SPb. Math. Society Preprint 1999-09 06 Apr 1999

УДК 519.677

ДИСКРЕТНЫЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ[1]

В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев

(198904 Старый Петергоф, Библиотечная пл., 2, СПбГУ)

Изучены фундаментальные свойства дискретных непериодических сплайнов на равномерной сетке. Установлен критерий однозначной разрешимости задачи дискретной сплайн-интерполяции нерегулярных данных, аналогичный критерию Шёнберга—Уитни.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на базе циклической свёртки и дискретного преобразования Фурье построена теория дискретных периодических сплайнов, ориентированная на интерполяцию и сглаживание дискретных периодических данных. Предлагаемая статья посвящена дискретным *непериодическим* сплайнам на равномерной сетке и их использованию при интерполяции *нерегулярных* данных.

Прокомментируем содержание статьи по разделам. В разделе 1 с помощью линейной свёртки вводятся дискретные B-сплайны и изучаются их фундаментальные свойства. В частности, для них установлено рекуррентное соотношение и получено представление в виде конечной разности соответствующего порядка.

Дискретные сплайны опрделяются как линейные комбинации сдвигов B-сплайна. Они рассматриваются в разделе 2, где основные усилия направлены на выяснение кусочно-полиномиальной природы дискретных сплайнов.

В разделе 3 вводится понятие обобщённых нулей и их кратности для дискретного сплайна. Это можно сделать разными способами. В статье выбирается максимально простой способ, достаточный для анализа задачи дискретной сплайн-интерполяции. Получена оценка числа обобщённых нулей дискретного сплайна с учётом их кратности.

В разделе 4 исследуется задача интерполяции нерегулярных данных с помощью дискретных сплайнов. Установлен критерий однозначной разрешимости такой задачи, аналогичный критерию Шёнберга—Уитни ([2], [3, с.15]). Приведены три численных примера.

Более общая (и более сложная) теория дискретных сплайнов на неравномерной сетке представлена в монографии [4]. В работе [5] изучались дискретные *натуральные* сплайны вместе с приложением к сглаживанию дискретных данных.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00747)

1. ДИСКРЕТНЫЕ B-СПЛАЙНЫ

Зафиксируем натуральное число $n \geq 2$. Дискретный B-сплайн первого порядка вводится явно:

$$B_1(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Дискретные B-сплайны более высоких порядков определяются с помощью линейной свертки

$$B_\nu(j) = (B_1 * B_{\nu-1})(j) =$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}} B_1(k) B_{\nu-1}(j-k) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{\nu-1}(j-k). \tag{1.1}$$

В частности,

$$B_2(j) = \begin{cases} j+1 & \text{при } j = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 2n-j-1 & \text{при } j = n, \ldots, 2(n-1), \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отметим, что

$$B_2(j) = (j+1)B_1(j) + (2n-j-1)B_1(j-n). \tag{1.2}$$

Это равенство справедливо при $j = 0, 1, \ldots, n-1,\ j = n, \ldots, 2(n-1),\ j = 2n-1$ и остальных $j \in \mathbf{Z}$.

По индукции легко проверяется, что B-сплайн $B_r(j)$ принимает только целые неотрицательные значения и

$B_r(j) = 0$ при $j < 0$ и $j > r(n-1)$,
$B_r(j) > 0$ при $j = 0, 1, \ldots, r(n-1)$,
$B_r(0) = B_r(r(n-1)) = 1$.

Покажем, что

$$B_r(r(n-1) - j) = B_r(j) \quad \forall j \in \mathbf{Z}. \tag{1.3}$$

При $r = 1$ это очевидно. Сделаем индукционный переход от r к $r+1$. Согласно (1.1) и (1.3) имеем

$$B_{r+1}((r+1)(n-1) - j) = \sum_{k=0}^{n-1} B_r(r(n-1) - j + (n-1-k)) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} B_r(r(n-1) - (j-l)) = \sum_{l=0}^{n-1} B_r(j-l) = B_{r+1}(j).$$

Лемма 1.1. *Справедливо тождество*

$$B_r(j) - B_r(j-1) = B_{r-1}(j) - B_{r-1}(j-n). \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из (1.1). Действительно,

$$B_r(j) - B_r(j-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl[B_{r-1}(j-k) - B_{r-1}(j-(k+1))\bigr] =$$

$$= B_{r-1}(j) - B_{r-1}(j-n).$$

Теорема 1.1. *При $r \geq 2$ справедливо рекуррентное соотношение*

$$B_r(j) = \frac{1}{r-1}\bigl[(j+r-1)B_{r-1}(j)+$$

$$+(r(n-1)+1-j)B_{r-1}(j-n)\bigr]. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = 2$ формула (1.5) соответствует (1.2). Сделаем индукционный переход от r к $r+1$.

Согласно (1.1), (1.4) и (1.5) имеем

$$B_{r+1}(j) = \sum_{k=0}^{n-1} B_r(j-k) = \frac{1}{r-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Bigl\{rnB_{r-1}(j-n-k)+$$

$$+(j-k+r-1)\bigl[B_{r-1}(j-k) - B_{r-1}(j-k-n)\bigr]\Bigr\} = \frac{1}{r-1}\Bigl\{rnB_r(j-n)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(j-k+r-1)\bigl[B_r(j-k) - B_r(j-(k+1))\bigr]\Bigr\}.$$

Последняя сумма преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{n-1}(j-k+r-1)B_r(j-k) - \sum_{k=1}^{n}(j-k+r)B_r(j-k) =$$

$$= (j+r-1)B_r(j) - (j-n+r)B_r(j-n) - \sum_{k=1}^{n-1} B_r(j-k) =$$

$$(j+r)B_r(j) - (j-n+r)B_r(j-n) - B_{r+1}(j),$$

поэтому

$$B_{r+1}(j) = -\frac{1}{r-1}B_{r+1}(j) + \frac{1}{r-1}\bigl\{(j+r)B_r(j)+$$

$$+((r+1)(n-1)+1-j)B_r(j-n)\bigr\},$$

что равносильно требуемому равенству

$$B_{r+1}(j) = \frac{1}{r}\left[(j+r)B_r(j) + ((r+1)(n-1)+1-j)B_r(j-n)\right].$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{r(n-1)} B_r(j) z^j = (1 + z + \cdots + z^{n-1})^r. \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = 1$ формула (1.6) тривиальна. Сделаем индукционный переход r от к $r+1$. Учитывая (1.6) и то, что $B_r(j) = 0$ при $j < 0$ и $j > r(n-1)$, получаем

$$\sum_{j=0}^{(r+1)(n-1)} B_{r+1}(j) z^j = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r(n-1)+n-1} B_r(j-k) z^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k}^{r(n-1)+k} B_r(j-k) z^{(j-k)+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{l=0}^{r(n-1)} B_r(l) z^l = (1 + z + \cdots + z^{n-1})^{r+1}.$$

Теорема доказана.

Продифференцировав тождество (1.6) и положив $z = 0$, придем к формуле

$$B_r(j) = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (1 + z + \cdots + z^{n-1})^r \Big|_{z=0}, \quad j = 0, 1, \ldots, r(n-1).$$

В частности, $B_r(1) = r$. Кроме того, из (1.6) при $z = 1$ следует, что

$$\sum_{j=0}^{r(n-1)} B_r(j) = n^r.$$

Введём функции

$$\varphi_0(j) \equiv 1; \quad \varphi_r(j) = j(j+1)\cdots(j+r-1), \; r = 1, 2, \ldots \; ;$$

$$\eta_0(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$\eta_r(j) = \eta_0(j) \varphi_r(j).$$

Легко проверить, что при всех $j \in \mathbf{Z}$

$$\varphi_r(j) - \varphi_r(j-1) = r \varphi_{r-1}(j), \; r = 1, 2, \ldots; \tag{1.7}$$

$$\big[\eta_0(j) - \eta_0(j-1)\big](j-1) = 0. \tag{1.8}$$

Лемма 1.2. *При любом натуральном r и всех $j \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство*

$$\eta_r(j) - \eta_r(j-1) = r\eta_{r-1}(j). \tag{1.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.8)

$$\eta_0(j-1)\varphi_r(j-1) = \big[\eta_0(j-1)(j-1)\big]j\cdots(j+r-2) =$$

$$= \eta_0(j)(j-1)j\cdots(j+r-2) = \eta_0(j)\varphi_r(j-1). \tag{1.10}$$

На основании (1.10) и (1.7) получаем

$$\eta_r(j) - \eta_r(j-1) = \eta_0(j)\varphi_r(j) - \eta_0(j-1)\varphi_r(j-1) =$$

$$= \eta_0(j)\big[\varphi_r(j) - \varphi_r(j-1)\big] = r\eta_0(j)\varphi_{r-1}(j) = r\eta_{r-1}(j).$$

Лемма доказана.

Отметим, что

$$\eta_r(j) = \varphi_r(j) \text{ при } j \geq -r+1,\ r = 0, 1, \ldots \tag{1.11}$$

Напомним определение конечных разностей назад:

$$\nabla_n f(j) = \nabla_n^1 f(j) = f(j) - f(j-n),$$

$$\nabla_n^\nu f(j) = \nabla_n(\nabla_n^{\nu-1} f(j)) = \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^l C_\nu^l f(j - ln),\ \nu = 2, 3, \ldots$$

Теорема 1.3. *Дискретный B-сплайн $B_r(j)$ при любом натуральном r допускает представление*

$$B_r(j) = \frac{1}{(r-1)!}\nabla_n^r \eta_{r-1}(j+1). \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = 1$ формула (1.12) верна. Сделаем индукционный переход r от к $r+1$.

Согласно (1.12) и (1.9) имеем

$$B_{r+1}(j) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{n-1} \nabla_n^r \eta_{r-1}(j-k+1) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l C_r^l \eta_{r-1}(j-k+1-ln) =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l C_r^l \sum_{k=0}^{n-1}\big[\eta_r(j-ln-(k-1)) - \eta_r(j-ln-k)\big] =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l C_r^l \big[\eta_r(j+1-ln) - \eta_r(j+1-(l+1)n)\big] =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r+1}(-1)^l C_{r+1}^l \eta_r(j+1-ln) = \frac{1}{r!}\nabla_n^{r+1}\eta_r(j+1).$$

Теорема доказана.

2. ДИСКРЕТНЫЕ СПЛАЙНЫ

Дискретный сплайн порядка r определяется формулой

$$S(j) = \sum_{l\in\mathbf{Z}} c(l)B_r(j-ln).$$

Введём множество

$$I_{rk} = \{kn-r+1, kn-r+2, \ldots, (k+1)n-1\}$$

и отметим, что при $j \in I_{rk}$

$$S(j) = \sum_{l=k-r+1}^{k} c(l)B_r(j-ln). \tag{2.1}$$

Действительно, при $l \geq k+1$ и $j \in I_{rk}$ выполняется неравенство $j - ln \leq j-(k+1)n \leq -1$. Аналогично при $l \leq k-r$ и $j \in I_{rk}$ имеем $j - ln \geq kn - r + 1 - (k-r)n = r(n-1)+1$. В обоих случаях $B_r(j-ln) = 0$, что и обеспечивает справедливость равенства (2.1).

Зафиксируем натуральное число m и обозначим через $\mathcal{S}_r^m$ семейство дискретных сплайнов вида

$$S(j) = \sum_{l=-r+1}^{m} c(l)B_r(j-ln), \tag{2.2}$$

рассматриваемых на множестве $J_r = \{-r+1, -r+2, \ldots, (m+1)n-1\}$. Семейство $\mathcal{S}_r^m$ будет основным обьектом нашего внимания.

Положим

$$\nabla^0 c(l) = c(l),\ \nabla c(l) = \nabla^1 c(l) = \nabla_1^1 c(l) = c(l) - c(l-1),$$

$$\nabla^\nu c(l) = \nabla_1^\nu c(l) = \nabla(\nabla_1^{\nu-1}c(l)) = \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k C_\nu^k c(l-k),\ \nu = 2,3,\ldots$$

Теорема 2.1. *Сплайн $S(j)$ вида (2.2) при $j \in J_r$ допускает представление*

$$S(j) = \frac{1}{(r-1)!}\Big\{\sum_{k=0}^{r-1}\nabla^k c(-r+1+k)\nabla_n^{r-1-k}\varphi_{r-1}(j+1+(r-1-k)n) +$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\nabla^r c(l)\eta_{r-1}(j+1-ln)\Big\}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится с помощью последовательного суммирования по частям. Согласно (2.2) и (1.12) запишем

$$S(j) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{l=-r+1}^{m} c(l) \nabla_n^r \eta_{r-1}(j+1-ln).$$

Отсюда следует, что

$$(r-1)!S(j) = \sum_{l=-r+2}^{m} \nabla c(l) \nabla_n^{r-1} \eta_{r-1}(j+1-ln)+$$

$$+c(-r+1)\nabla_n^{r-1}\eta_{r-1}(j+1+(r-1)n) - c(m)\nabla_n^{r-1}\eta_{r-1}(j+1-(m+1)n).$$

При $j \in J_r$ имеем

$$\nabla_n^{r-1}\eta_{r-1}(j+1+(r-1)n) = \nabla_n^{r-1}\varphi_{r-1}(j+1+(r-1)n),$$

$$\nabla_n^{r-1}\eta_{r-1}(j+1-(m+1)n) = 0.$$

Справедливость первого равенства основана на том, что при $j \in J_r$ выполняется неравенство $j+1 \geq -r+2$; в этом случае, согласно (1.11), $\eta_{r-1}(j+1+kn) = \varphi_{r-1}(j+1+kn)$ при $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Если учесть, что $j+1-(m+1)n \leq 0$ при $j \in J_r$, то становится очевидным и второе равенство.

Объединяя указанные факты, получаем

$$(r-1)!S(j) = c(-r+1)\nabla_n^{r-1}\varphi_{r-1}(j+1+(r-1)n)+$$

$$+\sum_{l=-r+2}^{m} \nabla c(l) \nabla_n^{r-1} \eta_{r-1}(j+1-ln).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sum_{l=-r+2}^{m} \nabla c(l) \nabla_n^{r-1} \eta_{r-1}(j+1-ln) = \nabla c(-r+2)\nabla_n^{r-2}\varphi_{r-1}(j+1+(r-2)n)+$$

$$+\sum_{l=-r+3}^{m} \nabla^2 c(l) \nabla_n^{r-2} \eta_{r-1}(j+1-ln).$$

Продолжая этот процесс, приходим к (3.3). Теорема доказана.

Сдедствие. *При $j \in J_r$ справедливо тождество*

$$\sum_{l=-r+1}^{m} B_r(j-ln) \equiv n^{r-1}.$$

Действительно, положив в (2.3) $c(l) \equiv 1$, получаем

$$\sum_{l=-r+1}^{m} B_r(j-ln) = \frac{1}{(r-1)!}\nabla_n^{r-1}\varphi_{r-1}(j+1+(r-1)n).$$

Остаётся учесть, что конечная разность $(r-1)$-го порядка с шагом n от полинома $(r-1)$-й степени с единичным старшим коэффициентом равна $(r-1)!n^{r-1}$.

Замечание. При доказательстве теоремы 2.1 установлен более общий, чем формула (2.3), факт. А именно, что *сплайн* $S(j)$ *вида* (2.2) *при* $j \in J_r$ *и любом* $\nu \in \{1, \dots, r\}$ *допускает представление*

$$S(j) = \frac{1}{(r-1)!} \Big\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} \nabla^k c(-r+1+k) \nabla_n^{r-1-k} \varphi_{r-1}(j+1+(r-1-k)n) +$$

$$+ \sum_{l=-r+1+\nu}^{m} \nabla^\nu c(l) \nabla_n^{r-\nu} \eta_{r-1}(j+1-ln) \Big\}. \tag{2.4}$$

Формула (2.3) следует из (2.4) при $\nu = r$.

Введём обозначения $a(l) = \nabla^r c(l) \big/ (r-1)!$,

$$P_{r-1,0}(j) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{r-1} \nabla^k c(-r+1+k) \nabla_n^{r-1-k} \varphi_{r-1}(j+1+(r-1-k)n).$$

Тогда формулу (2.3) можно переписать в виде

$$S(j) = P_{r-1,0}(j) + \sum_{l=1}^{m} a(l) \eta_{r-1}(j+1-ln), \ j \in J_r. \tag{2.5}$$

Очевидно, что $P_{r-1,0}$ является алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$.

Теорема 2.2. *При* $j \in I_{rk}$, $k = 0, 1, \dots, m$, *выполняется равенство*

$$S(j) = P_{r-1,0}(j) + \sum_{l=1}^{k} a(l) \varphi_{r-1}(j+1-ln). \tag{2.6}$$

Доказательство. При $j \in I_{rk}$ и $l \ge k+1$ имеем $j+1-ln \le j+1-(k+1)n \le 0$, поэтому согласно (2.5)

$$S(j) = P_{r-1,0}(j) + \sum_{l=1}^{k} a(l) \eta_{r-1}(j+1-ln). \tag{2.7}$$

При $l \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in I_{rk}$ получаем $j+1-ln \ge j+1-kn \ge -r+2$. В этом случае, согласно (1.11), $\eta_{r-1}(j+1-ln) = \varphi_{r-1}(j+1-ln)$. На основании последнего равенства и (2.7) приходим к (2.6). Теорема доказана.

В правой части формулы (2.6) стоит алгебраический полином степени не выше $r-1$. Обозначим его $P_{r-1,k}(j)$. Тогда

$$S(j) = P_{r-1,k}(j) \text{ при } j \in I_{rk}, \ k = 0, 1, \dots, m. \tag{2.8}$$

Равенство

$$P_{r-1,k}(j) = P_{r-1,k-1}(j) + a(k) \varphi_{r-1}(j+1-kn) =$$

$$= P_{r-1,k-1}(j) + a(k)(j+1-kn)(j+2-kn)\cdots(j+r-1-kn)$$

показывает, что полиномы $P_{r-1,k-1}(j)$ и $P_{r-1,k}(j)$ совпадают в $r-1$ точках $j = kn-r+1,\ldots,kn-1$. Эти точки образуют пересечение множеств $I_{r,k-1}$ и I_{rk}.

Отметим, что переход от $P_{r-1,k-1}(j)$ к $P_{r-1,k}(j)$ управляется только одним параметром $a(k)$.

Теорема 2.3. *На множестве* $J_{r-\nu} = \{-r+\nu+1,\ldots,(m+1)n-1\}$ *при* $\nu = 1,\ldots,r-1$ *справедливо равенство*

$$\nabla^\nu S(j) = \sum_{l=-r+1+\nu}^{m} \nabla^\nu c(l) B_{r-\nu}(j-ln). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.2) и (1.4) имеем

$$\nabla S(j) = \sum_{l=-r+1}^{m} c(l)\big[B_r(j-ln) - B_r(j-1-ln)\big] =$$

$$= \sum_{l=-r+1}^{m} c(l)\big[B_{r-1}(j-ln) - B_{r-1}(j-(l+1)n)\big] =$$

$$= \sum_{l=-r+2}^{m} \nabla c(l) B_{r-1}(j-ln) + c(-r+1)B_{r-1}(j+(r-1)n) -$$

$$-c(m)B_{r-1}(j-(m+1)n).$$

Отметим, что при $j \in J_{r-1}$

$$B_{r-1}(j+(r-1)n) = 0, \quad B_{r-1}(j-(m+1)n) = 0.$$

Второе равенство очевидно, а первое следует из того, что при $j \in J_{r-1}$ выполняется неравенство

$$j + (r-1)n \ge -r + 2 + (r-1)n = (r-1)(n-1) + 1.$$

Таким образом, при $j \in J_{r-1}$ получаем представление

$$\nabla S(j) = \sum_{l=-r+2}^{m} \nabla c(l) B_{r-1}(j-ln).$$

В частности, $\nabla S \in \mathcal{S}^m_{r-1}$.

Аналогично устанавливается, что

$$\nabla^2 S(j) = \sum_{l=-r+3}^{m} \nabla^2 c(l) B_{r-2}(j-ln) \quad \text{при} \quad j \in J_{r-2}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к (2.9). Теорема доказана.

Из формулы (2.9) при $\nu = r - 1$ следует, что

$$\nabla^{r-1} S(j) = \sum_{l=0}^{m} \nabla^{r-1} c(l) B_1(j - ln) \quad \text{при} \quad j \in J_1, \tag{2.10}$$

где $J_1 = \{0, 1, \ldots, (m+1)n - 1\}$.

Теорема 2.4. *Система сдвигов* $\{B_r(j - ln)\}_{l=-r+1}^{m}$ *линейно независима на* J_r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что

$$S_0(j) := \sum_{l=-r+1}^{m} c_0(l) B_r(j - ln) \equiv 0 \quad \text{на } J_r, \tag{2.11}$$

и покажем, что $c_0(l) = 0$ при всех $l = -r+1, \ldots, m$.

В силу (2.11) и теоремы 2.3 при $\nu = 1, \ldots, r-1$ имеем

$$\nabla^{\nu} S_0(j) := \sum_{l=-r+1+\nu}^{m} \nabla^{\nu} c_0(l) B_{r-\nu}(j - ln) \equiv 0 \quad \text{на } J_{r-\nu}. \tag{2.12}$$

К этому добавим, что при тех же ν согласно следствию из теоремы 2.1 справедливо тождество

$$\sum_{l=-r+1+\nu}^{m} B_{r-\nu}(j - ln) \equiv n^{r-\nu-1} \quad \text{на } J_{r-\nu}. \tag{2.13}$$

Воспользуемся (2.12) при $\nu = r - 1$. Получим

$$\sum_{l=0}^{m} \nabla^{r-1} c_0(l) B_1(j - ln) \equiv 0 \quad \text{на } J_1.$$

Вспоминая определение дискретного B-сплайна первого порядка, приходим к выводу о том, что $\nabla^{r-1} c_0(l) = 0$ при $l = 0, 1, \ldots, m$. Но тогда $\nabla^{r-2} c_0(l) \equiv \text{const}$ при $l = -1, \ldots, m$. Учитывая тождества (2.12) и (2.13) при $\nu = r-2$, заключаем, что $\nabla^{r-2} c_0(l) = 0$ при $l = -1, \ldots, m$. Значит, $\nabla^{r-3} c_0(l) \equiv \text{const}$ при $l = -2, \ldots, m$, и так далее. При $\nu = 1$ получаем $c_0(l) \equiv \text{const}$ при $l = -r+1, \ldots, m$. Теперь из (2.11) следует, что $c_0(l) = 0$ при всех $l = -r+1, \ldots, m$. Теорема доказана.

3. ОЦЕНКА ЧИСЛА ОБОБЩЁННЫХ НУЛЕЙ

Пусть $S \in \mathcal{S}_r^m$ – дискретный сплайн, не равный тождественно нулю на J_r. Множество $G := \{i, i+1, \ldots, i+\nu-1\} \subset J_r$ назовём *нулевым множеством* сплайна S, если $S(j) = 0$ при всех $j \in G$ и $S(i-1)\,S(i+\nu) \neq 0$. В случае $i = -r+1$ или $i+\nu = (m+1)n$ последнее условие нужно заметить соответственно на $S(i+\nu) \neq 0$ или $S(i-1) \neq 0$. Нулевое множество G будем считать *обобщенным нулем* сплайна S. Его кратность определяется в зависимости от ν.

1) $\nu \in \{1, \ldots, r-1\}$. В этом случае обобщённому нулю G присваивается кратность ν.

2) $\nu \geq r$. Очевидно, что $i+\nu-1 \in \{kn, \ldots, (k+1)n-1\}$ при некотором $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Учитывая, что сплайн S имеет не менее r нулей на I_{rk}, получаем согласно (2.8), что $S(j) \equiv 0$ на I_{rk}, то есть необходимо $i+\nu-1 = (k+1)n-1$. Если $S(kn-r) \neq 0$, то $i = kn-r+1$ и $G = I_{rk}$. В случае $S(kn-r) = 0$ необходимо $S(j) \equiv 0$ на $I_{r,k-1}$, поскольку S имеет на $I_{r,k-1}$ не менее r нулей. Теперь очевидно, что $i = sn-r+1$ при некотором $s \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Установлено, что при $\nu \geq r$ нулевое множество G сплайна S имеет вид $G = \{sn-r+1, \ldots, (k+1)n-1\}$, где $s \leq k$. Такому обобщённому нулю дадим специальное название *"нуль-интервал"* и присвоим ему кратность $r-1+(k+1-s) = r+k-s$. Число $k+1-s$ назовём *индексной длиной* нуль-интервала G.

Кроме нулевых множеств, введём изолированные нули дискретного сплайна. Точка $j \in J_r$ называется *изолированным нулем* сплайна $S \in \mathcal{S}_r^m$, если $S(j)\,S(j-1) < 0$. Изолированный нуль считается обобщённым нулём кратности единица.

Отметим, что изолированные нули могут идти подряд и могут соседствовать с нулевыми множествами, как, например, в случае $S(j-2) > 0,\ S(j-1) < 0,\ S(j) > 0,\ S(j+1) = 0$.

Теперь все виды обобщённых нулей дискретного сплайна определены. Это либо изолированные нули, либо нулевые множества. Среди нулевых множеств выделены нуль-интервалы, для которых кратность введена нестандартным образом.

Обозначим через $Z_r(S)$ число обобщённых нулей сплайна $S \in \mathcal{S}_r^m$ на J_r с учётом их кратности.

Лемма 3.1. *Пусть $S \in \mathcal{S}_1^m$ – дискретный сплайн, не равный тождественно нулю на J_1. Тогда*

$$Z_1(S) \leq m. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём индукцией по m. При этом будем учитывать, что сплайн первого порядка является кусочно-постоянной функцией.

При $m = 1$ сплайн $S(j)$ состоит из двух ступенек, точнее, $S(j) \equiv \alpha_0$ на $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $S(j) \equiv \alpha_1$ на $\{n, \ldots, 2n-1\}$, причём α_0 и α_1 не равны нулю одновременно. Очевидно, что $S(j)$ может иметь либо один изолированный нуль, если $\alpha_0\alpha_1 < 0$, либо нуль-интервал индексной длины единица, когда одно из чисел α_0, α_1 равно нулю. Во всех случаях $Z_1(S) \leq 1$.

Сделаем индукционный переход от m к $m+1$. Нужно проверить, что при появлении ещё одной ступеньки у S величина $Z_1(S)$ увеличивается не более, чем на единицу. Пусть $S(j) \equiv \alpha_m$ на $\{mn, \ldots, (m+1)n-1\}$ и $S(j) \equiv \alpha_{m+1}$ на $\{(m+1)n, \ldots, (m+2)n-1\}$. Рассмотрим два случая.

1) $\alpha_m = 0$. Если при этом и $\alpha_{m+1} = 0$, то индексная длина крайнего справа нуль-интервала сплайна S увеличивается на единицу, что приводит к увеличению на единицу и $Z_1(S)$. При $\alpha_{m+1} \neq 0$ величина $Z_1(S)$ не изменяется.

2) $\alpha_m \neq 0$. Если $\alpha_m\alpha_{m+1} < 0$, то появляется новый изолированный нуль. При $\alpha_m\alpha_{m+1} > 0$ величина $Z_1(S)$ остаётся прежней. При $\alpha_{m+1} = 0$ появляется новый

нуль-интервал индексной длины единица.

Во всех случаях величина $Z_1(S)$ увеличивается не более, чем на единицу. Лемма доказана.

Наша основная цель – получить оценку для $Z_r(S)$ при произвольном натуральном r. Для этого потребуется некоторая подготовка.

Пусть $S \in \mathcal{S}_r^m$. Согласно теореме 2.3, $\nabla S \in \mathcal{S}_{r-1}^m$. Следующее утверждение является аналогом теоремы Ролля.

Лемма 3.2. *Если $\nabla S(j)$ не равно тождественно нулю на J_{r-1}, то*

$$Z_r(S) \le Z_{r-1}(\nabla S) + 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Обозначим через $G_1, \ldots, G_q$ обобщённые нули дискретного сплайна S кратности соответственно $H_r(G_1), \ldots, H_r(G_q)$. В этом случае

$$Z_r(S) = \sum_{\mu=1}^{q} H_r(G_\mu).$$

Сначала будем считать, что все G_μ – нулевые множества, $G_\mu = \{i_\mu, i_\mu + 1, \ldots, i_\mu + \nu_\mu - 1\}$, $\mu = 1, \ldots, q$. Очевидно, что множество $G_\mu^{(1)} = \{i_\mu + 1, \ldots, i_\mu + \nu_\mu - 1\}$ является нулевым множеством сплайна ∇S кратности $H_{r-1}(G_\mu^{(1)}) = H_r(G_\mu) - 1$. Это верно как при $\nu_\mu \le r - 1$, так и при $\nu_\mu \ge r$ (для нуль-интервалов).

Покажем, что между соседними нулевыми множествами G_μ и $G_{\mu+1}$ сплайна S имеется обобщённый нуль сплайна ∇S. По определению нулевого множества не все значения $S(j)$ на $Q_\mu = \{i_\mu + \nu_\mu - 1, \ldots, i_{\mu+1}\}$ равны нулю. Допустим, что максимум $S(j)$ на Q_μ положителен и j_μ – наименьшая из точек, на которых максимум достигается. Если $S(j_\mu) > S(j_\mu + 1)$, то $j_\mu + 1$ – изолированный нуль ∇S. В противном случае (когда $S(j_\mu) = S(j_\mu + 1)$) у ∇S на $\{j_\mu + 1, \ldots, i_{\mu+1} - 1\}$ появляется нулевое множество.

В результате получаем

$$Z_{r-1}(\nabla S) \ge \sum_{\mu=1}^{q} H_{r-1}(G_\mu^{(1)}) + q - 1 = Z_r(S) - 1,$$

что равносильно (3.2).

Теперь рассмотрим случай, когда среди обобщённых нулей сплайна S встречаются изолированные нули. И здесь достаточно проверить, что между соседними обобщёнными нулями S имеется обобщённый нуль ∇S.

Пусть $G_\mu = \{k_\mu\}$ и $G_{\mu+1} = \{k_{\mu+1}\}$ – два соседних изолированных нуля сплайна S. Это значит, что $S(k_\mu - 1)\, S(k_\mu) < 0$ и $S(k_{\mu+1})\, S(k_{\mu+1} - 1) < 0$. Если $S(k_\mu)\, S(k_{\mu+1} - 1) > 0$ (не исключается, что $k_\mu = k_{\mu+1} - 1$), то и $S(k_\mu - 1)\, S(k_{\mu+1}) > 0$. Предположим, что $S(k_\mu) > 0$. Обозначив $Q_\mu = \{k_\mu - 1, \ldots, k_{\mu+1}\}$, закончим доказательство так же, как в предыдущем случае. Если $S(k_\mu) < 0$, то нужно рассмотреть минимум $S(j)$ на Q_μ. При $S(k_\mu)\, S(k_{\mu+1} - 1) < 0$ полагаем $Q_\mu = \{k_\mu, \ldots, k_{\mu+1}\}$.

Ситуация, когда один из обобщённых нулей $G_\mu, G_{\mu+1}$ является изолированным нулём, а другой – нулевым множеством, анализируется аналогично. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть* $S \in \mathcal{S}_r^m$ *– дискретный сплайн не равный тождественно нулю на* J_r. *Тогда*

$$Z_r(S) \le r - 1 + m. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = 1$ утверждение верно (лемма 3.1), поэтому считаем, что $r \ge 2$.

Возьмём сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ вида (2.1). Согласно (2.10), $\nabla^{r-1}S \in \mathcal{S}_1^m$. Если $\nabla^{r-1}S(j) \equiv 0$ на J_1, то $\nabla^{r-1}c(l) = 0$ при всех $l = 0, 1, \ldots, m$. В этом случае на основании формулы (2.4) при $\nu = r - 1$ заключаем, что сплайн $S(j)$ является алгебраическим полиномом степени не выше $r - 2$. Для него $Z_r(S) \le r - 2 < r - 1 + m$.

В дальнейшем считаем, что $\nabla^{r-1}S(j)$ не равно тождественно нулю на J_1. Тогда и $\nabla^{r-\nu}S(j)$ не равно тождественно нулю на J_ν при всех $\nu = 1, \ldots, r$. Согласно (3.2)

$$Z_r(S) \le Z_{r-1}(\nabla S) + 1 \le Z_{r-2}(\nabla^2 S) + 2 \le \ldots \le Z_1(\nabla^{r-1}S) + r - 1.$$

Остаётся сослаться на лемму 3.1. Теорема доказана.

4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА

На множестве J_r зафиксируем $r + m$ узлов $j_1 < j_2 < \ldots < j_{r+m}$ и рассмотрим интерполяционную задачу: построить дискретный сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$, такой, что

$$S(j_\mu) = y_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, r + m. \tag{4.1}$$

Здесь y_μ – произвольные вещественные числа.

Введём обозначения: $p_s = sn - r + 1$, $q_k = kn - 1$, $V(p_s, q_k)$ – количество узлов интерполяции j_μ, принадлежащих множеству $G_{sk} = \{p_s, p_s + 1, \ldots, q_k\}$.

Теорема 4.1. *Для того чтобы задача* (4.1) *была однозначно разрешима при любых правых частях, необходимо и достаточно, чтобы при* $0 \le s < k \le m+1$ *выполнялось неравенство*

$$V(p_s, q_k) \le r - 1 + (k - s). \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, вопреки утверждению, что при некоторых допустимых s, k будет

$$V(p_s, q_k) \ge r + k - s. \tag{4.3}$$

На множестве G_{sk} дискретный сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ допускает представление

$$S(j) = \sum_{l=s-r+1}^{k-1} c(l) B_r(j - ln).$$

Учитывая этот факт и условие теоремы, заключаем, что система линейных уравнений
$$\sum_{l=s-r+1}^{k-1} c(l)B_r(j_\mu - ln) = y_\mu, \quad j_\mu \in G_{sk}, \tag{4.4}$$
имеет решение при любых правых частях. Но это невозможно, поскольку согласно (4.3) у матрицы системы (4.4) строк больше, чем столбцов.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем, что однородная система
$$S(j_\mu) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, r+m,$$
имеет только нулевое решение. Допустим противное. Тогда найдётся дискретный сплайн $S_0 \in \mathcal{S}_r^m$, не равный тождественно нулю на J_r (в силу теоремы 2.4), который в узлах $j_1, \ldots, j_{r+m}$ принимает нулевое значение.

Обозначим через N_0 множество узлов, попадающих в нуль-интервалы сплайна S_0, а через N_1 – множество остальных узлов. Очевидно, что
$$|N_0| + |N_1| = r + m.$$
Вместе с тем, число $|N_1|$ не превосходит суммарной кратности нулевых множеств сплайна S_0, не являющихся нуль-интервалами, а количество узлов, содержащихся в каждом нуль-интервале, согласно (4.2) не больше кратности нуль-интервала (см. определения в начале разд. 3). Значит,
$$Z_r(S_0) \geq |N_0| + |N_1| = r + m,$$
что пртиворечит теореме 3.1. Теорема доказана.

Замечание. Условие (4.2) равносильно двум более простым условиям
$$\begin{aligned} V(p_0, q_k) &\leq r - 1 + k, \quad & k = 1, \ldots, m, \\ V(p_s, q_{m+1}) &\leq r + m - s, \quad & s = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.5}$$

То, что из (4.2) следует (4.5), очевидно. В обратном переходе используется равенство
$$V(p_0, q_k) + V(p_s, q_{m+1}) = V(p_0, q_{m+1}) + V(p_s, q_k)$$
при $1 \leq s < k \leq m$.

Роль теоремы 4.1 проиллюстрируем на трех примерах. Для этого введем обозначения
$$J = \{j_1, \ldots, j_{r+m}\}, \quad Y = \{y_1, \ldots, y_{r+m}\},$$
$$p = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}, \quad q = \{q_1, \ldots, q_{m+1}\}.$$
Во всех трех примерах $r = 4$, $n = 10$.

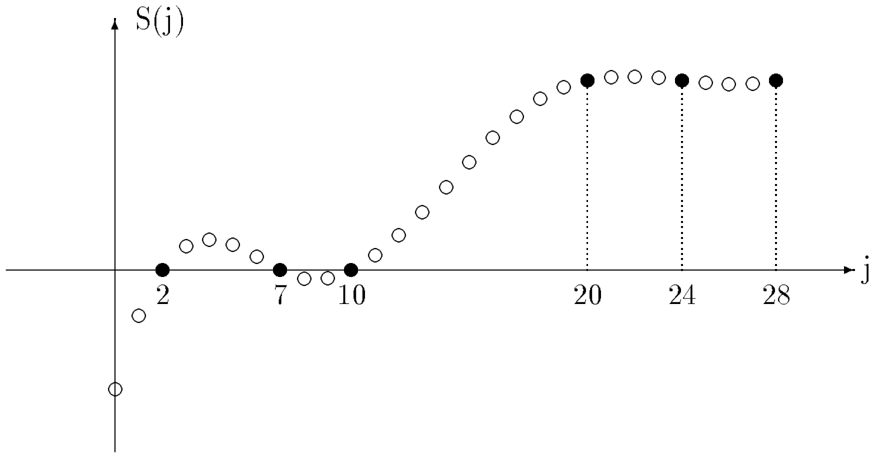
ПРИМЕР 1. Пусть $m = 2$,
$$J = \{2, 7, 10, 20, 24, 28\}, \ Y = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}.$$

В этом случае $p = \{-3, 7, 17\}$, $q = \{9, 19, 29\}$,

$$V(p_0, q_1) = V(-3, 9) = 2, \quad V(p_0, q_2) = V(-3, 19) = 3,$$

$$V(p_1, q_3) = V(7, 29) = 5, \quad V(p_2, q_3) = V(17, 29) = 3.$$

Условия (4.5) выполнены. График дискретного интерполяционного сплайна представлен на фиг. 1.



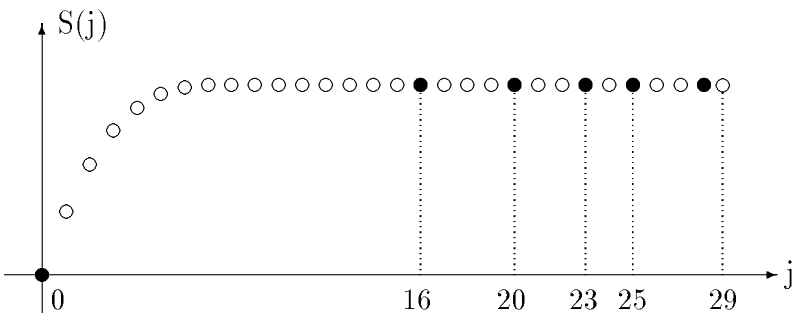
Фиг. 1

ПРИМЕР 2. Пусть $m = 2$,

$$J = \{0, 16, 20, 23, 25, 29\}, \quad Y = \{0, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

В этом случае множества p и q те же, что и в предыдущем примере, $V(p_0, q_1) = 1$, $V(p_0, q_2) = 2$, $V(p_1, q_3) = 5$, $V(p_2, q_3) = 4$. Условия (4.5) выполнены. График дискретного интерполяционного сплайна представлен на фиг. 2.

Вместе с тем, если заменить узел $j_2 = 16$ на $j_2 = 17$, то неравенство $V(p_2, q_3) \leq 4$ нарушится. Это приведёт к тому, что определитель системы (4.1) в силу теоремы 4.1 будет равен нулю – со всеми вытекающими отсюда неприятностями.



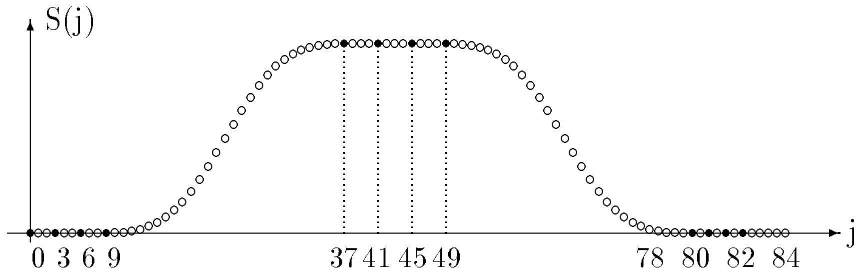
Фиг. 2

ПРИМЕР 3. Пусть $m = 8$,

$$J = \{0, 3, 6, 9, 37, 41, 45, 49, 78, 80, 82, 84\},$$

$$Y = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}.$$

В этом случае $p = \{-7, 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73\}$, $q = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89\}$. Нетрудно проверить, что условия (4.5) выпоняются. График дискретного интерполяционного сплайна представлен на фиг. 3.



Фиг. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

2. *Schoenberg I.J., Whitney A.* On Polya frequency functions. III //Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. N 2. P. 246-259.

3. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

4. *Schumaker L.L.* Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981.

5. *Бер М.Г.* Натуральные дискретные сплайны и задача сглаживания // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 4 (№ 22). С. 3-6.