УДК 513.88

Р е й н о в О. И. **О факторизации операторов через пространства l^p.**

Приводятся условия, накладываемые на пару банаховых пространств X и Y, при которых

$(*)$ всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l^p, $p \in [1, +\infty]$, сам компактно факторизуется через l^p.

Эти достаточные условия таковы: либо пространство X^*, либо пространство Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика. Оставляя открытым соответствующий вопрос для показателей $p > 1$, $p \neq 2$, мы показываем, что при $p = 1$ указанные условия существенны: существуют банаховы пространства с базисами Шаудера, для которых сформулированное утверждение $(*)$ неверно для l^1-факторизуемых операторов.

Библиогр. 4 назв.

О ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРОВ ЧЕРЕЗ ПРОСТРАНСТВА l^p.

О.И.Рейнов†

Приводятся условия, накладываемые на пару банаховых пространств X и Y, при которых

(∗) всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l^p, $1 \leq p \leq +\infty$, сам компактно факторизуется через l^p.

Эти достаточные условия таковы: либо пространство X^*, либо пространство Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика. Оставляя открытым соответствующий вопрос для показателей $p > 1$, $p \neq 2$, мы показываем, что при $p = 1$ указанные условия существенны: существуют банаховы пространства с базисами Шаудера, для которых сформулированное утверждение (∗) неверно для l^1-факторизуемых операторов.

Один из немногих вопросов, остающихся открытыми в теории операторных идеалов, связанных с понятием регулярности нормированного идеала, является вопрос о возможности факторизации непрерывного оператора, действующего в банаховых пространствах, через классические пространства последовательностей l^p, при условии, что этот оператор, рассматриваемый как оператор со значениями во втором сопряженном к пространству образов, допускает факторизацию подобного рода. Точнее, речь здесь идет (и пойдет ниже) о "компактной факторизации" через эти пространства. Ясно, что мы отбрасываем тривиальный случай, когда $p = 2$, так как здесь ответ положителен по очевидным причинам: в гильбертовом пространстве всякое его (замкнутое) подпространство дополняемо.

Немногое, из того, что известно относительно сформулированного вопроса, — это два результата, полученные автором еще в 1982 году (см. [Rei], следствия 3.4 и 4.2):

† Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36).

‡ Ключевые слова и фразы: p-компактные операторы, l^p-факторизуемые операторы, базисы, свойства аппроксимации, тензорные произведения.

при $p = 1$ и при $p = +\infty$ (факторизации через пространства l^1 и c_0) ответы отрицательны. Техника, развитая в работе [Rei], позволяла построить соответствующие контрпримеры в пространствах, вообще говоря, не обладающих свойством аппроксимации Гротендика.

В этой заметке мы приведем достаточные (и, по всей вероятности, близкие к необходимым) условия, накладываемые на рассматриваемые банаховы пространства, при которых ответ на упомянутый вопрос положителен при любом значении параметра p, $1 \leq p \leq \infty$. С другой стороны, мы покажем, что от тех достаточных аппроксимационных условий, которые появляются у нас, отказаться (или немного ослабить их) нельзя. Но, к сожалению, контрпример, который мы укажем, относится только к одному случаю — случаю компактной факторизации через пространство l^1.

По прежнему (давно)*открытым остается соответствующий вопрос о l^p-факторизации операторов при $p > 1$, $p \neq 2$.*

Мне представляется, что у меня имеется контрпример подобный тому, что приводится в нижеследующей теореме 2, для случая факторизации через пространство c_0, но поскольку соответствующее доказательство еще до конца не проверено, в этой заметке мы его не рассматриваем.

Мы придерживаемся стандартных обозначений геометрической теории операторов в банаховых пространствах. Классический справочник по теории операторных идеалов — монография А.Пича [Пич]. Все рассматриваемые нами пространства X, Y, $Z, \ldots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \ldots$, $x' \in X^*$, $y'' \in Y^{**}, \ldots$. За числами (вещественными или комплексными) мы резервируем обозначения a, b_k, c, C_1, α и т.п.. Для $p \in [1, +\infty]$ сопряженный показатель p' определяется из соотношения $1/p + 1/p' = 1$. Через $\mathfrak{L}\,(X, Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой (вообще, в данной работе под термином "оператор" всегда будет пониматься линейный непрерывный оператор).

Напомним, что *банахово пространство обладает свойством аппроксимации* (Гротендика), если тождественный оператор на нем аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными операторами (детали и другие переформулировки этого определения можно найти в книге [Пич], либо непосредственно в первоисточнике [Gro]). И еще одно важное напоминание. Если J — некоторый операторный идеал, то $J^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ обозначает пространство всех операторов T из X в Y, для которых $\pi_Y\, T \in J(X, Y^{**})$, где, как обычно принято, через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}. В некоторых случаях нам удобно будет рассматривать некоторые банаховы пространства как подпространства их вторых сопряженных (при канонических вложениях), не упоминая явно операторы π, осуществляющие эти вложения.

Пусть $0 < p \le \infty$. Семейство $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $x_j \in X$, называется *слабо p-суммируемым,* если $\{\langle x_j, x'\rangle\} \in l^p$ для всех $x' \in X^*$. Следуя А.Пичу и его обозначениям, мы полагаем

$$\mathbf{w}(x_j) := \sup_{\|x,\| \le 1} \left(\sum_j \, |\langle x_n,\, x\rangle|^p \right)^{1/p}$$

Если $1 \le p \le \infty$ и S — конечномерный оператор из X в Y, то его $\mathfrak{K}_p^0$-норма есть величина $\mathbf{K}_p^0(S) := \inf \left\{ \sup_j |a_j|\, \mathbf{w}_p(x'_j)\, \mathbf{w}_{p'}(y_j) \right\}$, где точная нижняя грань берется по всем *конечным* представлениям оператора S в виде

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j\, x'_j \otimes y_j .$$

Пополнение алгебраического тензорного произведения $X^* \otimes Y$ (которое рассматривается нами как линейное пространство всех конечномерных операторов) по этой норме $\mathbf{K}_p^0$ мы будем обозначать через $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, оставляя за нормой в этом пополнении все то же обозначение $\mathbf{K}_p^0$. Каждый тензорный элемент $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ представим в виде сходящегося ряда $z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_j\, x'_j \otimes y_j$, где $\alpha_j \to 0$, причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление может быть выбрано так, что

$$\sup_j |a_j|\, \mathbf{w}_p(x'_j)\, \mathbf{w}_{p'}(y_j) \le \mathbf{K}_p^0(z) + \varepsilon$$

Тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ естественным образом порождает в $\mathfrak{L}(X, Y)$ линейное подпространство операторов; оператор, соответствующий элементу z мы обозначаем через $\tilde{z}$. Вполне возможно (хотя, это, вообще говоря, неизвестно), что некоторые *различные тензоры* z_1, z_2 могут "склеиваться" при превращении их в операторы (то есть, при $z_1 \neq z_2$ никто не запрещает быть справедливым равенству $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$). Факторпространство рассматриваемого тензорного произведения по ядру (если таковое не тривиально) указанного отображения мы обозначаем (опять таки, следуя обозначениям А.Пича) через $\mathfrak{K}_p(X, Y)$, а получаемую при этом норму на этом пространстве операторов — через $\mathbf{K}_p$. Отметим, что $[\mathfrak{K}_p, \mathbf{K}_p]$ есть нормированный операторный идеал, и он является частным случаем так называемых идеалов (r, p, q)-ядерных операторов — $\left[\mathfrak{N}_{(r,p,q)}, \mathbf{N}_{(r,p,q)}\right]$: $[\mathfrak{K}_p, \mathbf{K}_p] = \left[\mathfrak{N}_{(\infty,p,p')}, \mathbf{N}_{(\infty,p,p')}\right]$. За подробностями мы отсылаем читателя к книге [Пич], стр. 280–291. Однако имеется одна очень важная для нас вещь, касающаяся возможности упомянутой нетривиальной факторизации. Именно, *если одно из пространств* X^* *или* Y *обладает свойством аппроксимации, то имеет место* (формальное) *равенство* $\left[X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y, \mathbf{K}_p^0\right] = [\mathfrak{K}_p, \mathbf{K}_p]$, то есть ядро канонического отображения $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y \to \mathfrak{K}_p(X, Y)$ тривиально и это отображение есть изометрическая биекция. Доказательство этого факта в настоящее время стандартно, и мы опускаем его, предлагая читателю в качестве нетрудного упражнения.

Мы говорим, что оператор $T : X \to Y$ *компактно факторизуется через пространство* l^p, (в терминологии А.Пича, является *p-компактным*), если существуют два компактных оператора $A : X \to l^p$ и $B : l^p \to Y$, для которых $T = BA$. При этом, в качестве нормы такого " l^p-факторизуемого оператора" мы берем величину $\inf \|A\| \, \|B\|$, где точная нижняя грань берется по всевозможным факторизациям оператора T указанного вида.

Одна из центральных теорем, относящаяся к компактно l^p-факторизуемым операторам, формулируется при помощи следующих соотношений:

$$\mathbf{K}_p(T) = \inf \{\|A\| \, \|B\| : \, T = BA : X \to l^p \to Y; \, A, B \text{ — компактны}\}$$

и *идеал* $\mathfrak{K}_p$ *совпадает с идеалом всех операторов, компактно факторизуемых через* l^p (см. [Пич], стр. 291, теорема 18.3.2). Сопряженное к $\mathfrak{K}_p(X, Y)$ пространство $\mathfrak{D}_{p'}(Y, X^{**})$, описывается на той же странице указанной монографии, но поскольку, по существу, знание того, из каких операторов состоит это сопряженное пространство, нам не понадобится, то мы и не станем здесь вдаваться в дальнейшие детали.

Читателю стоит, все таки, заглянуть в эту книгу, чтобы получить некоторую минимальную информацию об элементах сопряженного пространства. Для нас важно то, что из определения операторов, входящих в это пространство, моментально следует, что *все ряды, которые будут возникать при доказательстве нашей первой теоремы, сходятся* (так что нам не придется всякий раз отвлекаться на проверку факта сходимости при появлении очередного ряда).

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, +\infty]$. Если одно из пространств X^* или Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика, то всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l^p, сам компактно факторизуется через l^p. Таким образом, в этом случае $\mathfrak{K}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y) = \mathfrak{K}_p(X, Y)$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой оператор $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$, что $T \notin \mathfrak{K}_p(X, Y)$, но $\pi_Y T \in \mathfrak{K}_p(X, Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством аппроксимации, то $\mathfrak{K}_p(X, Y^{**}) = X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**}$; при этом, по выбору T, $t \notin X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ (здесь $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in \mathfrak{D}_{p'}(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**} \right)^*$, что $\mathrm{trace}\ U \circ t = \mathrm{trace}\ (t^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\mathrm{trace}\ U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$. Из последнего вытекает, в частности, что

$$U|_{\pi_Y(Y)} = 0 \text{ и } \pi_Y^* U^*|_{X^*} = 0. \tag{1}$$

Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$\langle U \pi_Y y, x' \rangle = \langle y, \pi_Y^* U^*|_{X^*} x' \rangle = \mathrm{trace}\ (U \pi_Y) \circ (x' \otimes y) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U \pi_Y T$, который, в силу предыдущего, тождественно равен нулю.

Если X^* обладает свойством аппроксимации, то $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X^{**} = \mathfrak{K}_p(X, X^{**})$ и, значит, тензорный элемент $U \circ t$ нулевой, что противоречит равенству $\mathrm{trace}\ U \circ t = 1$.

Пусть теперь Y^{***} обладает свойством аппроксимации. В этом случае оператор $V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^*$:

$$Y^{***} \xrightarrow{\pi_Y^*} Y^* \xrightarrow{T^*} X^* \xrightarrow{U^*|_{X^*}} Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент $t_0 \in Y^{****}\widetilde{\widetilde{\otimes}}_{p'}Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum \alpha_j\, x'_j \otimes y''_j$ для t как элемента пространства $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**}$. Обозначая для простоты через U_* оператор $U^*|X^*$ и вспоминая, что $\pi_Y T = t$, получаем:

$$
\begin{aligned}
Vy''' = U_*\ (T^*\pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((T^*\pi_Y^*\pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\, y''') = \\
= U_*\ ((\pi_Y T)^*\, \pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\, y''') = U_*\ \left((\sum y''_n \otimes x'_n)\,\pi_{Y^*})\,\pi_Y^*\, y''' \right) = \\
= U_*\ \left(\sum \langle y''_n, \pi_Y^*\, y'''\rangle\, x'_n\right) = \sum \langle \pi_Y^{**} y''_n, y'''\rangle\, U_* x'_n.
\end{aligned}
$$

Итак, оператор V (или элемент t_0) имеет в пространстве $Y^{****}\widetilde{\widetilde{\otimes}}_{p'}Y^{***}$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y''_n) \otimes U_*(x'_n).$$

Следовательно (см. (1)),

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum \langle \pi_Y^{**}(y''_n), U_*(x'_n)\rangle = \sum \langle y''_n, \pi_Y^*\, U_* x'_n\rangle = \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
Vy''' = U_*\,(\pi_Y T)^*\, y''' = (U^*|X^*) \circ t^*(y''') = \\
= U_*\ \left(\sum \langle y''_n, y'''\rangle\, x'_n\right) = \sum \langle y''_n, y'''\rangle\, U_* x'_n,
\end{aligned}
$$

откуда $V = \sum y''_n \otimes U_*(x'_n)$. Поэтому

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum \langle y''_n, U_* x'_n\rangle = \sum \langle U y''_n, x'_n\rangle = \text{trace } U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Наш следующий результат показывает, что, вообще говоря, аппроксимационные условия, наложенные на X и Y в теореме 1) существенны и их нельзя заменить на более слабые условия "одно из пространств X или Y^{**} обладает свойством (ограниченной) аппроксимации".

Теорема 2. *Существует банахово пространство Z, со следующими свойствами:*

i) все сопряженные к Z пространства сепарабельны;

ii) Z^{**} имеет ограниченно полный базис;

iii) Z^{***} не обладает свойством аппроксимации;

iv) существует оператор $T \in \mathfrak{L}(Z^{**}, Z)$, не факторизуемый компактно через пространство l^1, для которого, однако, оператор $\pi_Z T : Z^{**} \to Z \hookrightarrow Z^{**}$ компактно факторизуется через l^1.

Таким образом, $\mathfrak{K}_1(Z^{**}, Z) \subsetneqq \mathfrak{K}_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z)$.

Доказательство. Мы воспользуемся следующим результатом, установленным в работе [Rei] (см. лемму 1.2,2) и следствие 1.2): существует такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство E, что для каждого $r,\ 1 \le r \le \infty\ \ r \ne 2,$ каноническое отображение $E^* \widehat{\otimes}_r E \to \mathfrak{N}_p(E, E)$ не является взаимно однозначным. Здесь $E^* \widehat{\otimes}_r E$ — r-проективное тензорное произведение, ассоциированное с пространством $\mathfrak{N}_p(E, E)$ всех p-ядерных операторов в E. Мы рассмотрим случай $r = \infty$ и, переходя к сопряженным пространствам, сформулируем двойственный результат (полагая $X := E^*$): существует такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство X, что каноническое отображение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_1 X \to \mathfrak{K}_1(E, E)$ не является взаимно однозначным.

Воспользовавшись теоремой 1 и следствием 1 из работы [Lin] (см. также доказательство указанного следствия), найдем такое сепарабельное банахово пространство Z, что Z^{**} имеет ограниченно полный базис и пространство X изоморфно факторпространству $Z^{**}/\pi_Z(Z)$, причем соответствующий линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to X$ (с ядром $\mathrm{Ker}\varphi = \pi_Z(Z)$) обладает тем свойством, что подпространство $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***}.

Пусть $u \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_1 X$ — ненулевой тензорный элемент, порождающий оператор $\widetilde{u}$, тождественно равный нулю. Рассмотрим какое–либо представление тензора u в виде

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, x'_j \otimes x_j,$$

где последовательность $\{x_j\}$ ограничена, последовательность $\left\{x'_j\right\}$ слабо 1-суммируема, а $\alpha_j \to 0$. Без существенного увеличения норм, мы можем поднять элементы x_j

до элементов z_j'' пространства Z^{**} так, что для любого $j \in \mathbb{N}$ $\varphi(z_j'') = x_j$ и последовательность $\{z_j''\}$ ограничена в Z^{**}. Возникающий тензорный элемент

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, x_j' \otimes z_j'',$$

лежит в тензорном произведении $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_1 Z^{**}$ и не равен нулю, причем суперпозиция $u = \varphi \circ v$, рассматриваемая как оператор, есть нуль. Так как пространство Z^{**} имеет базис (и, в частности, обладает свойством аппроксимации), то элемент v вполне корректно отождествим с порождаемым им оператором $\widetilde{v} : X \to Z^{**}$, который, тем самым, не нулевой, и, в силу сказанного выше, для которого образ $\widetilde{v}(X)$ лежит в подпространстве $\pi_Z(Z)$ — ядре оператора φ. Мы получаем, таким образом, оператор $V : X \to Z$, для которого справедливы соотношения $V = \pi_Z \widetilde{v}$ и $V^{**} = \widetilde{v}$. Нетрудно понять, что оператор V не может лежать в пространстве $\mathfrak{K}_1(X, Z) = X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_1 Z$, так как иначе для любого его тензорного разложения (ненулевого!) в этом пространстве образ его после действия гомоморфизма φ (мы сейчас отождествляем пространства Z и $\pi_Z(Z)$) оказался бы нулевым тензором в $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_1 X$, а этот образ есть u. Итак, мы теперь можем заключить, что $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_1 Z = \mathfrak{K}_1(X, Z) \subsetneqq \mathfrak{K}_1^{\mathrm{reg}}(X, Z)$.

Вспоминая, наконец, что подпространство $\varphi^*(X*)$ дополняемо в Z^{***}, мы видим, что $\mathfrak{K}_1(Z^{**}, Z) = Z^{***} \tilde{\tilde{\otimes}}_1 Z \subsetneqq \mathfrak{K}_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z)$. ■

Цитированная литература

[Gro] Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), 196-140.

[Lin] Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.

[Пич] Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир (1982), 536 с.

[Rei] Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл., 2
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
кафедра математического анализа.
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru