УДК 621.391.1

В. Н. Малозёмов, С. М. Машарский

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ДВУХ ВЕЙВЛЕТНЫХ БАЗИСОВ

Рассматриваются два простейших вейвлетных базиса, порождающих дискретные преобразования Хаара с прореживанием по частоте и прореживанием по времени. Для этих базисов получены аналоги теоремы об отсчетах. Введено понятие логарифмически автореверсного спектра. Установлена связь между сигналами, имеющими в рассматриваемых вейвлетных базисах одинаковый спектр, при условии, что этот спектр является логарифмически автореверсным.

§1. Введение

В статье рассматриваются два простейших вейвлетных базиса, порождающих дискретные преобразования Хаара H_f и H_g. Первое преобразование H_f связано с прореживанием по частоте. Оно широко известно (см., например, [1], где имеется обширная библиография). Второе преобразование H_g связано с прореживанием по времени. Оно изучалось в работе [2].

В §2 приведены необходимые сведения об интересующих нас базисах (рекуррентные соотношения, явные представления, формулы декомпозиции). В §3 записаны вейвлетные разложения сдвигов единичного импульса. В §4 получены аналоги теоремы об отсчетах для рассматриваемых вейвлетных базисов.

В §5 введено понятие логарифмически автореверсного спектра. Установлена связь между сигналами x и y, у которых $H_f(y) = H_g(x) =: X$, при условии, что спектр X является логарифмически автореверсным. Вычислена размерность множества логарифмически автореверсных спектров.

§2. Предварительные сведения

Линейное пространство $\mathbb{R}_N$ вещественных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, будем называть *пространством сигналов.* В $\mathbb{R}_N$ обычным способом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, y(j), \quad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Естественный ортонормированный базис в $\mathbb{R}_N$ образуют сигналы $f_0(k; j) = \delta_N(j-k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, где $\delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс, равный 1, когда j делится на N, и равный 0 при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Сигнал $f_0(k; j)$ как элемент пространства $\mathbb{R}_N$ будем обозначать $f_0(k)$. Тогда любой сигнал $x \in \mathbb{R}_N$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, f_0(k)\,.$$

В дальнейшем считаем, что $N = 2^s$. Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$ и запишем рекуррентные соотношения [3]:

$$\begin{gathered} f_\nu(p\Delta_{\nu+1}) = \tfrac{1}{2}\big[f_{\nu-1}\big(2p\Delta_\nu\big) + f_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \\ f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \tfrac{1}{2}\big[f_{\nu-1}\big(2p\Delta_\nu\big) - f_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Система сигналов

$$f_s(0); \quad f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s,$$

образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}_N$. Он называется *базисом Хаара, связанным с прореживанием по частоте*. Нетрудно проверить, что $f_s(0;\, j) \equiv N^{-1}$ и

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1};\, j) = f_\nu(0;\, j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j) = f_\nu(\Delta_\nu;\, j - p\Delta_{\nu+1});$$

при этом

$$f_\nu(0;\, j) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q),$$

$$f_\nu(\Delta_\nu;\, j) = \frac{1}{2^\nu}\Big\{ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j-q) \,-\, \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q) \Big\}.$$

Любой сигнал $y \in \mathbb{R}_N$ допускает представление

$$y = y_s(0) f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\,. \tag{2.2}$$

Коэффициенты этого разложения суть коэффициенты Фурье:

$$y_s(0) = 2^s \langle y, f_s(0)\rangle, \quad y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = 2^\nu \langle y, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\rangle.$$

Согласно (2.1) их можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\begin{gathered} y_0(k) = y(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \\ y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) = y_{\nu-1}\big(2p\Delta_\nu\big) + y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big), \\ y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = y_{\nu-1}\big(2p\Delta_\nu\big) - y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big), \\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Положим

$$Y(0) = y_s(0);$$

$$Y(p + N_\nu) = y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \;\; \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Преобразование $H_f : y \to Y$ называется *дискретным преобразованием Хаара с прореживанием по частоте*. На рис. 1 представлена схема вычисления спектра $Y = H_f(y)$ при $N = 8$.

Введем еще одну систему рекуррентных соотношений [2]:

$$\begin{gathered} g_0(k) = f_0(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \\ g_\nu(p) = \tfrac{1}{2}\big[g_{\nu-1}(p) + g_{\nu-1}(p+N_\nu)\big], \\ g_\nu(p+N_\nu) = \tfrac{1}{2}\big[g_{\nu-1}(p) - g_{\nu-1}(p+N_\nu)\big], \\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Сигналы

$$g_s(0); \quad g_\nu(p+N_\nu), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s,$$

также образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}_N$. Он называется *базисом Хаара, связанным с прореживанием по времени*. Нетрудно проверить, что $g_s(0;\, j) \equiv N^{-1}$ и

$$g_\nu(p;\, j) = g_\nu(0;\, j-p), \quad g_\nu(p+N_\nu;\, j) = g_\nu(N_\nu;\, j-p);$$

при этом

$$\begin{gathered} g_\nu(0;\, j) = 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(j), \\ g_\nu(N_\nu;\, j) = 2^{-\nu}\, \big[\delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j-N_\nu)\big]. \end{gathered}$$

Любой сигнал $x \in \mathbb{R}_N$ допускает представление

$$x = x_s(0) g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p+N_\nu)\, g_\nu(p+N_\nu)\,. \tag{2.5}$$

Коэффициенты этого разложения суть коэффициенты Фурье:

$$x_s(0) = 2^s \langle x, g_s(0)\rangle, \quad x_\nu(p+N_\nu) = 2^\nu \langle x, g_\nu(p+N_\nu)\rangle.$$

Согласно (2.4) их можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\begin{gathered} x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \\ x_\nu(p) = x_{\nu-1}(p) + x_{\nu-1}(p+N_\nu), \\ x_\nu(p+N_\nu) = x_{\nu-1}(p) - x_{\nu-1}(p+N_\nu), \\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Положим

$$\begin{aligned} &X(0) = x_s(0); \\ &X(p+N_\nu) = x_\nu(p+N_\nu), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Преобразование $H_g : x \to X$ называется *дискретным преобразованием Хаара с прореживанием по времени*. На рис. 2 представлена схема вычисления спектра $X = H_g(x)$ при $N = 8$.

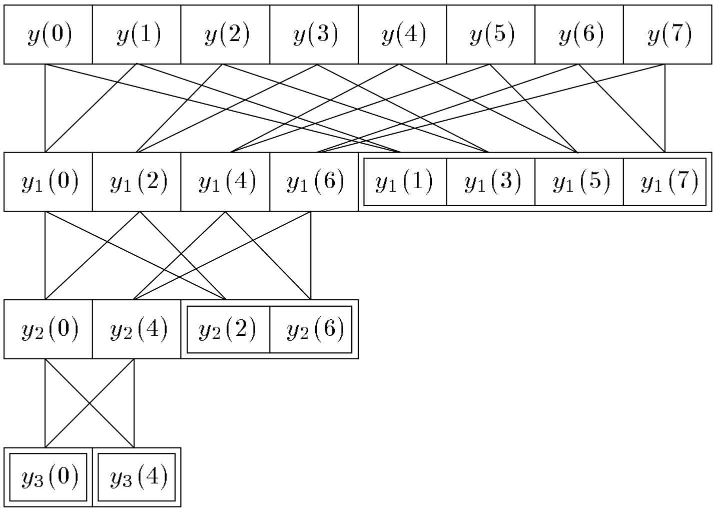

Рис. 1

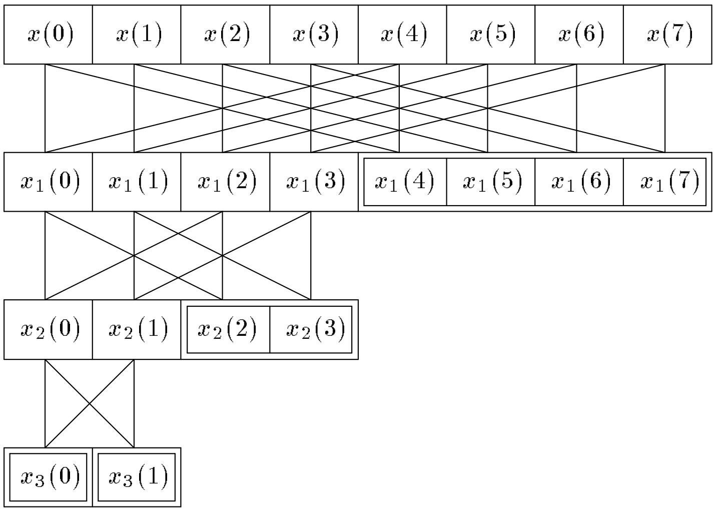

Рис. 2

Разложения (2.2) и (2.5) являются простейшими *вейвлетными разложениями*. В следующих трех параграфах будет проведено их сравнительное исследовние.

§3. Хааровские спектры сдвигов единичного импульса

Зафиксируем число $q \in \{0, 1, \ldots, 2^s - 1\}$,

$$q = q_{s-1}2^{s-1} + q_{s-2}2^{s-2} + \cdots + q_0, \quad q_k \in \{0, 1\}.$$

Теорема 3.1. *Сигнал $\delta_N(j-q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара с прореживанием по частоте:*

$$\delta_N(\cdot - q) = f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} (-1)^{q_{\nu-1}} f_\nu\big(\Delta_\nu + p_\nu^0(q)\Delta_{\nu+1}\big),$$

где $p_\nu^0(q) = \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor$ — целая часть числа $q/\Delta_{\nu+1}$.

Доказательство. Согласно (2.2) имеем

$$\delta_N(\cdot - q) = y_s(0) f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

Здесь $y_s(0) = 2^s \langle \delta_N(\cdot - q), f_s(0)\rangle = 1$,

$$y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = 2^\nu \langle \delta_N(\cdot - q), f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\rangle = 2^\nu f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, q) =$$

$$= 2^\nu f_\nu(\Delta_\nu;\, q - p\Delta_{\nu+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q - p\Delta_{\nu+1} \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}, \\ -1, & \text{если } q - p\Delta_{\nu+1} \in \{\Delta_\nu, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}, \\ 0 & \text{при остальных } p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}. \end{cases}$$

Поскольку $q = (q_{s-1}2^{s-\nu-1} + \cdots + q_\nu)2^\nu + q_{\nu-1}2^{\nu-1} + \cdots + q_0 = p_\nu^0(q)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \cdots + q_0$, то коэффициент $y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})$ отличен от нуля только при $p = p_\nu^0(q)$. При этом он равен 1, если $q_{\nu-1} = 0$, и равен -1, если $q_{\nu-1} = 1$, т. е.

$$y_\nu\big(\Delta_\nu + p_\nu^0(q)\Delta_{\nu+1}\big) = (-1)^{q_{\nu-1}}.$$

Теорема доказана. ▲

Отметим, что $p_{\nu-1}^0(q) = q_{s-1}2^{s-\nu} + \cdots + q_{\nu-1} = 2\,(q_{s-1}2^{s-\nu-1} + \cdots + q_\nu) + q_{\nu-1} = 2\,p_\nu^0(q) + q_{\nu-1}$. Значит, числа $p_\nu^0(q)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_s^0(q) = 0; \quad p_{\nu-1}^0(q) = 2\,p_\nu^0(q) + q_{\nu-1}, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Теорема 3.2. *Сигнал $\delta_N(j-q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара с прореживанием по времени:*

$$\delta_N(\cdot - q) = g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} (-1)^{q_{s-\nu}} g_\nu\big(p_\nu^1(q) + N_\nu\big),$$

где $p_\nu^1(q) = \langle q \rangle_{N_\nu}$ — остаток от деления числа q на N_ν.

Доказательство. Согласно (2.5) имеем

$$\delta_N(\cdot - q) = x_s(0) g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p + N_\nu)\, g_\nu(p + N_\nu).$$

Здесь $x_s(0) = 2^s \langle \delta_N(\cdot - q), g_s(0)\rangle = 1$,

$$x_\nu(p + N_\nu) = 2^\nu \langle \delta_N(\cdot - q), g_\nu(p + N_\nu)\rangle = 2^\nu g_\nu(p + N_\nu;\, q) =$$

$$= 2^\nu g_\nu(N_\nu;\, q-p) = \delta_{N_{\nu-1}}(q-p) - \delta_{N_{\nu-1}}(q-p-N_\nu).$$

Поскольку $q = (q_{s-1}2^{\nu-2}+\dots+q_{s-\nu+1})2^{s-\nu+1}+q_{s-\nu}2^{s-\nu}+\dots+q_0 = rN_{\nu-1}+q_{s-\nu}N_\nu+\langle q\rangle_{N_\nu}$, то

$$x_\nu(p+N_\nu) = \delta_{N_{\nu-1}}(q_{s-\nu}N_\nu + \langle q\rangle_{N_\nu} - p) - \delta_{N_{\nu-1}}\big((q_{s-\nu}-1)N_\nu + \langle q\rangle_{N_\nu} - p\big).$$

Если $q_{s-\nu} = 0$, то

$$x_\nu(p+N_\nu) = \delta_{N_{\nu-1}}\big(\langle q\rangle_{N_\nu} - p\big) - \delta_{N_{\nu-1}}\big(\langle q\rangle_{N_\nu} - p - N_\nu\big).$$

Учитывая неравенство $\big|\langle q\rangle_{N_\nu} - p\big| \le N_\nu - 1$, заключаем, что

$$x_\nu(p+N_\nu) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ p = \langle q\rangle_{N_\nu}, \\ 0 \ \text{ при } \ p \ne \langle q\rangle_{N_\nu}. \end{cases}$$

Если $q_{s-\nu} = 1$, то

$$x_\nu(p+N_\nu) = \delta_{N_{\nu-1}}\big(\langle q\rangle_{N_\nu} - p + N_\nu\big) - \delta_{N_{\nu-1}}\big(\langle q\rangle_{N_\nu} - p\big).$$

В этом случае

$$x_\nu(p+N_\nu) = \begin{cases} -1 \ \text{ при } \ p = \langle q\rangle_{N_\nu}, \\ \ \ 0 \ \text{ при } \ p \ne \langle q\rangle_{N_\nu}. \end{cases}$$

Приходим к следующему выводу: коэффициент $x_\nu(p+N_\nu)$ отличен от нуля только при $p = \langle q\rangle_{N_\nu} = p_\nu^1(q)$; при этом он равен 1, если $q_{s-\nu} = 0$, и равен -1, если $q_{s-\nu} = 1$, т. е.

$$x_\nu\big(p_\nu^1(q) + N_\nu\big) = (-1)^{q_{s-\nu}}.$$

Теорема доказана. ▲

Из равенства $q = rN_{\nu-1} + q_{s-\nu}N_\nu + \langle q\rangle_{N_\nu}$ следует, что $\langle q\rangle_{N_{\nu-1}} = q_{s-\nu}N_\nu + \langle q\rangle_{N_\nu}$. Значит, числа $p_\nu^1(q)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_s^1(q) = 0; \quad p_{\nu-1}^1(q) = p_\nu^1(q) + q_{s-\nu}N_\nu, \quad \nu = s, s-1, \dots, 1.$$

§4. Теоремы об отсчетах

Обратимся сначала к формуле (2.2).

Л е м м а 4.1. *При $k = 0, 1, \dots, s-1$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} y_s(0)\, f_s(0) \,+ \sum_{\nu=k+1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \\ = \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p\Delta_{k+1})\, f_k(p\Delta_{k+1}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = s-1$ согласно (2.3) и (2.1) получаем

$$y_s(0)\, f_s(0) + y_s(\Delta_s)\, f_s(\Delta_s) = [y_{s-1}(0) + y_{s-1}(\Delta_s)]\, f_s(0) +$$

$$+[y_{s-1}(0) - y_{s-1}(\Delta_s)]\, f_s(\Delta_s) = y_{s-1}(0)\, f_{s-1}(0) + y_{s-1}(\Delta_s)\, f_{s-1}(\Delta_s),$$

что соответствует (4.1). Сделаем индукционный переход от k к $k-1$. Имеем

$$y_s(0)\, f_s(0) + \sum_{\nu=k}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p\Delta_{k+1})\, f_k(p\Delta_{k+1}) + \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(\Delta_k + p\Delta_{k+1})\, f_k(\Delta_k + p\Delta_{k+1}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k-1} \big[y_{k-1}\big(2p\Delta_k\big) + y_{k-1}\big((2p+1)\Delta_k\big)\big]\, f_k(p\Delta_{k+1}) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{N_k-1} \big[y_{k-1}\big(2p\Delta_k\big) - y_{k-1}\big((2p+1)\Delta_k\big)\big]\, f_k(\Delta_k + p\Delta_{k+1}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k-1} \big[y_{k-1}\big(2p\Delta_k\big)\, f_{k-1}\big(2p\Delta_k\big) + y_{k-1}\big((2p+1)\Delta_k\big)\, f_{k-1}\big((2p+1)\Delta_k\big)\big] =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_{k-1}-1} y_{k-1}(l\Delta_k)\, f_{k-1}(l\Delta_k).$$

Лемма доказана. ▲

Положим $h_k(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j-q)$. Очевидно, что $h_k(j) = 2^k f_k(0;\, j)$.

Т е о р е м а 4. 1. *Если при некотором $k \in \{1, \ldots, s\}$ выполняется равенство*

$$y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, k, \tag{4.2}$$

то

$$y(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} y(p\Delta_{k+1})\, h_k(j - p\Delta_{k+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = s$ согласно (2.2) и (4.2) имеем

$$y = y_s(0)\, f_s(0) = y_s(0)\, N^{-1},$$

т. е. $y(j) \equiv \mathrm{const}$. Этот факт можно записать в виде $y(j) = y(0)$, что соответствует (4.3).

Возьмем $k \in \{1, \ldots, s-1\}$. По лемме 4.1

$$y(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p\Delta_{k+1})\, f_k(p\Delta_{k+1};\, j).$$

Воспользуемся тем, что в силу (2.3)

$$y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) + y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = 2\, y_{\nu-1}(2p\Delta_\nu)$$

при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \nu = 1, \ldots, k$. Учитывая (4.2), последовательно получаем

$$y_k(p\Delta_{k+1}) = 2\, y_{k-1}(2p\Delta_k) = 2^2 y_{k-2}(2^2 p\Delta_{k-1}) = \cdots =$$

$$= 2^k y_0(2^k p\Delta_1) = 2^k y(p\Delta_{k+1}).$$

Остается отметить, что

$$2^k f_k(p\Delta_{k+1};\, j) = 2^k f_k(0;\, j - p\Delta_{k+1}) = h_k(j - p\Delta_{k+1}).$$

Теорема доказана. $\blacktriangle$

Аналитическая запись (4.3) означает, что сигнал $y(j)$ является *ступенчатым*, точнее, что

$$y(j) = y(l\Delta_{k+1}) \quad \text{при} \quad j \in \{l\Delta_{k+1}, l\Delta_{k+1}+1, \ldots, (l+1)\Delta_{k+1} - 1\},$$

$$l = 0, 1, \ldots, N_k - 1.$$

Это следует из определения N-периодического ядра $h_k(j)$, которое равно 1 при $j \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{k+1} - 1\}$ и равно 0 при $j \in \{\Delta_{k+1}, \ldots, N - 1\}$. Для ступенчатых сигналов согласно (2.3) выполняется условие (4.2).

Таким образом, *сигнал $y(j)$ допускает представление* (4.3) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4.2).

Обратимся к формуле (2.5).

Лемма 4.2. *При $k = 0, 1, \ldots, s-1$ справедливо равенство*

$$x_s(0)\, g_s(0) \,+ \sum_{\nu=k+1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p + N_\nu)\, g_\nu(p + N_\nu) = \sum_{p=0}^{N_k - 1} x_k(p)\, g_k(p). \tag{4.4}$$

Доказательство. При $k = s-1$ согласно (2.6) и (2.4) получаем

$$x_s(0)\, g_s(0) + x_s(1)\, g_s(1) = [x_{s-1}(0) + x_{s-1}(1)]\, g_s(0) +$$

$$+ [x_{s-1}(0) - x_{s-1}(1)]\, g_s(1) = x_{s-1}(0)\, g_{s-1}(0) + x_{s-1}(1)\, g_{s-1}(1),$$

что соответствует (4.4). Сделаем индукционный переход от k к $k-1$. Имеем

$$x_s(0)\, g_s(0) + \sum_{\nu=k}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p + N_\nu)\, g_\nu(p + N_\nu) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k - 1} x_k(p)\, g_k(p) + \sum_{p=0}^{N_k - 1} x_k(p + N_k)\, g_k(p + N_k) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k-1} \left[x_{k-1}(p) + x_{k-1}(p+N_k)\right] g_k(p) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{N_k-1} \left[x_{k-1}(p) - x_{k-1}(p+N_k)\right] g_k(p+N_k) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_k-1} \left[x_{k-1}(p)\, g_{k-1}(p) + x_{k-1}(p+N_k)\, g_{k-1}(p+N_k)\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_{k-1}-1} x_{k-1}(l)\, g_{k-1}(l).$$

Лемма доказана. ▲

Теорема 4.2. *Если при некотором* $k \in \{1, \ldots, s\}$ *выполняется равенство*

$$x_\nu(p + N_\nu) = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, k, \tag{4.5}$$

то

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} x(p)\, \delta_{N_k}(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Доказательство. При $k = s$ согласно (2.5) и (4.5) имеем

$$x = x_s(0)\, g_s(0) = x_s(0)\, N^{-1},$$

т. е. $x(j) \equiv \mathrm{const}$. Этот факт можно записать в виде $x(j) = x(0)$, что соответствует (4.6).

Возьмем $k \in \{1, \ldots, s-1\}$. По лемме 4.2

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} x_k(p)\, g_k(p;\, j).$$

Воспользуемся тем, что в силу (2.6)

$$x_\nu(p) + x_\nu(p + N_\nu) = 2\, x_{\nu-1}(p)$$

при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, $\nu = 1, \ldots, k$. Учитывая (4.5), последовательно получаем

$$x_k(p) = 2\, x_{k-1}(p) = 2^2 x_{k-2}(p) = \cdots = 2^k x_0(p) = 2^k x(p).$$

Остается отметить, что $2^k g_k(p;\, j) = \delta_{N_k}(j-p)$.

Теорема доказана. ▲

Формула (4.6) означает, что сигнал $x(j)$ является N_k-периодическим. Для таких сигналов согласно (2.6) выполняется условие (4.5).

Приходим к следующему выводу: *сигнал* $x(j)$ *допускает представление* (4.6) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4.5).

Теоремы 4.1 и 4.2 можно отнести к числу широко известных *теорем об отсчетах.*

§5. Логарифмически автореверсные спектры

Нам потребуется перестановка *reverse*. Возьмем число $j \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\}$ и запишем его в виде $j = j_{\nu-1}2^{\nu-1} + j_{\nu-2}2^{\nu-2} + \ldots + j_0$, где $j_k \in \{0, 1\}$. Тогда по определению

$$\operatorname{rev}_\nu(j) = j_0 2^{\nu-1} + j_1 2^{\nu-2} + \ldots + j_{\nu-1}.$$

Лемма 5.1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{gathered}
\operatorname{rev}_1(p) = p, \quad p = 0, 1; \\
\operatorname{rev}_\nu(2l) = \operatorname{rev}_{\nu-1}(l), \\
\operatorname{rev}_\nu(2l+1) = 2^{\nu-1} + \operatorname{rev}_{\nu-1}(l), \\
l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 2, \ldots, s.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Доказательство. Равенство $\operatorname{rev}_1(p) = p$ при $p = 0, 1$ очевидно. Зафиксируем $\nu \in \{2, \ldots, s\}$. Для числа $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$ имеем

$$l = l_{\nu-2}2^{\nu-2} + l_{\nu-3}2^{\nu-3} + \ldots + l_0, \quad l_k \in \{0, 1\};$$

$$\begin{gathered}
\operatorname{rev}_{\nu-1}(l) = l_0 2^{\nu-2} + l_1 2^{\nu-3} + \ldots + l_{\nu-2}; \\
2l = l_{\nu-2}2^{\nu-1} + l_{\nu-3}2^{\nu-2} + \ldots + l_0 2, \\
\operatorname{rev}_\nu(2l) = l_0 2^{\nu-2} + l_1 2^{\nu-3} + \ldots + l_{\nu-2} = \operatorname{rev}_{\nu-1}(l), \\
\operatorname{rev}_\nu(2l+1) = 2^{\nu-1} + l_0 2^{\nu-2} + \ldots + l_{\nu-2} = 2^{\nu-1} + \operatorname{rev}_{\nu-1}(l).
\end{gathered}$$

Лемма доказана. ▲

Определение. Спектр $X = \big\{X(p)\big\}_{p=0}^{N-1}$ при $N = 2^s$ назовем *логарифмически автореверсным*, если

$$X(p + N_\nu) = X(\operatorname{rev}_{s-\nu}(p) + N_\nu), \tag{5.2}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

При $s = 1$ и $s = 2$ любой спектр по определению является логарифмически автореверсным. При $\nu = s - 1$ равенство (5.2) выполняется автоматически. При $s = 3$ условие (5.2) принимает вид $X(p+4) = X(\operatorname{rev}_2(p) + 4)$, $p = 0, 1, 2, 3$, что сводится к следующему: $X(5) = X(6)$.

Теорема 5.1. *Пусть X — логарифмически автореверсный спектр и $y = H_f^{-1}(X)$, $x = H_g^{-1}(X)$. Тогда*

$$y(j) = x\big(\operatorname{rev}_s(j)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.3}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что формулы (2.3) и (2.6) допускают обращение. Учитывая, что спектры сигналов x и y одинаковы, запишем

$$y_s(0) = x_s(0);$$

$$
\begin{gathered}
y_{\nu-1}\big(2p\Delta_\nu\big) = \tfrac{1}{2}[y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) + X(p+N_\nu)],\\
y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big) = \tfrac{1}{2}[y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) - X(p+N_\nu)],\\
p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \nu = s, s-1,\ldots,1;
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

$$
\begin{gathered}
x_{\nu-1}(p) = \tfrac{1}{2}[x_\nu(p) + X(p+N_\nu)],\\
x_{\nu-1}(p+N_\nu) = \tfrac{1}{2}[x_\nu(p) - X(p+N_\nu)],\\
p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \nu = s, s-1,\ldots,1.
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

Покажем, что при $\nu = s-1, s-2, \ldots, 0$ справедливо равенство

$$
y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) = x_\nu\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big), \quad p = 0,1,\ldots,N_\nu-1. \tag{5.6}
$$

При $\nu = 0$ придем к (5.3).

Пусть $\nu = s-1$. Согласно (5.4) и (5.5) имеем

$$
y_{s-1}(0) = x_{s-1}(0), \quad y_{s-1}(\Delta_s) = x_{s-1}(1),
$$

что соответствует (5.6). Сделаем индукционный переход от ν к $\nu-1$. На основании формул (5.4)–(5.6) и (5.2) при $p = 0,1,\ldots,N_\nu-1$ получаем

$$
\begin{gathered}
y_{\nu-1}\big((2p)\Delta_\nu\big) = \tfrac{1}{2}\big[x_\nu\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) + X\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)+N_\nu\big)\big] =\\
= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big).
\end{gathered}
$$

Поскольку $N_\nu = \Delta_{s-\nu+1}$, то согласно (5.1) $\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) = \mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p)$. Значит,

$$
y_{\nu-1}\big((2p)\Delta_\nu\big) = x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p)\big).
$$

Аналогично

$$
\begin{gathered}
y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big) = \tfrac{1}{2}\big[x_\nu\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) - X\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)+N_\nu\big)\big] =\\
= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)+N_\nu\big).
\end{gathered}
$$

Согласно (5.1) $\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) = \mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p+1) - 2^{s-\nu}$, поэтому

$$
y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big) = x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p+1)\big).
$$

Теорема доказана. ▲

Эта теорема в определенном смысле обратима.

Теорема 5.2. *Пусть x, y — сигналы, удовлетворяющие условию (5.3) и $H_f(y) = H_g(x) =: X$. Тогда спектр X является логарифмически автореверсным.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $s \geq 3$. Покажем, что и здесь выполняется равенство (5.6). При $\nu = 0$ это очевидно — (5.6) переходит в (5.3). Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν. Согласно (2.3), (2.6) и (5.1) при $p = 0,1,\ldots,N_\nu-1$ имеем

$$
y_\nu(p\Delta_{\nu+1}) = y_{\nu-1}(2p\Delta_\nu) + y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big) =
$$

$$= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p)\big) + x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p+1)\big) =$$

$$= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) + x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + N_\nu\big) = x_\nu\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big),$$

что и требовалось.

Теперь при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \nu = 1, \ldots, s-1$ получаем

$$X(p + N_\nu) = y_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = y_{\nu-1}(2p\Delta_\nu) - y_{\nu-1}\big((2p+1)\Delta_\nu\big) =$$

$$= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p)\big) - x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(2p+1)\big) =$$

$$= x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) - x_{\nu-1}\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + N_\nu\big) =$$

$$= x_\nu\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + N_\nu\big) = X\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p) + N_\nu\big).$$

Теорема доказана. ▲

В качестве примера рассмотрим максимально размытый спектр X^1, все компоненты которого равны 1. В таком случае формулы (5.5) примут вид

$$\begin{aligned} x^1_{\nu-1}(p) &= \tfrac{1}{2}[x^1_\nu(p) + 1], \\ x^1_{\nu-1}(p + N_\nu) &= \tfrac{1}{2}[x^1_\nu(p) - 1], \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

К этому нужно добавить, что $x^1_s(0) = 1$. Покажем, что

$$x^1_\nu(p) = 1 - p/\Delta_{s-\nu}, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = s-1, s-2, \ldots, 0. \tag{5.8}$$

При $\nu = s - 1$ равенство (5.8) следует из (5.7). Сделаем индукционный переход от ν к $\nu - 1$. При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ имеем

$$x^1_{\nu-1}(p) = \tfrac{1}{2}[1 - p/\Delta_{s-\nu} + 1] = 1 - p/\Delta_{s-\nu+1},$$

$$x^1_{\nu-1}(p + N_\nu) = -\tfrac{1}{2}p/\Delta_{s-\nu} = 1 - (p + N_\nu)/\Delta_{s-\nu+1}.$$

Формула (5.8) установлена.

При $\nu = 0$ получаем

$$x^1(p) = 1 - p/\Delta_s, \quad p = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Тем самым, определен сигнал x^1, такой, что $H_g(x^1) = X^1$. Поскольку спектр X^1 является логарифмически автореверсным, то по теореме 5.1 для сигнала $y^1 = H_f^{-1}(X^1)$ справедливо представление

$$y^1(p) = 1 - \mathrm{rev}_s(p)/\Delta_s, \quad p = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Непосредственно этот результат было бы получить нелегко.

Применение теоремы 5.1 приводит также к формуле

$$f_\nu(\Delta_\nu;\, j) = g_\nu\big(N_\nu;\, \mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное множество логарифмически автореверсных спектров и через $\dim \mathcal{L}_N$ — его размерность. Напомним, что $N = 2^s$.

Теорема 5.3. *Справедливо равенство*

$$\dim \mathcal{L}_N = 2^{s-1} + \bigl(2 + \tfrac{1+(-1)^s}{2}\bigr) 2^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1. \tag{5.9}$$

Доказательство. При $s = 1$ и $s = 2$ теорема верна. Пусть $s \geq 3$ и $\nu \in \{2, \ldots, s-1\}$. Обозначим через σ_ν количество тех $p \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\}$, для которых $\operatorname{rev}_\nu(p) = p$. Очевидно, что $\sigma_{2k} = 2^k$, $\sigma_{2k+1} = 2^{k+1}$, т. е. $\sigma_\nu = 2^{\lfloor (\nu+1)/2 \rfloor}$.

Условия

$$X(p + N_{s-\nu}) - X(\operatorname{rev}_\nu(p) + N_{s-\nu}) = 0$$

представляют собой линейную однородную систему, состоящую из $1/2 \sum\limits_{\nu=2}^{s-1} (2^\nu - \sigma_\nu)$ уравнений с линейно независимыми строками коэффициентов. Поэтому

$$\dim \mathcal{L}_N = 2^s - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{s-1} (2^\nu - \sigma_\nu) = 2^s - \sum_{\nu=1}^{s-2} (2^\nu - 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor}).$$

При $s = 2l + 1$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = \sum_{k=0}^{l-1} 2^{\lfloor (2k+1)/2 \rfloor} + \sum_{k=1}^{l-1} 2^{\lfloor (2k)/2 \rfloor} = 2 \sum_{k=0}^{l-1} 2^k - 1 = 2^{l+1} - 3.$$

В этом случае

$$\dim \mathcal{L}_N = 2^s - (2^{s-1} - 2) + (2 \cdot 2^l - 3) = 2^{s-1} + 2 \cdot 2^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} - 1,$$

что соответствует (5.9). При $s = 2l + 2$

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = (2^{l+1} - 3) + 2^l = 3 \cdot 2^l - 3.$$

Поскольку $l = \lfloor (s-1)/2 \rfloor$, то

$$\dim \mathcal{L}_N = 2^{s-1} + 3 \cdot 2^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} - 1,$$

что также соответствует (5.9). Теорема доказана. ▲

В табл. приведены значения $\dim \mathcal{L}_N$ при некоторых $N = 2^s$.

Таблица

N	2	4	8	16	32	64	128
$\dim \mathcal{L}_N$	2	4	7	13	23	43	79

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.

2. *Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А.* Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений // Пробл. передачи инф. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.

3. *Малозёмов В. Н., Третьяков А. А.* Алгоритм Кули—Тьюки и дискретное преобразование Хаара // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 31–34.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

V. N. Malozemov and S. M. Masharsky
COMPARATIVE STUDY OF TWO WAVELET BASES