УДК 513.88

Р е й н о в О. И. **Аппроксимационные свойства** $\mathrm{AP_s}$ **и** p**-ядерные операторы (случай** $0 < s \leq 1$)

Изучаются банаховы пространства, обладающие (или не обладающие) аппроксимационными свойствами AP_s, $0 < s \leq 1$, в связи со следующим известным вопросом в геометрической теории операторов: при каких условиях на банаховы пространства X и Y и на положительные числа r, p для непрерывного оператора T из X в Y из p-ядерности его второго сопряженного будет следовать r-ядерность самого оператора T. Приводятся, по существу, необходимые и достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос, причем соответствующие контрпримеры устанавливаются в максимально сильной форме. Так, например, показывается (и это — значительное усиление предыдущих результатов подобного сорта), что существует такая пара сепарабельных банаховых пространств Z, W, что пространства Z^{**} и W имеют базисы Шаудера и для каждого $p, 1 \leq p < 2,$ найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным. Ранее в подобного рода примерах соответствующие пространства не обладали даже свойством аппроксимации Гротендика. Техника, развитая в работе, не позволяет разобраться со случаем $p > 2$, и это — тема последующей статьи автора. Библиогр. 11 назв.

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА $\mathrm{AP_S}$ И p-ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ (СЛУЧАЙ $0 < s \le 1$)

О.И.Рейнов[†]

Изучаются банаховы пространства, обладающие (или не обладающие) аппроксимационными свойствами AP_s, $0 < s \le 1$, в связи со следующим известным вопросом в геометрической теории операторов: при каких условиях на банаховы пространства X и Y и на положительные числа r, p для непрерывного оператора T из X в Y из p-ядерности его второго сопряженного будет следовать r-ядерность самого оператора T. Приводятся, по существу, необходимые и достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос, причем соответствующие контрпримеры устанавливаются в максимально сильной форме. Так, например, показывается (и это — значительное усиление предыдущих результатов подобного сорта), что существует такая пара сепарабельных банаховых пространств Z, W, что пространства Z^{**} и W имеют базисы Шаудера и для каждого $p, 1 \le p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным. Ранее в подобного рода примерах соответствующие пространства не обладали даже свойством аппроксимации Гротендика. Техника, развитая в работе, не позволяет разобраться со случаем $p > 2$, и это — тема последующей статьи автора.

Мы придерживаемся стандартных обозначений геометрической теории операторов в банаховых пространствах. Классический справочник по теории операторных идеалов — монография А.Пича [7]. Обозначения и терминологию, которые мы используем, можно найти, например, в [7], [8], [10], [11]. Для наших целей достаточно лишь напомнить, что, если X, Y — пара банаховых пространств и $p > 0$, то через $N_p(X, Y)$ обозначается пространство всех p-ядерных операторов из X в Y, а через $X^*\widehat{\otimes}_p Y$ — ассоциированное с ним p-проективное тензорное произведение. И еще одно важное напоминание. Если J — некоторый операторный идеал, то $J^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ обозначает пространство всех операторов T из X в Y, для которых $\pi_Y\, T \in J(X, Y^{**})$, где,

[†] Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36).

[‡] Ключевые слова и фразы: p-ядерные операторы, базисы, свойства аппроксимации, тензорные произведения.

как обычно принято, через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}.

В этой заметке нас, в основном, будут интересовать следующие два вопроса:

1) При каких условиях на банаховы пространства X, Y каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{N_p}(X,Y)$ взаимно однозначно?
2) При каких условиях на банаховы пространства X, Y и на положительные числа s, r $\mathrm{N_s^{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N_r}(X,Y)$?

Оба эти вопроса весьма подробно изучались, например, в работах [10], [11]. Вопрос (2) рассматривался также в [2] при $r = s = 1$ и в [8] при $r = s > 1$. При некоторых других значениях параметров p, r, s оба эти вопроса исследовались в работе [3]. Так, известная теорема А.Гротендика о 2/3 утверждает, что всегда $\mathrm{N_{2/3}^{reg}} \subset \mathrm{N_1}$ (несколько ниже, доказательство этого утверждения можно будет увидеть в замечании 2)

В качестве примеров отметим еще следующие факты:

a) если X, Y – произвольные банаховы пространства, то каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{2/3} Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ всегда взаимно однозначно (см. [3], [9], а также следствие $1'$ ниже);
b) если каждое конечномерное подпространство E пространства Y $C(\dim E)^\alpha$-дополняемо в Y (где $0 < \alpha \leq 1/2$), то для s, $1/s = 1 + \alpha$, и для каждого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_s Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (см. [10]);
c) если $0 < s \leq 1$ и $1/s = 1/2 + 1/r$, то $\mathrm{N_s^{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N_r}(X,Y)$ для любых банаховых пространств X, Y (см. [3]);
d) если $p \geq 1$ и $X^* \in AP$, то $\mathrm{N_p^{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N_p}(X,Y)$ для любого банахова пространства Y (см. [3] относительно случая $p = 1$; что касается случая $p > 1$, то здесь доказательство проводится по той же схеме, что и в [3], поэтому мы не станем повторяться).

Замечание 1. Аналог утверждения d) в предположении, что $Y^{**} \in AP$ (вместо X^*), был сформулирован в [3] для $p = 1$ и в [5] для $p > 1$. Ниже мы увидим, что эти последние факты неверны (впрочем, относительно случая $p = 1$ см. работу [6]).

В [10], среди прочего, показано, что утверждения (a)–(c) не могут быть улучшены "в шкале пространств l_p." Ниже мы уточним утверждения (a)–(c) для "шкалы пространств Лоренца"[1], и покажем, что полученные новые утверждения неулучшаемы и здесь.

Мы увидим также (и это, пожалуй, основное в работе), что все "отрицательные" результаты работ [8], [10], соответствующие утверждениям (a)–(d), имеют место в намного более сильных вариантах. Первый пример подобного рода "усиленного" контрпримера можно найти в статье [6], где установлено, что существует банахово пространство Z со специальными свойствами: (i) Z^{**} сепарабельно и имеет базис (а Z^{***} без свойства аппроксимации); (ii) $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$. Это — пример, показывающий: что вторая часть утверждения А.Гротендика [3] (гл.1, с. 86, предложение 15) неверна. Ниже мы распространим указанный контрпример на случай показателей ядерности p, больших единицы и меньших двойки (но, конечно, отличных от двойки; соответствующие контрпримеры для $p > 2$ — тема последующей статьи); см. теорему 5 и ее следствие .

Ниже мы часто будем использовать следующие два факта, установленные в работе [4], — первый из них есть в точности теорема 1 в [4], а второй — следствие 1 там же (существование базиса в пространстве Z^{**} в лемме 2 вытекает из определения пространства Z в доказательстве этого следствия в [4]).

Лемма 1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства X существуют сепарабельное банахово пространство E и линейный гомоморфизм $\psi : E^* \to X$ такие, что E^* имеет базис и $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$.*

Лемма 2. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z и линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to Y$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно) и ядро гомоморфизма φ есть $\pi_Z(Z)$.*

[1] Но не в самой полной общности; по существу, нас дополнительно будет интересовать лишь пространство $l_{s,\infty}$ при $s < 1$; но и при рассмотрении этого случая возникают не совсем очевидные обобщения; см. например, теорему 4 ниже.

Следствие 1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z такое, что Z^{**} имеет базис, $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ изоморфно пространству Y, $\pi_Z(Z)^\perp$ дополняемо в Z^{***} и выполняются следующие условия:*

(a) для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E тензорное произведение $E^*\widehat{\otimes}_p Y)$ изоморфно пространству $E^*\widehat{\otimes}_p (Z^{**}/\pi_Z(Z))$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству

$$N_p(E, Z^{**}) \,/\, \left[\mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (E, \pi_Z(Z)) \bigcap (N_1(E, \pi_Z(Z)))\right];$$

(b) для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E пространство $N_p(E, Y)$ изоморфно пространству $N_p(E, Z^{**}/\pi_Z(Z))$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству $N_p(E, Z^{**}) \,/\, \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (E, \pi_Z(Z))$.

При этом все изоморфизмы в утверждениях (a) и (b) "канонические", то есть естественным образом порождаются заданным гомоморфизмом $Z^{**} \to Z^{**}/\pi_z(Z) \to Y$ (подробности — в доказательстве).

Доказательство. Пусть Z — из леммы 2. Обозначим для простоты $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ через F.

Факторотображение $\psi : Z^{**} \to Z^{**}/\pi_Z(Z) = F$ индуцирует естественным образом отображение $\Psi : N_p(E, Z^{**}) \to E^*\widehat{\otimes}_p F$, $\Psi(T) := \psi \circ T$. Так как $p \le 1$, то понятно, что это отображение Ψ есть отображение "на". Посмотрим, что из себя представляет ядро этого отображения.

Пусть $U \in \mathrm{Ker}\ \Psi$. Это означает, что для любого $A \in \mathrm{L}(F, E^{**})$ след trace $A \circ \psi \circ U$ равен нулю; или, что для любого $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, такого, что $B|_{\pi_z(Z)}$, след trace $B \circ U$ равен нулю. Отсюда вытекает, что $U(E) \subset \pi_Z(Z)$ (в противном случае, найдется такой одномерный оператор $R \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, что $R|\pi_Z(Z) = 0$ и trace $R \circ U \ne 0$).

Итак, $U \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}(E, \pi_Z(Z))$. Нам надо уточнить это включение: докажем, что, на самом деле, $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$ Предположим, что $U \notin N_1(E, \pi_Z(Z))$. Тогда найдется такой оператор $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, что trace $B \circ U = 1$, но trace $B \circ T = 0$ для любого $T \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. Так как $\pi_Z(Z)$ обладает свойством аппроксимации Гротендика, то из последнего вытекает, что $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, что противоречит выбору и свойствам U. Итак, $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. С другой стороны, очевидно, что для любых $V \in N_1(E, \pi_Z(Z))$ и $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, где $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, имеем: trace $B \circ V = 0$. Поэтому Ker $\Psi = \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (E, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(E, \pi_Z(Z)))$. Отсюда вытекает утверждение (a).

Рассмотрим теперь факторотображение

$$\Psi_0 : \qquad N_p(E, Z^{**}) \xrightarrow{\Psi} E^* \widehat{\otimes}_p F \xrightarrow{j} N_p(E, F),$$

где j — каноническое факторотображение, Его ядро Ker Ψ_0 состоит из всех тез операторов $U \in N_p(E, Z**)$, которые превращаются в тождественный нуль после действия факторизации $\psi : Z^{**} \to F$, то есть из тех U, для которых $U(E) \subset$ Ker $\psi = \pi_Z(Z)$. Это и означает, что Ker $\Psi_0 = \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\,(E, \pi_z(Z))$. ■

Отметим любопытный "побочный" эффект наших рассуждений (это, конечно, "выстрел из пушки по воробьям"):

Следствие $1'$ (А.Гротендик [3]). *Если* $p \in (0, 2/3]$, *то* $G^* \widehat{\otimes}_p Y = N_p(G, Y)$ *для любых банаховых пространств* G *и* Y *(то есть факторизации при каноническом факторотображении* $G^* \widehat{\otimes}_p Y \to N_p(G, Y)$ *не происходит).*

Доказательство. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением лишь сепарабельных пространств. Если $p \leq 2/3$, то всякий оператор $U \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\,(G, \pi_z(Z))$, где Z — из леммы 2 (или, что то же самое, из следствия 1), факторизуется через ядерный диагональный оператор (см. ниже замечание 2) и, следовательно, сам является ядерным. Поэтому $\mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (G, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(G, \pi_Z(Z))) = \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (G, \pi_Z(Z))$ и применимо следствие 1.
■

Напомним, что банахово пространство X обладает свойством аппроксимации порядка p, $p \in (0, +\infty]$ (коротко, $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{p}}$), если для каждого банахова пространства Z каноническое отображение $Z^* \widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{L}\,(Z, X)$ является взаимно однозначным (см., например, [8], [10]). Удобно ввести еще дополнительные обозначение и определение, связанные с аппроксимационными условиями. Именно, для пары пространств X, Y и числа $s \in (0, 1)$ обозначим через $Y^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное пространство, состоящее из тензоров $z \in Y^* \widehat{\otimes}_1 X$ (проективное тензорное произведение), допускающих представление вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, y'_k \otimes x_k \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow, \; \lambda_k^s = o(1/k), \; \|y'_k\| \, \|x_k\| = 1.$$

Определение 1. Банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $s \in (0,1]$, если для любого банахова пространства Z каноническое отображение $Z^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}\,(Z,X)$ взаимно однозначно (иными словами, $Z^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}\,(Z,X)$; должно быть вполне понятно, что из себя представляет операторное пространство справа).

Отметим, что пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ тогда и только тогда, когда взаимно однозначным является каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}\,(X,X)$; в этом случае, $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,X)$.

Теорема 1. 1) *Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, и X — банахово пространство. Если каждое конечномерное подпространство E пространства X $C\,(\dim E^\alpha)$-дополняемо в X, то $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $1/s = 1+\alpha$. В частности,* (надо взять $\alpha = 1/2$), *всякое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$, а если X является подпространством или факторпространством некоторого пространства $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$, где $p \in (1,+\infty)$, $p \neq 2$, то $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$ $(1/s = 1 + |1/p - 1/2|)$.*

2) *Для каждого $s \in [2/3, 1)$ существует такое сепарабельное рефлексивное пространство Y, что $Y \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, но $Y \notin \mathrm{AP}_{\mathrm{r}}$ каково бы ни было $r \in (s, 1]$.*

Доказательство части 2) теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующего факта из [10] (а именно, утверждений 1) и 2) теоремы 5.4 в [10]); доказательство этой теоремы 5.4 дословно переносится на наш случай, только вместо леммы 5.1 из [10] надо использовать такое усиление части 1 нашей теоремы 1:

Предложение 1. *Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, и X — банахово пространство. Предположим: что для каждого конечномерного подпространства E пространства X найдется такое конечномерное подпространство E, $E \subset F \subset X$, что F — $C\,(\dim E)^\alpha$-дополняемо в X. Тогда $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $1/s = 1 + \alpha$.*

Здесь снова достаточно сослаться на статью [10]. Наше предложение 1, по существу, доказано в работе [10], лемма 5.1: если внимательно просмотреть доказательство этой леммы в [10], то нетрудно увидеть, что основное, что использовалось в этом доказательстве, — это принадлежность соответствующего тензора z проективному тензорному произведению (у нас в этой работе все тензоры таковы) и оценка $\lambda_j^s = o(j^{-1})$ для коэффициентов z из доказательства упомянутой леммы 5.1. Поэтому мы не станем повторять все те аргументы из [10], использованные при доказательстве этой леммы, а отошлем читателя за подробностями к работе [10].

Теорема 2. 1) *Пусть* $s \in (0,1)$. *Если* $X^* \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$ *или* $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *то* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}(X,Y) \subset \mathrm{N}_1(X,Y)$. *В частности, для любых банаховых пространств* X *и* Y *имеем:* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{2/3,\infty}(X,Y) \subset \mathrm{N}_1(X,Y)$.

2) *Существует банахово пространство* Z, *обладающее следующими свойствами:*

(i) Z^{**} *имеет базис (следовательно,* $Z^{**} \in \mathrm{AP}$*);*

(ii) для каждого $s \in (2/3, 1]$ $\qquad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$.

Таким образом, аппроксимационные условия, наложенные на X *и* Y *в 1) существенны.*

Доказательство. 1) Предположим, что существует такой оператор $T \in L(X,Y)$, что $T \notin N_1(X,Y)$, но $\pi_Y T \in N_{s,\infty}(X,Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, то $N_{s,\infty}(X,Y^{**}) = X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**} \subset X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; при этом по выбору T, $t \notin X^*\widehat{\otimes}_1 Y$ (как обычно, $X^*\widehat{\otimes}_1 Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in L(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}\right)^*$, что $\operatorname{trace} U \circ t = \operatorname{trace}\,(t \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\operatorname{trace} U \circ z = 0$ для любого $z \in X^*\widehat{\otimes}_1 Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U|_Y = 0$ и $\pi^* U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$< U\pi_Y\, y, x' >=< y, \pi^* U^* x' >= \operatorname{trace}\; U \circ (x' \otimes y) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор UT, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in \mathrm{AP}_{s,,\infty}$, то $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}X^{**} = N_{s,\infty}(X, X^{**})$ и, значит, тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству $\operatorname{trace}\; U \circ t = 1$.

Пусть теперь $Y^{***}\in \mathrm{AP}_{s,,\infty}$. В этом случае оператор

$$V:=(U^*|_{X^*})\circ T^*\circ \pi_Y^*:\ Y^{***}\to Y^*\to X^*\to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент $t_0\in Y^{****}\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t=\sum x'_n\otimes y_n$ для t как элемента пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**}$. Имеем:

$$\begin{aligned} Vy'''=U^*\ (T^*\pi_Y^*\,y''')=U^*\ ((T^*\pi_Y^*\pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\,y''')=U^*\ ((\pi_YT)^*\,\pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\,y''')=\\ =U^*\ \left((\sum y''_n\otimes x'_n)\,\pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\,y'''\right)=U^*\ \left(\sum <y''_n,\pi_Y^*\,y'''>\ x'_n\right)=\\ =\sum <\pi_Y^{**}y''_n,y'''>\ U^*x'_n.\end{aligned}$$

Итак, оператор V (или элемент t_0) имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{***}$ представление

$$V=\sum \pi_Y^{**}(y''_n)\otimes U^*(x'_n).$$

Следовательно,

$$\operatorname{trace}\,t_0=\operatorname{trace}\,V=\sum <\pi_Y^{**}(y''_n),U^*(x'_n)>=\sum <y''_n,\pi_Y^*\,U^*x'_n>=\sum 0=0.$$

С другой стороны,

$$Vy'''=U^*\,(\pi_YT)^*\,y'''=U^*\circ t^*(y''')=\left(\sum <y''_n,y'''>\ x'_n\right)=\sum <y''_n,y'''>\ U^*x'_n,$$

откуда $V=\sum y''_n\otimes U^*(x'_n)$. Поэтому

$$\operatorname{trace}\,t_0=\operatorname{trace}\,V=\sum <y''_n,U^*x'_n>=\sum <Uy''_n,x'_n>=\operatorname{trace}\,U\circ t=1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство первой части пункта 1). Случай $s=3/2$ сводится к применению только что доказанного утверждения и первой части теоремы 1.

2) Хорошо известно, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство X и ненулевой тензорный элемент $z\in X^*\widehat{\otimes}_1X$ такие, что $z\in X^*\widehat{\otimes}_sX$ для всех $s>2/3$, но ассоциированный оператор $\widetilde{z}$ есть тождественный нуль (см., например, [1], [7]). Таким образом, для любого $s\in(0,1]$ $X^*\widehat{\otimes}_sX\neq N_s(X,X)$. По следствию

1, существуют сепарабельное Z и гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to X$ такие, что Z^{**} имеет базис, $\operatorname{Ker} \varphi = \pi_Z(Z)$, $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***} и $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(X, Z) \not\subset N_1(X, Z)$ при всех $s > 2/3$. Так как $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***}, то, очевидно, $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset Z^{***}\widehat{\otimes}_1 Z = N_1(Z^{**}, Z)$ при любом $s > 2/3$. ■

Замечание 2. Совсем нетрудно показать, что $\mathrm{N}_{2/3}^{\mathrm{reg}} \subset \mathrm{N}_1$. Действительно, если оператор T действует из пространства E в пространство Z и является 2/3-ядерным как оператор из E в Z^{**}, то по самому определению 2/3-ядерного оператора, "расщепляя" коэффициенты его разложения в тензорный ряд на пары соответствующим образом подобранных множителей, мы можем разложить сам оператор T в произведение:

$$T: \ E \xrightarrow{A} c_0 \xrightarrow{\Delta_1} l^1 \xrightarrow{j} l^2 \xrightarrow{\Delta_2} l^1 \xrightarrow{B} Z^{**}$$

где Δ_j — диагональные операторы (таким образом, Δ_1 — ядерный), а остальные операторы непрерывны. Спроектировав ортогонально в l^2 на замыкание образа оператора $j\,\Delta_1\,A$, и рассмотрев B только на этой проекции, мы получим в совокупности все тот же оператор $T : E \to Z$; этот простой трюк показывает, что T — ядерный из E в Z. В данный момент у меня нет никакой идеи, как примерно подобным способом непосредственно можно получить соответствующий результат из последней теоремы (то есть, для $\mathrm{N}_{2/3,\infty}^{\mathrm{reg}}$).

Следствие 2. *Пусть X — такое рефлексивное банахово пространство, что каждое n-мерное подпространство в X Cn^{α}-дополняемо в X (здесь $C > 0, \alpha \in (0, 1/2)$ — некоторые постоянные, $n = 1, 2, \dots$). Тогда для любого банахова пространства Y*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset \mathrm{N}_1(X, Y).$$

где $1/s = 1 + \alpha$.

В частности, если $X \subset L^p(\mu), 1 < p < +\infty, p \neq 2$, и $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, то

$$\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset \mathrm{N}_1(X, Y) \qquad \text{для каждого } Y.$$

Для доказательства достаточно применить теорему 1,1) и теорему 2,1) и использовать тот факт: что любое n-мерное подпространство пространства $L^p(\mu)$ $Cn^{|1/2-1/p|}$-дополняемо в $L^p(\mu)$.

Замечание 3. В теореме 2,1) и следствии 2 мы получили, на самом деле, следующее формально более сильное включение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y) \subset X^*\widehat{\otimes}_1\,Y$. Последнее включение следует понимать таким образом: каждый оператор $T \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y)$ (однозначно) порождается тензорным элементом из пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}\,Y^{**} \subset X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**}$, который (тензорный элемент), в свою очередь, принадлежит пространству $X^*\widehat{\otimes}_1\,Y$, подпространству пространства $X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**}$; так что, если

$$\begin{aligned}
&\sum x'_n \otimes y''_n \quad – \text{ представление оператора } T \text{ в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**},\\
&\sum \tilde{x}'_n \otimes \tilde{y}''_n \quad – \text{ в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**} \text{ и}\\
&\sum \tilde{\tilde{x}}'_n \otimes \tilde{\tilde{y}}''_n \quad – \text{ в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1\,Y,
\end{aligned}$$

то для всякого $U \in \mathrm{L}\,(Y^{**}, X^{**})$

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle x'_n, U y''_n \rangle = \sum \langle \tilde{x}'_n, \tilde{y}''_n \rangle = \sum \langle \tilde{\tilde{x}}'_n, \tilde{\tilde{y}}''_n \rangle$$

(заметим, что след вполне определен, поскольку в теореме 2,1) и в следствии 2 естественное отображение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X^*, Y^{**}) \to \mathrm{L}\,(X, Y^{**})$ взаимно однозначно).

Тем же методом, что и при доказательстве теоремы 2,1), устанавливается

Теорема 2$'$. *Пусть* $s \in (0,1]$. *Если* $X^* \in \mathrm{AP_s}$, *или* $Y^{***} \in \mathrm{AP_s}$, *то* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y)$.

Внимательно просмотрев доказательство пункта 2) теоремы 2 и следствия 1, нетрудно увидеть, что имеет место следующий более сильный факт:

Предложение 2. *Существуют сепарабельное банахово пространство* Z *и оператор* $A \in \mathrm{L}\,(Z^{**}, Z)$ *такие, что* Z^{**} *имеет базис,* $\pi_Z\, A \in \mathrm{N_s}\,(Z^{**}, Z^{**})$ *для каждого* $s > 2/3$, *но* $A \notin \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$.

Теорема 3. *Для всякого* $s \in [2/3, 1)$ *существует такое сепарабельное банахово пространство* Z, *что*

(i) Z^{**} *имеет базис;*

(ii) *все пространства* $Z, Z^*, Z^{**}, \dots$ *обладают свойством* $\mathrm{AP_s}$;

(iii) Z^{***} *не обладает свойством* $\mathrm{AP_r}$, *каково бы ни было* $r \in (s, 1]$;

(iv) *для всякого банахова пространства* X

$$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Z)\subset\mathrm{N}_1\,(X,Z)\quad \text{и}\quad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(Z^{**},X)\subset\mathrm{N}_1\,(Z^{**},X)\,;$$

(v) *для каждого* $r\in(s,1]$ $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**},Z)\not\subset\mathrm{N}_1\,(Z^{**},Z)$. *Более того, существует такой оператор* $U:Z^{**}\to Z$, *что* $U\in\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**},Z)$ *для всех* $r\in(s,1]$, *но* $U\notin\mathrm{N}_1\,(Z^{**},Z)$.

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству пункта 2) теоремы 2 с использованием последовательно теоремы 1,2), следствия 1 и теоремы 2,1). Мы опускаем подробное доказательство, предоставляя его, в качестве нетрудного упражнения, читателю. С другой стороны, автор намеревается привести более общий факт с подробным доказательством в последующей работе, которая будет посвящена, в частности, рассмотрению случая $s\ge 1$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно получить в утверждениях наших теорем, если полностью отказаться от каких-либо аппроксимационных предположений относительно рассматриваемых пространств (как, например, в случае $s=2/3$ из теоремы 2,1) - хотя там неявно подобные условия присутствуют, ведь каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2,/3,\infty}$). Сначала посмотрим, как будет выглядеть в этой ситуации часть 1) теоремы2.

Предварительно сформулируем одно вспомогательное предложение, которое, по существу, доказано в [10] (теорема 2,1,A). Нам удобно будет обозначать каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y\to X^*\widehat{\otimes}_p Y$ через φ^{∞}_{sp}, а каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y\to \mathrm{L}\,(X,Y)$ — через j_p.

Предложение 3. *Если* $s\le 1$ *и* $p\ge 2s/(2-s)$, *то отображение*

$$j_p:\,\varphi^{\infty}_{sp}\left(X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y\right)\to\mathrm{L}\,(X,Y)$$

является взаимно однозначным.

Доказательство этого предложения можно найти в [10] (см. доказательство пункта A теоремы 2,1; — оно почти дословно переносится на наш случай, рассматриваемый в предложении 3).

Приведем теперь усиление теоремы 3.1.A) из [10], где было показано, что в условиях предложения 3 имеет место включение $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}\,(X,Y)$. Доказательство, однако, не будет столь элементарным, как в [10].

Теорема 4. *Если $2/3 \le s < 1$ и $p = 2s/(2-s)$, то $\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}\,(X,Y)$, каковы бы ни были банаховы пространства X и Y.*

Proof. Пусть $T \in \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}$ и $T \neq 0$. Зафиксируем тензорный элемент $t = \sum \bar{x}'_n \otimes y''_n \in X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**}$, порождающий оператор T (то есть, $\pi_Y T = \widetilde{t}$). Достаточно показать, что $t \in X^*\widehat{\otimes}_p Y$ (то есть, что образ $\varphi_{sp}^{\infty}(t) \in X^*\widehat{\otimes}_p Y^{**}$ лежит, на самом деле, в подпространстве $X^*\widehat{\otimes}_p Y$).

Предположим, что $t \notin X^*\widehat{\otimes}_p Y$. В этом случае найдется оператор $U \in \Pi_{p'}(Y^{**}, X^{**})$, для которого trace $U \circ t = 0$ и, с другой стороны, trace $U \circ z = 1$ для всех $z \in X^*\widetilde{\otimes}_p Y$. В дальнейшем удобно иметь перед глазами несколько диаграмм (с комментариями):

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\pi_Y} Y^{**} \xrightarrow{B} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y)$$

($U = SB$; $\widetilde{t} = \pi_Y T$; $B\pi_Y = jB_0$; $A := \pi^{-1}T^{**}S$ (он появится позже); $U\pi_Y = 0$ и $Sj = 0$)

$$Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'} \xrightarrow{j} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{-1}} Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'}$$

Здесь $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ (для некоторой конечной меры μ); $B \in \Pi_{p'}(Y^{**}, Z_{p'})$ и $S \in L(Z_{p'}, X^{**})$, — таковы, что $U = SB$; $Y_{p'} = B\pi_Y(Y)$; B_0 — оператор, индуцированный оператором B; j — тождественное вложение. Заметим, что, в силу компактности T, $T^{**}(X^{**}) \subset \pi_Y(Y)$. Кроме того, $U\pi = 0$ по предположению; следовательно, $Sj = 0$. Обозначим также оператор $\pi_Y^{-1}T^{**}S$ через A.

Так как $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ и $\pi_Y A \in N_{s,\infty}$, то, по теореме 1,1), оператор $\pi_Y A$ однозначно определяется тензорным элементом из $Z_{p'}^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}$, который мы снова будем обозначать через $\pi_Y A$. Ясно, что

$$\pi_Y A = T^{**}S = \sum S^*\left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right) \otimes \bar{y}''_n.$$

По следствию 2 и замечанию после него, $A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_1 Y$, причем

$$\operatorname{trace} B(\pi_Y A) = \operatorname{trace}(B\pi_Y)\circ A = \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, B\bar{y}''_n >= \\ = \sum < \bar{x}'_n,\, U\bar{y}''_n >= \operatorname{trace} U\circ t = 1.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\pi_Y a \neq 0$ (и $A \neq 0$).

Возьмем некоторое представление A вида $\sum z'_n \otimes y_n$ как элемента пространства $Z^*_{p'} \otimes_1 Y$; это также и представление тензорного элемента $\pi_Y A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$ (но в пространстве $\pi_Y A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Имеем:

$$1 = \operatorname{trace}(B\pi_Y)\circ A = \operatorname{trace}(jB_0)\circ A = \operatorname{trace}(jB_0)\circ\left(\sum z'_n\otimes y_n\right) = \\ = \sum < z'_n,\, jB_0 y_n >= \sum < z'_n,\, jB_0^{**}\pi_y y_n >= \operatorname{trace}\,(jB_0^{**})\circ\left(\sum z'_n\otimes \pi_Y y_n\right) = \\ = \operatorname{trace}\,(jB_0^{**})\circ(\pi_Y A) = \operatorname{trace}\,(jB_0^{**})\circ\left(\sum S^*\left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right)\otimes \bar{y}''_n\right) = \\ = \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, jB_0^{**}\bar{y}''_n >= \operatorname{trace}\, B_0^{**}\circ\left(\sum\left((Sj)^*\,\pi_{X^*}\right)\otimes\bar{y}''_n\right).$$

Отсюда следует, что тензорный элемент $\alpha := \sum\left((Sj)^*\,\pi_{X^*}\right)\otimes\bar{y}''_n$, лежащий в пространстве $Y^*_{p'}\widehat{\otimes}Y^{**}$, не равен нулю. По теореме 1,1), не равен нулю и порождаемый им оператор $\widetilde{\alpha}$. Остается заметить, что $\widetilde{\alpha} = T^{**}Sj = 0$. ∎

Замечание 4. Утверждение A′ теоремы 3.1 из [10] показывает, что наша теорема 4 точна. Аналогичное замечание можно отнести и к проложению 3. Следующий факт, однако, намного сильнее, чем часть A′ теоремы 3.1 из [10], в которой установлено существование двух банаховых пространств X и Y, для которых, в частности, $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X,Y) \not\subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}\,(X,Y)$ и $Y \in \mathrm{AP}$. Под впечатлением неверного результата А.Гротендика, о котором шла речь выше (см. начало заметки — до определения 1), я написал в замечании к теореме 3.1 в [10], что Y "конечно, не обладает свойством ограниченной аппроксимации" BAP. Сейчас мы увидим, что последняя фраза была лишена оснований.

Теорема 5. *Пусть $r \in [2/3, 1)$ и $1/r = 1/2 + 1/p$. Существуют два сепарабельных банаховых пространства Z и W такие, что*

(i) *W и Z^{**} имеют базисы;*

(ii) *как W, так и все сопряженные к нему пространства $W', W'', \ldots$ обладают свойством* $\mathrm{AP}_{r,\infty}$*;*

(iii) W^* *не обладает свойством* $\mathrm{AP_s}$ *ни при каком* $s \in (r, 1]$*;*

(iv) *для любого банахова пространства* E $\quad \mathrm{N^{reg}_{r,\infty}}\ (W, E) \subset \mathrm{N_1}\ (W, E)$*;*

(v) $\mathrm{N^{reg}_s}\ (W, Z) \not\subset \mathrm{N_p}\ (W, Z)$, *каково бы ни было* $s \in (r, 1]$.

Proof. Достаточно показать, что для каждого $s, r < s < 1$, найдутся пространства $Z = Z_s$ и $W = W_s$ с указанными в формулировке теоремы свойствами, причем при данном фиксированном s в (iii) достаточно получить более слабое условие $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,,\infty}$ (поскольку s бегает по всему промежутку $(r, 1)$, а свойство AP_1 — самое сильное из всех аппроксимационных свойств). Если это будет сделано, то для $s_n \searrow r$ пространства $(\sum Z_{s_n})_{l_2}$ и $(\sum W_{s_n})_{l_2}$ уже полностью будут удовлетворять всем условиям теоремы.

Итак, пусть $s \in (r, 1)$, так что $p < 2s/(2-s)$. По теореме 2.1,A'),1) из [10], существуют сепарабельные рефлексивные пространства X и Y, тензорный элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$ и оператор $U \in QN_{p'}(Y, X)$ (квази-p'-ядерный) такие, что $\mathrm{trace}\, U \circ z = 1$ и ассоциированный оператор $\widetilde{z} = 0$, причем пространство X может быть выбрано как подпространство в $L_{p'}$ (последнее содержится в доказательстве указанной теоремы из [10]).

Пусть Z —такое сепарабельное пространство, что Z^{**} имеет базис и существует гомоморфизм φ из Z^{**} на Y с ядром $\pi_Z(Z)$ (см. лемму 1). Поднимем (ядерный) тензорный элемент z, лежащий в $X^* \widehat{\otimes}_s Y$ до элемента $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_s Z^{**}$, так что $\varphi \circ \alpha = z$, и положим $V := U \circ \varphi$. Так как $\mathrm{trace}\, V \circ \alpha = \mathrm{trace}\, U \circ z = 1$ и Z^{**} обладает свойством аппроксимации (свойством AP_1), то $\widetilde{\alpha} = \alpha \neq 0$. Кроме того, оператор $\widetilde{\varphi \circ \alpha}$, ассоциированный с тензором $\varphi \circ \alpha$, равен нулю. Поэтому $\alpha(X) \subset \mathrm{Ker}\, \varphi = \pi_Z(Z)$, то есть оператор α действует из X в Z.

Если $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_p Z$, то для произвольного его p-ядерного представления вида $\alpha = \sum x'_n \otimes z_n$ имеем: $\mathrm{trace}\, V \circ \alpha = \sum < x'_n, V z_n >= \sum 0 = 0$; следовательно, $\alpha \notin X^* \widehat{\otimes}_p Z$ (мы воспользовались тем, что $V \in \Pi_{p'}(Z, X)$). Таким образом, $\mathrm{N^{reg}_s}\ (X, Z) \not\subset \mathrm{N_p}\ (X, Z)$.

Заметим, что X (и X^*) обладает свойством $\mathrm{AP}_{r,,\infty}$ (теорема 1,1) — вспомним, где лежит пространство X), но не обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,,\infty}$ (теорема 2,1)).

Рассмотрим теперь такое сепарабельное банахово пространство E, что E^* имеет базис и существует гомоморфизм ψ из E^* на X с тем свойством, что $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$ (лемма 1). Положим $W = E^*$. Так как $E \in \mathrm{AP}_1$ и $X^* \in \mathrm{AP}_{r,,\infty}$, то все сопряженные пространства $W^*, W^{**}, \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,,\infty}$; по теореме 2,1), имеет место утверждение (iv), а по построению, — утверждение (v). Кроме того, $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,,\infty}$. ■

Из (i) и (v) предыдущей теоремы моментально вытекает

Следствие 3. *Существует пара сепарабельных банаховых пространств Z, W со следующими свойствами. Пространства Z^{**} и W имеют базисы (и, следовательно, обладают свойством аппроксимации), и для каждого $p, 1 \leq p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным.*

Замечание 5. Подобного феномена не может быть, если либо W^*, либо Z^{***} обладает свойством аппроксимации. Вскользь об этом уже упоминалось выше (частный случай сформулирован в теореме $2'$). Что касается случая $p > 2$, то с ним будет иметь дело последующая статья автора.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Davie A.M., *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261-266.
2. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197-200.
3. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), 196-140.
4. Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.

5. Макаров Б.М., Самарский В.Г., *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.:ЛГУ **1** (1983), 122-144.
6. Oja E., Reinov O.I., *Un contre-exemple à une affirmation de A.Grothendieck*, C. R. Acad. Sc. Paris. — Serie I **305** (1987), 121-122.
7. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир (1982), 536 с.
8. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
9. Рейнов О.И., *Простое доказательство двух теорем А. Гротендика*, Вестн. ЛГУ **7** (1983), 115-116.
10. Рейнов О.И., *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.:ЛГУ (1983), 145-165.
11. Reinov O.I., *Sur les operateurs p-nucléaires entre espaces de Banach avec bases*, C. R. Acad. Sc. Paris. — Serie I **316** (1993), 905-907.

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл., 2
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
кафедра математического анализа.
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru