Эффективная конструкция локальных параметров неприводимых компонент алгебраического многообразия

А. Л. Чистов

Санкт-Петербургский институт информатики
и автоматизации Российской академии наук,
199178 Санкт-Петербург, В.О. 14-ая линия, 39
e-mail: sliss@iias.spb.su

1999

Аннотация

Рассмотрим $(n-s)$-мерное алгебраическое многообразие V, определённое над совершенным бесконечным полем k, и неприводимое над этим полем, которое является подмногообразием проективного пространства размерности n. Мы доказываем, что локальное кольцо многообразия V имеет регулярную последовательность (соответственно, если характеристика $\mathrm{char}(k)=0$, последовательность локальных параметров), состоящую из s неоднородных многочленов, произведение степеней которых меньше, чем степень многообразия, умноженная на константу, зависящую от n. В случае, когда V является компонентой алгебраического многообразия, заданного системой однородных полиномиальных уравнений степеней меньше, чем d, над полем нулевой характеристики, степени всех этих локальных параметров меньше d, умноженного на константу, зависящую от n. Рассматриваемые константы, зависящие от n, оцениваются.

Введение

Пусть k – бесконечное совершенное поле, и $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ – n-мерное проективное пространство над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k, имеющее однородные координаты $X_0, \ldots, X_n$. Пусть $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – алгебраическое многообразие, определённое над k, и неприводимое над k размерности $n - s$, где $1 \leq s \leq n$, и степень $\deg V = D$. Пусть многообразие V является множеством всех нулей однородного простого идеала $\mathfrak{P} \subset k[X_0, \ldots, X_n]$. Мы доказываем, что локальное кольцо многообразия V имеет регулярную последовательность (соответственно, если характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$, последовательность локальных параметров), состоящую из s неоднородных многочленов, произведение степеней которых меньше, чем D, умноженное на константу, зависящую от n. В случае, когда V является компонентой алгебраического многообразия, заданного системой однородных полиномиальных уравнений степеней меньше, чем d, над полем нулевой характеристики, степени всех этих локальных параметров меньше d, умноженного на константу, зависящую от n. Рассматриваемые константы, зависящие от n, оцениваются.

Для всяких многочленов $g_1, \ldots, g_m \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$ мы будем обозначать через $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_m)$ множество всех общих нулей этих многочленов в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ (в дальнейшем мы будем использовать аналогичные обозначения для множеств всех общих нулей других многочленов или идеалов в проективных или аффинных пространствах). Для любого проективного алгебраического многообразия $W \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ мы будем обозначать через $\mathcal{I}(W) \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ однородный идеал, соответствующий W (аналогичные обозначения будут использоваться для идеалов аффинных алгебраических многообразий и для идеалов в кольцах многочленов с другими полями коэффициентов).

В этой статье будет удобно использовать следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 *Пусть $0 < j \leq s$ – целое число. Рассмотрим последовательность однородных многочленов $f_i \in \mathfrak{P}$, $1 \leq i \leq j$. Пусть $0 \leq u < j$ – целое число. Обозначим через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{P}, u)$ множество всех определённых над k и неприводимых над k компонент W алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_u)$, таких что $W \supset V$. Предположим, что для всякого целого числа $0 \leq u < j$ многочлен $f_{u+1} \in \mathfrak{P}$ является многочленом g наименьшей степени, таким что для всякой неприводимой компоненты $W \in \mathcal{W}$ выполнено*

$$W \not\subset \mathcal{Z}(g).$$

Тогда любую такую последовательность $f_1, \ldots, f_j$ мы будем называть $\mathfrak{P}$–последовательностью (длины j).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 *Пусть $f_1, \ldots, f_s$ – $\mathfrak{P}$-последовательность. По определению положим*

$$\delta_i(\mathfrak{P}) = \deg f_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Тогда, см. Лемму 2 Раздела 2, целые числа $\delta_i(\mathfrak{P})$ зависят только от $\mathfrak{P}$ и не зависят от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности. Целое число $\delta_i(\mathfrak{P})$ будем называть i–ой степенью, соответствующей $\mathfrak{P}$–последовательности.

Заметим, что если $f_1, \ldots, f_j$ является $\mathfrak{P}$-последовательностью, то для всякого $0 \leq u \leq j$ любая неприводимая компонента алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_u)$, содержащая V, имеет размерность $n-u$. В частности, когда $j = s$, алгебраическое многообразие V является неприводимой компонентой $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$. Заметим также, что в общем случае алгебраическое многообразие $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$ может иметь неприводимые компоненты размерности больше, чем $n-s$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1 *Пусть $f_1, \dots, f_s$ – произвольная $\mathfrak{P}$-последовательность, и, следовательно, $\delta_i = \delta_i(\mathfrak{P}) = \deg f_i$ для всякого $1 \le i \le s$. Тогда существует $C \in \mathbb{R}$, такое что справедливо неравенство*

$$\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_s \le n^{2^{s^C}} D. \tag{1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 *Заметим, что доказательство того, что $\delta_i(\mathfrak{P})$ не зависит от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности использует бесконечность поля k. Теорема 1 справедлива также для случая конечных полей (но тогда не утверждается, что δ_i не зависит от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности). Легко видеть, что в доказательстве требуются только незначительные изменения. Однако мы не рассматриваем сейчас наиболее общую ситуацию.*

Теорема 1 будет получена как следствие Теоремы 4, которая формулируется в Разделе 1. Заметим, что константу C из (1) а также другие константы из утверждений ниже можно вычислить явно, используя доказательства из статьи.

ТЕОРЕМА 2 *Пусть характеристика поля* $\mathrm{char}(k) = 0$. *Тогда существуют однородные многочлены $g_1, \dots, g_s \in \mathfrak{P}$, гладкая точка $x \in V$, и линейная форма $L \in k[X_0, \dots, X_n]$, такие что*

- $L(x) \neq 0$,
- $g_1/L^{\deg g_1}, \dots, g_s/L^{\deg g_s}$ *является системой локальных параметров алгебраического многообразия V в точке x (определение локальных параметров см., например, в [2]),*
- $\deg g_i \le n^{2^{s^C}} \delta_i(\mathfrak{P})$, $1 \le i \le s$, *где $0 < C \in \mathbb{R}$ – абсолютная константа.*

Как следствие Теоремы 2 и Леммы 1 мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3 *Пусть характеристика поля* $\mathrm{char}(k) = 0$. *Пусть $\phi_1, \dots, \phi_m \in k[X_0, \dots, X_n]$, $m \ge 1$, – произвольные однородные многочлены. Пусть степени $\deg \phi_i < d$ для всех $1 \le i \le m$. Пусть V – произвольная определённая над k и неприводимая над k компонента алгебраического многообразия*

$$\mathcal{Z}(\phi_1, \dots, \phi_m) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$$

всех общих нулей этих многочленов в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть $\dim V = n-s$, где $1 \le s \le n$. Тогда существуют однородные многочлены $g_1, \dots, g_s \in \mathfrak{P}$, гладкая точка $x \in V$, и линейная форма $L \in k[X_0, \dots, X_n]$, такие что

- $L(x) \neq 0$,

- $g_1/L^{\deg g_1}, \dots, g_s/L^{\deg g_s}$ *является системой локальных параметров алгебраического многообразия* V *в точке* x,
- $\deg g_i \le n^{2^{s^C}} d$, $1 \le i \le s$, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа.*

Используя теоремы из настоящей статьи, [4], [8], мы получили в [5] следующие результаты. Рассмотрим проективное алгебраическое многообразие V', заданное как множество всех общих нулей семейства однородных многочленов степеней меньше, чем d относительно $n+1$ переменных с коэффициентами из поля k нулевой характеристики. Мы доказываем, что V' может быть представлено как объединение самое большее $C(n)d^n$ (соответственно $C(n)d^{n(n+1)/2}$) гладких квазипроективных многообразий (соответственно попарно не пересекающихся гладких квазипроективных многообразий) со степенями (степень квазипроективного алгебраического многообразия равна степени его замыкания в топологии Зарисского), ограниченными сверху $C(n)d^n$, где $C(n) < 2^{2^{n^C}}$ для абсолютной константы $C > 0$. Далее, в случае нулевой характеристики предлагаются алгоритмы для построения регулярных последовательностей и последовательностей локальных параметров для неприводимых компонент многообразия V'. Сложность этих алгоритмов полиномиальна от длины записи входных данных и $C(n)d^n$. Наконец в случае, когда k является подполем $\mathbb{R}$, предлагается алгоритм для вычисления размерности множества $V'(\mathbb{R})$ всех $\mathbb{R}$-точек V' со сложностью полиномиальной от длины записи входных данных и $C(n)d^n$.

1 План доказательства Теоремы 1

Обозначим через K чисто трансцендентное расширение поля k достаточно большой степени трансцендентности. Мы будем предполагать, что эта степень трансцендентности не меньше $(n+1)^2$. В дальнейшем для всякого однородного идеала $\mathfrak{a}$ кольца $k[X_0, \dots, X_n]$ мы будем обозначать через $\mathfrak{a}$ также идеал, порождённый $\mathfrak{a}$ в $K[X_0, \dots, X_n]$ (т.е. идеал $\mathfrak{a} \otimes_k K$). Мы будем использовать обозначения $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ также для множества всех общих нулей идеала $\mathfrak{a}$ в проективном пространстве над $\overline{K}$. Это не приведет к двусмысленности

Мы будем рассматривать категорию конечнопорождённых градуированных $K[X_0, \dots, X_n]$-модулей. Такой модуль является прямой суммой своих однородных компонент M_m, где $0 \le m \in \mathbb{Z}$. Будем обозначать через $|M|_m = \dim_K M_m$ размерность однородной компоненты M_m над K. Для любого M существует [2] многочлен $\chi \in \mathbb{Q}[Z]$, такой что $|M|_m = \chi(m)$ для всех достаточно больших m. Обозначим для краткости $\Lambda = K[X_0, \dots, X_n]$.

Пусть $0 \le v \le n$ – целое число. Пусть $U_{v+1}, \dots, U_n \in K[X_0, \dots, X_n]$ – линейные формы, такие что семейство их коэффициентов содержится в базисе трансцендентности поля K над k. Следовательно, это семейство коэффициентов имеет степень трансцендентности $(n+1)(n-v)$ над k. Обозначим через $\mathfrak{u}_v$ идеал кольца $K[X_0, \dots, X_n]$, порождённый $U_{v+1}, \dots, U_n$.

Пусть $0 \le j \le s$ – целое число, и $\mathfrak{p}_j \subset k[X_0, \dots, X_n]$ – произвольный однородный простой идеал, такой что $f_i \in \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{P}$ для всех $1 \le i \le j$ и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) = n - j$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. В частности, $\mathfrak{p}_s = \mathfrak{P}$.

По теореме Бертини для линейной системы гиперплоских сечений (которая верна для полей любой характеристики, см. [11]) множество $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{u}_v)$, рассматриваемое как подмножество $\mathbb{P}^n(\overline{K})$

- является пустым, если $j > v$,
- состоит из $\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ точек $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ (и пересечение $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ с линейным пространством $\mathcal{Z}(\mathfrak{u}_j)$ трансверсально в каждой точке), если $j = v$,
- является неприводимым над совершенным замыканием поля K алгебраическим многообразием, определённым над K, размерности $v-j$, если $j < v$.

Положим $\mathfrak{p}_{j,v} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{u}_v)) \subset K[X_0,\dots,X_n]$. Так что $\mathfrak{p}_{j,v}$ является простым идеалом, если $j < v$. В действительности, в дальнейшем мы используем только простой факт, что размерность всякой неприводимой компоненты многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,v})$ равна $v-j$, если $j \le v$.

Теорема 1 будет выведена из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4 *Пусть $0 \le j \le s$ – целое число. Пусть выполняются условия Теоремы 1. Положим также $\delta_0 = 1$. Пусть $\mathfrak{p}_j$ – произвольный простой идеал $k[X_0,\dots,X_n]$, такой что $f_i \in \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{P}$ для всех $1 \le i \le j$, и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) = n-j$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Существует константа b_j (которая зависит только от n, s и j), такая что справедливо неравенство

$$\delta_j \le b_j \left(\frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}\right)^{1/(s-j+1)}$$

(отметим, что если $j \le 1$, то произведение в знаменателе правой части этого равенства пусто и, следовательно, равно 1).

(ii) Существует константа a_j (которая зависит только от n, s и j), такая что справедливо неравенство

$$a_j \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) > \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j.$$

(iii) Существует константа $c_j > 0$ (которая зависит только от n, s и j), такая что справедливо неравенство

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge c_j \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j$$

для всех $m \ge 2^{-1} a_j^{-1} \delta_j$.

Кроме того, если $n \ge 2$, то существует C, $0 < C \in \mathbb{R}$, такое что для всех n, s и j константы a_j, b_j, c_j^{-1} ограничены сверху величиной $n^{2^{(j+1)^C}}$.

Как следствие Теоремы 4 мы установим следующий результат, который доказывает гипотезу из [6].

ТЕОРЕМА 5 *Пусть $s \ge 1$. При условиях Теоремы 4 для всякого $1 \le j \le s$ справедливо неравенство*

$$\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j \le b_1 \cdot \ldots \cdot b_j D^{j/s}.$$

Следовательно, существует $C \in \mathbb{R}$, такое что для всех n, s и всякого простого идеала $\mathfrak{p}_j$ кольца $k[X_0, \ldots, X_n]$, такого что $f_i \in \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{P}$ для всех $1 \le i \le j$, и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) = n - j$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, справедливо равенство

$$\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) \le n^{2^{(j+1)^C}} D^{j/s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Положим $d_j = b_1 \cdot \ldots \cdot b_j$ для всех $0 \le j \le s$. Заметим, что $d_j \ge 1$ для всех j. По индукционному предположению мы можем считать, что

$$\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1} \le d_{j-1} D^{(j-1)/s}.$$

Тогда утверждение (i) Теоремы 4 влечёт, что

$$\begin{aligned} &\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j \le (\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}) b_j \left(\frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}} \right)^{1/(s-j+1)} \le \\ &b_j (\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1})^{1-1/(s-j+1)} D^{1/(s-j+1)} \le \\ &b_j d_{j-1} D^{((j-1)/s)(1-1/(s-j+1))+1/(s-j+1)} = d_j D^{j/s}. \end{aligned}$$

Оценка $d_j \le n^{2^{(j+1)^C}}$ следует немедленно из оценки для b_j из Теоремы 4. Теорема 5 (по модулю Теоремы 4) доказана.

Пусть s, $1 \le s \le n$ – произвольное число. Теорема 4 будет доказана, используя индукцию по $j \ge 0$. Дополнительно мы выберем $a_j \ge n + 1$ для всех j. База индукция есть $j = 0$. Положим

$$a_0 = n + 1, \quad c_0 = b_0 = 1. \tag{2}$$

В этом случае утверждения (i)–(iii) являются тривиальными, поскольку $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ и произведения δ_i в правых частях (i)–(iii) пусты (и, следовательно, равны 1).

Константы a_j, b_j, c_j можно оценить, используя информацию, полученную из доказательства Теоремы 4. Теорема 1 следует из Теоремы 4 немедленно (случаи $n = 1$ или $s = 1$ Теоремы 1 являются тривиальными). Но сначала в следующих двух разделах будут доказаны некоторые предварительные результаты.

2 Свойства $\mathfrak{P}$-последовательностй

Пусть однородный простой идеал $\mathfrak{P}$, и целое число s – такие же, как во Введении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 *Пусть $0 < j \le s$ – целое число. Рассмотрим последовательность однородных многочленов $f_i \in \mathfrak{P}$, $1 \le i \le j$. Пусть $0 \le u < j$ – целое число. Обозначим, как и выше, через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{P}, u)$ множество всех неприводимых компонент W, определённых над k, алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_u)$, таких что $W \supset V$. Предположим, что для всякого целого числа $0 \le u < j$ многочлен $f_{u+1} \in \mathfrak{P}$ является, таким что для всякой неприводимой компоненты $W \in \mathcal{W}$ алгебраическое многообразие*

$$W \not\subset \mathcal{Z}(f_{u+1}),$$

и, если $u \geq 1$, то $\deg f_{u+1} \geq \deg f_u$. Тогда всякую такую последовательность $f_1, \dots, f_j$ мы будем называть слабой $\mathfrak{P}$–последовательностью (длины j).

Заметим, что всякая $\mathfrak{P}$-последовательность является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью.

ЛЕММА 1 *Пусть $g_1, \dots, g_j$ и $h_1, \dots, h_j$ – две слабые $\mathfrak{P}$-последовательности. Тогда существует слабая $\mathfrak{P}$-последовательность $q_1, \dots, q_j$, такая что $\deg q_v = \min\{\deg g_v, \deg h_v\}$, и многочлен q_v принадлежит объединению идеалов $(g_1, \dots, g_j) \cup (h_1, \dots, h_j)$ для всех $1 \leq v \leq j$. Кроме того, если $\deg g_i \leq \deg h_i$ для всех $1 \leq i \leq i_1$ для некоторого $i_1 \leq j$, то можно взять $q_i = g_i$ для всех $1 \leq i \leq i_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Обозначим $\deg g_u = \mu_u$, $\deg h_u = \nu_u$ для всех $1 \leq u \leq j$. Положим $g_{0,u} = g_u$ и $h_{0,u} = h_u$ для всех $1 \leq u \leq j$.

Пусть $0 \leq v \leq j$ – целое число. Предположим, что уже построены рекурсивно многочлены q_u для всех $u \leq v$ и многочлены $g_{v,v+1}, \dots, g_{v,j}$, $h_{v,v+1}, \dots, h_{v,j}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

- $\deg g_{v,u} = \mu_u$ для всех $v+1 \leq u \leq j$,
- $\deg h_{v,u} = \nu_u$ для всех $v+1 \leq u \leq j$,
- $q_1, \dots, q_v, g_{v,v+1}, \dots, g_{v,j}$ является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью,
- $q_1, \dots, q_v, h_{v,v+1}, \dots, h_{v,j}$ является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью.

Пусть $\deg g_{v,v+1} \leq \deg h_{v,v+1}$ (случай противоположенного строгого неравенства рассматривается аналогично). Тогда положим $q_{v+1} = g_{v,v+1}$ и $g_{v+1,u} = g_{v,u}$ для всех $v+2 \leq u \leq j$. Далее, мы построим многочлены $\widetilde{h}_{v+2}, \dots, \widetilde{h}_j$, удовлетворяющие следующим условиям:

- многочлен $\widetilde{h}_u$ принадлежит идеалу $(h_{v,v+1}, \dots, h_{v,j})$ для всякого $v+2 \leq u \leq j$,
- $q_1, \dots, q_{v+1}, \widetilde{h}_{v+2}, \dots, \widetilde{h}_j$ является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью,
- $\deg \widetilde{h}_u = \nu_u$ для всех $v+2 \leq u \leq j$.

Чтобы построить многочлены $\widetilde{h}_{v+2}, \dots, \widetilde{h}_j$ нам потребуется ещё одна рекурсия. Пусть $v+3 \leq u \leq j+1$ – целое число. Предположим, что мы уже построили многочлены $\widetilde{h}_i$ для всех $u \leq i \leq j$. Предположим, что

$$\widetilde{h}_i = h_{v,i} + \sum_{v+1 \leq w \leq i-1} r_{v,i,w} h_{v,w},$$

где $r_{v,i,w} \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены, и $\deg r_{v,i,w} = \nu_i - \nu_w$ для всех i и w. Предположим, что $q_1, \dots, q_{v+1}$, $\widetilde{h}_u, \dots, \widetilde{h}_j$ является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью. Так что в случае, когда $u = j+1$, ничего не построено.

Покажем, что можно построить многочлен $\widetilde{h}_{u-1}$, такой что описанные условия будут удовлетворены, если заменить u на $u-1$. Действительно, алгебраическое многообразие $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ является неприводимой компонентой множества

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}(q_1,\ldots,q_v,\, h_{v,v+1},\ldots,h_{v,j})\cap\mathcal{Z}(q_{v+1})=\\&\mathcal{Z}(q_1,\ldots,q_v,\, h_{v,v+1},\ldots,h_{v,u-1},\, \widetilde{h}_u,\ldots,\widetilde{h}_j)\cap\mathcal{Z}(q_{v+1})=\\&\mathcal{Z}(q_1,\ldots,q_{v+1},\, \widetilde{h}_u,\ldots,\widetilde{h}_j)\cap\mathcal{Z}(h_{v,v+1},\ldots,h_{v,u-1})\end{aligned}$$

Следовательно, существуют однородные многочлены r_w степеней $\deg r_w = \nu_{u-1}-\nu_w$ для всех $v+1\leq w\leq u-1$, такие что $r_{u-1}=1$, и любой многочлен r_w, $v+1\leq w\leq u-2$, не обращается в нуль тождественно на алгебраическом многообразии $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Тогда $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ является неприводимой компонентой алгебраического многообразия

$$\mathcal{Z}(q_1,\ldots,q_{v+1},\, \widetilde{h}_u,\ldots,\widetilde{h}_j)\cap\mathcal{Z}(r_{v+1}h_{v,v+1},\ldots,r_{u-1}h_{v,u-1}).$$

Следовательно, существуют элементы $\alpha_{v+1},\ldots,\alpha_{u-2}\in k$, такие что

$$q_1,\ldots,q_{v+1},\, h_{v,u-1}+\sum_{v+1\leq w\leq u-2}\alpha_w r_w h_{v,w},\, \widetilde{h}_u,\ldots,\widetilde{h}_j$$

является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью. Так что мы можем положить $r_{v,u-1,w}=\alpha_w r_w$ для всех $v+1\leq w\leq u-2$. Наше утверждение доказано. Следовательно, согласно второй рекурсии мы можем построить требуемые многочлены $\widetilde{h}_i$, $v+2\leq i\leq j$.

Положим $h_{i+1,u}=\widetilde{h}_u$ для всех $v+2\leq u\leq j$. Таким образом, мы можем осуществить следующий шаг первой рекурсии. В конечном счёте мы построим требуемые многочлены $q_1,\ldots,q_j$. Первое утверждение леммы доказано. Второе – следует немедленно из конструкции, описанной в доказательстве первого утверждения. Лемма доказана.

ЛЕММА 2 *Пусть $g_1,\ldots,g_j$ – $\mathfrak{P}$-последовательность, и $h_1,\ldots,h_j$ – слабая $\mathfrak{P}$-последовательность. Тогда $\deg g_i\leq\deg h_i$ для всех $1\leq i\leq j$. В частности, если $h_1,\ldots,h_j$ является $\mathfrak{P}$-последовательностью, то $\deg g_i=\deg h_i$ для всех $1\leq i\leq j$, т.е. для любых $\mathfrak{P}$-последовательности $g_1,\ldots,g_j$ и целого числа i, такого что $1\leq i\leq j$, степень $\deg g_i$ зависит только от $\mathfrak{P}$ и i, и не зависит от выбора многочленов $g_1,\ldots,g_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Это следует немедленно из Определения 1 и Леммы 1. Лемма доказана.

3 Оценки для характеристической функции простого идеала и его редукций

Мы будем использовать обозначения $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_{j,v}$, введённые Разделе 1. В этом разделе необязательно предполагать, что $\mathfrak{p}_j\subset\mathfrak{P}$. Так что мы будем только предполагать, что $\mathfrak{p}_j$ является простым идеалом, и $\dim\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)=n-j$ для всех $0\leq j\leq n$. Напомним, что $\mathfrak{p}_j=\mathfrak{p}_{j,n}$.

ЛЕММА 3 *Пусть $0 \leq j < v \leq n$ – целые числа. Тогда для любого $m \geq 1$ справедливо неравенство*

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v}|_m \geq \sum_{0\leq i\leq v-j-1} \binom{m+i-1}{i} |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v-i}|_0 +$$
$$\sum_{1\leq i\leq m} \binom{v-j-1+m-i}{v-j-1} |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_i$$

(причём $|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v-i}|_0 = 1$ для всех i, j, v).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть $w \geq 1$ – целое число. Рассмотрим точную последовательность векторных пространств

$$0 \to (\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v})_{w-1} \to (\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v})_w \to (\Lambda/(\mathfrak{p}_{j,v} + (U_v)))_w \to 0, \tag{3}$$

которая индуцирована умножением на U_v. Мы имеем

$$|\Lambda/(\mathfrak{p}_{j,v} + (U_v))|_w \geq |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v-1}|_w$$

по определению идеалов $\mathfrak{p}_{j,v}$ и $\mathfrak{p}_{j,v-1}$. Следовательно,

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v}|_w \geq |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v}|_{w-1} + |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v-1}|_w.$$

Суммируя эти неравенства для всех $1 \leq w \leq m$, мы получаем, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v}|_m \geq |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v}|_0 + \sum_{1\leq w\leq m} |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,v-1}|_w. \tag{4}$$

Если $j = v - 1$, то требуемое утверждение доказано. Пусть $j < v - 1$. Применяя аналогичную конструкцию (с v заменённым на $v - 1$) к каждому слагаемому из правой части (4) и итерируя таким же образом до тех пор, пока это возможно, мы получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 4 *Пусть $0 \leq v \leq j \leq n$ – целые числа. Пусть*

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j-v}|_\mu \geq \gamma$$

для некоторого $\mu \geq 1$. Тогда для всякого $m \geq \mu$ выполнено неравенство

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j}|_m \geq \binom{v+m-\mu}{v}\gamma.$$

Следовательно, если $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu - 1 < \mu_1 \leq \mu$, и $m \geq 2\mu_1$, то

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j}|_m \geq (2^v v!)^{-1} m^v \gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Мы можем предполагать без ограничения общности, что $v > 0$. Рассматривая точную последовательность аналогичную (3), мы получим

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j-v}|_m \leq |\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j-v}|_{m+1}$$

для любого m. Следовательно, из Леммы 3 вытекает, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j}|_m \geq \left(\binom{v-1}{v-1} + \ldots + \binom{v-1+m-\mu}{v-1}\right)\gamma = \binom{v+m-\mu}{v}\gamma.$$

Второе утверждение следует из первого немедленно, так как $m \geq 2\mu - 1$ в этом случае. Лемма доказана.

4 Доказательство первого утверждение Теоремы 4

Мы используем обозначения из Раздела 1. Пусть $0 < j \le s$. Мы будем предполагать по индукции, что Теорема 4 уже доказана для всех простых идеалов $\mathfrak{p}_u$ при $u < j$. Так что константы a_u, b_u и c_u определены для всех $0 \le u < j$. В этом разделе наша цель – доказать утверждение (i) Теоремы 4 для j и определить константу b_j.

Пусть $\mathfrak{p}_{j-1}$ – произвольный простой идеал кольца $k[X_0, \ldots, X_n]$, такой что $f_i \in \mathfrak{p}_{j-1} \subset \mathfrak{P}$ для всех $1 \le i \le j-1$, и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-1}) = n - j + 1$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Напомним, что $\mathfrak{p}_{j-1} = \mathfrak{p}_{j-1,n}$. Пусть μ – наименьшее целое число, такое что $\mu \ge 2^{-1} a_{j-1}^{-1} \delta_{j-1}$. Применяя Лемму 4, мы получаем, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-1}|_m \ge \binom{n-j+1+m-\mu}{n-j+1} c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1} \qquad (5)$$

для всех $m \ge \mu$.

Мы используем верхнюю границу для характеристической функции однородного простого идеала, полученную в [1] для случая нулевой характеристики. Этот результат был улучшен и расширен на случай ненулевой характеристики в [6]. Напомним, что $\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) = D$. В [6] доказано, что для всех $m \ge 0$ справедливо неравенство

$$|\Lambda/\mathfrak{P}|_m \le \binom{n-s+m}{n-s} D. \qquad (6)$$

Обозначим через S_{j-1} множество всех однородных простых идеалов $\mathfrak{p}_{j-1} \subset k[X_0, \ldots, X_n]$, таких что $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-1}) = n - j + 1$, и идеалы

$$(f_1, \ldots, f_{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j-1} \subset \mathfrak{P}.$$

Рассматривая эпиморфизм $(\Lambda/\mathfrak{p}_{j-1})_m \to (\Lambda/\mathfrak{P})_m$, мы видим, что из (5) и (6) следует, что если

$$\binom{n-j+1+m-\mu}{n-j+1} c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1} > \binom{n-s+m}{n-s} D, \qquad (7)$$

то существует однородный многочлен $g \in (\mathfrak{P})_m \setminus (\mathfrak{p}_{j-1})_m$ для всякого $m \ge \mu$ и всякого простого идеала $\mathfrak{p}_{j-1} \in S_{j-1}$. Следовательно, из (7) вытекает, что существует однородный многочлен

$$g \in (\mathfrak{P})_m \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}_{j-1} \in S_{j-1}} (\mathfrak{p}_{j-1})_m \qquad (8)$$

для всякого $m \ge \mu$. Заметим, что (7) эквивалентно неравенству

$$\prod_{1 \le i \le n-s} \frac{m-\mu+i}{m+i} \prod_{n-s < i \le n-j+1} (m-\mu+i) >$$
$$c_{j-1}^{-1} \frac{(n-j+1)!}{(n-s)!} \frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}.$$

Если $m \geq (n+1)\mu$, то всякий множитель первого произведения рассматриваемого неравенства больше, чем $n/(n+1)$. Следовательно, если

$$m \geq \max\left\{ \left(c_{j-1}^{-1} \frac{(n-j+1)!}{(n-s)!} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right)^{1/(s-j+1)} \times \right.$$
$$\left. \left(\frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}\right)^{1/(s-j+1)} + \mu,\ (n+1)\mu \right\} \tag{9}$$

то выполнено (7) и $m \geq \mu$. Следовательно, если справедливо (9), то существует однородный многочлен g, удовлетворяющий (8). Отметим, что по определению $\mathfrak{P}$-последовательности мы имеем $\deg g \geq \delta_j$.

Предположим, что максимум в правой части (9) равен первому члену в фигурных скобках. Тогда

$$\delta_j \leq 3 \left(\frac{4(n-j+1)!}{(n-s)!c_{j-1}}\right)^{1/(s-j+1)} \left(\frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}\right)^{1/(s-j+1)}. \tag{10}$$

Предположим, что максимум в правой части (9) есть $(n+1)\mu$. В этом случае

$$\delta_j \leq (n+1)(2^{-1}a_{j-1}^{-1}\delta_{j-1} + 1) \leq 2^{-1}\delta_j + n + 1$$

поскольку $a_{j-1} \geq n+1$ и $\delta_j \geq \delta_{j-1}$. Следовательно, $\delta_j \leq 2n+2$. Поэтому $\delta_i \leq 2n+2$ для всякого $1 \leq i \leq j$. Таким образом,

$$\delta_j \leq (2n+2)^{1+(j-1)/(s-j+1)} \left(\frac{D}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}\right)^{1/(s-j+1)} \tag{11}$$

в этом случае.

Положим

$$b_j = \max\left\{3n\left(4c_{j-1}^{-1}\right)^{1/(s-j+1)},\ (2n+2)^{1+(j-1)/(s-j+1)}\right\}. \tag{12}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следует, что для b_j, определённого по этой формуле, выполнено первое утверждение Теоремы 4. Таким образом, первое утверждение Теоремы 4 доказано.

В случае, когда $s = j$ положим $a_j = b_j + 1$. Следовательно, утверждение (ii) Теоремы 4 доказано для j в случае, когда $s = j$.

5 Доказательство второго утверждения Теоремы 4

Мы будем использовать обозначения из Раздела 1. Пусть $0 < j \leq s$. Мы будем предполагать по индукции, что Теорема 4 уже доказана для всех простых идеалов $\mathfrak{p}_u$ при $u < j$. Так что a_u, b_u, c_u определены для всех $0 \leq u < j$. В этом разделе наша цель – доказать утверждение (ii) Теоремы 4 и определить константу a_j.

Случай, когда $s = j$ был рассмотрен в предыдущем разделе. Так что мы будем предполагать без ограничения общности, что $s > j$.

Пусть $\mathfrak{p}_{j-1}, \mathfrak{p}_j$ – произвольные простые идеалы, такие как в предыдущих разделах. Напомним, что $\mathfrak{p}_{j-1} = \mathfrak{p}_{j-1,n}$. Пусть μ – наименьшее целое число, такое что $\mu \geq 2^{-1} a_{j-1}^{-1} \delta_{j-1}$. Применяя Лемму 4, мы получаем, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-1}|_m \geq \binom{n-j+1+m-\mu}{n-j+1} c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1} \tag{13}$$

для всех $m \geq \mu$.

Для всех $m \geq 0$ согласно [6] справедливо неравенство

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_j|_m \leq \binom{n-j+m}{n-j} \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j).$$

Следовательно, для всех $m \geq 0$ мы имеем

$$|\Lambda/(\mathfrak{p}_{j-1} + \mathfrak{p}_j)|_m \leq |\Lambda/\mathfrak{p}_j|_m \leq \binom{n-j+m}{n-j} \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j). \tag{14}$$

Обозначим через S_{j-1} множество всех однородных простых идеалов $\mathfrak{p}_{j-1} \subset k[X_0, \ldots, X_n]$, таких что $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-1}) = n-j+1$, и идеалы

$$(f_1, \ldots, f_{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j-1} \subset \mathfrak{P}.$$

Рассматривая эпиморфизм $(\Lambda/\mathfrak{p}_{j-1})_m \to (\Lambda/(\mathfrak{p}_{j-1} + \mathfrak{p}_j))_m$, мы видим, что из (13) и (14) следует, что если

$$\binom{n-j+1+m-\mu}{n-j+1} c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1} > \binom{n-j+m}{n-j} \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j), \tag{15}$$

то существует однородный многочлен $g \in (\mathfrak{p}_j)_m \backslash (\mathfrak{p}_{j-1})_m$ для всякого $m \geq \mu$ и всякого простого идеала $\mathfrak{p}_{j-1} \in S_{j-1}$. Следовательно, (15) влечёт, что существует однородный многочлен

$$g \in (\mathfrak{p}_j)_m \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}_{j-1} \in S_{j-1}} (\mathfrak{p}_{j-1})_m \subset (\mathfrak{P})_m \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}_{j-1} \in S_{j-1}} (\mathfrak{p}_{j-1})_m \tag{16}$$

для всякого $m \geq \mu$. Заметим, что (15) эквивалентно неравенству

$$(m-\mu+n-j+1) \prod_{1 \leq i \leq n-j} \frac{m-\mu+i}{m+i} > \frac{(n-j+1)\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)}{c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}.$$

Если $m \geq (n+1)\mu$, то $(m-\mu+i)/(m+i) > n/(n+1)$ для всякого $1 \leq i \leq n-j$. Следовательно, если

$$m \geq \max\Big\{\frac{n-j+1}{c_{j-1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)}{\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}} + \mu,\, (n+1)\mu\Big\}, \tag{17}$$

то выполняется (15) и $m \geq \mu$. Таким образом, если справедливо (17), то существует однородный многочлен g, удовлетворяющий (16). Отметим, что по определению $\mathfrak{P}$-последовательности мы имеем $\deg g \geq \delta_j$.

Предположим, что максимум в правой части (17) есть первый член в фигурных скобках. Тогда

$$\delta_j < \frac{12(n-j+1)\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)}{c_{j-1}\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-1}}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$12(n-j+1)c_{j-1}^{-1}\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) > \delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_j.$$

Предположим, что максимум в правой части (17) есть $(n+1)\mu$. В этом случае

$$\delta_j \le (n+1)(2^{-1}a_{j-1}^{-1}\delta_{j-1}+1) \le 2^{-1}\delta_j + n + 1$$

поскольку $a_{j-1}\ge n+1$ и $\delta_j \ge \delta_{j-1}$. Следовательно, $\delta_j \le 2n+2$. Поэтому $\delta_i \le 2n+2$ для всякого $1\le i\le j$. Таким образом,

$$(2n+2)^j \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j) \ge \delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_j \tag{19}$$

в этом случае.

Итак, если $j<s$, положим

$$a_j = \max\left\{12(n-j+1)c_{j-1}^{-1},\, (2n+2)^j+1\right\} \tag{20}$$

и, если $j=s$, положим

$$a_s = b_s + 1. \tag{21}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что для a_j, определённого по этой формуле, справедливо второе утверждение Теоремы 4. Таким образом, второе утверждение Теоремы 4 доказано.

6 Доказательство третьего утверждения Теоремы 4

Мы используем обозначения из Раздела 1. Пусть $0<j\le s$. Мы будем предполагать по индукции, что Теорема 4 уже доказана для всех простых идеалов $\mathfrak{p}_u$ при $u<j$ и утверждение (ii) уже доказано для j. Так что a_u определены для всех $0\le u\le j$, константы b_u и c_u определены для всех $1\le u<j$. В этом разделе наша цель – доказать утверждение (iii) Теоремы 4 и определить константу c_j.

Пусть v, $1\le v\le j$ – целое число. Пусть $\mathfrak{p}_{j-v}$ – произвольный однородный простой идеал, такой что $(f_1,\ldots,f_{j-v})\subset\mathfrak{p}_{j-v}\subset\mathfrak{p}_j$. По индукционному предположению и Лемме 4 для всякого $m\ge a_{j-v}^{-1}\delta_{j-v}$ справедливо неравенство

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j}|_m > (2^v v!)^{-1}c_{j-v}\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_{j-v}m^v. \tag{22}$$

Предположим, что

$$(2^v v!)^{-1}c_{j-v}\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_{j-v}m^v > |\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m. \tag{23}$$

Рассматривая эпиморфизм $(\Lambda/\mathfrak{p}_{j-v,j})_m \to (\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j})_m$, мы видим, что из (22) и (23) следует, что существует однородный многочлен $g\in(\mathfrak{p}_{j,j})_m\setminus(\mathfrak{p}_{j-v,j})_m$. Следовательно, $\dim\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j})\cap\mathcal{Z}(g) < \dim\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j})$, и $\deg g = m$.

Покажем, что всякая точка из $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j})$ не принадлежит никакой компоненте W многообразия $\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_j)$, которая не содержится в $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$. В самом деле, иначе, эта точка принадлежит пересечению $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)\cap W$, т.е. принадлежит некоторому алгебраическому многообразию W_1 размерности меньше, чем $n-j$, определённому над k. Но общее линейное пространство

$\mathcal{Z}(\mathfrak{u}_j)$ не пересекается ни с каким алгебраическим многообразием, определённым над k, размерности меньше, чем $n-j$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

По определению $\mathfrak{P}$-последовательности алгебраическое многообразие $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ является неприводимой компонентой алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v}) \cap \mathcal{Z}(f_{j-v+1}, \ldots, f_j)$. Следовательно, всякая точка из $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j})$ является изолированной точкой алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j}) \cap \mathcal{Z}(f_{j-v+1}, \ldots, f_j)$.

ЛЕММА 5 *Существуют однородные многочлены* $\widetilde{f}_{j-v+2}, \ldots, \widetilde{f}_j \in k[X_0, \ldots, X_n]$, *такие что всякая точка из* $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j})$ *является изолированной точкой алгебраического многообразия*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j}) \cap \mathcal{Z}(g) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{f}_{j-v+2}, \ldots, \widetilde{f}_j),$$

и степени $\deg \widetilde{f}_i = \delta_i$ *для всех* $j-v+2 \le i \le j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Фактически доказательство этой леммы аналогично доказательству Леммы 1, однако мы изложим его подробно для полноты. Пусть $j-v+3 \le u \le j+1$ – целое число. Предположим, что мы уже построили многочлены $\widetilde{f}_i$ для $u \le i \le j$. Предположим также, что

$$\widetilde{f}_i = f_i + \sum_{j-v+1 \le w \le i-1} h_{i,w} f_w,$$

где $h_{i,w} \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, и $\deg h_{i,w} = \delta_i - \delta_w$ для всех i и w. Предположим, что всякая компонента W алгебраического многообразия

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j}) \cap \mathcal{Z}(g) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{f}_u, \ldots, \widetilde{f}_j),$$

такая что $W \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j}) \ne \emptyset$ имеет размерность $\dim W = u-j+v-2$. Так что в случае, когда $u = j+1$, ничего не построено.

Покажем, что мы можем построить многочлен $\widetilde{f}_{u-1}$, такой что описанные требования будут удовлетворены, если заменить u на $u-1$. Пусть W – введённая выше неприводимая компонента. Всякая точка из $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j}) \cap W$ является изолированной точкой алгебраического многообразия

$$\begin{aligned} &W \cap \mathcal{Z}(f_{j-v+1}, \ldots, f_j) = W \cap \mathcal{Z}(f_{j-v+1}, \ldots, f_{u-1}, \widetilde{f}_u, \ldots, \widetilde{f}_j) = \\ &W \cap \mathcal{Z}(f_{j-v+1}, \ldots, f_{u-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, существуют однородные многочлены $\widetilde{h}_w$ степеней $\deg \widetilde{h}_w = \delta_{u-1} - \delta_w$ для всех $j-v+1 \le w \le u-1$, такие что $\widetilde{h}_{u-1} = 1$, и всякий многочлен $\widetilde{h}_w$, $j-v+1 \le w \le u-2$, не обращается в нуль ни в какой точке из $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j})$. Тогда всякая точка алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j}) \cap W$ является изолированной точкой в

$$W \cap \mathcal{Z}(\widetilde{h}_{j-v+1} f_{j-v+1}, \ldots, \widetilde{h}_{u-1} f_{u-1})$$

для любой неприводимой компоненты W. Следовательно, существуют элементы $\alpha_{j-v+1}, \ldots, \alpha_{u-2} \in k$, такие что

$$W \cap \mathcal{Z}(f_{u-1} + \sum_{j-v+1 \le w \le u-2} \alpha_w \widetilde{h}_w f_w) \ne W$$

для всякой неприводимой компоненты W, введённой выше. Таким образом, мы можем положить $h_{u-1,w} = \alpha_w \widetilde{h}_w$ для всех $j - v + 1 \le w \le u - 2$. Наше утверждение доказано. Следовательно, рекурсивно мы можем построить требуемые многочлены $\widetilde{f}_i$, $j - v + 2 \le i \le j$. Лемма доказана.

Теперь по Лемме 5, неравенству Безу и (i) мы имеем следующие неравенства

$$\begin{aligned}
&\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j}) \deg g \deg \widetilde{f}_{j-v+2} \cdot \ldots \cdot \deg \widetilde{f}_j \ge \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j}),\\
&\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-v} \ge \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j-v,j}),\\
&\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_{j,j}) > a_j^{-1} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j.
\end{aligned}$$

Напомним, что $\deg g = m$ и по Лемме 5 степень $\deg \widetilde{f}_w = \delta_w$ для $j - v + 2 \le w \le j$. Следовательно,

$$\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-v} m \delta_{j-v+2} \cdot \ldots \cdot \delta_j > a_j^{-1} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j.$$

Так что $m > a_j^{-1} \delta_{j-v+1}$. Таким образом, мы доказали следующий факт.

ЛЕММА 6 *Пусть $1 \le v \le j \le s$ – целые числа. Предположим, что целое число m удовлетворяет неравенству $a_{j-v}^{-1} \delta_{j-v} \le m \le a_j^{-1} \delta_{j-v+1}$. Тогда*

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge (2^v v!)^{-1} c_{j-v} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-v} m^v. \tag{24}$$

Положим $v = 1$, если $a_{j-1}^{-1} \delta_{j-1} < 2^{-1} a_j^{-1} \delta_j$. Если $a_{j-1}^{-1} \delta_{j-1} \ge 2^{-1} a_j^{-1} \delta_j$, то положим

$$v = 1 + \max\{w \,:\, a_{j-w}^{-1} \delta_{j-w} \ge 2^{-1} a_j^{-1} \delta_{j-w+1} \,\&\, 1 \le w \le j\}. \tag{25}$$

В дальнейшем мы рассмотрим два случая. В первом случае предположим, что

$$\delta_{j-v+1} > 2 a_j, \tag{26}$$

во втором, что

$$\delta_{j-v+1} \le 2 a_j. \tag{27}$$

Пусть выполнено (26). Тогда $v \le j$, поскольку $a_j > 1$. Далее,

$$a_j^{-1} \delta_{j-v+1} - 2^{-1} a_j^{-1} \delta_{j-v+1} = 2^{-1} a_j^{-1} \delta_{j-v+1} > 1.$$

Следовательно, существует целое число m, такое что

$$2^{-1} a_j^{-1} \delta_{j-v+1} \le m \le a_j^{-1} \delta_{j-v+1}. \tag{28}$$

Так что согласно (25) и, поскольку $v \le j$, для этого m справедливо неравенство

$$a_{j-v}^{-1} \delta_{j-v} < m \le a_j^{-1} \delta_{j-v+1}. \tag{29}$$

Теперь Лемма 6 и (28) влекут, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge (2^v v!)^{-1} c_{j-v} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-v} 2^{-v} a_j^{-v} \delta_{j-v+1}^v. \tag{30}$$

Снова согласно (25) выполнены неравенства

$$2^{-1} a_j^{-1} a_{j-w} \delta_{j-w+1} \le \delta_{j-w}$$

для всех $1 \le w \le v-1$. Следовательно,

$$2^{v-w-1} a_j^{v-w-1} a_{j-w-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{-1} \delta_{j-v+1} \ge \delta_{j-w} \tag{31}$$

для всех $0 \le w \le v-2$. Из (30) и (31) вытекает, что

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge (2^v v!)^{-1} c_{j-v} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{j-v+1} 2^{-v} a_j^{-v} \times$$
$$\prod_{0 \le w \le v-2} \frac{\delta_{j-w}}{2^{v-w-1} a_j^{v-w-1} a_{j-w-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{-1}} =$$
$$(2^v v!)^{-1} c_{j-v} 2^{-(v^2+v)/2} a_j^{(-v^2-v)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{v-1} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j$$

для всех $m \ge 2^{-1} a_j^{-1} \delta_{j-v+1}$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда выполнено (27). Предположим, что $v \le j$. Тогда $\delta_1 \le \ldots \le \delta_{j-v+1} \le 2a_j$ и, как и в первом случае, выполнено (31) для всех $0 \le w \le v-2$. Следовательно, для всякого $m \ge 1$

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge 1 \ge \frac{\delta_1}{2a_j} \cdot \ldots \cdot \frac{\delta_{j-v+1}}{2a_j} \times$$
$$\prod_{0 \le w \le v-2} \frac{\delta_{j-w}}{2a_j 2^{v-w-1} a_j^{v-w-1} a_{j-w-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{-1}} =$$
$$(2a_j)^{-j} 2^{(-v^2+v)/2} a_j^{(-v^2+v)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{v-1} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j.$$

Наконец предположим, что $v = j+1$. Тогда, как и в первом случае, удовлетворяется (31) для всех $0 \le w \le v-2$. Напомним, что $\delta_0 = 1$. Следовательно, для всякого $m \ge 1$

$$|\Lambda/\mathfrak{p}_{j,j}|_m \ge 1 \ge \prod_{0 \le w \le v-2} \frac{\delta_{j-w}}{2^{v-w-1} a_j^{v-w-1} a_{j-w-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{-1}} =$$
$$2^{(-v^2+v)/2} a_j^{(-v^2+v)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{v-1} \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j =$$
$$2^{-(j^2+j)/2} a_j^{-(j^2+j)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_0^j \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_j.$$

Положим для всякого $1 \le v \le j$

$$\begin{aligned} c'_{j,v} &= (2^v v!)^{-1} c_{j-v} 2^{-(v^2+v)/2} a_j^{(-v^2-v)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{v-1}, \\ c''_{j,v} &= (2a_j)^{-j} 2^{(-v^2+v)/2} a_j^{(-v^2+v)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_{j-v+1}^{v-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Положим

$$c'''_j = 2^{-(j^2+j)/2} a_j^{-(j^2+j)/2} a_{j-1} a_{j-2}^2 \cdot \ldots \cdot a_0^j. \tag{33}$$

По определению положим

$$c_j = \min_{1 \le v \le j} \{c'_{j,v}, c''_{j,v}, c'''_j\}. \tag{34}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следует, что для c_j, определённого по этой формуле, выполняется третье утверждение Теоремы 4. Таким образом, третье утверждение Теоремы 4 доказано.

Требуемые в формулировке Теоремы 4 оценки для констант a_j, b_j и c_j^{-1} теперь следуют немедленно из (2), (12), (20), (21), (32), (33) и (34). Теорема 4 и Теорема 1 полностью доказаны.

7 Некоторые факты из теории исключения

Пусть $n \geq 0$. Рассмотрим $n+1$ однородных многочленов $F_0, \ldots, F_n$ от $n+1$ переменных $X_0, \ldots, X_n$ степени $\deg F_i = d_i$, $0 \leq i \leq n$ с неопределёнными коэффициентами, т.е. семейство всех коэффициентов этих многочленов является алгебраически независимым над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ кольцо, порождённое коэффициентами многочленов $F_0, \ldots, F_n$ над $\mathbb{Z}$. По определению *результант (или результантная форма) однородных многочленов* $F_0, \ldots, F_n$ – это единственный с точностью до множителя ± 1 неприводимый элемент $R \in \mathcal{R}$ (он существует, см. [3]), удовлетворяющий следующему условию. Пусть $\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_n$ – произвольные однородные многочлены относительно $X_0, \ldots, X_n$ степеней $\deg \widetilde{F}_i = d_i$, $0 \leq i \leq n$, с коэффициентами из поля K_1. Так что коэффициенты многочленов $\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_n$ соответствуют коэффициентам $F_0, \ldots, F_n$. Пусть $\widetilde{R} \in K_1$ получен при помощи подстановки коэффициентов многочленов $\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_n$ в R и естественного гомоморфизма $\mathbb{Z} \to K_1$. Тогда $\widetilde{R} = 0$ в том и только в том случае, если $\mathcal{Z}(\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_n) \neq \emptyset$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K_1})$. Элемент $\widetilde{R}$ называется *результантом однородных многочленов* $\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_n$. Множитель ± 1 в определении результанта может быть выбран каноническим образом, используя Лемму 7, см. Определение 4 ниже. Мы будем обозначать результант с канонически выбранным знаком

$$\widetilde{R} = \mathrm{Res}_{X_0, \ldots, X_n}(\widetilde{R}_0, \ldots, \widetilde{R}_n).$$

Обозначим через $(F_0, \ldots, F_n)$ идеал кольца $\mathcal{R}[X_0, \ldots, X_n]$, порождённый $F_0, \ldots, F_n$. Основное свойство результанта R, см. [3], ср. [9], [10], состоит в том, что для всех достаточно больших целых чисел N и всех $0 \leq i \leq n$

$$RX_i^N \in (F_0, \ldots, F_n). \tag{35}$$

В [3] это свойство доказано, если заменить $\mathbb{Z}$ примитивным полем (и K_1 – поле той же самой характеристики), и этого будет достаточно для наших целей в дальнейшем.

ЛЕММА 7 *Пусть $n \geq 1$. Обозначим через R_1 результант n однородных многочленов*
$F_0(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0), \ldots, F_{n-1}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0)$ от n переменных $X_0, \ldots,$ X_{n-1}. Тогда

$$R = \pm R_1^{d_n} \prod_{\xi} F_n(\xi), \tag{36}$$

где $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, 1)$, и $(\xi_0 : \ldots : \xi_{n-1} : 1)$ пробегает все корни системы $F_0 = \ldots = F_{n-1} = 0$ в $\mathbb{P}^n(\overline{\mathcal{K}})$, причём $\mathcal{K}$ – поле частных кольца $\mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Обозначим через $F^{(i)}$ семейство коэффициентов многочлена F_i. Заметим, что результант R, рассматриваемый как многочлен относительно $F^{(n)}$, равен произведению $\prod_{\xi} F_n(\xi)$ с точностью до множителя из поля, порождённого над $\mathbb{Q}$ коэффициентами из семейств $F^{(0)}, \ldots, F^{(n-1)}$. Следовательно,

$$\deg_{F^{(n)}} \prod_{\xi} F_n(\xi) = d_0 \cdot \ldots \cdot d_{n-1}.$$

Поэтому для $i = n$ (и, следовательно, по симметрии для всякого $0 \le i \le n$) многочлен R является однородным относительно $F^{(i)}$ степени

$$\deg_{F^{(i)}} R = (\prod_{0 \le j \le n} d_j)/d_i. \tag{37}$$

Далее, обозначим через $R^{(n-1)}(Z_{n-1}, Z_n)$ результант n однородных относительно $X_0, \dots, X_{n-1}$ многочленов

$$F_i(X_0, \dots, X_{n-2}, Z_n X_{n-1}, Z_{n-1} X_{n-1}), \quad 0 \le i \le n-1.$$

Так что $R^{(n-1)}(Z_{n-1}, Z_n)$ является однородным многочленом относительно каждого семейства $F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)}$. Согласно определению результанта $R^{(n-1)}(1, \xi_{n-1}) = 0$ для всякого ξ. Следовательно, все элементарные симметрические функции корней ξ_{n-1} многочлена $R^{(n-1)}(1, Z_n)$, являющиеся рациональными функциями от $F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)}$, имеют степень 0 относительно каждого $F^{(i)}$, $0 \le i \le n-1$ (степень рациональной функции равна разности степеней её числителя и знаменателя). То же самое по симметрии верно для элементарных симметрических функций от ξ_i для всех $0 \le i \le n-1$. Следовательно, (мы оставляем детали читателю)

$$\deg_{F^{(i)}} \prod_{\xi} F_n(\xi) = 0, \quad 0 \le i \le n-1. \tag{38}$$

Предположим, что (39), см. ниже, доказано по индукции для многочленов от n переменных. Тогда (39), влечёт, что $R^{(n-1)}$ является однородным многочленом относительно Z_{n-1}, Z_n. Следовательно, R_1 является старшим коэффициентом при Z_n многочлена $R^{(n-1)}(1, Z_n)$. Следовательно, $R_1 \xi_i$ цел над кольцом многочленов, порождённым над $\mathbb{Z}$ семействами $F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)}$ для $i = n-1$ и по симметрии для всех $0 \le i \le n-1$. Напомним, что R_1 и R являются неприводимыми элементами $\mathcal{R}$. Следовательно, $R = \pm R_1^N \prod_\xi F_n(\xi)$ для некоторого целого числа $N \ge 0$. Теперь из (37), применённого к R и R_1, и согласно (38) мы получаем, что $N = d_n$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 *Лемма 7 остаётся верной, если заменить в её формулировке общий многочлен F_n на произвольный однородный многочлен $\widetilde{F}_n$ степени d_n и результант R на $\mathrm{Res}_{X_0,\dots,X_n}(F_1, \dots, F_{n-1}, \widetilde{F}_n)$. Доказательство остаётся без изменений.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 *Пусть $n = 0$, и $F_0 = aX_0^{d_0}$. Положим результант $\mathrm{Res}_{X_0}(F_0) = a$. Пусть $n \ge 1$, и результант определён рекурсивно для n однородных многочленов от n переменных $X_0, \dots, X_{n-1}$. По определению положим результант*

$$\mathrm{Res}_{X_0,\dots,X_n}(F_0, \dots, F_n) = R_1^{d_n} \prod_{\xi} F_n(\xi),$$

где R_1 и произведение по всем ξ те же самые, что и в (36).

Результант удовлетворяет следующему изобарическому соотношению.

ЛЕММА 8 *Пусть* $n \geq 0$. *Обозначим* $D = d_0 \cdot \ldots \cdot d_n$. *Пусть* $0 \neq \lambda \in \overline{\mathcal{K}}$ *– произвольный элемент Обозначим через* R_2 *результант однородных многочленов* $F_0(X_0, \ldots, X_{n-1}, \lambda X_n), \ldots, F_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, \lambda X_n)$. *Тогда*

$$R_2 = \lambda^D R \tag{39}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Мы докажем (39), используя индукцию по n. База $n = 0$ тривиальна. Пусть $n \geq 1$, и выполнено (39) для многочленов с числом переменных меньше, чем $n+1$. Пусть $(\xi_0 : \ldots : \xi_{n-1} : 1)$ – корень системы $F_0 = \ldots = F_{n-1} = 0$. Тогда $(\lambda\xi_1 : \ldots : \lambda\xi_{n-1} : 1)$ является корнем системы

$$F_0(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, \lambda X_n) = \ldots = F_{n-1}(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, \lambda X_n) = 0.$$

Теперь (39) следует из (36) (отметим, что равенство (39) для n однородных многочленов используется в доказательстве (36), и это возможно по индукционному предположению). Лемма доказана.

Пусть $f_0, \ldots, f_n$ – однородные многочлены относительно $X_0, \ldots, X_n$. Пусть σ перестановка множества $0, \ldots, n$. Тогда из определения результанта, данного в начале, раздела следует, что

$$\mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_{\sigma(0)}, \ldots, f_{\sigma(n)}) = \pm \mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_n), \tag{40}$$

$$\mathrm{Res}_{X_{\sigma(0)},\ldots,X_{\sigma(n)}}(f_0, \ldots, f_n) = \pm \mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_n). \tag{41}$$

Пусть g_n – однородный многочлен относительно $X_0, \ldots, X_n$. Тогда из (36) и Замечания 2 следует, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n g_n) = \\ &\mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n)\, \mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_{n-1}, g_n) \end{aligned} \tag{42}$$

Пусть $\deg f_n \geq \deg f_i$ для некоторого $0 \leq i \leq n-1$. Пусть g_i – однородный многочлен относительно $X_0, \ldots, X_n$ степени $\deg g_i = \deg f_n - \deg f_i$. Тогда из (36) и Замечания 2 следует, что

$$\mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n + g_i f_i) = \mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n) \tag{43}$$

Пусть $\deg f_n = 0$, и $D = \deg f_0 \cdot \ldots \cdot \deg f_{n-1}$. Тогда из (36) и Замечания 2 следует, что

$$\mathrm{Res}_{X_0,\ldots,X_n}(f_0, \ldots, f_n) = f_n^D. \tag{44}$$

8 Общие проекции и их специализации

Пусть идеал $\mathfrak{P}$ и алгебраическое многообразие $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ – такие же, как в предыдущих разделах. Рассмотрим линейные формы

$$U_i = \sum_{0 \leq j \leq n} u_{i,j} X_j, \quad i = 0, s, s+1, \ldots, n,$$

введённые в Разделе 1. Так что $u_{i,j} \in K$, $i = 0, s, s+1, \ldots, n$, $0 \leq j \leq n$, – семейство алгебраически независимых над k элементов. Обозначим для краткости семейство

$$\mathcal{U} = \{u_{i,j}\}_{i=0,s,s+1,\ldots,n,\, 0 \leq j \leq n}.$$

Мы будем обозначать через $k[\mathcal{U}]$ (соответственно $k(\mathcal{U})$) кольцо (соответственно поле), порождённое над k элементами из $\mathcal{U}$, и использовать другие аналогичные обозначения.

Существует единственный (с точностью до ненулевого множителя из k) неприводимый многочлен

$$H_{\mathfrak{P}} \in k[\mathcal{U}, Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$$

однородный относительно $Z_0, Z_s, \ldots, Z_n$, такой что $H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{U}, U_0, U_s, \ldots, U_n)$ обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, рассматриваемом как подмногообразие в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$. Известно, что $H_{\mathfrak{P}}$, рассматриваемый как многочлен от $Z_0, Z_s, \ldots, Z_n$, сепарабелен и имеет степень $\deg_{Z_0, Z_s, \ldots, Z_n} H_{\mathfrak{P}} = \deg V$, ср. также с доказательством Леммы 9 ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 *Многочлен $H_{\mathfrak{P}}$ называется формой, соответствующей общей проекции многообразия V.*

ЛЕММА 9 *Степень $\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} H_{\mathfrak{P}} = \deg V$ для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Обозначим для краткости $H = H_{\mathfrak{P}}$ и положим

$$\mathcal{U}' = \{u_{i,j}\}_{i=0,s,s+1,\ldots,n-1,\, 0 \le j \le n}.$$

Рассмотрим систему однородных уравнений относительно $X_0, \ldots, X_n$ с коэффициентами в поле $k(\mathcal{U}')(Z_s, \ldots, Z_{n-1})$

$$f = 0,\ f \in \mathfrak{P},\ U_s - Z_s U_0 = \ldots = U_{n-1} - Z_{n-1} U_0 = 0. \tag{45}$$

Для всякого решения ξ системы (45) мы имеем $U_0(\xi) \ne 0$, поскольку все U_i являются линейными формами с трансцендентными коэффициентами, и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) = n - s$. Поскольку все $U_i - Z_i U_0$ являются линейными формами с трансцендентными коэффициентами, существует $\deg \mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ различных решений ξ (все они однократные) системы (45). Обозначим для краткости $D = \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Далее,

$$k(\mathcal{U}')(Z_s, \ldots, Z_{n-1}) = k(\mathcal{U}')((U_s/U_0)(\xi), \ldots, (U_{n-1}/U_0)(\xi)).$$

Следовательно, степень трансцендентности поля, порождённого аффинными координатами точки ξ, равна $n - s$. Следовательно, ξ является общей точкой многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, рассматриваемого как алгебраическое многообразие, определённое над полем $k(\mathcal{U})$.

По определению положим

$$H_1 = \prod_{\xi} (Z_n - (U_n/U_0)(\xi)), \tag{46}$$

где ξ пробегает все корни в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{U}', Z_s, \ldots, Z_{n-1})})$ системы (45). Отметим, что

$$(U_n/U_0)(\xi) = \sum_{0 \le j \le n} (X_j/U_0)(\xi) u_{n,j}, \tag{47}$$

где $(X_j/U_0)(\xi) \in \overline{k(\mathcal{U}', Z_s, \ldots, Z_{n-1})}$. Далее, H_1 является симметрической функцией решений ξ. Следовательно,

$$H_1 \in k(\mathcal{U}')(Z_s, \ldots, Z_{n-1})[Z_n, u_{n,0}, u_{n,s}, \ldots, u_{n,n}],$$

и $\deg_{Z_n} H_1 = \deg_{u_{n,0}, u_{n,s}, \ldots, u_{n,n}} H_1 = D$.

Следовательно, существует $0 \neq H_2 \in k[\mathcal{U}'][Z_s, \ldots, Z_{n-1}]$, такой что все элементы $(X_j/U_0)(\xi)H_2$, $0 \leq j \leq n$, являются целыми над $k[\mathcal{U}'][Z_s, \ldots, Z_{n-1}]$. Следовательно, многочлен

$$H_3 = H_1 H_2^D \in k[\mathcal{U}][Z_s, \ldots, Z_n]. \tag{48}$$

Согласно (46) мы имеем $H_3(Z_s, \ldots, Z_{n-1}, (U_n/U_0)(\xi)) = 0$. Следовательно, из (45) мы получаем, что $H_3((U_s/U_0)(\xi), \ldots, (U_{n-1}/U_0)(\xi), (U_n/U_0)(\xi)) = 0$. Но ξ является общей точкой $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Таким образом, рациональная функция $H_3((U_s/U_0), \ldots, (U_n/U_0))$ обращается в нуль тождественно на непустом открытом в топологии Зарисского подмножестве многообразия $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Следовательно, многочлен $H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{U}, 1, Z_s, \ldots, Z_n)$ делит H_3. Но $\deg_{Z_n} H_{\mathfrak{P}} = D = \deg_{Z_n} H_1 = \deg_{Z_n} H_3$. Так что H_1 делит $H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{U}, 1, Z_s, \ldots, Z_n)$ в кольце

$$k(\mathcal{U}')(Z_s, \ldots, Z_{n-1})[Z_n, u_{n,0}, u_{n,s}, \ldots, u_{n,n}].$$

Следовательно, $\deg_{u_{n,0}, u_{n,s}, \ldots, u_{n,n}} H_{\mathfrak{P}} = \deg_{u_{n,0}, u_{n,s}, \ldots, u_{n,n}} H_1 = D$. Утверждение леммы доказано для $i = n$. Для $i = 0, s, s+1, \ldots, n-1$ оно следует из симметрии всех индексов. Лемма доказана.

Пусть $n \geq s \geq 1$. Пусть $g_1, \ldots, g_s \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, такие что $\dim \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) = n - s$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Обозначим $D = \deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_s$. Пусть $\mathfrak{P}_i$, $i \in I$, – семейство всех однородных простых идеалов, таких что

$$(g_1, \ldots, g_s) \subset \mathfrak{P}_i \subset k[X_0, \ldots, X_n],$$

и $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i) = n - s$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.

Пусть $L_i = \sum_{0 \leq j \leq n} l_{i,j} X_j$, $i = 0, s, s+1, \ldots, n$, является семейством линейных форм от $X_0, \ldots, X_n$ с коэффициентами $l_{i,j}$ из некоторого расширения поля k. Обозначим для краткости семейство коэффициентов

$$\mathcal{L} = \{l_{i,j}\}_{i=0,s,s+1,\ldots,n,\, 0 \leq j \leq n}. \tag{49}$$

Мы будем обозначать через $k[\mathcal{L}]$ (соответственно $k(\mathcal{L})$) кольцо (соответственно поле), порождённое над k элементами из $\mathcal{L}$.

Пусть

$$\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) \cap \mathcal{Z}(L_s, \ldots, L_n) = \emptyset, \tag{50}$$

$$\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) \cap \mathcal{Z}(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_{n-1}) = \emptyset \tag{51}$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$. Рассмотрим линейную проекцию

$$\begin{aligned} \pi_i \,:\, \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i) &\to \mathbb{P}^{n-s+1}(\overline{k(\mathcal{L})}), \\ (X_0 : \ldots : X_n) &\mapsto (L_0 : L_s : L_{s+1} : \ldots : L_n). \end{aligned} \tag{52}$$

Покажем, что $\pi_i(\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)) = \mathcal{Z}(H_i)$, где

$$H_i \in k(\mathcal{L})[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$$

является единственным с точностью до множителя из $k(\mathcal{L})$ сепарабельным многочленом. Действительно, $k(\mathcal{L})$ является сепарабельным расширением k. Следовательно, можно представить $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i) = \cup_{j \in J_i} W_j$, где W_j являются попарно различными определёнными над $k(\mathcal{L})$ и неприводимыми над $k(\mathcal{L})$ компонентами $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$. Из условия (50) следует, см., например, [4], что существует единственный неприводимый многочлен $H_j \in k(\mathcal{L})[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$, такой что $\pi_i(W_j) = \mathcal{Z}(H_j)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$. Расширение $k(\mathcal{L})(W_j) \supset k(\mathcal{L})$ является сепарабельным. Пусть $p = \mathrm{char}(k) > 0$. Тогда W_j неприводимо над полем $k(\mathcal{L})^{1/p}$, и поля $k(\mathcal{L})(W_j)$ и $k(\mathcal{L})^{1/p}$ линейно разделены в поле $k(\mathcal{L})^{1/p}(W_j)$ над $k(\mathcal{L})$. Следовательно, если многочлен $0 \neq H^{(1)} \in k(\mathcal{L})^{1/p}[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$ является, таким что $H^{(1)}(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_n)$ обращается в нуль тождественно на W_j, то существует многочлен $0 \neq H^{(2)} \in k(\mathcal{L})[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$, такой что $H^{(2)}(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_n)$ обращается в нуль тождественно на W_j, и $\deg H^{(2)} \leq \deg H^{(1)}$. Следовательно, все многочлены H_j сепарабельны в случае любой характеристики. Пусть J_i' – некоторое максимальное подмножество множества J_i, такое что все алгебраические многообразия $\pi_i(W_j)$, $j \in J_i'$ являются попарно различными. Тогда $H_i = \prod_{j \in J_i'} H_j$ и, следовательно, H_i также сепарабелен. Требуемое утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 *Многочлен H_i называется формой, соответствующей проекции $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$, определённой линейными формами $L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_n$.*

Так что $H_i(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_n)$ обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$, рассматриваемом как подмногообразие $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$. В случае, когда $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, положим $H_i = H_{\mathfrak{P}_i}$, где $H_{\mathfrak{P}_i}$ – форма, соответствующая общей проекции $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$, для всякого $i \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 *Фактически, в дальнейшем нам потребуется только два случая, когда $k(\mathcal{L}) = k$, или, когда $k(\mathcal{L})$ является чисто трансцендентным расширением k. В обоих случаях многочлен H_i неприводим над $k(\mathcal{L})$. Так что мы будем предполагать в дальнейшем для простоты, (хотя это не принципиально, и можно было бы рассмотреть общий случай), что выполнено следующее условие.*

(A) Поле $k(\mathcal{L}) = k$, или $k(\mathcal{L})$ является чисто трансцендентным расширением k.

Определим эквивалентность на множестве I следующим образом. Два индекса i_1 и i_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $H_{i_1} = \lambda H_{i_2}$ для некоторого $0 \neq \lambda \in k(\mathcal{L})$. Определим J как фактормножество I по этой эквивалентности. Для всякого $i \in J$ выберем $i_1 \in i$ и положим $H_i = H_{i_1}$.

Рассмотрим систему однородных полиномиальных уравнений относительно $X_0, \ldots, X_n$ с коэффициентами в поле $k(\mathcal{L})(Z_0, Z_s, \ldots, Z_n)$

$$g_1 = \ldots = g_s = Z_0 L_s - Z_s L_0 = \ldots = Z_0 L_n - Z_n L_0 = 0. \tag{53}$$

Положим

$$\Delta_0 = \mathrm{Res}_{X_0, \ldots, X_n}(g_1, \ldots, g_s, Z_0 L_s - Z_s L_0, \ldots, Z_0 L_n - Z_n L_0). \tag{54}$$

Так что Δ_0 является многочленом от $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$. Подставляя 0 вместо Z_i, $s \le i \le n$ в (53) мы получаем систему, которая не имеет ненулевых решений по (50). Следовательно, $\Delta_0 \ne 0$, и Z_i не делит Δ_0 для всякого $s \le i \le n$. Если $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, то по (37) мы имеем

$$\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} \Delta_0 = \deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_s = D \tag{55}$$

для всякого $i = s, s+1, \ldots, n$. Представим

$$\Delta_0 = Z_0^{N_0} \Delta_{\mathcal{L}}, \tag{56}$$

где $\Delta_{\mathcal{L}} \in k[\mathcal{L}][Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$, и целое число N_0 – максимальное возможное.

ЛЕММА 10 *Справедливы следующие утверждения.*

(a) $N_0 = (n-s)D$.

(b) Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{U}$. *Тогда степень* $\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} \Delta_{\mathcal{L}} = \deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_s = D$ *для всякого* $i = 0, s, s+1, \ldots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Согласно (55) достаточно доказать утверждение (b) леммы для $i = 0$. Рассмотрим систему однородных полиномиальных уравнений относительно $X_0, \ldots, X_n$ с коэффициентами в поле $k(\mathcal{L})(Z_0, Z_s, \ldots, Z_n)$

$$g_1 = \ldots = g_s = Z_n L_0 - Z_0 L_n = Z_n L_s - Z_s L_n = \ldots = Z_n L_{n-1} - Z_{n-1} L_n = 0. \tag{57}$$

Положим

$$\begin{aligned} \Delta_n = \mathrm{Res}_{X_0, \ldots, X_n}(&g_1, \ldots, g_s, \\ &Z_n L_0 - Z_0 L_n, Z_n L_s - Z_s L_n, \ldots, Z_n L_{n-1} - Z_{n-1} L_n). \end{aligned}$$

Подставляя 0 вместо Z_i, $i = 0, s, s+1, \ldots, n-1$, в (57) мы получаем систему, которая не имеет ненулевых решений по (51). Следовательно, $\Delta_n \ne 0$ и Z_i не делит Δ_n для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n-1$.

Заметим, что

$$Z_0(Z_n L_i - Z_i L_n) = Z_n(Z_0 L_i - Z_i L_0) + Z_i(Z_n L_0 - Z_0 L_n)$$

для всякого $s \le i \le n-1$. Следовательно, согласно (40), (43), (44) и (42) мы получаем, что

$$Z_n^{(n-s)D} \Delta_0 = \pm Z_0^{(n-s)D} \Delta_n.$$

Следовательно, $N_0 = (n-s)D$. Далее, если $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, то для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n-1$ справедливы равенства аналогичные (55)

$$\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} \Delta_n = D.$$

Следовательно, $\deg_{u_{0,0}, u_{0,s}, \ldots, u_{0,n}} \Delta_0 = D$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11 *Существуют семейство положительных целых чисел e_i, $i \in J$, и семейство однородных многочленов $h_1, \ldots, h_s \in k[\mathcal{L}][X_0, \ldots, X_n]$, такие что*

$$\sum_{i \in J} e_i \deg_{Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n} H_i = \deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_s, \tag{58}$$

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \mu \prod_{i \in J} H_i^{e_i},$$

$$h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s = \Delta_{\mathcal{L}}(L_0, L_s, \ldots, L_n),$$

где $0 \neq \mu \in k(\mathcal{L})$ и, если $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, то $0 \neq \mu \in k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Согласно (37) Δ_0 является однородным многочленом относительно $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$ степени $(n-s+1)D$. Следовательно, по Лемме 10 (a) многочлен $\Delta_{\mathcal{L}}$ однороден относительно $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$ степени

$$\deg_{Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n} \Delta_{\mathcal{L}} = D. \tag{59}$$

Предположим, что $\Delta_{\mathcal{L}}(z_0^*, z_s^*, z_{s+1}^*, \ldots, z_n^*) = 0$ для некоторых $z_0^*, z_s^*, z_{s+1}^*, \ldots, z_n^*$ из расширения поля $k(\mathcal{L})$, таких что $z_0^* \neq 0$. Это эквивалентно условию, что система

$$g_1 = \ldots = g_s = z_0^* L_s - z_s^* L_0 = \ldots = z_0^* L_n - z_n^* L_0 = 0.$$

имеет ненулевое решение $\eta = (\eta_0 : \ldots : \eta_n) \in \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s)$ в проективном пространстве над алгебраическим замыканием поля $k(\mathcal{L})(z_0^*, z_s^*, z_{s+1}^*, \ldots, z_n^*)$. Следовательно, существует $i \in J$, такое что $H_i(L_0(\eta), L_s(\eta), L_{s+1}(\eta), \ldots, L_n(\eta)) = 0$. Поскольку $z_0^* \neq 0$, и согласно (50) $L_0(\eta) \neq 0$. Следовательно,

$$H_i(z_0^*, z_s^*, z_{s+1}^*, \ldots, z_n^*) = 0. \tag{60}$$

Обратно, из (60) и $z_0^* \neq 0$ следует, что существует $(\eta_0 : \ldots : \eta_n) \in \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s)$, такое что

$$(L_0(\eta) : L_s(\eta) : L_{s+1}(\eta) : \ldots : L_n(\eta)) = (z_0^* : z_s^* : z_{s+1}^* : \ldots : z_n^*).$$

Таким образом, $\Delta_{\mathcal{L}}(z_0^*, z_s^*, z_{s+1}^*, \ldots, z_n^*) = 0$.

Следовательно, существует семейство положительных целых чисел e_i, $i \in J$, и существует $0 \neq \mu \in k(\mathcal{L})$, такие что

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \mu \prod_{i \in J} H_i^{e_i}. \tag{61}$$

Следовательно, справедливо (58). В случае, когда $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ элемент $\mu \in k[\mathcal{U}]$. По Лемме 9 степень $\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} H_i = \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$, для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n$. По Лемме 10 (b) $\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} \Delta_{\mathcal{L}} = D$ для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n$. Следовательно, из (59) и, поскольку $\deg_{Z_0, Z_s, \ldots, Z_n} H_i = \deg \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_i)$, мы получаем, что $\deg_{u_{i,0}, u_{i,s}, \ldots, u_{i,n}} \mu = 0$ для всякого $i = 0, s, s+1, \ldots, n$. Таким образом, $\mu \in k$ в этом случае.

Далее, по (35) существует целое число $N > 0$, и существуют однородные относительно переменных $X_0, \ldots, X_n$ многочлены

$$A_i, B_j \in k[\mathcal{L}][Z_0, Z_s, \ldots, Z_n, X_0, \ldots, X_n], \quad 1 \leq i \leq s, \ s \leq j \leq n,$$

такие что

$$\Delta_{\mathcal{L}} Z_0^{(n-s)D} L_0^N = \sum_{1\le i\le s} A_i g_i + \sum_{s\le j\le n} (Z_0 L_j - Z_j L_0) B_i. \qquad (62)$$

Поскольку левая часть (62) является однородным многочленом относительно $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$, мы будем предполагать без ограничения общности, что все A_i и B_j являются однородными многочленами относительно $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$.

Подставляя в (62) L_j вместо Z_j, $j = 0, s, s+1, \ldots, n$, мы получаем, что существуют однородные относительно переменных $X_0, \ldots, X_n$ многочлены

$$C_i \in k[\mathcal{L}][L_0, L_s, \ldots, L_n, X_0 \ldots, X_n], \quad 1 \le i \le s,$$

такие что

$$\Delta_{\mathcal{L}}(L_0, L_s, \ldots, L_n) L_0^{(n-s)D+N} = \sum_{1\le i\le s} C_i g_i.$$

Покажем, что L_0 не является делителем нуля в кольце $k[\mathcal{L}][X_0, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_s)$. Заметим, что всякий ненулевой элемент $\nu \in k[\mathcal{L}]$ не является делителем нуля в $k[\mathcal{L}][X_0, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_s)$, так как последнее кольцо является свободным $k[\mathcal{L}]$-модулем. Так что достаточно доказать, что L_0 – не делитель нуля в кольце $k(\mathcal{L})[X_0, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_s)$. Предположим противное. Идеал

$$(g_1, \ldots, g_s) \subset k(\mathcal{L})[X_0, \ldots, X_n]$$

является несмешанным. Следовательно, $\mathcal{Z}(L_0)$ содержит неприводимую компоненту многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s)$. Но это противоречит условию (51). Требуемое утверждение доказано. Следовательно, существуют однородные относительно $X_0, \ldots, X_n$ многочлены

$$h_i \in k[\mathcal{L}][X_0, \ldots, X_n], \quad 1 \le i \le s,$$

такие что

$$\Delta_{\mathcal{L}}(L_0, L_s, \ldots, L_n) = h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s.$$

Теперь утверждение леммы следует из (59) и (61). Лемма доказана.

ЛЕММА 12 *Пусть $\mathfrak{P} \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородный простой идеал, такой что $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) = n-s$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, где $n \ge s \ge 1$. Пусть $L_i = \sum_{0\le j\le n} l_{i,j} X_j$, $i = 0, s, s+1, \ldots, n$, – семейство линейных форм от $X_0, \ldots, X_n$ с коэффициентами $l_{i,j}$ из расширения поля k. Пусть выполнено (49). Пусть $\lambda_s, \ldots, \lambda_n \in \overline{k(\mathcal{L})}$. Пусть*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \cap \mathcal{Z}(L_s, \ldots, L_n) = \emptyset, \qquad (63)$$

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \cap \mathcal{Z}(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_{n-1}) = \emptyset, \qquad (64)$$

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \cap \mathcal{Z}(L_s - \lambda_s L_0, \ldots, L_n - \lambda_n L_0) = \emptyset \qquad (65)$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$. Тогда существуют однородные многочлены $g_1, \ldots, g_s \in k[X_0, \ldots, X_n]$, такие что $\dim \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) = n-s$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \subset \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s)$, справедливы равенства (50), (51), и

$$\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) \cap \mathcal{Z}(L_s - \lambda_s L_0, \ldots, L_n - \lambda_n L_0) = \emptyset. \qquad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предположим, что $0 \le r \le s-1$, и мы уже построили многочлены $g_1, \ldots, g_r$, такие что

$$\begin{array}{l} \dim \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_s, \ldots, L_n) = s-1-r, \\ \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_{n-1}) = s-1-r, \\ \dim \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_s - \lambda_s L_0, \ldots, L_n - \lambda_n L_0) = s-1-r, \\ \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \subset \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r) \end{array} \tag{67}$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$ (здесь случай, когда $r=0$ следует из (63), (64) и (65)). Представим

$$\begin{array}{l} \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_s, \ldots, L_n) = \cup_{i \in I_1} W_i, \\ \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_{n-1}) = \cup_{i \in I_2} W_i, \\ \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r,\, L_s - \lambda_s L_0, \ldots, L_n - \lambda_n L_0) = \cup_{i \in I_3} W_i, \end{array}$$

где все W_i, $i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ являются неприводимыми алгебраическими многообразиями, определёнными над полем $\overline{k(\mathcal{L})}$, размерности $s-1-r$. Согласно (63), (64) и (65) $W_i \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) = \emptyset$ для всякого $i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Следовательно, существует точка $w_i \in W_i \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ для всякого $i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Существует однородный многочлен $g \in \mathfrak{P}$, такой что $g(w_i) \neq 0$ для всякого $i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Положим $g_{r+1} = g$. Тогда (67) удовлетворяется, если заменить r на $r+1$. Таким образом, рекурсивно мы построим требуемые многочлены $g_1, \ldots, g_s$. Лемма доказана.

Теперь пусть выполнено (63). Пусть, см. Замечание 3, выполнено условие (A). Заменим в (52) π_i и $\mathfrak{P}_i$ на π и $\mathfrak{P}$ соответственно. Из условие (63) следует, см., например, [4], что $\pi(\mathcal{Z}(\mathfrak{P})) = \mathcal{Z}(H_0)$, где

$$H_0 \in k(\mathcal{L})[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$$

– единственный с точностью до множителя из $k(\mathcal{L})$ неприводимый многочлен. Так что H_0 – форма, соответствующая проекции $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, определённой линейными формами $L_0, L_s,\, L_{s+1}, \ldots, L_n$. Следовательно, $H_0(L_0, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_n)$ обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, рассматриваемом как подмногообразие $\mathbb{P}^n(\overline{k(\mathcal{L})})$.

ЛЕММА 13 *Пусть выполнены (63) и (64). Пусть выполнено условие (A). Пусть $H_{\mathfrak{P}} \in k[\mathcal{U}, Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$ – форма, соответствующая общей проекции $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Пусть однородный многочлен относительно $Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n$*

$$H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L}, Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n) \in k(\mathcal{L})[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$$

получен из $H_{\mathfrak{P}}$ подстановкой $l_{i,j}$ вместо $u_{i,j}$ для всех $0 \le j \le n$, $i = 0, s, s+1, \ldots, n$. Тогда существуют целое число $r > 0$ и элемент $0 \neq \lambda \in k(\mathcal{L})$, такие что

$$H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L}, Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n) = \lambda H_0^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Поскольку H_0 является неприводимым по Замечанию 3, то достаточно доказать, что

$$\mathcal{Z}(H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L}, Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n)) \setminus \mathcal{Z}(H_0) = \emptyset. \tag{68}$$

Предположим противное. Тогда размерность множества в правой части (68) не меньше, чем $n-s$. Следовательно, существует точка

$$(\lambda_0:\lambda_s:\ldots:\lambda_n)\in\mathcal{Z}(H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L},Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n))\setminus\pi(\mathcal{Z}(\mathfrak{P}))$$

в $\mathbb{P}^{n-s+1}(\overline{k(\mathcal{L})})$, такая что $\lambda_0\neq 0$ или $\lambda_n\neq 0$. Поскольку индексы 0 и n симметричны в формулировке леммы, то мы можем предполагать без ограничения общности, что $\lambda_0\neq 0$. Более того, мы будем предполагать, что $\lambda_0=1$. Следовательно, справедливо (65). Применяя Лемму 12, построим однородные многочлены $g_1,\ldots,g_s$. Применим Лемму 11 в двух случаях: к семейству $\mathcal{L}$ и, когда $\mathcal{L}=\mathcal{U}$. В случае, если $\mathcal{L}=\mathcal{U}$, обозначим

$$\Delta_{\mathcal{U}}=\Delta(\mathcal{U},Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n).$$

Так что по Лемме 11 мы получаем

$$\Delta_{\mathcal{L}}=\mu\prod_{i\in J}H_i^{e_i},$$
$$\Delta(\mathcal{U},Z_0,Z_s,\ldots,Z_n)=\mu'\prod_{i\in J'}H_{\mathfrak{P}_i}(\mathcal{U},Z_0,Z_s,\ldots,Z_n)^{\varepsilon_i},$$

где μ', J', ε_i, соответствующие $\mathcal{U}$, являются аналогичными μ, J, e_i, которые соответствуют $\mathcal{L}$. По определению результанта, (54), (56) и Лемме 10 (a) многочлен $\Delta_{\mathcal{L}}(Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n)$ получается подстановкой $l_{i,j}$ вместо $u_{i,j}$ в $\Delta(\mathcal{U},Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n)$ для всех $0\le j\le n$, $i=0,s,s+1,\ldots,n$. Следовательно,

$$\Delta(\mathcal{L},Z_0,Z_s,\ldots,Z_n)=\Delta_{\mathcal{L}}.$$

По Лемме 11 $0\neq\mu'\in k$. Существует i, такое что $H_{\mathfrak{P}}=H_{\mathfrak{P}_i}$. Следовательно,

$$H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L},Z_0,Z_s,\ldots,Z_n)=\nu\prod_{i\in J''}H_i^{\alpha_i},\qquad(69)$$

где $0\neq\nu\in k(\mathcal{L})$, $J''\subset J$, и целые числа $\alpha_i>0$ для всех $i\in J''$.

Покажем, что

$$\Delta_{\mathcal{L}}(1,\lambda_s,\ldots,\lambda_n)\neq 0.\qquad(70)$$

Подставим в систему (53) 1 вместо Z_0 и λ_i вместо Z_i, $s\le i\le n$. Полученная система не имеет ненулевых решений согласно (66). Теперь (70) следует из определения результанта и (54), (56). Требуемое утверждение доказано.

Следовательно, $H_i(1,\lambda_s,\ldots,\lambda_n)\neq 0$ для всякого $i\in J$. Согласно (69) $H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{L},1,\lambda_s,\ldots,\lambda_n)\neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 *Отметим, что в доказательстве Леммы 13 не обязательно использовать то, что $0\neq\mu'\in k$. Достаточно применить только то, что $\mu'\in k[\mathcal{U}]$, поскольку в последнем случае автоматически $\mu'(\mathcal{L})\neq 0$ при условиях Леммы 13. Так что не обязательно доказывать Лемму 9 для доказательства Леммы 13.*

ЛЕММА 14 *Пусть $\xi\in\mathbb{P}^n(\overline{k})$ и $\xi\notin\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Тогда*

$$H_{\mathfrak{P}}(\mathcal{U},U_0,U_s,\ldots,U_n)(\xi)\neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть $Y_1, \dots, Y_n \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$ – линейно независимые линейные формы, такие что $Y_i(\xi) = 0$ для всякого $0 \le i \le n$. Представим

$$U_j - (U_j/U_0)(\xi)U_0 = \sum_{1 \le i \le n} v_{j,i} Y_i, \quad s \le j \le n,$$

где все $v_{j,i} \in \overline{k}(\mathcal{U})$. Покажем, что семейство коэффициентов $v_{j,i}$, $s \le j \le n$, $1 \le i \le n$, алгебраически независимо над $\overline{k}$. В самом деле, в случае, когда $\xi = (1 : 0 : \ldots : 0)$, это несложно, а общий случай сводится к этому при помощи линейного автоморфизма $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.

Пусть $p : \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus \{\xi\} \to \mathbb{P}^{n-1}(\overline{k})$ – линейная проекция с центром ξ. Мы имеем

$$p(\mathcal{Z}(\mathfrak{P})) \cap \mathcal{Z}(\sum_{1 \le i \le n} v_{s,i} Y_i, \dots, \sum_{1 \le i \le n} v_{n,i} Y_i) = \emptyset,$$

так как семейство $v_{j,i}$, $s \le j \le n$, $1 \le i \le n$, является алгебраически независимым. Следовательно,

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \cap \mathcal{Z}(U_s - (U_s/U_0)(\xi)U_0, \dots, U_n - (U_n/U_0)(\xi)U_0) = \emptyset.$$

Следовательно, точка с координатами $(U_0(\xi) : U_s(\xi) : \ldots : U_n(\xi))$ не принадлежит проекции $\pi(\mathcal{Z}(\mathfrak{P}))$, где π – проекция, определённая линейными формами $U_0, U_s, \dots, U_n$. Лемма доказана.

9 Исключение в общем положении и локализация

ЛЕММА 15 *Пусть m и N – положительные целые числа. Пусть k – произвольное поле. Пусть $S \subset \overline{k}^m$ – плотное подмножество в топологии Зарисского. Пусть многочлены $\Phi_1, \dots, \Phi_N \in k[Z_1, \dots, Z_m]$ (здесь $Z_1, \dots, Z_m$ – независимые переменные). Пусть*

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N) : \overline{k}^m \longrightarrow \overline{k}^N$$

– морфизм, определённый многочленами $\Phi_1, \dots, \Phi_N$. Пусть V_1 (соответственно V_2) – векторное подпространство $\overline{k}^N$ над $\overline{k}$, порождённое $\Phi(\overline{k}^m)$ (соответственно $\Phi(S)$). Тогда $V_1 = V_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \overline{k}$. По определению топологии Зарисского, если $\sum_{1 \le i \le N} \lambda_i \Phi_i(x) = 0$ для всех $x \in S$, то $\sum_{1 \le i \le N} \lambda_i \Phi_i(x) = 0$ для всех $x \in \overline{k}^m$. Следовательно, $V_1 = V_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 16 *Пусть $\mathfrak{P} \subset k[X_0, \dots, X_n]$ – однородный простой идеал, такой что $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) = n - s$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, где $n \ge s \ge 1$. Пусть $f_1, \dots, f_s \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены, такие что $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ является определённой над k неприводимой компонентой алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть*

$$L_i = \sum_{0 \le j \le n} l_{i,j} X_j, \quad i = 0, s, s+1, \dots, n,$$

– семейство линейных форм относительно $X_0,\ldots,X_n$ с коэффициентами $l_{i,j}$ из k. Пусть семейство $\mathcal{L}$ определено равенством (49). Пусть H_0 – форма, соответствующая проекции $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, определённой линейными формами $L_0, L_s,\ L_{s+1},\ldots,L_n$. Пусть выполнены (63) и (64). Тогда существуют однородные многочлены $h_1,\ldots,h_s\in k[X_0,\ldots,X_n]$, однородный многочлен $q\in k[X_0,\ldots,X_n]\setminus\mathfrak{P}$, и целое число $r>0$, такие что

$$r\deg_{Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n} H_0\le \deg f_1\cdot\ldots\cdot\deg f_s, \tag{71}$$

$$h_1f_1+\ldots+h_sf_s = qH_0(L_0,L_s,L_{s+1},\ldots,L_n)^r \tag{72}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть X_{n+i}, $1\le i\le s$ – новые переменные. Положим $g_i=f_i-X_{n+i}^{\deg f_i}$. Для всякого $0\le i\le s$ определим алгебраическое многообразие

$$V_i=\mathcal{Z}(g_1,\ldots,g_i,f_{i+1},\ldots,f_s)\subset\mathbb{P}^{n+i}(\overline{k}),$$

где $\mathbb{P}^{n+i}(\overline{k})$ имеет координаты $X_0,\ldots,X_{n+i}$. Обозначим через V_i' объединение всех определённых над k и неприводимых над k компонент W многообразия V_i, таких что $W\supset\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, причём последнее включение индуцировано вложением проективных пространств $\mathbb{P}^{n+i}\supset\mathcal{Z}(X_{n+1},\ldots,X_{n+i})=\mathbb{P}^n$.

Пусть W – произвольная определённая над k неприводимая компонента многообразия V_i', $0\le i\le s$. Мы утверждаем, что $\dim W=n-s+i$. В самом деле, иначе,

$$\dim W\cap\mathcal{Z}(X_{n+1},\ldots,X_{n+i})>n-s, \tag{73}$$

что противоречит включениям

$$\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_s)\supset W\cap\mathcal{Z}(X_{n+1},\ldots,X_{n+i})\supset\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$$

и тому, что $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ является неприводимой компонентой $\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_s)$. Требуемое утверждение доказано.

Представим для всякого $0\le i\le s$

$$V_i=\cup_{w\in J_i}W_w,$$

где все W_w – определённые над k и неприводимые над k алгебраические многообразия, J_i – конечное множество. Положим

$$J_i'=\{w\in J_i\ :\ W_w\subset V_i'\},\quad J_i''=J_i\setminus J_i'.$$

Для всякого $w\in J_i$ обозначим через $\mathfrak{P}_w$ однородный простой идеал кольца $k[X_0,\ldots,X_{n+i}]$, такой что $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_w)=W_w$.

Теперь мы будем предполагать, что степень трансцендентности поля K, введённого Разделе 1, равна по крайней мере $4(n+1)^2$. Пусть $u_{i,j}\in K$, $0\le i,j\le 2n+1$ – семейство с элементами из базиса трансцендентности поля K над k. Следовательно, это семейство имеет степень трансцендентности $4(n+1)^2$ над k. Для всякого $0\le i\le s$ определим семейство линейных форм

$$U_j^{(i)}=\sum_{0\le v\le n+i}u_{j,v}X_v,\quad j=0,s,s+1,\ldots,n+i.$$

Для всякого $0 \le i \le s$ определим семейство коэффициентов

$$\mathcal{U}^{(i)} = \{u_{j,v}\}_{j=0,s,s+1,\ldots,n+i,\,0\le v\le n+i}.$$

Для всякого $0 \le i \le s$, для всякого $w \in J'_i$ обозначим через

$$H_w \in k[\mathcal{U}^{(i)}, Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i}]$$

форму, соответствующую общей проекции W_w.

Покажем, что для всякого $0 \le i \le s$ существуют целые числа $e_w > 0$, $w \in J'_i$, семейство многочленов

$$h_{i,1}, \ldots, h_{i,s} \in k[\mathcal{U}^{(i)}, X_0, \ldots, X_{n+i}]$$

однородных относительно $X_0, \ldots, X_{n+i}$, и многочлен

$$q_i \in k[\mathcal{U}^{(i)}, X_0, \ldots, X_{n+i}]$$

однородный относительно $X_0, \ldots, X_{n+i}$, такие что

$$\sum_{w\in J'_i} e_w \deg_{Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n} H_w \le \deg f_1 \cdot \ldots \cdot \deg f_s, \tag{74}$$

$$\begin{aligned} & h_{i,1}g_1 + \ldots + h_{i,i}g_i + h_{i,i+1}f_{i+1} + \ldots + h_{i,s}f_s = \\ & q_i \prod_{w\in J'_i} H_w(\mathcal{U}^{(i)}, U_0^{(i)}, U_s^{(i)}, U_{s+1}^{(i)}, \ldots, U_{n+i}^{(i)})^{e_w}, \end{aligned} \tag{75}$$

и q_i не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Мы докажем это утверждение, используя убывающую индукцию по i.

Пусть $i = s$. Заметим, что $\dim \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s) = n$, так как $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_s, X_0, \ldots, X_n) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^{n+s}(\overline{k})$. Заменим в формулировке Леммы 11 n на $n+s$. Применяя эту лемму к семейству линейных форм $L_j = U_j^{(s)}$, $j = 0, s, s+1 \ldots n+s$, мы получаем, что существуют целые числа $e_w > 0$, $w \in J_s$, семейство многочленов

$$h_{s,1}, \ldots, h_{s,s} \in k[\mathcal{U}^{(s)}, X_0, \ldots, X_{n+s}]$$

однородных относительно $X_0, \ldots, X_{n+s}$, и элемент $0 \ne \mu_s \in k$, такие что

$$\sum_{w\in J'_s} e_w \deg_{Z_0,Z_s,Z_{s+1},\ldots,Z_n} H_w \le \deg f_1 \cdot \ldots \cdot \deg f_s,$$

$$h_{s,1}g_1 + \ldots + h_{s,s}g_s = \mu_s \prod_{w\in J_s} H_w(\mathcal{U}^{(s)}, U_0^{(s)}, U_s^{(s)}, U_{s+1}^{(s)}, \ldots, U_{n+s}^{(s)})^{e_w}.$$

По Лемме 14, применённой к точке $\xi \in \mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_w)$, для всякого $w \in J''_s$ многочлен

$$H_w(\mathcal{U}^{(s)}, U_0^{(s)}, U_s^{(s)}, U_{s+1}^{(s)}, \ldots, U_{n+s}^{(s)}) \in k[\mathcal{U}^{(s)}, X_{n+1}, \ldots, X_{n+s}]$$

не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Положим

$$q_s = \mu_s \prod_{w\in J''_s} H_w(\mathcal{U}^{(s)}, U_0^{(s)}, U_s^{(s)}, U_{s+1}^{(s)}, \ldots, U_{n+s}^{(s)})^{e_w}.$$

Следовательно, теперь выполнены (74) и (75) для $i = s$.

Предположим, что $-1 \le i < s$. Предположим, что выполнены (74) и (75) для $i+1$. В случае, когда $i > -1$, мы выведем (74) и (75) для i. В случае $i = -1$, мы докажем утверждение леммы. Если $i > -1$, определим линейные формы $M_0 = U_0^{(i)}$, $M_s = X_{n+i+1}$, и

$$M_j = U_{j-1}^{(i)}, \quad s+1 \le j \le n+i+1.$$

В случае $i = -1$ положим $M_0 = L_0$ и $M_j = L_j$, $s \le j \le n$. Обозначим через

$$\mathcal{M} = \{m_{j,v}\}_{j=0,s,s+1,\ldots,n+i+1,\, 0\le v\le n+i+1}$$

семейство коэффициентов линейных форм M_j, $j = 0, s, s+1, \ldots, n+i+1$, причём $m_{j,v}$ – коэффициент линейной формы M_j при X_v.

Пусть $i > -1$. Покажем, что $\dim W_w \cap \mathcal{Z}(X_{n+i+1}) < \dim W_w$ для всякого $w \in J'_{i+1}$. Предположим противное. Тогда справедливо (73) с i, заменённым на $i+1$, и $W = W_w$. Это приводит к противоречию, как мы видели выше. Требуемое утверждение доказано.

Покажем, что для любого $w \in J'_{i+1}$

$$\begin{aligned} W_w \cap \mathcal{Z}(M_s, \ldots, M_{n+i+1}) = \emptyset, \\ W_w \cap \mathcal{Z}(M_0, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i}) = \emptyset. \end{aligned} \tag{76}$$

В самом деле, если $i > -1$, то эти равенства справедливы, поскольку все M_j с $j \ne s$ являются линейными формами с трансцендентными коэффициентами, и точка с координатами $X_0 = \ldots = X_{n+i} = 0$, $X_{n+i+1} = 1$ не принадлежит V_{i+1}, ср. доказательство Леммы 14. В случае $i = -1$ эти равенства совпадают с (63) и (64).

Пусть

$$\begin{aligned} &\pi : V'_{i+1} \to \mathbb{P}^{n+i-s+2}(\overline{k(\mathcal{M})}), \\ &(X_0 : \ldots : X_{n+i+1}) \mapsto (M_0 : M_s : M_{s+1} : \ldots : M_{n+i+1}) \end{aligned}$$

является линейной проекцией. Согласно (76) проекция $\pi : V'_{i+1} \to \pi(V'_{i+1})$ конечна.

Для всякого $w \in J'_{i+1}$ обозначим через $\widetilde{H}_w \in k(\mathcal{M})[Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i+1}]$ форму, соответствующую проекции W_w, определённой линейными формами

$$M_0, M_s, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i+1}. \tag{77}$$

Если $i > -1$, то мы будем предполагать без ограничения общности, что

$$\widetilde{H}_w \in k[\mathcal{U}^{(i)}, Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i+1}]$$

является неприводимым многочленом относительно всех переменных $\mathcal{U}^{(i)}$, $Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i+1}$ для всякого $w \in J'_{i+1}$.

Пусть $i > -1$. Для всякого $w \in J'_{i+1}$ представим $W_w \cap \mathcal{Z}(X_{n+i+1}) = \cup_{\beta \in C_w} W_\beta$, где все W_β – определённые над k и неприводимые над k алгебраические многообразия, и C_w – конечное множество. Обозначим через H_β форму, соответствующую общей проекции W_β.

Мы имеем $\pi(W_w \cap \mathcal{Z}(X_{n+i+1})) = \pi(W_w) \cap \mathcal{Z}(X_{n+i+1})$. Следовательно, для всякого $w \in J'_{i+1}$

$$\widetilde{H}_w(\mathcal{U}^{(i)}, M_0, 0, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i+1}) = \nu_w \prod_{\beta \in C_w} H_\beta^{r_\beta}, \tag{78}$$

где $0 \neq \nu_w \in k[\mathcal{U}^{(i)}]$, и целые числа $r_\beta > 0$ для всех $\beta \in C_w$.

Пусть $i \geq -1$. Напомним, что справедливы равенства (76). Для всякого $w \in J'_{i+1}$, применяя Лемму 13 (с n заменённым на $n+i+1$) к однородному простому идеалу $\mathfrak{P}_w$ и линейным формам (77), мы получаем

$$H_w(\mathcal{M}, Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i+1}) = \lambda_w \widetilde{H}_w^{r_w},$$

где $0 \neq \lambda_w \in k(\mathcal{M})$, и целые числа $r_w > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &H_w(\mathcal{M}, M_0, M_s, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i+1}) = \\ &\quad \lambda_w \widetilde{H}_w(M_0, M_s, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i+1})^{r_w} \end{aligned} \tag{79}$$

(здесь мы рассматриваем все $\widetilde{H}_w$ как элементы $k(\mathcal{M})[Z_0, Z_s, \ldots, Z_{n+i+1}]$). Если $i > -1$, то $\lambda_w \in k[\mathcal{U}^{(i)}]$, поскольку $\widetilde{H}_w$ является неприводимым многочленом.

Теперь рассмотрим произведение в правой части равенства (75) для $i+1$, которое доказано по индукционному предположению. Представим

$$\prod_{w \in J'_{i+1}} H_w(\mathcal{U}^{(i+1)}, U_0^{(i+1)}, U_s^{(i+1)}, U_{s+1}^{(i+1)}, \ldots, U_{n+i+1}^{(i+1)})^{e_w} = \sum_{(i_0, \ldots, i_{n+i+1}) \in T} \Phi_{i_0, \ldots, i_{n+i+1}} X_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot X_{n+i+1}^{i_{n+i+1}},$$

где $T \subset \mathbb{Z}^{n+i+2}$ – конечное множество, и все многочлены

$$\Phi_{i_0, \ldots, i_{n+i+1}} \in k[\mathcal{U}^{(i+1)}].$$

Пусть m – число переменных кольца многочленов $k[\mathcal{U}^{(i+1)}]$, и $N = \#T$ – число элементов T. Пусть S – подмножество всех $x \in k^m$ (здесь k^m имеет координаты из семейства $\mathcal{U}^{(i+1)}$), таких что многочлен $q_{i+1}(x, X_0, \ldots, X_{n+i+1})$ не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Тогда S плотно в топологии Зарисского в $\overline{k}^m$, так как q_{i+1} не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ по индукционному предположению и, поскольку k бесконечно.

Применим Лемму 15 к множеству S и полиномиальному отображению

$$\Phi = (\Phi_{i_0, \ldots, i_{n+i+1}})_{(i_0, \ldots, i_{n+i+1}) \in T} : \overline{k}^m \to \overline{k}^N.$$

Пусть $u_1, \ldots, u_t \in S$ – элементы, такие что $\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_t)$ является базисом векторного пространство, порождённого $\Phi(\overline{k}^m)$. Тогда существуют $y_\alpha \in k(\mathcal{M})$, $1 \leq \alpha \leq t$, такие что

$$\prod_{w \in J'_{i+1}} H_w(\mathcal{M}, M_0, M_s, M_{s+1}, \ldots, M_{n+i+1})^{e_w} = \sum_{1 \leq \alpha \leq t} \frac{y_\alpha}{q_{i+1}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i+1})} \times$$

$$\Big(\sum_{1\le v\le i+1} h_{i+1,v}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i+1})g_v + \tag{80}$$
$$\sum_{i+2\le v\le s} h_{i+1,v}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i+1})f_v\Big),$$

где $q_{i+1}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i+1})$ не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ для всякого $1 \le \alpha \le t$.

Пусть $i > -1$. Представим $y_\alpha = z_\alpha/z$, где $z_\alpha, z \in k[\mathcal{U}^{(i)}]$, $1 \le \alpha \le t$. Подставляя в (80) 0 вместо X_{n+i+1} (напомним,что X_{n+i+1} обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$) и учитывая (78), (79), мы получаем

$$\prod_{w\in J'_{i+1}} (\lambda_w \nu_w) \prod_{w\in J'_{i+1}} \prod_{\beta\in C_w} H_\beta^{e_w r_w r_\beta} =$$
$$\sum_{1\le v\le i} g_v \sum_{1\le\alpha\le t} \frac{z_\alpha h_{i+1,v}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i}, 0)}{z q_{i+1}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i}, 0)} + \tag{81}$$
$$\sum_{i+1\le v\le s} f_v \sum_{1\le\alpha\le t} \frac{z_\alpha h_{i+1,v}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i}, 0)}{z q_{i+1}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i}, 0)}.$$

Теперь заметим, что для всякого $w_1 \in J'_i$ существуют $w \in J'_{i+1}$, $\beta \in C_w$, такие что $W_{w_1} = W_\beta$. Следовательно, левая часть (81) – делится на $H_{w_1}(\mathcal{U}^{(i)}, U_0^{(i)}, U_s^{(i)}, U_{s+1}^{(i)}, \ldots, U_n^{(i)})$. Для всякого $w \in J'_{i+1}$ обозначим через D_w подмножество индексов $\beta \in C_w$, таких что многочлен H_β не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. По Лемме 14 для всякого $w \in J'_{i+1}$, $\beta \in C_w$, если $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}) \not\subset W_\beta$, то H_β не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$. Таким образом, в этом случае $\beta \in D_w$. Положим

$$q_i = z \prod_{w\in J'_{i+1}} (\lambda_w \nu_w) \prod_{1\le\alpha\le t} q_{i+1}(u_\alpha, X_0, \ldots, X_{n+i}, 0) \prod_{w\in J'_{i+1}} \prod_{\beta\in D_w} H_\beta^{e_w r_w r_\beta}.$$

Тогда q_i не обращается в нуль тождественно на $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$, и из (81) следует требуемое равенство (75). Наконец, (74) следует из (81), (78), (79) и неравенства (74) с i, заменённым на $i+1$, которое доказано по индукционному предположению.

Остаётся доказать утверждение леммы, когда $i = -1$. В этом случае оно следует аналогичным образом непосредственно из (80), (79) и неравенства (74) с $i = 0$, которое доказано по индукционному предположению. Лемма доказана.

10 Конструкция локальных параметров

Пусть $\mathfrak{P}$ – однородный простой идеал такой же, как и предыдущих разделах, пусть алгебраическое многообразие $V = \mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, и $D = \deg V$. Пусть $s \ge 1$. Пусть $Y_0, \ldots, Y_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – линейно независимые линейные формы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$V \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_{s+1}, \ldots, Y_n) = \emptyset, \tag{82}$$
$$V \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_i, Y_{s+1}, \ldots, Y_{n-1}) = \emptyset, \quad 1 \le i \le s. \tag{83}$$

Рассмотрим проекции

$$\pi : V \to \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k}),$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (Y_0 : Y_{s+1} : \ldots : Y_n),$$

и

$$\pi_i : V \to \mathbb{P}^{n-s+1}(\overline{k}),$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (Y_0 : Y_i : Y_{s+1} : \ldots : Y_n), \quad 1 \le i \le s.$$

Все эти проекции π и $\pi_i : V \to \pi_i(V)$, $1 \le i \le s$, являются конечными согласно (82). Пусть $H_i \in k[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$ – форма, соответствующая проекции π_i многообразия V, для всякого $1 \le i \le s$.

ЛЕММА 17 *Пусть $x \in V$ – гладкая точка в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогда существует семейство линейно независимых линейных форм $Y_0, \ldots, Y_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, удовлетворяющих (82), (83) и, таких что*

(i) $Y_0(x) \ne 0$,

(ii) $\pi^{-1}(\pi(x))$ *состоит из* $\deg V$ *различных точек,*

(iii) число элементов $\#(Y_i/Y_0)(\pi^{-1}(\pi(x))) = \#\pi^{-1}(\pi(x))$ *для всякого* $1 \le i \le s$.

Пусть $L \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – линейная форма, такая что $L(x) \ne 0$. Положим

$$\varphi_i = H_i(Y_0, Y_i, Y_{s+1}, \ldots, Y_n)/L^{\deg H_i}, \quad 1 \le i \le s.$$

Тогда $\deg H_i = D$ для всякого $1 \le i \le s$, и $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ является системой локальных параметров алгебраического многообразия V в точке x (это означает по определению, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ порождают идеал многообразия V в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,\mathbb{P}^n(\overline{k})}$ точки x в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Существование линейных форм $Y_0, \ldots, Y_n$, удовлетворяющих всем требованиям, следует из того, что линейные формы относительно $X_0, \ldots, X_n$ с трансцендентными коэффициентами удовлетворяют этим требованиям.

По (iii) $\deg H_i = D = \deg V$. По (ii) дифференциал $d_x\pi$ в точке x проекции π является изоморфизмом. По основной теореме Зарисского точка $\pi_i(x)$ является гладкой на $\pi_i(V)$. Из теоремы о неявной функции следует теперь, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ является системой локальных параметров V в точке x. Лемма доказана.

Пусть характеристика поля k равна нулю. Предположим, что дана $\mathfrak{P}$-последовательность $f_1, \ldots, f_s$. Сейчас мы опишем конструкцию локальных параметров в некоторый точке алгебраического многообразия V. Пусть $0 \le r < s$ – целое число. Предположим, что при помощи рекурсии по r уже построены гладкая точка $x \in V$ и однородные многочлены

$$g_1, \ldots, g_r, f_{r,r+1}, \ldots, f_{r,s} \in k[X_0, \ldots, X_n],$$

такие что

(a) x является гладкой точкой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r)$,

(b) V является неприводимой компонентой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r, f_{r,r+1}, \ldots, f_{r,s})$,

(c) x является гладкой точкой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_r, f_{r,r+1}, \ldots, f_{r,s})$,

(d) $f_{r,j} = \sum_{1 \le v \le j} q_{r,j,v} f_v$, где $q_{r,j,v} \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, и $\deg q_{r,j,v} = \deg f_j - \deg f_v$ для всех $1 \le v \le j$.

(так что в случае базы рекурсии $r = 0$ дана гладкая точка $x \in V$, и мы полагаем $f_{0,j} = f_j$ для всякого $1 \le j \le s$). Наша цель – построить многочлен g_{r+1} и однородные многочлены $f_{r+1,r+2}, \ldots, f_{r+1,s}$, такие что свойства (a)–(d) удовлетворяются, если заменить r на $r+1$ (может быть с другой точкой x).

Пусть $L = X_i$ для некоторого $0 \le i \le n$, и $L(x) \ne 0$. Сделав при необходимости перестановку координат, мы будем предполагать без ограничения общности, что $L = X_0$.

Обозначим $\psi_i = g_i / X_0^{\deg g_i}$, $1 \le i \le r$, и $\rho_j = f_{r,j} / X_0^{\deg f_{r,j}}$, $r+1 \le j \le s$. Рассмотрим систему локальных параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ из Леммы 17. По условиям (a)–(d) существуют индексы $1 \le i_{r+1} < \ldots < i_s \le s$, такие что

$$\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi_{i_{r+1}}, \ldots, \varphi_{i_s}$$

является системой локальных параметров V в точке x. Мы будем предполагать без ограничения общности, что $i_j = j$ для всех $r+1 \le j \le s$.

Обозначим через $Z_i = X_i/X_0 - (X_i/X_0)(x)$, $1 \le i \le n$, координатные функции аффинного пространства $\mathbb{A}^n(\overline{k}) = \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Так что $\varphi_i, \psi_j, \rho_w \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ для всех i, j, w. Выберем индексы $1 \le i_{s+1} < \ldots < i_n \le n$, такие что

$$\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s, Z_{i_{s+1}}, \ldots, Z_{i_n}$$

является системой локальных параметров алгебраического многообразия $\{x\}$, состоящего из одной точки x. Мы будем предполагать, не умаляя общности, что $i_j = j$ для всех $s+1 \le j \le n$.

Сделав при необходимости перестановку координат $Z_1, \ldots, Z_s$, мы будем считать без ограничения общности, что минор матрицы Якоби в точке x

$$\det\left(\left(\partial\psi_i / \partial Z_j\right)(x)\right)_{1 \le i,j \le r} \ne 0. \tag{84}$$

Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов

$$\overline{k}[[\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]]. \tag{85}$$

Это кольцо совпадает с кольцом формальных степенных рядов от $Z_1, \ldots, Z_n$ над $\overline{k}$. Следовательно, оно содержит кольцо $k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0]$. Всякий элемент F кольца (85) может быть представлен в виде

$$F = \sum_{i_1, \ldots, i_n \ge 0} F_{i_1, \ldots, i_n} \psi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \psi_r^{i_r} \varphi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \varphi_s^{i_s} Z_{s+1}^{i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n},$$

где все $F_{i_1, \ldots, i_n} \in \overline{k}$. Обозначим через

$$\widetilde{\mathfrak{P}} = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s)$$

идеал кольца (85), порождённый элементами $\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s$. Пусть $F \in k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0]$. Тогда

$$F \in \widetilde{\mathfrak{P}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathcal{Z}(F) \supset V \setminus \mathcal{Z}(X_0). \qquad (86)$$

Для произвольного формального степенного ряда F обозначим

$$\operatorname{ord} F = \min\{i_{r+1} + \ldots + i_s \; : \; F_{0,\ldots,0,i_{r+1},\ldots,i_n} \neq 0\}.$$

Так что $\operatorname{ord} F$ – является неотрицательным целым числом или $+\infty$. Введём операторы дифференцирования $\mathcal{D}_j$, $r+1 \leq j \leq s$, на кольце (85) с помощью формул

$$\mathcal{D}_j(F) = \det \begin{pmatrix} \partial\psi_1/\partial Z_1 & \ldots & \partial\psi_1/\partial Z_r & \partial\psi_1/\partial Z_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial\psi_r/\partial Z_1 & \ldots & \partial\psi_r/\partial Z_r & \partial\psi_r/\partial Z_j \\ \partial F/\partial Z_1 & \ldots & \partial F/\partial Z_r & \partial F/\partial Z_j \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если $F \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$, то степень относительно $Z_1, \ldots, Z_n$

$$\deg \mathcal{D}_i(F) \leq \deg F + \deg g_1 + \ldots + \deg g_r - r - 1. \qquad (87)$$

Если $F \in k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0]$, то $\mathcal{D}_i(F) \in k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0]$ для всякого $r+1 \leq i \leq s$.

По определению операторов $\mathcal{D}_i$, по (84) и, поскольку любая линейная комбинация $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s$ является локальным параметром в точке x, векторы

$$(\mathcal{D}_{r+1}(\varphi_i)(x), \ldots, \mathcal{D}_s(\varphi_i)(x)) \in (\overline{k})^{s-r}, \quad r+1 \leq i \leq s,$$

линейно независимы над $\overline{k}$. Следовательно, для всякого элемента F кольца формальных степенных рядов (85), если $\operatorname{ord}(F) > 0$, то существует $r+1 \leq i \leq s$, такое что

$$\operatorname{ord}(\mathcal{D}_i(F)) = \operatorname{ord}(F) - 1. \qquad (88)$$

Определим δ как наименьшее целое число, такое что

$$\delta \geq \frac{\deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_r \deg f_{r+1} \cdot \ldots \cdot \deg f_s}{\deg V}.$$

ЛЕММА 18 *Справедливо неравенство* $\operatorname{ord} \rho_{r+1} \leq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предположим противное. Обозначим через $\psi_{i,1}$, $1 \leq i \leq r$, $\varphi_{j,1}$, $r+1 \leq j \leq s$ формы наименьшей степени (или, что то же самое, ненулевые однородные относительно $Z_1, \ldots, Z_n$ компоненты наименьшей степени) в кольце $\overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ многочленов ψ_i, $1 \leq i \leq r$, φ_j, $r+1 \leq j \leq s$ соответственно.

По Лемме 16 и (82), (83) для всякого $r+1 \leq j \leq s$ существуют многочлены q, $h_1, \ldots, h_s \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$, такие что

$$h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r + h_{r+1}\rho_{r+1} + \ldots + h_s\rho_s = q\varphi_j^\delta,$$

и многочлен q не обращается в нуль тождественно на $V \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Заменяя, если необходимо, точку x на точку $x_1 \in V$ из достаточно малой окрестности в топологии Зарисского точки x (это сводится к линейному автоморфизму $X_i \mapsto X_i + \lambda_i X_0$, $\lambda_i \in \overline{k}$, $1 \leq i \leq n$, многообразия $\mathbb{P}^n(\overline{k})$), мы можем предполагать без ограничения общности, что $q(x) \neq 0$. Так что q является обратимым элементом кольца формальных степенных рядов (85). Следовательно, существуют многочлены $\widetilde{h}_i \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$, которые являются аппроксимациями элементов h_i/q из кольца (85), такие что

$$\widetilde{h}_1\psi_1 + \ldots + \widetilde{h}_r\psi_r + \widetilde{h}_{r+1}\rho_{r+1} + \ldots + \widetilde{h}_s\rho_s = \Phi_j,$$

где $\Phi_j \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ – многочлен с формой наименьшей степени в кольце (85) равной φ_j^δ. Следовательно, форма наименьшей степени многочлена Φ_j в кольце $\overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ есть $\varphi_{j,1}^\delta$.

По нашему предположению и (86), применённому к $F = \rho_{r+1}$, все однородные компоненты степени меньше, чем $\delta + 1$, произведения $\widetilde{h}_{r+1}\rho_{r+1}$ принадлежит идеалу

$$\widetilde{\mathfrak{P}}_r = (\psi_1, \dots, \psi_r)$$

кольца (85), порождённому элементами $\psi_1, \dots, \psi_r$. Следовательно, мы можем предполагать без ограничения общности, что $\widetilde{h}_{r+1} = 0$.

Следовательно, линейные формы $\psi_{i,1}$, $1 \le i \le r$, $\varphi_{j,1}$, $r+1 \le j \le s$ принадлежат радикалу идеала, порождённого формами наименьшей степени элементов идеала

$$(\psi_1, \dots, \psi_r, \rho_{r+2}, \dots, \rho_s) \subset \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n].$$

Но этот радикал по определению является идеалом касательного конуса алгебраического многообразия $W = \mathcal{Z}(\psi_1, \dots, \psi_r, \rho_{r+2}, \dots, \rho_s)$ в точке x. Обозначим этот касательный конус через $\mathrm{con}(x, W)$. Известно, что размерность $\dim \mathrm{con}(x, W) = \dim_x W$, где $\dim_x W$ – максимум размерностей неприводимых компонент W, содержащих точку x (непосредственное доказательство этого факта можно найти в [8]).

Теперь мы имеем $\dim_x W = n - s + 1$ по условиям (a)–(d). С другой стороны, существуют s линейно независимых линейных форм из идеала многообразия $\mathrm{con}(x, W)$. Следовательно, $\dim \mathrm{con}(x, W) \le n - s < \dim_x W$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Положим $a = \mathrm{ord}(\rho_{r+1})$. Тогда $0 < a < +\infty$ по Лемме 18 и (86). Мы имеем $\mathcal{D}_j(\widetilde{\mathfrak{P}}_r) \subset \widetilde{\mathfrak{P}}_r$ для всех $r+1 \le j \le s$. Следовательно, согласно (88) мы получаем, что существуют индексы $r+1 \le i_1, \dots, i_a \le s$, такие что

$$\mathcal{D}_{i_{a-1}} \ldots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1}) \in \widetilde{\mathfrak{P}} \tag{89}$$

и

$$\mathcal{D}_{i_a} \ldots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1}) \notin \widetilde{\mathfrak{P}}. \tag{90}$$

Согласно (89) и (86) многочлен $\mathcal{D}_{i_{a-1}} \ldots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1})$ обращается в нуль тождественно на $V \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Согласно (90) и (86) многочлен $\mathcal{D}_{i_a} \ldots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1})$ не обращается в нуль тождественно на $V \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. По определению оператора $\mathcal{D}_{i_a}$ и (90) существует непустое открытое в топологии Зарисского подмножество $S \subset V$, такое что всякая точка $y \in S$ является гладкой точкой многообразия V, и дифференциалы в точке y

$$d_y\psi_1, \dots, d_y\psi_r, d_y\mathcal{D}_{i_{a-1}} \ldots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1})$$

являются линейно независимыми над $\overline{k}$.

Положим $d_{r+1} = \deg_{Z_1,\dots,Z_n} \mathcal{D}_{i_{a-1}} \dots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1})$ и

$$g_{r+1} = \mathcal{D}_{i_{a-1}} \dots \mathcal{D}_{i_1}(\rho_{r+1}) X_0^{d_{r+1}}. \tag{91}$$

Тогда $g_{r+1} \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородный многочлен. Далее, для всякой $y \in S$ точка y является гладкой на алгебраическом многообразии $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_{r+1})$, и $\dim_y \mathcal{Z}(g_1, \dots, g_{r+1}) = n - r - 1$.

Существуют две слабых $\mathfrak{P}$-последовательности $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,s}$ и $\theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,s}$, такие что

- многочлены $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,r+1}$ совпадают с $g_1, \dots, g_{r+1}$ с точностью до перестановки
- многочлены $\theta_{2,i} = \eta f_i$, $1 \le i \le s$, где η – однородный многочлен, который не обращается в нуль тождественно на V,
- $\deg \theta_{1,i} \le \deg \eta$ для всех $1 \le i \le r+1$,
- $\deg \theta_{1,i} > \deg \theta_{2,s}$ для всех $r+2 \le i \le s$.

Применяя Лемму 1 к этим $\mathfrak{P}$-последовательностям, мы получаем третью $\mathfrak{P}$-последовательность $\theta_{3,1}, \dots, \theta_{3,s}$. Положим $f_{r+1,j} = \theta_{3,j}/\eta$, $r+2 \le j \le s$. Заменим в условиях (a)–(d) r на $r+1$ и точку x на точку y. Тогда по Лемме 1 существует точка $y \in S$, такая что (a)–(d) удовлетворяются для построенных однородных многочленов $g_1, \dots, g_{r+1}, f_{r+1,r+2}, \dots, f_{r+1,s}$ в точке y. Этим заканчивается описание шага рекурсии.

Таким образом, в конечном счёте мы построим систему локальных параметров $\psi_1, \dots, \psi_s$ алгебраического многообразия V в некоторой точке $x \in V$.

ЛЕММА 19 *Существует константа $0 \le C \in \mathbb{R}$, и существуют $e_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le s$, такие что*

$$\deg g_j \le e_j \deg f_j, \quad 1 \le j \le s, \tag{92}$$

$$e_j \le n^{2^{s^C}}, \quad 1 \le j \le s. \tag{93}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предположим, что неравенства (92) справедливы для всех $1 \le j \le r$, где $0 \le r < s$. Тогда по Лемме 18 и Теореме 4 мы имеем

$$a \le \delta \le 1 + e_1 \cdot \ldots \cdot e_r \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_s / \deg V \le 1 + a_s e_1 \cdot \ldots \cdot e_r.$$

Следовательно, из (87) и (91) мы получаем

$$\deg g_{r+1} \le \delta_{r+1} + a_s e_1 \cdot \ldots \cdot e_r (-1 - r + \sum_{1 \le j \le r} e_j \delta_j).$$

Положим

$$e_{r+1} = 1 + a_s e_1 \cdot \ldots \cdot e_r \sum_{1 \le j \le r} e_j.$$

Тогда (92) выполняется для $j = r+1$. Теперь существование константы C, такой что справедливы неравенства (92) и (93) для всех $1 \le j \le s$, следует из Теоремы 4 (случаи $n = 1$ или $s = 1$ являются тривиальными). Лемма и Теорема 2 доказаны.

Список литературы

[1] Нестеренко Ю. В., Оценки характеристической функции простого идеала. – Математический сборник, 1984, т. 123, с. 11–34.

[2] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия. – М., Мир, 1981.

[3] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, т. 1. – М., Издательство иностранной литературы, 1954.

[4] Чистов А. Л., Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время. – Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1984, т. 137, с. 124–188.

[5] Чистов А. Л., Эффективная гладкая стратификация алгебраического многообразия в нулевой характеристике и её приложения. – St.Petersburg Mathematical Society Preprint # 1999-11, http://www.pdmi.ras.ru/spbmo/preprint/1999/index.html#11

[6] Chardin M., Une majoration de la function de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. – Bull. Soc. Math. France, 1989, vol. 117, p. 305–318.

[7] Chistov A. L., Polynomial–time computation of the dimensions of components of algebraic varieties in zero–characteristic. – Journal of Pure and Applied Algebra, 1997, vol. 117 & 118, p. 145–175.

[8] Chistov A. L., Polynomial-time computation of the degrees of algebraic varieties in zero-characteristic and its applications. – St.Petersburg Mathematical Society Preprint # 1999-03, http://www.pdmi.ras.ru/spbmo/preprint/1999/index.html#03, также принято к публикации в: Зап. научн. семинаров ПОМИ, т. 258.

[9] Lazard D., Algèbre linéaire sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ et élimination. – Bull. Soc. Math. France, 1977, vol. 105, p. 165–190.

[10] Lazard D., Résolution des systèmes d'équations algébrique. – Theoretical Computer Science, 1981, vol. 15, p. 77–110.

[11] Nakai Y., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A, 1950, vol. 26, N 2, p. 185–187.