x)).$$

Определение 1. Пусть (X,p) — полунормированное пространство, т. е. X — векторное пространство, p — полунорма в X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ — семейство линейных операторов из X в X, таких, что $U_{\alpha+\beta}=U_\alpha U_\beta$ при любых $\alpha,\beta\geqslant 0$, $p(U_\alpha(x))\leqslant p(x)$ для $x\in X$, $\alpha\geqslant 0$. Величина

$$\eta_r(x,\alpha)=\sup_{0<t\leqslant\alpha}p\big((U_t-I)^r(x)\big)$$

называется *модулем непрерывности* r-го порядка в пространстве (X,p) относительно семейства $\{U_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$.

Теорема 5. *Пусть X — векторное пространство, p — полунорма в X, $U: X\to X$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию $p(U(x))=p(x)$ для любого $x\in X$, и пусть существуют такие $q>0$ и $M\geqslant 1$, что для всех $x,y\in X$ выполняется*

$$\frac{1}{2}(p(x+y)+p(x-y))\leqslant(p^q(x)+Mp^q(y))^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда при $r,m\in\mathbb{N}$, $x\in X$ справедливо неравенство

$$p^q((U-I)^r(x))\leqslant 2^{-rmq}p^q((U^{2^m}-I)^r(x))+M_1\sum_{k=0}^{m-1}2^{-rkq}p^q((U^{2^k}-I)^{r+1}(x)),$$

где $M_1=2^{-q}rM$, I — тождественный оператор.

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *и определения* 1 *при $x\in X$, $0<h<A$ справедливо неравенство*

$$\eta_r(x,h)\leqslant h^r\left(\frac{M_1rq}{1-2^{-rq}}\int\limits_h^A\frac{\eta^q_{r+1}(x,t)}{t^{rq+1}}dt+\frac{\eta^q_r(x,2A)}{A^{rq}}\right)^{1/q}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 6 *при любом* $h > 0$ *справедливо неравенство*

$$\eta_r(x,h) \leqslant h^r \left\{ \frac{M_1 rq}{1-2^{-rq}} \int\limits_h^\infty \frac{\eta^q_{r+1}(x,t)}{t^{rq+1}}dt \right\}^{1/q}.$$

Отмечается, что неравенства, установленные в приведенных выше теоремах, допускают итерирование (в связи с этим см. [**60**, с. 13]).

В § 3 даны некоторые приложения теорем § 2. Положим $\mu = \min\{p,2\}$, $M = \max\{p,2\}-1$, $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество, $L_p(E)$, где $1 \leqslant p < \infty$, — пространство измеримых на E функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

В случае, когда $E = [-\pi,\pi]^n$, рассматриваются функции, 2π-периодические по каждой из переменных.

Теорема 7. *Пусть* $p \in [1,\infty)$, $U : L_p(E) \to L_p(E)$ *— линейный оператор, для которого* $\|U(f)\|_p = \|f\|_p$ *при всех* $f \in L_p(E)$. *Тогда при* $r,m \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(E)$ *справедливо неравенство*

$$\|(U-I)^r(f)\|_p$$
$$\leqslant \left\{ 2^{-rm\mu} \|(U^{2^m} - I)^r(f)\|^\mu_p + 2^{-\mu} rM \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-rk\mu} \|(U^{2^k} - I)^{r+1}(f)\|^\mu_p \right\}^{1/\mu}.$$

Определение 2. Пусть $p \in [1,\infty)$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \geqslant 0}$ — семейство линейных операторов, действующих из $L_p(E)$ в $L_p(E)$ и удовлетворяющих условиям $U_0 = I$, где I — тождественный оператор, $U_{\alpha+\beta} = U_\alpha U_\beta$ при всех $\alpha,\beta \geqslant 0$. Величина

$$\eta_r(f,h)_p = \sup_{0<t\leqslant h} \left\| (U_t - I)^r(f) \right\|_p$$

называется —textitмодулем непрерывности r-го порядка в пространстве $L_p(E)$ относительного семейства $\{U_\alpha\}$.

Теорема 8. *В условиях теоремы* 7 *и определения* 2 *для любых* $f \in L_p(E)$ *и* $0 < h < A$ *справедливо неравенство*

$$\eta_r(f,h)_p \leqslant h^r \left\{ \frac{r^2 \mu M}{2^\mu (1-2^{-r\mu})} \int\limits_h^A \frac{\eta^\mu_{r+1}(f,t)_p}{t^{r\mu+1}}dt + \frac{\eta^\mu_r(f,2A)_p}{A^{r\mu}} \right\}^{\frac{1}{\mu}}.$$

Учебное пособие [**46**] существенно отличается от аналогичных тем, что в нем ряды Фурье излагаются с позиций современной теории аппроксимации, причем это изложение ведется в форме, доступной студентам младших курсов математических специальностей вузов и инженерам. Это позволило, с одной стороны, включить (в рамках ограниченного объема) много материала, ранее не освещавшегося в литературе такого рода, а с другой — сделать более ясной идейную сторону рассматриваемых вопросов. Пособие глубоко продумано со стороны как содержания, так и изложения. Часть материала, включенного в книгу, является новой и с научной точки зрения.

В методических указаниях [**60**] освещен ряд актуальных вопросов современной теории приближения в форме, доступной студентам старших курсов математических специальностей. Эти вопросы представляют несомненный интерес и для специалистов.

Г. И. Натансон [**14**] является одним из авторов книги “Линейные уравнения математической физики” из серии “Справочная математическая библиотека”, переведенной на ряд иностранных языков. Он также принимал участие [**7**] в создании книги “Математика и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография” (это трехтомное издание осуществлялось под общей редакцией В. И. Смирнова).

References

1. *О суммировании рядов по многочленам Якоби способом, аналогичным способу Бернштейна — Рогозинского*, Докл. АН СССР, **92** (1953), no. 2, 229–230.
2. *О суммировании рядов Фурье–Якоби способом Бернштейна–Рогозинского*, Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена, **103** (1955), 161–177.
3. *Некоторые вопросы приближения функций функциями Штурма–Лиувилля*, Тр. 3-го Всесоюз. Мат. Съезда. **1** (1956), 91–92.
4. *К теории приближения функций линейными комбинациями собственных функций задачи Штурма–Лиувилля*, Докл. АН СССР, **114** (1957), no. 2, 263–266.
5. *К теореме С. М. Лозинского*, Докл. АН СССР, **117** (1957), no. 1, 32–35.
6. (Совместно с И. П. Натансоном), *К взаимоотношению между узким и широким интегралами Данжуа*, Успехи мат. наук, **12** (1957), no. 6, 161–168.
7. (Совместно с В. Б. Португалем и В. П. Алексеевой под ред. акад. В. И. Смирнова.) *Математика и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография*. Изд-во АН СССР. 1957. Т.3. 362 с.
8. *О некоторых применениях асимптотических формул в конструктивной теории функций*, Диссер. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. ЛГПИ им. Герцена. 1957. 124 с.
9. *Рецензия на книгу: Л. М. Грейвз. Теория функций вещественных переменных*, Новые книги за рубежом. Сер. А (1957), no. 6, 18–21.
10. *О некоторых новых применениях метода суммирования Бернштейна–Рогозинского*, Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена, **166** (1958), 185–211.
11. *Об одном интерполяционном процессе*, Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена, **166** (1958), 213–219.
12. *Обобщение теоремы С. М. Лозинского на нетреугольные методы множителей*, Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена, **2118** (1961), 141–156.
13. *О явлении Гиббса для сумм Валле–Пуссена*, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Физматгиз, 1961. 206–213.
14. (Совместно с другими авторами.) *Линейные уравнения математической физики* Справочная математическая библиотека. § 4, 5, гл.V. М., Наука, 1964, 170–186.
15. *Приближение непрерывных функций частными суммами ряда Фурье–Эрмита*, Изв. РАН. Сер. Мат., **28** (1964), no. 6, 1237–1250.
16. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Приближение одного класса непрерывных функций частными суммами ряда Фурье–Эрмита*, Учен. зап. Казанского ун-та, **124** (1964), кн. 6 (“Функциональный анализ и теория функций,” сб. 2), 20–30.
17. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования рядов Фурье*¡ Докл. АН СССР, **162** (1965), no. 6. 1215–1218.
18. *Одно замечание по поводу проблемы насыщения*, В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Изд-во ЛМИ, 1965, с. 170–172.
19. *Уточнение принципа локализации для некоторых сингулярных интегралов*, В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Изд-во ЛМИ, 1965, с. 173–181.
20. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Приближение функций суммами Фурье–Якоби*, Докл. АН СССР, **166** (1966), no. 1, 9–10.
21. (Совместно с Ю. В. Линником, С. М. Лозинским, В. В. Петровым.) *Николай Александрович Сапогов (к 50-летию со дня рождения)*, Успехи мат. наук, **21** (1966), no. 2, 259–260.
22. *Приближение суммами Фурье функций, обладающих различными структурными свойствами на разных частях области определения*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1966), no. 19. 20–35.

23. *Двусторонняя оценка функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби*, Изв. ВУЗов. Математика, (1967), no. 11 (66). 67–74.
24. (Совместно с другими авторами.) *Lineare Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Berlin, Akademie-Verlag, 1967; § 4, 5, гл. V., 140–157.
25. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Функция Лебега сумм Фурье–Якоби*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1968), no. 1, 11–23.
26. *Приближение функций некоторыми линейными полиномиальными операторами*, Диссер. уч. ст. доктора физ.-мат. наук. ЛГУ им. Жданова, 1968, 232 с.
27. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Отклонение сумм Фурье–Якоби в граничных точках промежутка ортогональности*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1968), no. 7, 15–27.
28. *Приближение разрывных функций суммами Фурье*, Докл. АН СССР, **180** (1968), no. 5, 1033–1036.
29. *Некоторые случаи, когда суммы Фурье дают приближение порядка наилучшего*, Докл. АН СССР, **183** (1968), no. 6, 1254–1257.
30. (Совместно с С. А. Агахановым.) *Письмо в редакцию*, Изв. ВУЗов. Математика (1969), no. 1(80), 109–110.
31. (Совместно с В. В. Жуком.) *К обратной задаче теории насыщения*, Мат. заметки, **6** (1969), no. 5, 583–590.
32. (Совместно с В. Б. Глаговским.) *Некоторые замечания о корнях ультрасферических многочленов*, Журн. выч. мат. мат. физ., **10** (1970), no. 1. 183–187.
33. (Совместно с другими авторами.) *Równania liniowe fizyki matematycznej* Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970; § 4, 5, гл. V, 167–182.
34. *О рядах Фурье непрерывных функций ограниченной вариации*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1972), no. 7, 154–155.
35. (Совместно с В. В. Жуком.) *Свойства функций и рост производных приближающих полиномов*¡ Докл. АН СССР, **212** (1973), no. 1, 12–19.
36. (Совместно с Б. З. Вулихом, И. П. Мысовских). *Сергей Михайлович Лозинский (к 60-летию со дня рождения)*, Успехи мат. наук, **20** (1975), no. 2, 229–234.
37. (Совместно с В. В. Жуком.) *О точности приближения периодических функций линейными методами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1975), no. 13, 19–24.
38. (Совместно с В. В. Жуком.) *Об одном сумматорном процессе приближения*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1977), no. 1, 42–48.
39. (Совместно с В. В. Жуком.) *К вопросу приближения функций посредством положительных операторов*, Учен. зап. Тартуского ун-та. **430** (1977), 58–69.
40. (Совместно с В. В. Жуком.) *О приближении дифференцируемых периодических функций линейными методами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1977), no. 19, 16–21.
41. (Совместно с В. В. Жуком.) *О приближении непрерывных функций суммами Валле–Пуссена. Редколлегия журнала "Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр." Л., 1978.* Деп. ВИНИТИ 21 декабря 1978 г., no. 3875-78 ДЕП. РЖМат, 1979, 4Б126.
42. (Совместно с В. В. Жуком.) *К вопросу приближения в интегральной метрике функций, заданных на отрезке*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1979), no. 13, 16–26.
43. (Совместно с М. Ф. Тиманом.) *Средние геометрические последовательности наилучших приближений*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1979), no. 19, 50–52.
44. (Совместно с В. В. Жуком.) *О константах в прямых теоремах теории приближения*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1980) no. 7, 5–9.
45. (Совместно с В. В. Жуком.) *Обратные теоремы конструктивной теории функций для периодических эквидистантных сплайнов*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1983), no. 7, 11–16.
46. (Совместно с В. В. Жуком.) *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации* (учебное пособие), Л., Изд-во ЛГУ, 1983. 188 с.
47. *О применении способа И. П. Натансона и И. Ю. Харрик в алгебраическом случае*, В кн.: Теория операторов и теория функций. Изд-во ЛГУ, 1983, с. 166–170.
48. (Совместно с В. В. Жуком.) *К теории кубических периодических сплайнов по равноотстоящим узлам*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1984), no. 1, 5–11.
49. *О втором модуле непрерывности*, В кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Изд-во Ярославского ГУ, 1984, с. 76–82.

50. (Совместно с В. В. Жуком.) *Некоторые замечания о периодических эквидистантных сплайнах*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1985), no. 8, 12–17.
51. *Метод секущих*, Наука и жизнь (1985), no. 6. 41–42.
52. *Замечание о формуле Ньютона — Котеса*, Методы вычислений (Кубатурные формулы и функциональные уравнения), Л., изд-во ЛГУ, **14** (1985), 58–59.
53. *Уточнение одного неравенства С. Н. Бернштейна*, Геометрические вопросы теории функций и множеств, Изд-во Калининского гос. ун-та (1985), 121–125.
54. *Об оценке констант Лебега сумм Валле–Пуссена*, Геометрические вопросы теории функций и множеств. Изд-во Калининского гос. ун-та (1986), 102–107.
55. (Совместно с С. Н. Поздняковым, В. М. Рябовым, И. С. Храбрым.) *Методические рекомендации по использованию микрокалькулятора "Электроника БЗ-34" в учебном процессе средних профтехучилищ*, М., Центральный институт усовершенствования учителей, 1989; Ч. I, 52 с.
56. (Совместно с С. Н. Поздняковым, В. М. Рябовым, И. С. Храбрым.) *Методические рекомендации по использованию микрокалькулятора "Электроника БЗ-34" в учебном процессе средних профтехучилищ*, М., Центральный институт усовершенствования учителей, 1989; Ч. II, 21 с.
57. (Совместно с С. Н. Поздняковым, В. М. Рябовым, И. С. Храбрым.) *Методические рекомендации по использованию микрокалькулятора "Электроника БЗ-34" в учебном процессе средних профтехучилищ*, М., Центральный институт усовершенствования учителей, 1989; Ч. III, 64 с.
58. (Совместно с С. Н. Поздняковым, В. М. Рябовым, И. С. Храбрым.) *Методические рекомендации по использованию микрокалькулятора "Электроника БЗ-34" в учебном процессе средних профтехучилищ*, М., Центральный институт усовершенствования учителей, 1989; Ч. IV, 34 с.
59. (Совместно с С. Н. Поздняковым, В. М. Рябовым, И. С. Храбрым.) *Методические рекомендации по использованию микрокалькулятора "Электроника БЗ-34" в учебном процессе средних профтехучилищ*, М., Центральный институт усовершенствования учителей, 1989; Ч. V, 23 с.
60. (Совместно с В. В. Жуком.) *Методические указания к курсу "Аппроксимация функций"* Ч 4. Изд-во СПбГУ, 1991. 60 с.
61. (Совместно с Т. П. Дубовой.) *Об одном неравенстве в теории сильной аппроксимации*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., (1992), no. 3, 86–89.
62. (Совместно с В. В. Жуком.) *О приближении функций на стандартных симплексах*, Докл. РАН, **324** (1992), no. 4, 734–737.
63. *Об одной точной постоянной в теории многочленов Бернштейна*, Тез. докл. конф., посв. 70-летию проф. В. С. Виденского. Изд-во СПбГУ (1992), 46–47.
64. (Совместно с В. В. Жуком.) *О приближении функций, заданных на отрезке*, Методы вычислений (1995), no. 17, 105–121.
65. (Совместно с другими авторами.) *К 90-летию со дня рождения Геннадия Михайловича Голузина (1906–1952)*, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1 (1996), no. 3, 124–126.
66. (Совместно с другими авторами.) *К 90-летию со дня рождения Исидора Павловича Натансона (1906–1964)*, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1 (1996), no. 3, 127–130.
67. *О нормах сумм Фейера–Лежандра*, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 (1996), no. 4, 25–34.
68. (Совместно с В. В. Жуком.) *О приближении функций на стандартных симплексах*, Тр. СПб мат о-ва, **4** (1996), 193–221.
69. *Об одной точной постоянной в теории полиномов Бернштейна* Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. (1998), no. 3, 50–54.
70. (Совместно с В. В. Жуком.) *С. Н. Бернштейн и конструктивная теория функций*, Тр. СПб мат. о-ва, **8** (2000), 70–95. [English transl.: American Mathematical Society Translations - Series 2, **209**, 2003.]
71. *Об одной теореме С. П. Гейсберга*, Методы вычислений, **119** (2001), 162–165.
72. (Совместно с В. В. Жуком.) *Неравенства для модулей непрерывности в абстрактных банаховых пространствах*, Проблемы мат. анализа, **23** (2001), 14–29 [English transl.: J. Math Sci., **107** (2001), no. 3]
73. (Совместно с В. В. Жуком.) *Полунормы и модули непрерывности функций, заданных на отрезке*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **276** (2001), 155–203.

74. (совместно с В. В. Жуком.) *О некоторых операторных соотношениях типа неравенств Маршо для модулей непрерывности*, В кн.: Вопросы современной теории аппроксимации (в печати).

Санкт-Петербургский госуниверситет