УДК 513.88

Р е й н о в О. И. **A Banach lattice with AP and without BAP**

Показывается, что существует банахова решетка со свойством аппроксимации, не обладающая свойством ограниченной аппроксимации.

Библиогр. 5 назв.

A BANACH LATTICE WITH *AP* AND WITHOUT *BAP*

О.И.Рейнов[†]

Показывается, что существует банахова решетка со свойством аппроксимации, не обладающая свойством ограниченной аппроксимации.

Первый пример банахова пространства без свойства аппроксимации Гротендика был построен еще в 1972-м году шведским математиком П. Энфло [Enf] (это была довольно сложная конструкция, и на самом деле П. Энфло привел пример рефлексивного пространства без свойства метрической аппроксимации; по одной из теорем А. Гротендика [Grt], в рефлексивных пространствах свойства аппроксимации и метрической аппроксимации равносильны). Сразу же после построения такого рода пространства (которое специалисты по анализу ждали около сорока лет) пример Энфло стал "обрабатываться" многими его коллегами из самых разных стран мира. Пожалуй, простейшие изложения примера пространства без аппроксимативного свойства можно найти в работах [Dav], [Mit] и в книге [Ptch]. Менее, чем через год уже был приведен пример, отвечающий на один из старейших вопросов А. Гротендика, — пример пространства без свойства ограниченной аппроксимации, но обладающего свойством аппроксимации [FiJo]. Но еще до примера Энфло было ясно, что математический мир приближается к построению такого рода пространств: Линденштраусс [Lin], в предположении, что существует пространство без аппроксимативного свойства, показал, что из этого вытекает существование пространства

[†] Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36) и ФЦП "Интеграция", рег. номер 326.53.

[‡] Ключевые слова и фразы: банахова решетка, базисы, свойство аппроксимации, свойство ограниченной аппроксимации.

со свойством аппроксимации, но сопряженное к которому этим свойством не обладает (на одной из центральных теорем Линденштраусса, кстати, и была основана конструкция, предложенная Фигелем и Джонсоном).

В 1975-м году А. Шанковский (на конференции в Англии) привел первый пример банаховой решетки без свойства аппроксимации, а затем модифицировал его так [Sznk], что получил пример сепарабельного функционального рефлексивного пространства (тем самым, рефлексивной банаховой решетки) без свойство аппроксимации. Пользуясь случаем, отметим, что Энфло, по существу, построил свои контрпримеры среди подпространств пространств l_p при $p \in (2, +\infty]$, а Шанковский позднее дополнил их примерами подобного рода пространств среди подпространств в l_p при $p \in [1, 2)$ (его конструкции совершенно не зависимы от построений Энфло и годятся для всех параметров $p \in [1, +\infty], , p \neq 2$). Следствием этого стал факт (мы не приводим точной формулировки), что если банахово пространство "совсем не гильбертово", то в нем сидит подпространство без свойства аппроксимации.

Насколько мне известно, открытым остался и остается такой вопрос: верно ли, что если сопряженное к некоторому банахову пространству пространство обладает свойством аппроксимации, то оно обладает и свойством ограниченной аппроксимации? На этот вопрос нет ответа уже более двадцати лет,

В этой заметке мы отвечаем на другой вопрос, касающийся условий аппроксимации различного вида, а именно, мы показываем (и техника доказательства отличается от развитой Фигелем и Джонсоном), что существует даже банахова решетка, обладающая свойством аппроксимации, но не удовлетворяющая условию ограниченной аппроксимации.

Напомним некоторые необходимые нам определения.

Семейство $\{f_i\}_{i \in I}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *безусловным базисом* в F, если $\{f_i\}_{i \in I}$ тотально на F и существует постоянная λ со следующими свойствами:

(UB) Для любых конечных семейств скаляров $\{\alpha_i\}$ and $\{\beta_i\}$ таких, что $|\beta_i| \leq |\alpha_i|$ для всех i in I, выполняется неравенство $\| \sum \beta_i f_i \| \leq \lambda \| \sum \alpha_i f_i \|$.

Безусловная базисная константа базиса $\{f_i\}_{i \in I}$ определяется как наименьшая постоянная λ, удовлетворяющая условию (UB); она обозначается через $u(\{f_i\})$. *Безусловная базисная константа* пространства F определяется как *infimum* констант $u(\{f_i\})$ по всевозможным безусловным базисам $\{f_i\}_{i\in I}$ пространства F. Ее обычно обозначают через $ub(F)$.[1] Напомним, что пространство F с безусловным базисом λ-изометрично некоторой банаховой решетке, где $\lambda = ub(F)$.

Банахово пространство Z *имеет l.u.st* (локально безусловную структуру, см. [G-L]) если существует постоянная λ со следующим свойством: для каждого конечномерного подпространства $E \subset Z$, существуют пространство пространство F с безусловным базисом и факторизация

$$\text{(LUST)} \qquad j:\ E \xrightarrow{\ A\ } F \xrightarrow{\ B\ } Z$$

естественного вложения $j: E \to Z$ через F такие, что $j = BA$ и $||A||\,\|B\|\,ub(F) \le \lambda$. Наименьшее λ с этим свойством называется *l.u.st–константой* (локально безусловной постоянной) пространства Z и обозначается через $lu(Z)$.

Известно, что *банахово пространство Z имеет l.u.st тогда и только тогда, когда его второе сопряженное Z^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки*[2] (см. [FJT]); таким образом, каждая рефлексивная банахова решетка имеет локально безусловную структуру.

Отметим, что в факторизации (LUST) всегда можно считать, что один из операторов A или B имеет единичную норму. С другой стороны, так как $1 \le \|BA\| \le \|B\|\,\|A\|$ и $ub(F) \ge 1$, то $\|B\|\,\|A\| \le \dfrac{\lambda}{ub(F)} \le \lambda$ и $1 \le ub(F) \le \|B\|\,\|A\|\,ub(F) \le \lambda$. Таким образом, мы можем предполагать (что и сделаем ниже при доказательстве теоремы 1), что $\|B\| = 1, \|A\| \le \lambda$ и $ub(F) \le \lambda$ (хотя это и грубые оценки, но для наших целей они достаточны).

Еще некоторые определения связаны с понятием условий аппроксимации для банаховых пространств.

---

[1]Это определение имеет смысл как в вещественном, так и в комплексном случае, так же как и в случае конечномерного пространства. Известно, что для любого конечномерного пространства F $ub(F) \le (\dim F)^{1/2}$.

[2] *Банаховой решеткой* называется векторная решетка E, снабженная полной монотонной нормой: из того, что $|x| \le |y|$ в E, следует выполнение неравенства $||x|| \le ||y||$.

Пространство E *обладает свойством аппроксимации,* если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ и для любых конечных подмножеств $H \subset E^*$, $G \subset E$, лежащих в единичных шарах соответствующих пространств, существует такой конечномерный оператор $R \in E \otimes E^*$, что при всех $e \in G$ и $e' \in H$ выполняется неравенство $|\langle e', e\rangle - \langle Re', e\rangle| < \varepsilon$. Эквивалентная переформулировка в терминах аппроксимации тождественного оператора в некоторой топологии: *банахово пространство обладает свойством аппроксимации,* если тождественный оператор на нем аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными операторами (детали и другие переформулировки этого определения можно найти непосредственно в первоисточнике [Gro]). Равносильность приведенных двух определений свойства аппроксимации устанавливается сравнительно нетрудно; доказательство этой эквивалентности есть у А.Гротендика [Gro]. Нам в этой заметке удобнее будет использовать первое из двух сформулированных определений.

Пусть фиксировано некоторое число $C \geq 1$. Говорят, что банахово пространство X *обладает свойством C-ограниченной аппроксимации* (в другой терминологии, — свойством C-метрической аппроксимации), если тождественный оператор пространства X лежит в замыкании в топологии компактной сходимости шара радиуса C нормированного пространства всех линейных непрерывных операторов в X : для любого числа $\varepsilon > 0$ и для всякого компакта $K \subset X$ существует такой конечномерный оператор $R \in X^* \otimes X$, что $\|R\| \leq C$ и $\sup_{x \in K} ||x - Rx|| < \varepsilon$. Пространство X *обладает свойством ограниченной аппроксимации,* если оно обладает свойством C-ограниченной аппроксимации для некоторого числа $C \geq 1$.

Теорема 1. *Существует сепарабельная банахова решетка, обладающая свойством аппроксимации, но не обладающая свойством ограниченной аппроксимации.*

Доказательство. Пусть E — рефлексивная сепарабельная банахова решетка без свойства аппроксимации (см. [Szk]). Выберем в E возрастающую цепочку $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств, для которых объединение $\bigcup_n E_n$ плотно в E. Для каждого натурального n найдем конечномерное пространство F_n с K-безусловным базисом (константа K зависит *только от решетки* E) и два оператора $V_n : E_n \to F_n$

и $U_n : F_n \to E$, для которых суперпозиция $U_n V_n$ представляет собой тождественное вложение подпространства E_n в банахову решетку E и выполняются неравенства $\|U_n\| \le 1$, $\|V_n\| \le K$. Рассмотрим сумму по типу l_1 пространств F_n : $\quad Y := \left(\sum_n F_n\right)_{l_1}$; это — пространство с K-безусловным базисом и, следовательно, банахова решетка. Далее, определим непрерывный оператор T из Y в E следующим образом: если $\{f_n\}_n \in Y = \left(\sum_n F_n\right)_{l_1}$, где для каждого $n \quad f_n \in F_n$, то $T\{f_n\} := \sum_n U_n(f_n)$. Важно отметить, что, по выбору операторов U_n, $||T|| \le 1$.

Положим $X_0 := \bigcup_n E_n$ и рассмотрим нелинейные отображения $\widetilde{V}_n : X_0 \to Y, n = 1, 2, \dots,$

$$\widetilde{V}_n(e) := \begin{cases} (\underbrace{0, 0, \dots, 0, V_n e}_{n}, 0, \dots), & e \in E_n, \\ (0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots), & e \notin E_n \end{cases}$$

для $e \in X_0$.

Если $y' \in Y^*$, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X_0$ при помощи суперпозиции $y' \circ \widetilde{V}_n : X_0 \to Y \to \widehat{\mathbb{R}}$ мы можем определить элемент $(S_n(y'))(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^{X_0}$, полагая $(S_n(y'))(x) := y'\left(\widetilde{V}_n(x)\right)$. У нас возникают отображения $S_n : Y^* \to \widehat{\mathbb{R}}^{X_0}$, совокупность которых мы можем рассматривать как последовательность $\{S_n\}_n$ точек компакта $\left(\widehat{\mathbb{R}}^{X_0}\right)^{Y^*}$. Пусть $\{S_{n_\alpha}\}_\alpha$ — сходящаяся в этом компакте подсеть и S — ее предел. Рассматривая S как отображение из Y^* в пространство $X_0^* = E^*$, мы получаем для любых $y' \in Y^*$ и $x \in X_0$:

$$\langle Sy', x\rangle = \lim_\alpha \left(S_{n_\alpha}(y')\right)(x) = \lim_\alpha \langle y', \widetilde{V}_{n_\alpha}(x)\rangle,$$

откуда

$$|\langle Sy', x\rangle| \le K \, \|y'\| \, \|x\|, \qquad \forall \; x \in X_0, \; y' \in Y^*.$$

Понятно, что отображение S линейно на X_0, и мы можем продолжить его с плотного множества на все пространство E без увеличения нормы, которая не больше, чем K.

На плотном же множестве X_0 мы имеем: для всех $e \in X_0$ и $e' \in E^* = X_0^*$

$$\langle ST^*e', e\rangle = \lim_\alpha \left(S_{n_\alpha}(T^*e')\right)(e) = \lim_\alpha \langle T^*e', \widetilde{V}_{n_\alpha}(e)\rangle = \lim_\alpha \langle e', T\left(\widetilde{V}_{n_\alpha}(e)\right)\rangle = \langle e', e\rangle.$$

Таким образом, мы имеем следующие диаграммы

$$\begin{array}{rcccccl} \mathrm{id}_{E_n} : & X_0 & \xrightarrow{\widetilde{V}_n} & Y & \xrightarrow{T} & E & \\ & E^* & \xleftarrow{S} & Y^* & \xleftarrow{T^*} & E^* & : \mathrm{id}_{E^*} \end{array} \tag{1}$$

где пространства Y, E и их сопряженные являются банаховыми решетками и оператор T действует "на".

Всюду ниже пусть $L := T^*(E^*)$ — слабо* замкнутое подпространство в Y^*.

Так как пространство E не обладает свойством аппроксимации, то

$(*)$ *для всякого положительного $C > 0$ существует такое число $\varepsilon > 0$ и такие конечные подмножества $H \subset E^*$, $G \subset E$, лежащие в единичных шарах соответствующих пространств, что как только для некоторого конечномерного оператора $R \in E \otimes E^*$ при всех $e \in G$ и $e' \in H$ выполняется неравенство*

$$(2) \qquad |\langle e', e\rangle - \langle Re', e\rangle| < \varepsilon,$$

так сразу обязательно $\|R\| \geq C$.

Зафиксируем произвольную постоянную $C > 1$ и выберем число $\varepsilon > 0$ и подмножества H, G, в соответствии с условием $(*)$. Для произвольного $e \in G$ пусть y_e будет такой элемент из Y, что $T(y_e) = e$ и $\|y_e\| \leq 2$ (из определения оператора T ясно, что он переводит шар радиуса 2 пространства Y во множество, содержащее единичный шар пространства E). В частности, для $e \in G$ и $e' \in E^*$

$$(3) \qquad \langle y_e, T^*e'\rangle = \langle T(y_e), e'\rangle = \langle e, e'\rangle = \langle e, ST^*e'\rangle, \text{ или } y_e|_L = S^*e|_L.$$

Теперь, по нашим фиксированным числам C и ε мы выберем два таких числа A и $\varepsilon_1 > 0$, что $\sqrt{A} \geq C > 1$ и $(2+K)A^{-1/2} + \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Определим, наконец, дуальную норму на Y^*, эквивалентную исходной:

$$|||y'|||_0 := \max\{||y'||, A\,\mathrm{dist}(y', L)\}\,.$$

Эта норма, в свою очередь, порождает эквивалентную исходной норму на пространстве Y, единичный шар которой пусть, к примеру, будет B. Теперь — заключительный шаг в этих длительных рассуждениях: в качестве еще одного единичного шара (функционал Минковского которого мы обозначим через $|||\cdot|||$) мы возьмем замкнутую выпуклую солидную оболочку[3] $\mathrm{sol}\,(B)$ множества B.

[3] *Со́лидная оболочка* множества $M \subset Y$ определяется так: $\mathrm{sol}\,(M) := \{y \in Y : \exists y_1 \in Y,\ |y| \leq |y_1|\}$. Замкнутая выпуклая солидная оболочка множества M есть $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{sol}\,(M)$.

Все три имеющиеся нормы на пространстве Y, эквивалентны друг другу и, более того, пространство $(Y, |||\cdot|||)$ есть банахова решетка (решеточная структура просто наследуется из первоначального $(Y, ||\cdot||)$). Очевидно, что если $y \in Y$, то $||y|| \geq |||y|||_0 \geq |||y|||$, *причем все три нормы на* Y^*, *сопряженные к этим нормам, совпадают на подпространстве* $L \subset Y^*$. Наша ближайшая цель — показать, что банахова решетка $\widetilde{Y}_C := (Y, |||\cdot|||)$ не обладает свойством $\widetilde{C}$-ограниченной аппроксимации, если только $\widetilde{C} < C/K$ (напомним, что C — произвольная, а K — абсолютная постоянные).

Итак, пусть $\Phi \in Y^* \otimes Y$ и $|||\Phi y_e - y_e||| < \varepsilon_1$ для всех $e \in G$. Мы хотим показать, что $|||\Phi||| \geq C/K$ (имеется в виду норма оператора Φ в пространстве $\widetilde{Y}_C$).

Возьмем произвольные $e' \in H$ и $e \in G$, и пусть $l \in L$ таково, что $||l - \Phi^* T^* e'|| = \operatorname{dist}(\Phi^* T^* e', L)$. Вспоминая, что $|||T^* e'||| = ||T^* e'|| \leq ||T||\, ||e'|| \leq 1$, $||y_e|| \leq 2$ и $\|S\| \leq K$, мы последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
|||\Phi^*||| &\geq \frac{|||\Phi^* T^* e'|||}{|||T^* e'|||} \geq \frac{A \operatorname{dist}(\Phi^* T^* e', L)}{||T^* e'||} \geq A\, ||l - \Phi^* T^* e'|| \geq \\
&\geq \frac{A}{2+K}\, |\langle \Phi^* T^* e' - l, y_e - S^* e\rangle| \underset{(3)}{=} \frac{A}{2+K}\, |\langle \Phi^* T^* e', y_e - S^* e\rangle| = \\
&= \frac{A}{2+K}\, |\langle T^* e', \Phi y_e\rangle - \langle \Phi^* T^* e', S^* e\rangle| \geq \\
&\geq \frac{A}{2+K}\, \left(|\langle T^* e', y_e\rangle - \langle S\Phi^* T^* e', e\rangle| - |\langle T^* e', \Phi y_e - y_e\rangle|\right).
\end{aligned}$$

Далее, так как (см. (3) и (1)) $\langle T^* e', y_e\rangle = \langle < T^* e', S^* e\rangle = \langle S T^* e', e\rangle = \langle e', e\rangle$ и

$$|\langle T^* e', \Phi y_e - y_e\rangle| \leq |||T^* e'|||\ |||\Phi y_e - y_e||| \leq 1 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1,$$

то мы можем продолжить цепочку наших неравенств следующим образом:

$$|||\Phi^*||| \geq \frac{A}{2+K}\, |\langle e, e' > - \langle S\Phi^* T^* e', e\rangle| - \frac{A}{2+K}\, \varepsilon_1.$$

Обозначая через R конечномерный оператор $S\Phi^* T^* \in E \otimes E^*$, окончательно мы получаем:

$$|\langle e' - Re', e\rangle| \leq \frac{2+K}{A}\, |||\Phi^*||| + \varepsilon_1. \tag{4}$$

Поскольку для любого $f' \in E^*$

$$\|Rf'\| = \|S\Phi^* T^* f'\| \le K\,||\Phi^* T^* f'|| \le |||\Phi^*(T^* f')||| \le$$
$$\le K\,|||\Phi^*|||\ |||T^* f'||| = K\,||T^* f'||\ |||\Phi^*||| \le K\,|||\Phi^*|||\ ||f'||,$$

то $\|R\| \le K\,|||\Phi^*|||$.

Теперь, если $|||\Phi^*||| < C$, то из (4) и из условия $\sqrt{A} \ge C$ вытекает, что

$$|\langle e' - Re', e\rangle| < \frac{2+K}{A}\,C + \varepsilon_1 \le (2+K)A^{-1/2} + \varepsilon_1 < \varepsilon$$

(вспомним выбор чисел A и ε_1). Поэтому, принимая во внимание (2) и условие $(*)$, мы приходим к неравенству $||R|| \ge C$, что дает нам: $|||\Phi^*||| \ge C/K$.

Оставшийся тривиальный случай, когда $|||\Phi^*||| \ge C$ (и, значит, $\ge C/K$) завершает доказательство того факта, что банахова решетка $\widetilde{Y}_C = (Y, |||\cdot|||)$, обладая свойством ограниченной аппроксимации (даже базисом), не обладает свойством $\widetilde{C}$-ограниченной аппроксимации ни при каком $\widetilde{C}$, меньшем, чем C/K.

Для окончания доказательства нашей теоремы теперь достаточно для каждого числа $C = n = 2, 3, \ldots,$ построить описанным выше способом соответствующую банахову решетку $\widetilde{Y}_n$ и положить $X := \{\sum_n \widetilde{Y}_n\}_{l_1}$. Эта банахова решетка (со своей естественной решеточной структурой) обладает свойством аппроксимации (таково каждое слагаемое в указанной сумме по типу l_1), но, как нетрудно понять, не обладает свойством ограниченной аппроксимации. ■

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[Dav] A. M.Davie, *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261–266, MR49#3499.

[Enf] P. Enflo, *A counterexample to the approximaton problem in Banach spaces*, Acta Mat. **130** (11973), 309–317, MR53#6288.

[FiJo] Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197–200, MR49#5782..

[FJT] T.Figiel, W.B.Johnson and L.Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces*, J. Approximation Theory **13** (1975), 395-412, MR51#3866..

[G-L] Y.Gordon, D.R.Lewis, *Absolutely summing operators and local unconditional structures*, Acta Math. **133** (1974), 27–48, MR53#14091..

[Grt] Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), pp. 196 + 140.

[Lin] Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.

[Ptch] Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир, 1982, 536 с.

[Sznk] A. Szankowski, *A Banach lattice without the approximation property*, Israel J. Math. **24** (1976), Nos. 3–4 329–337, MR54#8245..

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл., 2
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
кафедра математического анализа.
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru