ЧИСЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУПП И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

А.М.ВЕРШИК [1]

[1] *С.-Петербургское отделение Математического Института им. В. А. Стеклова Фонтанка 27,*
119011 С.-Петербург, Россия. *При частичной поддержке РФФИ, грант 96-15-96060*

Аннотация

Энтропия случайного блуждания относительно мер на дискретной группе может быть использована, для сравнения систем образующих, — система образующих с максимально возможной энтропией является в известном смысле наиболее естественной для данной группы. Доказываемое в работе *фундаментальное неравенство связывает энтропию, снос и логарифмический объем на группе* (пункт 2). В свободных группах фундаментальное неравенство превращается в равенство, а на локально-свободных группах равенства — нет (см. пункт 3). Энтропия - гораздо более мощное средство сравнения экспоненциальных групп, чем рост. Формулируется круг новых примеров и задач, связанных с локальными группами.

Аннотация

The entropy of the random walk on the discrete contable group could be used for comparison of the system of the generators. Fundamental inequality between growth, entropy and escape gives the possibility to define "the best" system of the generators. We formulate a new circle of the problems related to the various growth and asymptotics on the groups.

Key words: группы, образующие, энтропия, снос, рост, локально свободная группа, группа кос

1. Введение

Среди различных способов "измерения" бесконечных групп, наибольшее распространение имеет так называемый рост — т. е. асимптотика числа слов данной длины, ему посвящено огромное количество работ. Однако, имеются и более глубокие характеристики, соотношения которых с ростом и между собой,— едва ли не самый важный предмет в теории численных характеристик алгебраических систем. Наиболее трудная проблема — определить и вычислить *инвариантные* характеристики, независящие от выбора систем образующих. Эта область все еще мало исследована и в этой короткой работе мы приводим, по-видимому, новые аргументы и примеры в этом направлении. Более подробно эти результаты будут изложены в статье автора в "Успехах математических наук".

Мы изучаем, главным образом счетные экспоненциальные группы, (т. е. группы экспоненциального роста), представляющие наибольший интерес для имеющихся в виду приложений, однако общие принципы остаются пригодными и для других случаев. Отправной точкой для автора в свое время было изучение энтропии случайных блужданий на группах. Это понятие (см. ниже) ввел в 1972 году Авец [1], о чем тогда мне не было известно, и несколькими годами позже я переоткрыл его; однако первоначальные цели введения энтропии были отличны от тех, которые имел в виду Авец, — для автора энтропия была прежде всего альтернативной по отношению к росту характеристикой и предполагалось изучить соотношения между ними. Но очень скоро выяснилось, что энтропия является мощным средством для изучения случайных блужданий, в первую очередь, границ Пуассона, возникавших во многих (не только вероятностных) задачах а также в гармоническом анализе на группах и др. Поэтому вместе с В. А. Каймановичем ([2], [3]) автор приступил к изучению случайных блужданий с энтропийной точки зрения. Связи с аменабельностью, спектром лапласиана, критерием Кестена, гипотезой Фюрстенберга и пр.(см [3]) объединили энтропийную тему со многими другими. Эта тема получила в дальнейшем большое развитие. Здесь я возвращаюсь к первоначальной цели, используя уже установленные связи, и применяю вводимые характеристики к новым классам групп. В частности, в качестве примера мы продолжаем изучение так называемых локальных групп ([6], [7]), одни из которых (локально свободные группы) недавно подробно рассмотрен в работе автора с С. Нечаевым и Р. Бикбовым ([9]).

Фактически, рост связан с асимптотикой лишь одной из многих мер на группе, а энтропия дает возможность описывать асимптотику любых мер; при этом соотношения между ними напоминает соотношение между топологической и метрической энтропиями преобразований. Основной факт - *фундаментальное неравенство* - и есть неравенство между этими энтропиями. Аналогия с динамическими системами идет достаточно далеко. Явный подсчет энтропии проведен в очень немногих случаях и, конечно, непрост. Само фундаментальное неравенство (см. далее) в отдельных случаях упоминалось и ранее в работе В. Каймановича ([4]), а в недавней работе ([5]) близкий вопрос рассматривался для хаусдорфовых размерностей границ блужданий на деревьях, — на групповом языке это соответствует наиболее изученному случаю свободных групп. Однако во всей общности этот вопрос, по-видимому, так и не изучался, после его постановки около двадцати лет назад.

2. Определения

Пусть G — счетная группа с конечным числом образующих, $(x_1, x_2, \dots x_k)$ — некоторая система образующих, а $(x_1^{-1}, x_2^{-1} \dots, x_k^{-1})$ — обратные к ним; обозначим через

$$S = (x_1, x_2, \dots x_k, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1})$$

Не предполагается, вообще говоря, что система S минимальна, т. е. возможно, что и после удаления из нее некоторых элементов система тем не менее порождает группу.

Каждый элемент группы записывается как несократимое (т. е. взаимно-обратные образующие не соседствуют) слово в алфавите S. Мы различаем слова и элементы группы - длина слова понимается буквально, а длина элемента g, обозначемая $l_S(g) = l(g)$ т. е. расстояние (в метрике слов) от единицы группы в данных образующих есть минимум длин слов, представляющих этот элемент. Множество элементов длины не большей, чем n обозначается через $W_{\leq n}$, а в точности данной — W_n; число представлений данного элемента g в виде (возможно сократимого) слова длины не большей n обозначим через $c_n(g)$ В терминах графа Кэли $W_{\leq n}$ есть "шар" — множество точек удаленных от единицы не более чем на n, W_n "сфера" радиуса n, $c_n(g)$ — число путей длины не большей n ведущих из единицы e в данный элемент g.

Пусть $m_{\leq n}$ (соотв., m_n) есть равномерная нормированная мера на $W_{\leq n}$, (соотв., на W_n). Предположим, что μ_n — произвольная симметричная ($\mu(g) = \mu(g^{-1})$) мера на множестве S. . Пусть μ^{*n} — n-я свертка меры μ с собой, она сосредоточена на множестве $W_{\leq n}$. Свертка определяется по формуле:

$$\mu^{*n}(g) = \sum_{g=g_1 g_2 \cdot\cdot g_n} \prod_{i=1\ldots n} \mu(g_i)$$

Особый интерес представляет равномерная мера на S, μ_S В этом случае

$$\mu_S^{*n}(g) = c_n(g)/(2k)^n$$

тем самым, мера $\mu_S^{*n}(g)$ элемента g пропорциональна числу представлений этого элемента в системе S.

Если меры $m_{\leq n}$ и m_n отражают в некотором смысле геометрию группы, точнее рост числа вершин в графе Кэли, то меры μ_S^{*n} — связаны с динамикой, т. е. с ростом числа путей в этом графе, а меры μ^{*n} — рост взвешенного числа путей; все эти меры зависят от выбора образующих.

Теперь мы можем ввести серию важных констант. Прежде всего хорошо известный "рост" или объем:

Определение 1. *Логарифмическим объемом группы G в заданной системе образующих S назовем число*

$$\lim(\log|W_n|)/n = v$$

Существование предела легко следует из неравенства

$$|W_{n+m}| \leq |W_n| \cdot |W_m|$$

Логарифмический объем отличен от нуля для групп экспоненциального роста и только для них. Очевидно, что для этих групп его можно вычислять и по такой формуле:

$$\lim \log(|W_{\leq n}|)/n = v,$$

поскольку логарифмические асимптотики шаров и сфер одинаковы.

Напомним, что энтропия меры ν на конечном множестве K есть число

$$H(\nu) = -\sum_K \nu(k) \cdot \log(\nu(k))$$

(логарифмы двоичные)

Энтропия равномерной меры есть логарифм числа элементов множества.

Определение 2. *(см. [1], [3]) Энтропией пары (G, μ) называется предел*

$$\lim H(\mu^{*n})/n = h(G, \mu)$$

т. е. предел нормированных энтропий степеней по свертке меры μ на образующих.

Этот предел также существует и равен инфимуму, что легко следует из неравенства:

$$H(\nu_1 * \nu_2) \leq H(\nu_1) + H(\nu_2)$$

Заметим, что логарифмический объем фактически есть предел нормированных энтропий равномерных мер.

Введем еще одну важную характеристику: рассмотрим длину элемента $l(.)$, как функционал (зависящий от S) на множестве $W_{\leq n}$, снабженном мерой μ^{*n}, и возьмем его среднее по этой мере. Иначе говоря, рассмотрим математическое ожидание длины элемента при случайном блуждании за n шагов с исходной мерой μ — т. е. вычислим среднюю длину случайного слова — $l_n(\mu)$. Существует предел

$$l(\mu) = \lim l_n(\mu)/n$$

Определение 3. *Число $l = l(\mu)$ назовем сносом или скоростью ухода на бесконечность относительно данной меры, а в случае меры μ_S — скоростью ухода на бесконечность относительно данной системы образующих.*

Теорема 1. *ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО.*

Энтропия произвольной симметричной меры на группе, сосредоточенной на данной системе образующих этой группы не превышает логарифмического объема в этой системе, умноженного на скорость ухода на бесконечность (снос) относительно меры.

$$h \leq l \cdot v$$

3. Доказательство теоремы, следствия, основные проблемы

Лемма 1. *Если снос отличен от нуля, то случайная последовательность длин слов удовлетворяет закону больших чисел, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n \geq N$ имеет место соотношение*

$$\mu^{*n}(g : |l(g)/l - 1| \leq \epsilon) \geq (1 - \epsilon)$$

Доказательство. Рассмотрим длины начальных отрезков слов как цилиндрические функционалы на бесконечном произведении (G^∞, μ^∞). Пусть $l_n(\omega)$ есть длина элемента группы, отвечающего начальному отрезку из n букв бесконечной последовательности ω в алфавите S. Последовательность $l_n(\omega), n = 1, \ldots$, как легко видеть, удовлетворяет условиям субаддитивной эргодической теоремы (Кингмана) относительно левого сдвига T, как преобразования G^∞ с продакт мерой μ^∞, а именно:

$$l_{n+m}(\omega) \leq l_n(\omega) + l_m(T^n \omega)$$

Поэтому последовательность $l_n(\omega)/n$ сходится почти всюду. То, что ее предел есть константа, следует из закона $0 - 1$ для последовательности независимых и того, что этот предел не меняется при любом изменении конечного отрезка последовательности. Утверждение леммы равносильно сходимости по мере последовательности нормированных длин элементов и, следовательно, вытекает из сходимости почти всюду. ■

Замечание. Если снос отличен от нуля, то длины почти всех слов, как утверждает лемма, растут линейно по n с одной и той же скоростью. С другой стороны, хорошо известно, что на абелевых и многих других группах снос равен нулю, а скорость роста длин слов имеет порядок $\sqrt{n}$. Вопрос, поставленный в этой связи, — может ли эта скорость для каких-либо групп быть промежуточной между $\sqrt{n}$ и n. До сих пор, насколько известно, он не изучался. Ответ положителен, такие примеры построены недавно студ. А. Дюбиной на основе весьма полезных в теории случайных блужданий и рассматривавшихся ранее сплетений (см [8]). Ее же результат о свойствах сноса на сплетениях см. в настоящем сборнике.

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Возьмем произвольное положительное ϵ и выберем по лемме натуральное n. Разложим меру μ^{*n} в выпуклую комбинацию двух мер, одна из которых — μ_1 есть нормированное ограничение этой меры на множество V тех элементов, длины которых лежат в интервале $[(1-\epsilon)l \cdot n, (1+\epsilon)l \cdot n]$, а другая — μ_2 — есть нормированное ограничение меры μ^{*n} на дополнение к множеству V в $W_{\leq n}$. По лемме множество V

имеет меру больше $1-\epsilon$, а число элементов во втором не превышает общее число элементов в $W_{\leq n}$.

Тогда энтропия $H(\mu^{*n})$ оценивается

$$H(\mu^{*n}) \leq (1-\epsilon)H(\mu_1) - \log(1-\epsilon) + \epsilon \cdot \log(W_{\leq n})$$

(последнее слагаемое оценивает сверху энтропию меры μ_2 энтропией равномерной меры на $W_{\leq n}$). Поделив на n и переходя к пределу по n с учетом того, что последнее слагаемое, после деления на n стремится к логарифмическому объему v, умноженному на ϵ (см. определение), получаем

$$h \leq (1-\epsilon)H(\mu_1)/n + \epsilon \cdot v$$

Но $H(\mu_1)/n$ оценивается сверху выражением $(\log|V|)/n$, которое при n стремящемся к бесконечности, дает $l \cdot v$, т.е.

$$h \leq (1-\epsilon)l \cdot v + \epsilon \cdot v$$

и в силу произвольности ϵ получаем нужное неравенство:

$$h \leq l \cdot v$$

■

Следствие 1. *Если $l = 0$, то есть рост слов медленнее линейного, то и энтропия равна нулю. Тем самым положительность энтропии влечет линейный рост длин типичных по этой мере слов.*

Возможно, верно и обратное.

Напрашивается аналогия фундаментального неравенства с неравенством между топологической и метрической энтропией динамических систем (см. напр. [11]). Удобно переписать неравенство в виде

$$h/l \leq v$$

Левая часть зависит от меры, а правая -только от множества образующих. (ср. [5], где для деревьев правая часть истолковывается, как хаусдорфова размерность некоторой меры). Отношение в левой части есть *нормированная энтропия* (т.е. энтропия на один шаг - или букву - в реальном приращении слова). Обозначим его через $\hat{h}$.

Если рассмотреть продакт-меру на бесконечном произведении носителей меры μ с сомножителями μ, то нормированная энтропия $\hat{h}$ легко истолковывается, как предельная энтропия на один шаг разбиений бесконечных слов на классы эквивалентности относительно равенства начальных фрагментов этих слов в группе, а v становится предельной энтропией равномерных мер на классах. Поэтому буквально наше неравенство не имеет в точности того же смысла, что и в топологической динамике (отсутствует преобразование, а есть лишь последовательность разбиений) .

Однако, эта аналогия весьма полезна в первую очередь потому, что главные возникающие здесь вопросы похожи. Вот они.

Пусть множество образующих и, тем самым, значение v — фиксировано, назовем меру с носителем на данном множестве образующих и их обратных, доставляющую максимум выражению $\hat{h}$ - *мерой максимальной нормированной энтропии* относительно данного множества образующих.

А. КОГДА ДЛЯ ДАННОГО МНОЖЕСТВА ОБРАЗУЮЩИХ СУЩЕСТВУЕТ СИММЕТРИЧНАЯ МЕРА МАКСИМАЛЬНОЙ НОРМИРОВАННОЙ ЭНТРОПИИ? КОГДА ОНА ЕДИНСТВЕННА?

В качестве наиболее естественной меры μ следовало бы брать равномерную меру на образующих группы и обратным к ним, но, по-видимому, не всегда она доставляет максимум отношению $\hat{h} = h/l$, поскольку образующие, вообще говоря, могут быть неравноправными.

Может оказаться, что мера максимальной нормированной энтропии существует, но для данного множества образующих максимальное $\hat{h} = h/l$ строго меньше v. Назовем симметричное множество образующих в экспоненциальной группе *экстремальным*, если на нем существует симметричная мера на нем, для которой фундаментальное неравенство в приведенной форме становится равенством: $\hat{h} = v$.

B. В КАКИХ ГРУППАХ СУЩЕСТВУЮТ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ?

Будем теперь варьировать и само множество образующих и искать его инвариантные характеристики.

Рассмотрим выражение

$$\frac{h}{l \cdot v} = \frac{\hat{h}}{v} \equiv q = q(S, \mu)$$

(в предположении, что $l \neq 0$) и его супремум по всем симметричным мерам μ, носитель которых лежит в конечном симметричном множестве S:

$$q(S) = \sup_{\mu} q(S, \mu)$$

По теореме 1 число $q(S)$ не превосходит единицы, и равно единице только для экстремальных систем. Таким образом, появляется *объективный способ сравнения систем образующих: чем больше величина $q(S)$ тем эффективней данная система образующих.*

С. ОПИСАТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮЩИХ ВНУТРЕННИМ ОБРАЗОМ. ВЫДЕЛИТЬ СРЕДИ НИХ ТУ, У КОТОРОЙ ЗНАЧЕНИЕ v - МАКСИМАЛЬНО.

Заметим, что значение v само по себе мало что говорит о группе, однако вместе со следующим инвариантом дает более глубокую информацию о группе.

Для произвольной экспоненциальной группы обозначим

$$q_G = sup_S q(S).$$

Это число - есть инвариант группы. Систему образующих, на которой принимается максимальное значение $q(S)$ назовем *максимальной*. Группы для которых $q_G = 1$ будем называть *свободно-подобными*. К настоящему времени мне не известны группы, для которых $q_G < 1$.

Поясним наглядный смысл этих понятий. Чем больше константа q, тем больше асимптотическая доля элементов группы, получаемых в процессе случайного блуждания (с данной мерой на образующих) за n шагов, среди всех элементов соответствующей длины. В частности, если $q = 1$ при некотором выборе образующих и надлежащей меры на них (например, равномерной), то типичные случайные слова асимптотически исчерпывают всю группу. В противоположном же случае они составляют лишь экспоненциально малую часть.

4. Примеры; Локальные группы

Соберем известные сведения о фундаментальном неравенстве и примеры вычисления введенных констант. Их совсем немного. Напомним, что мы рассматриваем лишь экспоненциальные группы. Что касается роста - логарифмического объема - то ему посвящены десятки работ. Однако энтропия и снос вычислены в очень немногих случаях. Наиболее эффективный способ вычисления энтропии состоит в использовании аналога теоремы Шеннона, доказанного в [3] и [10]. Мы вернемся к этому вычислению в другом месте Разумеется, представляет интерес проделать эти вычисления для классических групп - $SL(n, \mathbf{Z})$, других групп матриц, разрешимых групп и т.п. Мы концентрируем внимание на классе так называемых локальных групп. Но сначала приведем давно известный пример.

Пример 1. Свободная группа. Вычисления в этом случае хорошо известны.

Теорема 2. *Равномерная мера на естественных образующих и обратных к ним в свободной группе с k ($k \geq 2$) образующими - имеет максимальную энтропию, фундаментальное неравенство превращается в равенство, а система образующих — экстре-*

мальна, т.е. свободная группа - свободно-подобна. Значения констант в этом случае таково

$$v = \log(2k-1), l = (k-1)/k, h = l \cdot v$$

Доказательство. Вычисление логарифмического объема - тривиально: число слов длины $n > 0$ в точности равно $2k \cdot (2k-1)^{n-1}$, следовательно $v = \log(2k-1)$. Снос, то есть нормированное на n математическое ожидание длины слова есть средний размах случайного блуждания на $\mathbf{N}$ с вероятностями перехода $Prob[i \to i+1] = 2k-1/2k$, и $Prob[i \to i-1] = 1/2k-1$, при $i \neq 0$, и, следовательно, $l = k-1/k$. Энтропия меры μ^{*n} равна энтропии смеси равномерных распределений на словах длины $s = 0, ...n$ с биномиальным распределением в качестве коэффициентов смеси и, поскольку носитель этого распределения растет линейно с n, а не экспоненциально, то его вклад в энтропию равен нулю; следовательно, энтропия равна энтропии равномерного распределения на словах типичной длины, т.е. $ln \cdot \log(2k-1)$ и после нормировки на n получаем $h = k-1/k \cdot \log(2k-1)$, т.е. – равенство в фундаментальном неравенстве. ∎

Для расширений, фактор-групп получающихся из свободных с помощью субэкспоненциальных групп (т.н. виртуально-свободные группы) ситуация точно такая же. Однако, ситуация в случае общих групп и, в частности, наиболее трудное в техническом отношении, – вычисление энтропии, – гораздо сложнее.

Следующий вопрос инициирован сходством гиперболических и свободных групп:
D. БУДУТ ЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПО ГРОМОВУ СВОБОДНО-ПОДОБНЫ?

Если да — то для каких образующих и мер будет равенство в фундаментальном неравенстве? Интересен также следующий вопрос:

E. БУДУТ ЛИ ТАКОВЫМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $g \geq 2$?

Пример 2. Локально свободные группы, группа кос.

Напомним теперь определение локальных групп ([6],[7]).

Определение 4. *Группа (полугруппа, алгебра) называется локальной если она порождена конечным или счетным вполне упорядоченным множеством образующих $z_1, \ldots$, причем образующие с номерами, отличающимися более чем на s (в наиболее интересном случае $s = 1$) – коммутируют, а соседние могут быть связаны какими-либо соотношениями. Если эти соотношения зависят лишь от разности номеров образующих, то локальная группа (полугруппа, алгебра) называется* локальной стационарной.

Мы рассмотрим здесь лишь случай $s = 1$ т.е. коммутирование на расстоянии 2 и больше. Термин "локальность" в алгебре явно перегружен, но здесь аналогия скорее физическая: коммутирование удаленных друг от друга элементов отвечает их "невзаимодействию".

Группы Коксетера, группы кос, алгебра Гекке и др. - пример локальных групп и алгебр. Более общим образом можно рассматривать в качестве z_i не образующие, а подгруппы или подалгебры. В самое последнее время такие объекты стали популярны в математической физике (см. работы [12], [13]). Еще более общее понятие - локальность по отношению к графу, - в нашем случае граф есть цепь. Интересен также случай цикла, когда образующие параметризованы корнями из единицы.

Определение 5. *Локально свободной группой LF_k (полугруппой LF_k^+, алгеброй) называется группа (соотв....) в которой соседние образующие $z_i, z_{i+1}, i = 1 \dots k, k \leq \infty$ порождают свободные подгруппы с двумя образующими, а остальные пары образующих — коммутируют.*

Локально свободная группа LF_k является в известном смысле аппроксимацией группы кос B_{k+1}: она есть одновременно и подгруппа, и надгрупппа группы кос.

В работе С.Нечаева, Р.Бикбова и автора [9] подробно рассмотрен случай локально свободной группы и полугруппы с вышеизложенной точки зрения, и результаты можно резюмировать в следующим образом:

Теорема 3. *Естественные образующие в локально свободная группе (полугруппе) не является экстремальными. Более точно, для любого числа образующих (включая и бесконечное!) k верны следующие оценки:*

Для локально свободной полугруппы LF_k^+ :

$$v = \log 4 + o(k^{-1}),$$

$$l = 1,$$

т.к. в полугруппе LF_k^+ нет сокращений

$$h = \log 3 + \epsilon(n, k),$$

где $\epsilon(n,k) \to 0, n, k \to \infty$, k -число образующих (м.б. бесконечное), а n - длина элементов.

Таким образом, при достаточно больших k и при бесконечном k получаем $v \cdot l \neq h$.

Для локально свободной группы LF_k:

$$v = \log 7 + o_k(1),$$

$$l = 2/3 - \beta,$$

где β - неотрицательная константа (возможно, равная нулю при бесконечном k)

$$h = \log(3 - \alpha) + o(k^{-1}),$$

где константа α не превосходит по модулю 1/2.

Таким образом, в естественных образующих локально свободной группы (полугруппы) фундаментальное неравенство является строгим $v \cdot l > h$.

Подробное проведение вычислений в ([9]) связано с интересной самой по себе комбинаторикой (т.н. кучи и их основания), сходной с комбинаторикой диаграмм и таблиц Юнга. Подчеркнем, что пока найдены лишь удовлетворительные оценки констант, позволяющие сделать выводы о немаксимальности и пр., точные же значения, по-видимому, найти значительно трудней.

Замечания.

1.Неизвестно, является ли равномерная мера мерой максимальной энтропии.

2.Интересно, что логарифмический объем и константы l и h в локально свободной группе *стабилизируются* с ростом числа образующих k, а не стремятся к бесконечности, как можно было бы предположить.

3.Вычисления в [9] проведены также для локально свободных групп с образующими конечного порядка. Если порядок стремится к бесконечности, то все константы стремятся к их значениям для локально свободной группы.

4.Из теоремы и упомянутой выше связи локально свободной группы с группой кос получаем двусторонние оценки тех же констант для группы кос: оказывается, что и здесь для классической системы образующих этой группы и равномерной меры фундаментальное неравенство — нестрогое, и, точно также, как в локально свободной группе, все константы стабилизируются к конечному значению когда число образующих стремится к бесконечности. Тем самым, *в группах кос множество элементов, являющихся типичными случайными словами в естественных образующих с равномерной мерой, составляет лишь экспоненциально малую долю от множества всех элементов.*

Отметим еще,что образующие в локальных группах неравноправны, точнее, нетождественная подстановка, не являющаяся отражением ($i \to k - i$) не порождает автоморфизм группы. Поэтому можно было бы предположить, что равномерная -мера на образующих и их обратных не вполне естественна. Однако, если ввести циклическую локально свободную группу (т.е. отождествить первую и последнюю образующие в локально свободной группе, то наши оценки не изменятся, хотя теперь уже циклическая группа транзитивно действует на образующих и равномерная мера становится естественной.

Пример 3.Локально-M-свободные группы. Введем в рассмотрение следующий класс локальных групп. Рассмотрим то, или иное многообразие групп – M и в нем свободную группу с двумя образующими $F_M(2)$. *Локально-М- свободной группой* $LF_M(k)$ с k образующими $(z_1, \ldots, z_k)$ назовем группу порожденную этими образующими и соотношениями: $z_i \cdot z_j = z_j \cdot z_i, |i-j| \geq 2$, и (z_i, z_{i+1}) – есть образующие подгруппы, канонически изоморфной $F_M(2)$. Разумеется, существование таких групп для произвольного многообразия M — неочевидно, а сами группы $LF_M(k)$ при $k \geq 3$ многообразию, вообще говоря не принадлежит. Рассмотрим, например, локально свободную разрешимую группу ступени 2 с двумя образующими и построим этим способом локально-разрешимую свободную группу. Структура этой группы довольно сложна (при $k \geq 3$) и она уже не является разрешимой. Однако из предыдущих рассмотрений локально свободной группы следует, что рост в ней стабилизируется. Эти группы, по-видимому, возникают в связи с кристаллическими базисами.

Более простой класс локальных групп - локально нильпотентные свободные группы. Он возникал в работах по теории интегрируемых систем. Самый простой вариант группы - таков: соседние образующие (z_i, z_{i+1}) канонически порождают дискретную группу Гейзенберга, а все остальные пары — коммутируют. Хотя нильпотентные группы имеют полиномиальный рост – локально-нильпотентные свободные группы уже экспоненциальны при $k \geq 3$. Предположительно, во всех этих случаях фундаментальное неравенство остается строгим. К связям с границей Пуассона, нетривиальность которой равносильна положительности энтропии, со спектральной теорией и гармоническим анализом на группах, в частности, на локальных группах, мы вернемся в другом месте.

Литература

[1] Avez A. *Entropie des groupes de fuini.* C.R.Acad. Sc.Paris 275A 1363-1366.

[2] Вершик А., Кайманович А. *Случайные блуждания на группах: границы, энтропия, равномерное распределение.* ДАН СССР 1979.

[3] Kaimanovich V., Vershik A. *Random Walks on Discrete Groups* Ann. of Prob. v.11, No.3 457-490.

[4] Кайманович В. *Энтропийный критерий максимальности границы блужданий на группах* ДАН СССР 31,193-197, 1985

[5] Kaimanovich V. *Hausdorf dimension of the harmonic measure on trees* Ergod.Th Dyn. Syst. 18. 3, 631-660,1998.

[6] Vershik A. *Локальные стационарные алгебры.* В сб. "Труды сибирской школы "Алгебра и анализ" ВИНИТИ 1988 3-22. Engl.Transl.:Amer.Math.Transl.(2) v.148, 1-13, 1992

[7] Vershik A. *Local algebras and a new version of Young's orthogonal form.* Banach Center Publ. 1990 v.26 part 2 467-473 PWN-Polish Sci Publ.

[8] Vershik A. *Счетные группы, близкие к конечным* в кн. Гринлиф Ф. Группы с инвариантным средним М.1973.112-135. Revised English transl. *Amenability and approximation of infinite groups* Selecta Math.Sov. V.2, 4 311-330.

[9] Bikbov R., Nechaev S., Vershik A. *Statistical properties of braid groups in locally free approximation.* Prep. IHES 1999. submitted to Comm.Math.Phys.

[10] Deriennic Y. *Lois "zero ou deux" pour les processus de Markov* Ann.Inst.H.Poincare Sect B. 12 111-129.

[11] *Dynamical systems.* 2- nd edition ed. Ya Sinai. Springer 1999.

[12] Alekseev A., Faddeev L., Frohlich J and Schmerus V. *Representation theory of lattice current algebras* Commun. Math. Phys. 191(1998 31.

[13] Hausser F, Nill F. *Diagonal crossed product of quantum groups* Rev. in Math. Phys. v.11, 5,1999, 553-630.