УДК 513.88
Р е й н о в О. И. **О непрерывности шкал некоторых операторных идеалов. I.** — Математические заметки

Исследуется вопрос о непрерывности p-абсолютно суммирующих и p-ядерных норм в соответствующих шкалах банаховых операторных идеалов. Библиогр. 16 назв.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ШКАЛ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ИДЕАЛОВ. I.

О.И.Рейнов.

Исследуется вопрос о непрерывности p-абсолютно суммирующих и p-ядерных норм в соответствующих шкалах банаховых операторных идеалов.

Общая постановка задач, рассматриваемых в заметке, выглядит примерно так. Пусть у нас имеется семейство непрерывно вложенных друг в друга нормированных операторных идеалов (или некоторых пространств операторов, действующих в фиксированных банаховых пространствах):

$$J_\alpha \subset J_\beta,\ \alpha \le \beta\ \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Обозначим нормы в этих идеалах через $\|\cdot\|_\alpha$ и зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ и некоторый непрерывный оператор $T : X \to Y$, действующий в банаховых пространствах (он может принадлежать или не принадлежать компоненте $J_\gamma(X,Y)$ идеала J_γ). Мы говорим, что функция u, определяемая равенством $u(\alpha) := \|T\|_\alpha$, *непрерывна в точке* γ, если из неравенства $u(\gamma) < +\infty$ вытекает соотношение $u(\alpha) \to u(\gamma)$ при $\alpha \to \gamma$, и *строго непрерывна*, если то же самое справедливо и при $u(\gamma) = +\infty$. Верно ли, что функция u непрерывна в точке γ (справа, слева), либо — какие условия, близкие к необходимым и достаточным, надо наложить на идеалы, на γ, на банаховы пространства, в которых задан оператор, чтобы эта функция была непрерывной? строго непрерывной?

В этих заметках мы всесторонне исследуем этот вопрос для таких операторных идеалов, как идеалы p-абсолютно суммирующих и p-ядерных операторов, а также рассмотрим решение аналогичной задачи для некоторых типов семейств нормированных тензорных произведений банаховых пространств (во второй части заметок).

†Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36).

‡Ключевые слова и фразы: p-абсолютно суммирующие, p-ядерные операторы, свойства аппроксимации, тензорные произведения.

§1. Определения и предварительные факты

Все рассматриваемые нами пространства X, Y, $Z, \dots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \dots$, $x' \in X^*$, $y'' \in Y^{**}, \dots$.

Через $\mathrm{L}\,(X,Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой (вообще, в данной работе под термином "оператор" всегда будет пониматься линейный непрерывный оператор).

Мы используем стандартные обозначения из теории операторных идеалов — Π_p, QN_p, N_p, I_p — определения этих классов приводятся ниже (классический справочник по операторным идеалам — [1]; отметим, однако, что мы придерживаемся обозначений, отличающихся от принятых в [1]).

Пусть $p \in (0,\infty]$. Оператор T, действующий из X в Y, называется *абсолютно p-суммирующим,* если существуют такая постоянная $C>0$, что для любого конечного набора и $\{x_n\}_{n=1}^M \subset X$ выполняется соотношение

$$(1.1)\qquad \left(\sum_{n=1}^M \|Tx_n\|^p\right)^{1/p} \le C \sup_{\|x,\|\le 1} \left(\sum_{n=1}^M |< x_n,\, x >|^p\right)^{1/p}$$

(в случае, когда $p=+\infty$, (1.1) переписывается так: $\|Tx\| \le C\,\|x\|,\ x\in X$, т.е. абсолютно ∞-суммирующие операторы — это просто все ограниченные линейные отображения). Наименьшая из констант $C>0$, удовлетворяющая указанному условию (такая всегда существует, если оператор абсолютно p-суммирующий) обозначается через $\pi_p(T)$. Если оператор T не является абсолютно p-суммирующим, то удобно положить $\pi_p(T)=+\infty$.

Множество $\Pi_p(X,Y)$ всех абсолютно p-суммирующих операторов из X в Y при $p>0$ является линейным пространством, а при $p\ge 1$ — банаховым пространством с нормой π_p. Более того, в последнем случае класс Π_p всех абсолютно p-суммирующих операторов является банаховым операторным идеалом (в смысле А.Пича [1]). Отметим, что для показателей $p,q\in(0,+\infty], p<q$, имеет место включение $\Pi_p\subset\Pi_q$, причем $\pi_q\le\pi_p$.

Оператор $T: X\to Y$ является *квази-p-ядерным,* $T\in \mathrm{QN}_p$, если для некоторого изометрического вложения $i: Y\to L_\infty(\nu)$ суперпозиция iT принадлежит пространству $\Pi\,_p(X, L_\infty(\nu))$. Квазинорма (норма при $p\ge 1$) в $T\in\mathrm{QN}_p$ индуцируется из пространства $\Pi\,_p(X, L_\infty(\nu))$.

Для $p\in[1,\infty]$ оператор T, действующий из X в Y, называется *p-ядерным,* если его можно представить в следующем виде:

$$(1.2) \qquad Tx = \sum_{k=1}^{\infty} < x, x'_k, > y_k \qquad \text{для } x \in X,$$

где последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ таковы, что конечна величина

$$(1.3) \qquad a := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x'_k\|^p\right)^{1/p} \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty} | < y_k, y' > |^{p'}\right)^{1/p'} : \ y' \in Y^*, \ \|y'\| \le 1\right\}$$

(напомним, что через p' мы обозначаем сопряженный к p показатель; в случае, когда один из показателей p, p' бесконечен, правую часть соотношения (1.3) надо понимать надлежащим образом). Множество всех p-ядерных операторов из X в Y обозначается через $\mathrm{N}_p\,(X, Y)$, а точная нижняя грань $\inf a$, где инфимум берется по всем представлениям вида (1.2) оператора T, — через $\nu_p\,(T)$. Для любого $p \ge 1$ класс N_p всех p-ядерных операторов является банаховым операторным идеалом [1]; при фиксированных пространствах X, Y $\mathrm{N}_p\,(X, Y)$, — банахово пространство с нормой ν_p. Отметим, что для показателей $p, q \in [1, +\infty], p < q$, имеет место включение $\mathrm{N}_p \subset \mathrm{N}_q$ с соответствующим неравенством для норм.

Через $\mathrm{I}_p\,(X, Y)$, где $p \in [1, +\infty]$, обозначается банахово пространство всех *p-интегральных (в смысле А.Пича)* отображений из X в Y. Оператор $T \in \mathrm{I}_p\,(X, Y)$, если он допускает факторизацию вида

$$(1.4) \qquad X \xrightarrow{\ A\ } C(K) \xrightarrow{\ j\ } L_p(K, \mu) \xrightarrow{\ B\ } Y,$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и $\|A\|$, $\|B\|$ — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}_p\,(X, Y)$ вводится следующим образом:

$$i_p(T) = \inf\ \|A\|\,\|B\|.$$

Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $T \in \mathrm{I}_p(X, Y^{**})$ (мы отождествляем каноническим образом Y с подпространством в Y^{**}), то мы говорим, что оператор T является *p-интегральным по Гротендику.* Пространство всех p-интегральных по Гротендику операторов из X в Y (с индуцированной из $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$ нормой i_p^{Gr}) мы обозначаем через $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}\,(X, Y)$.

Алгебраическое тензорное произведение $X \otimes Y$ банаховых пространств X, Y мы естественным образом рассматриваем как множество всех конечномерных операторов из X^* в Y (или из Y^* в X), *weak*-to-weak* непрерывных; в частности, $X^* \otimes Y$ — все конечномерные операторы из X в Y.

На тензорном произведении $X \otimes Y$ мы будем рассматривать ряд тензорных норм, некоторые из которых индуцируются соответствующими пространствами операторов, а некоторые — наоборот сами индуцируют операторные нормы (все эти нормы, с другими обозначениями, впервые, видимо, рассматривались в работе [11]; там же введены и некоторые аппроксимационные условия "порядка p", налагаемые на банаховы пространства и связанные, в частности с аппроксимацией абсолютно p-суммирующих операторов конечномерными; подобного рода условия появятся и у нас ниже).

p-проективная тензорная норма $||\cdot||_p$ для $p \in [1, +\infty]$ определяется на произведении $X \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X \otimes Y$, то

$$(1.5) \qquad ||z||_p := \inf \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \le 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} | < y_k, y' > |^{p'} \right)^{1/p'} \right\}$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes y_k$ (формально, формула (1.5) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$; в случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ в этом определении нужно произвести соответствующие тривиальные изменения, на которых мы не останавливаемся).

Алгебраическое тензорное произведение пространств X и Y, снабженное нормой $|| \cdot ||_p$, будет обозначаться через $X \otimes_p Y$, а его пополнение — через $X \widehat{\otimes}_p Y$ (в случае $p = 1$ мы получаем проективное тензорное произведение, введенное и детально изученное А.Гротендиком [3], и играющее огромную роль, в частности, в теории ядерных пространств и теории аппроксимации линейных операторов).

Нетрудно заметить, что с ростом показателя p тензорные произведения $X \widehat{\otimes}_p Y$, вообще говоря, "увеличиваются" (кавычки здесь поставлены преднамеренно; проясняет ситуацию следующее замечание).

Замечание 1.1. Каноническое отображение $X \otimes_p Y \to \mathrm{L}\,(X^*, Y)$ естественным образом продолжается по непрерывности до оператора из $X \widehat{\otimes}_p Y$ в $\mathrm{L}\,(X^*, Y)$ (который мы также будем называть каноническим). При этом продолжении, как известно (см., например, [1], стр.143 и далее, и [4, 5, 6]), может произойти "склеивание" различных тензорных элементов, превращающее их в один и тот же оператор. Такая факторизация никогда не происходит лишь в случае $p = 2$. Поэтому, например, естественное отображение $X \widehat{\otimes}_1 Y \to X \widehat{\otimes}_2 Y$ вполне может быть "фактороотображением" с нетривиальным ядром; так что не совсем корректно утверждать, что пространство $X \widehat{\otimes}_2 Y$ больше, чем $X \widehat{\otimes}_1 Y$.

Каждый тензорный элемент $z \in X \widehat{\otimes}_p Y$ естественным образом порождает $p-$ядерный оператор из X^* в Y, который мы будем обозначать через $\tilde{z}$ (в случае, когда пространство X сопряжено, т.е. когда $X = W^*$ для некоторого банахова пространства W, оператор $\tilde{z}$ будет рассматриваться нами, как оператор из W в Y, что, конечно же, не приведет к недоразумению).

Ниже нам будет полезно также следующее

Замечание 1.2. Если $T \in \Pi_p(X, Y)$, то при различных оценках величины $\pi_p(T)$ всегда можно считать, что пространства X и Y сепарабельны. Действительно, из соотношения (1.1) ясно, что для вычисления $\pi_p(T)$ достаточно рассмотреть лишь подходящие не более чем счетные наборы $\{x_n\} \subset X$ и $\{x'_n\} \subset X^*$; поэтому, если заменить пространства X, Y соответственно на пространства X_0, Y_0, где $X_0 = \overline{span}\{x_n\}$, $Y_0 = \overline{span}\{Tx_n\}$, то величины $\pi_p(T)$ и $\pi_p(T|_{X_0})$ будут равны между собой.

Аналогично обстоит дело с p-ядерными нормами. Для пояснения этого, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и некоторый p-ядерный оператор T (для определенности будем считать, что p — конечное число).

Из соотношения (1.2) и определения нормы ν_p вытекает, что найдутся такие счетные множества $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, что оператор T может быть представлен в виде (1.2) с элементами $\{x'_n\}$ и $\{y_n\}$ и $\inf a$ (см. (1.3)) может быть вычислен с точностью до ε на этих семействах.

Пусть $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая положительная числовая последовательность, что $c_n \to 0$ и $\sum c_n^{-p} \, ||x'_n||^p \le (1+\varepsilon)^p \sum ||x'_n||^p$. Обозначим через B сильно замкнутую абсолютно выпуклую оболочку в пространстве X^* множества $\{\tilde{x}'_n\}$ где $\tilde{x}'_n := c_n ||x'_n||^{-1} \, x'_n$ для $n = 1, 2, \dots$ (по выбору числовой последовательности $\{c_n\}$, это сильно компактное подмножество в X^*; см., например, [ШЕФЕР], стр.88), и пусть X^*_B — банахово пространство с единичным шаром B, естественным образом ассоциированное с парой (X^*, B). Как хорошо известно (см.,например,[ШЕФЕР], стр.150, упр.3), это пространство сопряжено к некоторому сепарабельному (в силу компактности B) банахову пространству X_0, причем оператор тождественного вложения $X^*_B \to X^*$ является сопряженным к каноническому отображению Φ из X в X_0. Если обозначить еще через Y_0 подпространство в Y, порожденное семейством $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, то, очевидно, наш оператор T допускает факторизацию $T = jT_0\Phi$, где $j : Y_0 \to Y$ — тождественное вложение, а $T_0 : X_0 \to Y_0$ — оператор, индуцированный отображением T, т.е. $T_0(x_0) = \sum c_k^{-1} ||x'_k|| \, \langle x_0, \tilde{x}'_k, \rangle \; y_k$ для $x_0 \in X_0$.

Нетрудно видеть, что, по выбору последовательности $\{c_n\}$, оператор T_0 является p-ядерным и, более того, $\nu_p(T) \le \nu_p(T_0) \le (1+\varepsilon)\,(\nu_p(T) + \varepsilon)$.

В силу произвольности числа ε, для оценок ν_p-нормы T достаточно оценить (сверху или снизу) ν_p-норму оператора T_0, то есть и в случае p-ядерного оператора можно рассматривать T как оператор, действующий в сепарабельных банаховых пространствах.

Конечно, аналогичные замечания можно сделать и для случаев, когда мы интересуемся равномерными оценками π_p- или ν_p-норм не более чем счетного числа операторов в банаховых пространствах.

Наконец, через $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ мы обозначаем замыкание множества конечномерных операторов (или подпространства $Y^*\otimes X$) в пространстве $\Pi_p(Y,X)$. Отметим, что сопряженное к $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ пространство совпадает с $\mathrm{I}'_p(X,Y^{**})$, причем двойственность определяется стандартным образом при помощи следа суперпозиции соответствующих операторов.

Другие факты из теории операторных идеалов, используемые нами без всяких ссылок, можно найти в цитированной выше литературе.

Пусть $C\geq 1$, $p\in[1,+\infty]$. Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* AP_p *аппроксимации порядка* p (коротко — $Y\in\mathrm{AP}_p$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y\to\mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^*\widehat{\otimes}_p Y=\mathrm{N}_p(X,Y)$). Пространство Y *обладает свойством* C-MAP_p, $Y\in C$-MAP_p, если для любого X естественное отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y\to\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C. Наконец, Y *имеет свойство* BAP_p (соответственно, *свойство* MAP_p), если оно обладает свойством C-MAP_p для некоторого числа $C\geq 1$ (соответственно, свойством 1-MAP_p).

Если $p=1$, то мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, C-MAP, BAP, MAP.

В дальнейшем без дополнительных ссылок мы будем использовать следующие хорошо известные (и простые) факты: (1) Каждое банахово пространство обладает свойством MAP_2; (2) для всякого $p\in[1,+\infty]$ $\mathrm{AP}\Rightarrow\mathrm{AP}_p$; (3) для всякого $p\in[1,+\infty]$ $\mathrm{MAP}\Rightarrow\mathrm{MAP}_p$; (4) если $X^*\in AP$, то $X\in AP$.

Следующее утверждение было анонсировано в [5, теорема 4.2]; равносильное ему предложение было установлено в работе [8, леммы 7-8]. Мы дадим здесь (в частности, для полноты изложения) непосредственное его доказательство, основанное на определениях аппроксимационных свойств порядка p, приведенных выше.

Предложение 1.1. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что* *существует непрерывный проектор* $P : Y^{**} \to Y$. *Тогда для всякого* $p \in (1, +\infty)$ *из того,что* Y *обладает свойством* AP_p *вытекает условие* $Y \in \|P\|\text{-}\mathrm{MAP}_p$. *В частности, если пространство* Y *сопряжено, то условия* $Y \in \mathrm{AP}_p$ *и* $Y \in \mathrm{MAP}_p$ *эквивалентны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $Y \in \mathrm{AP}_p$, и рассмотрим элемент $z = \tilde{z} \in X^* \widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X, Y)$. Мы зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ и покажем, что

$$(1.6) \qquad \nu_p(z) \leq \|P\| \, i_p^{\mathrm{Gr}}(z) + \varepsilon$$

(ясно, что из соотношения (1.6) вытекает утверждение нашей леммы).

Пусть U — такой абсолютно p'-суммирующий оператор из Y в X^{**}, что $\pi(U) < 1$ и $\operatorname{trace} Uz \geq \nu_p(z) - \varepsilon$. Если $z = \sum x'_n \otimes y_n$ — какое-либо p-ядерное представление оператора z, то последнее неравенство означает, что $\operatorname{trace} Uz = \sum \langle x'_n, Uy_n \rangle \geq \nu_p(z) - \varepsilon$.

Суперпозиция операторов U и z допускает следующую факторизацию:

$$(1.7) \qquad X \xrightarrow{\ z\ } Y \xrightarrow{\ A\ } Y_0 \xrightarrow{\ j\ } Y_{p'} \xrightarrow{\ B\ } X^{**}$$

где все операторы непрерывны, причем $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$, $\pi_{p'}(j) \leq 1$ и $Y_{p'}$ — подпространство в некотором *рефлексивном* пространстве $\mathrm{L}_{p'}(\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} Uz &= \sum \langle x'_n, BjAy_n \rangle = \\ &= \sum \langle B^* x'_n, jAy_n \rangle \qquad \text{(мы отождествляем } x'_n \text{ с элементами из } X^{***}\text{)} \\ &= \operatorname{trace} jA \circ w, \end{aligned}$$

где $w = z \circ B$, а точнее, $w = \sum B^* x'_n \otimes y_n \in Y^*_{p'} \widehat{\otimes}_p Y$.

Так как пространство $Y_{p'}$ рефлексивно, то $\mathrm{I}_p(Y_{p'}, Y) = \mathrm{N}_p(Y_{p'}, Y)$ (вместе с равенством норм; см., например, [9]. Поэтому

$$\begin{aligned} (1.8) \quad \nu_p(z) - \varepsilon \,\leq\, \operatorname{trace} Uz \,=\, \operatorname{trace} iA \circ w \,\leq\, \nu_p(w)\, \pi_{p'}(jA) \,\leq \\ \leq\, i_p(w) \,=\, i_p(P\pi w) \,\leq\, \|B\|\, \|P\|\, i_p^{\mathrm{Gr}}(z) \,\leq\, \|P\|\, i_p^{\mathrm{Gr}}(z), \end{aligned}$$

что и дает нам неравенство (1.6). $\square$

Замечание 1.3. Насколько нам известно, вопрос о том, справедливо ли утверждение леммы в случае $p = 1$, по-прежнему открыт (см. также замечание в самом конце работы [5]). Основная теорема в этом случае, по-существу, принадлежит А.Гротендику (см. [3], [10, стр. 246-247]): если сопряженное пространство обладает свойством Радона-Никодима и удовлетворяет условию аппроксимации, то оно удовлетворяет и условию метрической аппроксимации (некоторое ее обобщение можно найти, например, в работе [11]). Неясно также, что будет в случае $p = +\infty$. Мы можем здесь получить лишь такой аналог упомянутой теоремы А.Гротендика:

Предложение 1.2. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P : Y^{**} \to Y$. Тогда если Y^* обладает свойством Радона-Никодима и Y удовлетворяет условию AP_∞, то $Y \in \|P\|$-MAP_∞. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_\infty$ и $Y \in \mathrm{MAP}_\infty$ эквивалентны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В проведенном выше доказательстве предложения 1.1 теперь $p' = 1$, $Y_{p'} = Y_1$ — подпространство некоторого пространства $L^1(\mu)$, что и мешает дальнейшему проведению аналогичных рассуждений. Но однако, выручает предположение о наличии в Y^* свойства Радона-Никодима.

Действительно, из [11] (см. также [12, теорема 1.1] вытекает, в частности, что оператор U, обязательно будет квази-1-ядерным, и, следовательно, можно считать, что оператор B в факторизации (1.7) компактен (см., например, [1, 19.2.6, стр.311, Предложение]; к сожалению там несколько громоздкие обозначения).

Поэтому для любого положительного ε суперпозиция операторов U и z допускает факторизацию следующего вида:

(1.9)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "z_1"'] & Y \arrow[r, "A"] & Y_0 \arrow[r, "j"] & Y_1 \arrow[r, "B"] & X^{**} \\ & l^\infty \arrow[u, "z_2"'] & & & \end{tikzcd}$$

где B — компактный оператор, а z_1, z_2 — такие непрерывные операторы, что $||z_1|| \leq 1$, $i_\infty(z_2) \leq i_\infty(z) + \varepsilon$ (по поводу левой факторизации в диаграмме см. [1, 19.3.9, стр.314]). Но тогда оператор $z_1 \circ B$ (напомним, что образ $z_1^{**}(X^{**})$ содержится в l^∞ в силу компактности оператора z_1) аппроксимируется конечномерными по обычной операторной норме и, следовательно, для суперпозиции $w = z \circ B = z_2(z_1 \circ B)$ имеют место неравенства $\nu_\infty(w) \leq i_\infty(z_2)\,||z_1 \circ B|| \leq i_\infty(z) + \varepsilon$. Поэтому в неравенстве (1.8) при $p = +\infty$ получаем окончательно: $\nu_\infty(z) - \varepsilon \leq ||P||\left(i_\infty^{\mathrm{Gr}}(z) + \varepsilon\right)$ (можно было также при оценке нормы $\nu_\infty(w)$ использовать [1, 19.1.9, лемма 1, стр. 304]). $\square$

Замечание 1.4. Для любого $p \in [1, +\infty], p \neq 2$, существуют банаховы пространства со свойством AP_p, не обладающие свойством $C - \mathrm{MAP}_p$ ни при каком $C \geq 1$ [13],[4].

Предложение 1.3. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что либо X^*, либо Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика, и пусть $p \in [1, +\infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если $T \in \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательствами теорем 2 из [14] и [3, глава 1, стр. 36], и мы не будем останавливаться на нем сейчас. ■

Замечание 1.5. На самом деле, аппроксимационные условия, накладываемые в предложении 1.3 на пространства X^* или Y^{***}, можно ослабить. Чтобы сформулировать это более сильное утверждение, нам пришлось бы ввести еще несколько определений аппроксимационных свойств банаховых пространств, что, в силу ограниченности объема статьи, мы в данной заметке делать не будем.

Следствие 1.1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, и пусть X, Y — такие банаховы пространства, что X^* обладает свойством Радона –Никодима и одно из пространств X^* или Y^{***} удовлетворяет условию аппроксимации Гротендика. Тогда $\mathrm{I}_p(X, Y) = \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y) = \mathrm{N}_p(X, Y)$. Более общо, если $U : Z \to X$ такой оператор из некоторого банахова пространства Z в X, что U^* является оператором Радона–Никодима* (см. [11]), *и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, то для любых $p \in [1, +\infty)$ и $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ имеет место включение $TU \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.* ■

Замечание 1.6. Аппроксимационные условия, накладываемые на рассматриваемые в последних двух утверждениях пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (см. ниже §4).

S2. Непрерывность π_p- и ν_p-норм

Лемма 2.1. *Если X, Y — банаховы пространства, T — конечномерный оператор из X в Y, и $1 \le r \le +\infty$, то $\lim_{s \to r} \pi_s(T) = \pi_r(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $1 \le r < +\infty$.

Так как T — конечномерный квази-r-ядерный оператор, то найдется такой конечный набор $\{x'_n\}_{n=1}^M$, элементов пространства X^*, что

$$\left(\sum_{n=1}^{M} \|x'_n\|^r \right)^{1/r} \le 1, \tag{2.1}$$

и для любого $x \in X$

$$\|Tx\| \le (1+\varepsilon)\, \pi_r(T) \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^r \right)^{1/r}. \tag{2.2}$$

Если $1 \leq s < r$, то

$$(2.3) \qquad \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\, M^{1/s-1/r}\, \pi_r\,(T) \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s \right)^{1/s}, \quad \forall x \in X;$$

так что, вместе с (2.3), (2.1) влечет соотношение $\pi_s\,(T) \leq M^{1/s-1/r}\, \pi_r\,(T)$, если $1 \leq s \leq r$.

Если же $1 \leq r \leq s$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^r \right)^{1/r} \leq M^{1/r-1/s} \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s \right)^{1/s}$$

откуда, используя (2.1) и (2.2), получаем

$$\|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\, M^{1/r-1/s}\, \pi_r\,(T) \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s \right)^{1/s}$$

и $\pi_r\,(T) \leq M^{1/r-1/s}\, \pi_s\,(T)$.

Таким образом, для всякого $s \in [1,\, +\infty)$

$$M^{-|1/r-1/s|}\, \pi_s\,(T) \leq \pi_r\,(T) \leq M^{|1/r-1/s|}\, \pi_s\,(T).$$

В случае, когда $r = +\infty$, $\pi_r\,(T) = \|T\| \leq \pi_s\,(T)$ для любого $s > 0$. Если $\{x'_n\}_{n=1}^{M}$ — такой конечный набор элементов единичного шара пространства X^*, что для каждого $x \in X \quad \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\, \|T\|\, \sup_n |< x,\, x'_n >|$, то

$$\|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\, \|T\| \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s \right)^{1/s}$$

для $x \in X$, причем $\left(\sum_{n=1}^{M} \|x'_n\|^s \right)^{1/s} \leq M^{1/s}$. Поэтому $\pi_\infty\,(T) \geq M^{-1/s}\, \pi_s(T)$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $r \in [1, +\infty)$ и $T \in \Pi_s(X, Y)$ для всех $s, s > r$. Тогда $\lim_{s \to r+0} \pi_s\,(T) = \pi_r(T)$. В частности, если все нормы $\pi_s\,(T)$ при $s > r$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \Pi_r(X, Y)$ и $\pi_r(T) \leq C$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось выше, при доказательстве нашей леммы мы можем считать, что пространства X и Y сепарабельны (надо применить замечание 1.2 к не более чем счетному семейству $\{\pi_{s_n}\,(T)\} \bigcup \{\pi_r(T)\}$, где

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фиксированная последовательность, сходящаяся к r справа). Как хорошо известно, всякое сепарабельное банахово пространство (в частности, Y) изометрически вкладывается в некоторое сепарабельное пространство $C(K)$, даже в пространство $C[0,1]$ (теорема Банаха-Мазура; см., например, [15], СТР.172). Поэтому, в силу инъективности идеалов Π_p, можно предполагать, что в качестве пространства Y рассматривается пространство $C[0,1]$. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность проекторов единичной нормы в $C[0,1]$, сходящаяся поточечно к тождественному оператору (можно взять семейство проекторов в $C[0,1]$, порожденное каким-нибудь стандартным базисом Шаудера, например, системой Фабера-Шаудера [16, стр.217]). Положим $R_k = P_k T$, и пусть $\pi = \lim_{s\to r+} \pi_s(T)$ (напомним, что $\pi_s(T)$ как функция аргумента s убывает на $(r, r+\varepsilon)$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$). Мы можем, очевидно, считать, что $\pi < +\infty$ (см. ниже замечание 2.2). Так как для любых $k = 1, 2, \dots$ и $s > r$ $\pi_s(R_k) \le \pi_s(T) \le \pi$, то, с одной стороны, по лемме 2.1, $\pi_p(R_k) = \lim_{s\to r+} \pi_s(R_k)$ и, следовательно, $\pi_p(R_k) \le \pi$, а с другой стороны, поскольку последовательность $\{R_k\}$ сходится поточечно к оператору T, $\pi_p(T) \le \sup_k \pi_p(R_k)$ (см., например, [12, лемма 3.1]). Таким образом, окончательно получаем, что $\pi = \lim_{s\to r+} \pi_s(T) \le \pi_r(T) \le \sup_k \pi_p(R_k) \le \pi$. $\square$

Замечание 2.2. Если при каком-то $s > r$ $\pi_s(T) = +\infty$, то тем более $\pi_r(T) = +\infty$, и заключение леммы становится тривиальным. Заключение леммы также тривиально в случае, когда все $\pi_s(T), s > r$, конечны, но $\lim_{s\to r+} \pi_s(T) = +\infty$, так как тогда $\pi_s(T) \le \pi_r(T)$.

Лемма 2.3. *Если X, Y — банаховы пространства, $p \in (1, +\infty]$ и T — q-ядерный оператор из X в Y для некоторого $q \in [1, +\infty)$, $q < p$, то $\lim_{q\to p-0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.*

Доказательство. Ниже мы будем рассматривать только те показатели q, которые меньше, чем p, и для которых оператор T является q-ядерным. В этих случаях всегда будет выполняться неравенство $\nu_p(T) \le \nu_q(T)$.

Так как функция $\nu_q(T)$ убывает на любом достаточно малом интервале $(p-\varepsilon, p,)\, \varepsilon > 0$, то существует конечный предел $\lim_{q\to p-} \nu_q(T)$, который не меньше, чем $\nu_p(T)$. Ясно, что случай нулевого оператора T можно отбросить и считать для простоты, что указанный предел равен 1.

Пусть q_1 таково, что при всех $q \in (q_1, p)$ $\quad \nu_q(T) > 1-\varepsilon$. Сопряженное пространство G_q к пространству $N_q(X, Y)$ есть некоторое подпространство в пространстве $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$; поэтому для всякого $q \in (q_1, p)$ найдется такой абсолютно q'-суммирующий оператор U_q, что $\pi_{q'}(U_q) \le 1$ и trace $U_q T > 1-\varepsilon$.

Для каждого $q \in (q_1, p)$ семейство $\{U_s\}_{s \geq q}$ лежит в единичном шаре пространства G_q (и с ростом показателя q уменьшается). Рассмотрим *-слабое замыкание $A_q = \overline{\{U_s\}_{s \geq q}}^{\,*}$ этого семейства в G_q (или, что то же самое, в пространстве $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$). Если фиксировать показатель $q \in (q_1, p)$, то для любых $s', s'' \in (q, p)$, $s' < s''$ $\quad A_{s''} \subset A_{s'} \subset A_q$, причем эти семейства являются *-слабо компактными подмножествами *-слабо компактного единичного шара пространства G_q, лежащего в $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$. Поэтому множество $\widetilde{A}_q := \bigcap_{p \leq s \leq q} A_s$ не пусто, а так как множества A_s убывают с приближением s к p, то $\widetilde{A}_q$ не зависит от q, что позволяет нам обозначить $\widetilde{A}_q$ просто через $\widetilde{A}$. Непустое множество $\widetilde{A}$ лежит в единичных шарах всех пространств G_q при $q \in (q_1, p)$. Поэтому, если рассмотреть какую-либо его предельную точку U, то U будет также и предельной точкой любого семейства $\{U_s\}_{s \geq q}$ $\; q \in (q_1, p)$ с $\pi_{q'}$-нормой $\pi_{q'}(U) \leq 1$. Следовательно, с одной стороны, $\operatorname{trace} UT \geq 1 - \varepsilon$, а с другой стороны, по лемме 2.2, $\pi_{p'}(U) \leq 1$.

Резюмируя все сказанное, мы получаем:

$$1 - \varepsilon \leq \operatorname{trace} UT \leq \nu_p(T)\pi_{p'}(U) \leq \nu_p(T) \leq 1.$$

В силу произвольности положительного числа ε, $\nu_p(T) = 1$ и, таким образом $\nu_p(T) = \lim_{q \to p-} \nu_q(T)$ $\qquad \square$

Замечание 2.3. Предположение о q-ядерности оператора T при некотором показателе, меньшем p, существенно. Диагональный оператор $\Delta : l^\infty \to l^p$, $p > 1$, с диагональю из $l^p \setminus \cup_{q<p} l^q$ является p-ядерным, но не будет q-ядерным ни при каком $q < p$ (это совсем просто; см. [1], стр. 290, 18.2.4).

Лемма 2.4. *Если* $p \in (0, +\infty]$ *и* $T \in \Pi_{p-\delta}(X, Y)$ *для некоторого* $\delta > 0$, *то*

$$\lim_{q \to p-0} \pi_q(T) = \pi_p(T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q_0 < p$ таково, что $T \in \Pi_{q_0}(X, Y)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим конечномерное подпространство E в X, для которого

$$\pi_{q_0}(T) \leq \pi_{q_0}(T|_E) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \pi_p(T) \leq \pi_p(T|_E) + \varepsilon$$

(это возможно по определению абсолютно r-суммирующих операторов и норм π_r). По лемме 2.1 найдется такой показатель $q_1 \in (q_0, p)$, что при всех $q \in (q_1, p)$ $\quad |\pi_p(T|_E) - \pi_q(T|_E)| < \varepsilon$, откуда получаем (при $q \in (q_1, p)$):

$$|\pi_p(T) - \pi_q(T)| \leq |\pi_p(T) - \pi_p(T|_E)| + \\ + |\pi_p(T|_E) - \pi_q(T|_E)| + |\pi_q(T|_E) - \pi_q(T)| \leq 3\varepsilon. \qquad \square$$

Замечание 2.4. Предположение о принадлежности оператора T классу Π_q при некотором показателе q, меньшем p, существенно. Оператор тождественного вложения $\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}^p[0,1]$ является абсолютно p-суммирующим, но не будет абсолютно q-суммирующим ни при каком $q < p$ (см. [1], стр. 270, 17.3.9).

Лемма 2.5. *Пусть $C \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$, X, Y — банаховы пространства и T — оператор из X в Y, для которого выполняется следующее условие:*

$$\nu_p(T) \leq C \sup\{\operatorname{trace} UT : U \in Y^* \otimes X^{**},\, \pi_{p'}(U) \leq 1\} \tag{2.4}$$

(оба выражения в (2.4), могут принимать и бесконечные значения). Тогда

$$\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) \geq C^{-1} \nu_p(T).$$

В частности, если $C = 1$, (т.е. если норма $\nu_p(T)$ равна supremum'у из соотношения (2.4)), то $\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_p(T) = +\infty$. Если мы зафиксируем произвольную положительную постоянную a, то, в силу соотношения (2.4), найдется такой конечномерный оператор $U : Y \to X^{**}$, что $\operatorname{trace} UT > a$ и $\pi_{p'}(U) \leq 1$. Если M — натуральное число из доказательства леммы 2.1 (в котором вместо T рассматривается оператор U), то при $q > p$ имеет место неравенство $\pi_{q'}(U) \leq M^{1/p-1/q} \pi_{p'}(U) \leq M^{1/p-1/q}$ (см. доказательство леммы 2.1). Поэтому для q, достаточно близких к p (например, таких, что $M^{1/p-1/q} < 2$), $a < \operatorname{trace} UT \leq \pi_{q'}(U)\, \nu_q(T) \leq M^{1/p-1/q} < 2\nu_q(T)$, т.е. $\nu_q(T) > a/2$. Поскольку число a бралось произвольным, $\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) = +\infty$.

Предположим теперь, что $\nu_p(T) < +\infty$, и пусть $\nu := \lim_{q \to p+0} \nu_q(T)$. Если имеет место место строгое неравенство $\nu < C^{-1} \nu_p(T)$, то, выбирая достаточно малое положительное число ε, мы можем найти такой конечномерный оператор $U : Y \to X^{**}$, что $\pi_{p'}(U) \leq 1$ и $\operatorname{trace} UT > C^{-1}\nu_p(T) > \nu + \varepsilon$. В этом случае, $\nu + \varepsilon < \operatorname{trace} UT \leq \lim_{q \to p+0} (\nu_q(T)\, \pi_{q'}(U)) \leq \nu \lim_{q \to p+0} \pi_{q'}(U)$. Используя лемму 2.1, получаем: $\nu + \varepsilon < \nu$. Это противоречие показывает, что $\nu \geq C^{-1} \nu_p(T)$. □

Лемма 2.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $p \in [1, +\infty)$ и $T \in \mathrm{I}_q^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ для всех $q, q > p$. Тогда $\lim_{q \to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$. В частности, если все нормы $i_q^{\mathrm{Gr}}(T)$ при $q > p$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ и $i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \leq C$.*

Доказательство. Заметим, что так как величина $i_q^{\mathrm{Gr}}(T)$ возрастает при $q \searrow p$, то существует предел $\lim_{q \to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$, который не больше, чем $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$ (последняя величина может быть и бесконечной). Без ограничения общности, мы можем считать, что этот предел равен единице (относительно случая, когда он бесконечен, см. ниже замечание 2.5). Мы предположим, что $1 < i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \le +\infty$, и придем к противоречию. Таким образом, сейчас при любом $q > p$

$$\|T\| \le i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le 1 = \lim_{q\to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) < i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \le +\infty.$$

Удобно иметь перед глазами следующие диаграммы (как обычно, мы отождествляем Y с подпространством его второго сопряженного):

$$\begin{array}{c} T \in \mathrm{I}_p(X, Y^{**}) \hookrightarrow \mathrm{I}_q(X, Y^{**}) \hookrightarrow \mathrm{L}(X, Y^{**}) \\ \qquad\qquad Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X \ \hookleftarrow\ Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{q'}X \ \hookleftarrow\ Y^*\widehat{\otimes}_1 X \ni z \end{array}$$

Здесь верхняя строчка описывает ситуацию, в которой мы находимся, причем пространства операторов, появляющиеся в ней, являются сопряженными пространствами к тензорным произведениям, которые составляют нижнюю диаграмму; ядерный тензор z будет выбран ниже.

Так как замкнутый единичный шар B_p пространства $\mathrm{I_p}(X, Y^{**})$ *-слабо замкнут в пространстве $\mathrm{L}(X, Y^{**})$, то, по теореме Хана–Банаха, существует (ядерный) тензорный элемент $z \in Y^*\widehat{\otimes}_1 X$, для которого

$$|\operatorname{trace} Tz| > \sup_{\substack{U\in \mathrm{L}(X,Y^{**})\\ U\in B_p}} = \pi_{p'}(z).$$

По лемме 2.4, $\pi_{q'} \to \pi_{p'}$ при $q' \to p' - 0$ (а это как раз наша ситуация). Пусть $\varepsilon > 0$. Для всех q', не превосходящих p' и достаточно близких к p', мы будем иметь:

$$|\operatorname{trace} Tz| > \pi_{p'}(z) \ge \pi_{q'}(z) - \varepsilon.$$

Так как $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le 1$, то

$$\pi_{q'}(z) = \sup_{\substack{V\in \mathrm{I}_q(X,Y^{**})\\ i_q(V)=1}} |\operatorname{trace} Vz| \ge \Big|\operatorname{trace} \frac{Tz}{i_q^{\mathrm{Gr}}(T)}\Big| > |\operatorname{trace} Tz| > \pi_{p'}(z) \ge \pi_{q'}(z) - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, мы приходим к противоречию. ■

Замечание 2.5. Если $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$ при каком-то $q > p$, то тем более $i_p^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$, и заключение леммы становится тривиальным. Заключение леммы также тривиально в случае, когда все $i_q^{\mathrm{Gr}}(T), q > p$, конечны, но $\lim_{q\to p+} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$, так как тогда $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$.

Замечание 2.6. Несмотря на простоту доказательств приведенных лемм, с объектами, появляющимися в этих доказательствах, надо обращаться чрезвычайно осторожно. Особенно наглядно это проявляется в доказательстве леммы 2.5.. Откуда (и зачем) появляется константа $C > 0$ в условии (2.4) будет ясно из дальнейшего. А вот почему мы в (2.4) мы ограничились рассмотрением лишь конечномерных операторов U?

Во-первых, для того, чтобы был вполне определен след суперпозиции UT и чтобы (после этого) можно было использовать оценки вида "$\operatorname{trace} UT \leq \nu_q(T)\,\pi_{q'}(U)$". Упростить формулировку леммы 2.5 можно, наложив некоторые аппроксимационные условия на пространства X, Y, что позволило бы рассматривать и случай неконечномерных U из класса $\Pi_{p'}$. Однако вторая (появляющаяся теперь) проблема — предельный переход в конце доказательства леммы 2.5: лемма 2.1 уже не работает, а применение леммы 2.4 не проходит в силу замечания 2.4 к ней.

От всех этих проблем можно избавиться очень просто: надо потребовать, чтобы X или Y удовлетворяли достаточно сильным условиям *ограниченной* (с этим термином, кстати, и связано появление константы $C > 0$) аппроксимации (см. ниже, например, пример 3.1 и следствия 3.1, 3.2).

§3 Некоторые следствия

Приведем некоторые условия, накладываемые на банаховы пространства X, Y, при которых имеет место соотношение (2.4).

Пример 3.1. Если $C > 0$ и $Y \in C\text{-BAP}_p$, то (2.4) выполнено с константой C для любого банахова пространства X и любого оператора $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.

В частности, с помощью леммы 2.5 получаются такие следствия:

Следствие 3.1. *Если $p \geq 1$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в точке p. Таким образом,*

(i) *семейство норм ν_p непрерывно в точке 2;*

(ii) *если $Y \in \mathrm{MAP}$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в любой точке p, $p \geq 1$.*

Замечание 3.1. Еще раз напомним, что в определении непрерывности семейства норм, в частности, семейства q-ядерных норм в точке p, требуется, чтобы рассматриваемые операторы T имели в данной точке конечные нормы, т.е. в нашем случае: $\nu_p(T) < +\infty$. Мы увидим ниже (теорема 4.1), что в противном случае следствие 3.1, например, неверно (это в нашей терминологии означает *не строгую* непрерывность справа семейства $\{\nu_q\}$). Некоторые достаточные условия для строгой непрерывности этого семейства норм дает, вместе со следствием 3.1, следствие 3.5 (см. ниже).

Следствие 3.2. *Пусть $C \geq 1, p \geq 1,$ и Y — банахово пространство. Если существуют такие банахово пространство X и оператор $T \in \mathrm{N}_p(X,Y)$, что*

$$\lim_{p+0} \nu_q(T) < C^{-1}\, \nu_p(T),$$

то пространство Y не обладает свойством C- BAP_p.

Доказательство. Действительно, в противном случае выполняется соотношение (2.4) (с постоянной C), в котором обе части неравенства конечны; следовательно, применение леммы 2.5 приводит к противоречию. $\square$

Следствие 3.3. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, но $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$, то $\nu_q(T) \to \nu_p(T) = +\infty$ при $q \to p+0$.*

Доказательство. Действительно, так как пространство $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$ есть сопряженное к пространству $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ при естественной двойственности, то норма в его подпространстве $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ не больше, чем соответствующий supremum в соотношении (2.4). Поэтому, если $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$, то и последний supremum бесконечен (что, кстати автоматически влечет соотношение $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$, т.е. $\nu_p(T) = +\infty$.) Следовательно, применима лемма 2.5. $\square$

Нам представляется интересным переформулировать последнее утверждение в связи со следующим известным (решенным отрицательно в [13],[4]) вопросом: верно ли, что из p-ядерности второго сопряженного к некоторому оператору вытекает p-ядерность самого этого оператора? Приводимая переформулировка следствия 3.3 дает некоторые достаточные (и, тривиально, необходимые) условия для положительного ответа на последний вопрос:

Следствие 3.4. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$ и семейство $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$; в частности, если $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то из p-ядерности оператора T^{**} вытекает p-ядерность оператора T.* $\square$

Замечание 3.2. Еще раз подчеркнем тонкость рассматриваемых аппроксимационных условий и связанных с ними рассуждений и утверждений на примере "предельного перехода в следствии 3.2. В этом следствии чем хуже "p-ядерность" оператора T (точнее, чем больше норма $\nu_p(T)$ при равномерной ограниченности норм $\nu_q(T)$, $q > p$), тем более плохим с точки зрения условий ограниченной аппроксимации оказывается пространство Y: в такой ситуации константе C позволительно расти с ростом $\nu_p(T)$, и "в пределе" естественно ожидать появления такого "следствия" (заранее, чтобы не допустить недоразумений, отметим, что *формулируемое "следствие" неверно!*).

Если существует не p-ядерный оператор $T : X \to Y$, для которого $\sup_{q>p} \nu_q(T) < +\infty$, то пространство Y не обладает свойством BAP_p.

Тонкость здесь как раз и состоит в том, что подобный "предельный переход" не допустим, и имеется пример пространства Y с базисом (даже еще более хорошего, — см. ниже теорему 4.1), для которого первая часть утверждения этого "следствия" в действительности имеет место (это так по-крайней мере для всех $p \in [1, 2)$); в §4 мы рассмотрим только простейший случай $p = 1$). Любопытно также отметить в связи со сказанным, что следствие 3.3 показывает, что если оператор T "совсем плохой" ($T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$), то его q-ядерные нормы ведут себя как надо, а именно, не ограничены при $q \to p$.

Следствие 3.5. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что X^* обладает свойством Радона–Никодима и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$. Пусть, далее, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $1 \le p < +\infty$. Если $C := \sup_{p<q} \nu_q(T) < +\infty$, то $\nu_p \le C$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие 1.1 и лемму 2.6. ■

§4. (Контр)пример

Перед тем как формулировать основной результат этого параграфа, удобно ввести (следуя А. Гротендику) следующее

Определение 4.1. Пусть $s \in (0, 1]$. Оператор T, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, называется *s-ядерным*, если он представляется в виде

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x, x'_j > x_j, \tag{4.1}$$

где $\|x_j\|$, $\|x'_j\| \le 1$ и x_j, $x'_j \to 0$ при $j \to \infty$, а положительная числовая последовательность $\{\lambda_j\}$ такова, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s$ сходится. Обозначения для этого класса операторов: $\mathrm{N}_s(X, Y)$ (при $s = 1$ это определение полностью согласуется с соответствующим определением из §1.)

Напомним еще раз, что каждое банахово пространство мы рассматриваем также как подпространство его второго сопряженного (не вводя никаких обозначений для оператора канонического вложения).

Лемма 4.1 см. [6, теорема 3.1,A]. *Если* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *и* $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$, *для некоторого* $s \in [2/3,1]$, *то* $T \in \mathrm{N}_q(X,Y)$, *где показатель* $q, 1 \le q \le 2$, *определяется из соотношений* $s = \dfrac{2q}{q+2}$, *или* $q = \dfrac{2s}{2-s}$. ■

Теорема 4.1. *Существуют такие банахово пространство* Z *и оператор* $S : Z^{**} \to Z$, *что*

(1) *пространство* Z^{**} *имеет ограниченно полный базис;*
(2) *все сопряженные к* Z *пространства* $Z^*, Z^{**}, Z^{***}, \ldots$ *сепарабельны* (и, следовательно, обладают свойством RN)*;*
(3) Z^{***} *не обладает свойством аппроксимации;*
(4) $S \in N_s(Z^{**}, Z^{**})$ *для любого* $s > 2/3$;
(5) $C := \sup_{q>1} \nu_q(S) \le 1$, *но*
(6) $S \notin N(Z^{**}, Z)$.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства аппроксимации, для которого существует ненулевой тензорный элемент $t \in X^* \widehat{\otimes}_1 X$, допускающий представление вида

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x'_j \otimes x_j,$$

где $\|x_j\|$, $\|x'_j\| \le 1$ и x_j, $x'_j \to 0$ при $j \to \infty$, а положительная числовая последовательность $\{\lambda_j\}$ такова, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s$ сходится при любом $s > 2/3$; причем оператор $\widetilde{t}$, порождаемый тензором t по формуле, аналогичной (4.1), равен нулю (см. [17]). Ввиду сепарабельности и рефлексивности X, согласно [18], существует банахово пространство Z и гомоморфизм Φ пространства Z^{**} на X такие, что Z удовлетворяет условиям 1)–3) и $\operatorname{Ker} \Phi = Z$.

Так как Φ — гомоморфизм, то последовательность $\{x_j\} \subset X$ можно поднять до элементов пространства Z^{**} без существенного увеличения норм, точнее, для некоторой абсолютной постоянной $C > 1$ найдутся элементы $z''_j \in Z^{**}, j = 1, 2, \ldots$, для которых $\Phi\, z''_j = x_j$ и $\|z''_j\| \le C$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Так как $Z^{**} \in \mathrm{MAP}$ (это пространство обладает свойством Радона–Никодима и удовлетворяет условию аппроксимации, — см. замечание 1.3), то, по предложению 1.1, $X^* \widehat{\otimes}_q Z^{**} = \mathrm{N}_q(X, X^{**})$ для любого $q \ge 1$.

Поэтому формула

$$\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x'_j \otimes z''_j$$

однозначно определяет как оператор α, который является s-ядерным при любом $s > 2/3$, так и соответствующий тензорный элемент из $X^*\widehat{\otimes}_q Z^{**}$, который мы обозначаем тем же символом. Отметим, что $\operatorname{Im}\alpha \subset \operatorname{Ker}\Phi$, так как при всех $x \in X$

$$\Phi(\alpha x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x'_j, x > \Phi z''_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x'_j, x > x_j = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Im}\alpha \subset Z$, и мы можем вполне корректно определить оператор $\beta : X \to Z$, являющийся приведением оператора α. Так как, по построению, оператор α является s-ядерным для любого $s > 2/3$, то, по лемме 1.4, $\beta \in \mathrm{N}_q(X, Z)$ для каждого $q > 1$.

Положим $S = \beta\Phi$. Тогда $S \in \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z)$ для каждого $q > 1$ и $S \in \mathrm{N}_s(Z^{**}, Z^{**})$ для любого $s > 2/3$. Осталось установить справедливость утверждений (5) и (6).

Без ограничения общности, мы можем считать, что $\nu_1(S : Z^{**} \to Z^{**}) = 1$, откуда $\nu_q(S : Z^{**} \to Z^{**}) \le 1$ при всех $q \ge 1$. Зафиксируем $q > 1$ и рассмотрим включения

$$S \in \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z) \subset \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z^{**}) \subset \mathrm{I}_q(Z^{**}, Z^{**}). \tag{4.2}$$

Поскольку $Z^{**} \in \mathrm{MAP}$ и Z^{***} обладает свойством Радона–Никодима, то оба вложения из (4.2) изометрические и, более того, последнее включение на самом деле превращается в равенство. Принимая это во внимание, получаем свойство (5).

Наконец, почему оператор S не является ядерным, как оператор из Z^{**} в Z? В этом заключительном в данной заметке доказательстве нам придется использовать обозначение для канонического вложения банахова пространства W в его второе сопряженное, — $\pi_W : W \hookrightarrow W^{**}$.

Если $S \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, то (здесь и ниже снова используем свойство метрической аппроксимации в Z^{**})

$$\operatorname{trace} \pi_Z S = \operatorname{trace} \alpha\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \Phi^* x'_j, z''_j >= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x'_j, \Phi z''_j >= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x'_j, x_j >= 1.$$

Мы воспользовались тем фактом, что $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Phi^* x'_j \otimes z''_j$ — ядерное представление оператора $\alpha\Phi : Z^{**} \to X \to Z^{**}$. С другой стороны, $\operatorname{trace} \pi_Z S = \operatorname{trace} \pi_Z^* S^*$.

$$Z \xrightarrow{\pi_Z} Z^{**} \xrightarrow{S} Z \xrightarrow{\pi_Z} Z^{**}$$

$$Z^* \xleftarrow[\pi_Z^*]{} Z^{***} \xleftarrow[S^*]{} Z^* \xleftarrow[\pi_Z^*]{} Z^{***}$$

При этом, trace $\pi_Z^* S^* = 0$, так как

$$\pi_Z^* S^* = \pi_Z^* S^* \pi_Z^* \pi_{Z^*} = (\pi_Z S \pi_Z)^* \pi_{Z^*} = (\alpha \Phi \pi_Z)^* \pi_{Z^*} = (\alpha \cdot 0)^* \pi_{Z^*}$$

(напомним, что Im π_Z = Ker Φ). ■

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир (1982), 536 с.
2. Saphar P., *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires*, Studia Math. **38** (1970), 71-100.
3. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), 196-140.
4. Рейнов О.И., *Свойства аппроксимации порядка p и существование не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными*, ДАН СССР **256, 1** (1981), 43-47.
5. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
6. Рейнов О.И., *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, В кн. "Теория операторов и теория функций". Л.:ЛГУ (1983), 145-165.
7. Шеффер Х., *Топологические векторные пространства*, Москва: Мир (1971), 360 с.
8. Bourgain J., Reinov O.I., *On the approximation properties for the space* H^∞, Math. Nachr. **122** (1985), 19-27.
9. Persson A. and Pietsch A., *p-nucleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. **33** (1969), 19-62.
10. Diestel J. and Uhl J.J., *Vector measures*, Math. Survey 15, Amer. Math. Soc., Providence RI. **15** (1977).
11. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, ДАН СССР **220, No 3** (1975), 528-531.
12. Макаров Б.М., Самарский В.Г., *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов*, в сб. "Теория операторов и теория функций", ЛГУ **1** (1983), 122-144.
13. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197-200.
14. Оя Э., Рейнов О., *Контрпример А.Гротендику*, Известия АН Эстонской ССР. Физика – Математика **37** (1988), 14-17.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И., *Краткий курс функционального анализ*, М.: Высш. Школа (1982), 271.
16. Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, Москва: Наука (1984), 496.
17. Davie A.M., *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261-266.
18. Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл., 2
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
кафедра математического анализа.
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru