В. Н. Малозёмов, И. В. Шемякина

МАКСИМИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВАНДЕРМОНДА И ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

1. Введение

Возьмем определитель Вандермонда

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & \dots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

и рассмотрим при $n \geq 1$ следующую экстремальную задачу:

$$\begin{gathered} V(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \max, \\ 0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n, \\ \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n} \leq A. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь A – некоторая положительная константа.

Теорема. *Решение задачи* (1.1) *существует и единственно. Компонентами оптимального плана* $(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$ *являются корни полинома* $xL'_{n+1}(cx)$, *где* $L_{n+1}(x)$ *– полином Лагерра степени* $n+1$ (*ортогональный с весом* e^{-x} *на полуоси* $[0, +\infty)$ *любому полиному степени не выше* n) *и* $c = (n+1)A^{-1}$. *При этом*

$$V(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*) = \left(\frac{A^n}{(n+1)^{n-1}} \right)^{(n+1)/2} \prod_{k=1}^{n} k^k. \tag{1.2}$$

Формулировка теоремы вместе со схемой ее доказательства имеются в [1, с. 150–152]. Однако, по нашему мнению, этот замечательный результат заслуживает более детального анализа с точки зрения современной теории экстремальных задач. Такому анализу и посвящена данная статья.

Напомним, что

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \tag{1.3}$$

2. Полиномы Лагерра

Приведем некоторые известные свойства полиномов Лагерра, необходимые для дальнейшего.

2.1. Стандартизованные полиномы Лагерра $L_n(x, \alpha)$ имеют вид [2, с. 219 – 230]

$$L_n(x, \alpha) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+\alpha} e^{-x} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha > -1. \tag{2.1}$$

В частности,

$$L_0(x, \alpha) \equiv 1, \quad L_1(x, \alpha) = (\alpha + 1) - x.$$

С помощью формулы Лейбница для дифференцирования произведения функций получаем явное представление в общем случае:

$$L_n(x, \alpha) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^{n+\alpha} \right)^{(n-k)} \left(e^{-x} \right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^n - n(n+\alpha) x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (k + \alpha) \right). \tag{2.2}$$

Строго говоря, данная выкладка корректна только при $x > 0$, однако окончательная формула имеет смысл при всех вещественных x.

Полином Лагерра $L_n(x, \alpha)$ ортогонален с весом $x^\alpha e^{-x}$ на полуоси $[0, +\infty)$ любому полиному степени не выше $n - 1$. В формулировке теоремы $L_{n+1}(x) = L_{n+1}(x, 0)$.

2.2. Для полиномов Лагерра справедливо рекуррентное соотношение

$$(n+1)L_{n+1}(x,\alpha) = (2n+1+\alpha-x)L_n(x,\alpha)-$$

$$-(n+\alpha)L_{n-1}(x,\alpha), \quad n=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Выведем его. При $n \geq 1$ имеем

$$\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n)} = \left[(n+\alpha)x^{n+\alpha-1}e^{-x} - x^{n+\alpha}e^{-x}\right]^{(n-1)},$$

так что

$$\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n-1)} = (n+\alpha)(x^{n+\alpha-1}e^{-x})^{(n-1)} - (x^{n+\alpha}e^{-x})^{(n)}.$$

Пользуясь этой формулой и (2.1), запишем

$$(n+1)L_{n+1}(x,\alpha) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}(n+1+\alpha-x)\right]^{(n)} =$$

$$= \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\left[\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n)}(n+1+\alpha-x) - n\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n-1)}\right] =$$

$$= (n+1+\alpha-x)L_n(x,\alpha)-$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}x^{-\alpha}e^{x}\left[(n+\alpha)\left(x^{n+\alpha-1}e^{-x}\right)^{(n-1)} - \left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n)}\right] =$$

$$= (n+1+\alpha-x)L_n(x,\alpha) - (n+\alpha)L_{n-1}(x,\alpha) + nL_n(x,\alpha).$$

Отсюда очевидным образом следует (2.3).

2.3. Для производной полинома Лагерра справедлива формула

$$xL_n'(x,\alpha) = nL_n(x,\alpha) - (n+\alpha)L_{n-1}(x,\alpha), \quad n=1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Проверим её, используя очевидное свойство биномиальных коэффициентов

$$(n-k)\binom{n+\alpha}{n-k} = (n+\alpha)\binom{n+\alpha-1}{n-1-k}.$$

Согласно (2.2) имеем

$$xL_n'(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}k\frac{x^k}{k!} =$$

$$= (-1)^n n\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[n\binom{n+\alpha}{n-k} - (n+\alpha)\binom{n+\alpha-1}{n-1-k}\right]\frac{x^k}{k!} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{x^k}{k!} - (n+\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1+\alpha}{n-1-k}\frac{x^k}{k!} =$$

$$= nL_n(x,\alpha) - (n+\alpha)L_{n-1}(x,\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Справедлива также формула

$$L_{n+1}'(x,\alpha) = -L_n(x,\alpha+1). \tag{2.5}$$

Она проверяется непосредственно. Согласно (2.2)

$$L_{n+1}'(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1+\alpha}{n+1-k}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+(\alpha+1)}{n-k}\frac{x^k}{k!} = -L_n(x,\alpha+1).$$

2.4. Покажем, что при $n \geq 2$ полином Лагерра $L_n(x,\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0. \tag{2.6}$$

Для этого продифференцируем тождество (2.3). Получим

$$(n+1)L_{n+1}'(x,\alpha) + L_n(x,\alpha) + (x-2n-1-\alpha)L_n'(x,\alpha)+$$
$$+(n+\alpha)L_{n-1}'(x,\alpha) = 0. \tag{2.7}$$

Воспользуемся тем, что согласно (2.4) и (2.3)

$$xL_{n+1}'(x,\alpha) = (n+1)L_{n+1}(x,\alpha) - (n+1+\alpha)L_n(x,\alpha) =$$

$$= [(2n+1+\alpha-x)L_n(x,\alpha) - (n+\alpha)L_{n-1}(x,\alpha)] -$$

$$-(n+1+\alpha)L_n(x,\alpha) =$$

$$= (n-x)L_n(x,\alpha) + [xL_n'(x,\alpha) - nL_n(x,\alpha)] = x\left[L_n'(x,\alpha) - L_n(x,\alpha)\right].$$

Отсюда следует, что

$$L_{n+1}'(x,\alpha) = L_n'(x,\alpha) - L_n(x,\alpha).$$

В силу той же формулы (2.4)

$$(n+\alpha)L_{n-1}'(x,\alpha) = (n-1)L_n'(x,\alpha) - xL_n''(x,\alpha).$$

Подставляя найденные выражения для $L_{n+1}'(x,\alpha)$ и $(n+\alpha)L_{n-1}'(x,\alpha)$ в левую часть (2.7), приходим к тождеству

$$(x-1-\alpha)L_n'(x,\alpha) - nL_n(x,\alpha) - xL_n''(x,\alpha) = 0.$$

Это и означает, что полином $L_n(x,\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6).

2.5. Нашей ближайшей целью является вычисление результанта $R(L_n(\cdot,\alpha), L_{n-1}(\cdot,\alpha))$. Напомним [3, с. 295], что результантом двух полиномов

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-x_i), \qquad Q_m(x) = b_m \prod_{j=1}^{m}(x-y_j)$$

с ненулевыми старшими коэффициентами a_n, b_m называется выражение

$$R(P_n, Q_m) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} Q_m(x_i).$$

Нетрудно проверить, что

$$R(P_n, Q_m) = (-1)^{mn} R(Q_m, P_n). \tag{2.8}$$

Обратимся к полиномам Лагерра. Как известно, корни полинома $L_n(x,\alpha)$ вещественны, попарно различны и расположены на

полуоси $(0,+\infty)$. Обозначим их $u_{1,n}^{(\alpha)}$, $u_{2,n}^{(\alpha)}$, $\ldots$, $u_{n,n}^{(\alpha)}$, причём будем считать, что
$$0<u_{1,n}^{(\alpha)}<u_{2,n}^{(\alpha)}<\ldots<u_{n,n}^{(\alpha)}. \tag{2.9}$$
Старший коэффициент $L_n(x,\alpha)$ равен $(-1)^n/n!$. Согласно (2.8) и (2.3) при $n\geq 2$ имеем

$$R(L_n(\cdot,\alpha),L_{n-1}(\cdot,\alpha))=R(L_{n-1}(\cdot,\alpha),L_n(\cdot,\alpha))=$$
$$=\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)^n\prod_{j=1}^{n-1}L_n\Big(u_{j,n-1}^{(\alpha)},\alpha\Big)=$$
$$=\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^n\prod_{j=1}^{n-1}\left[-\frac{n-1+\alpha}{n}\,L_{n-2}\Big(u_{j,n-1}^{(\alpha)},\alpha\Big)\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{n-1+\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{n-2}\prod_{j=1}^{n-1}L_{n-2}\Big(u_{j,n-1}^{(\alpha)},\alpha\Big)\right\}=$$
$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{n-1+\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2R(L_{n-1}(\cdot,\alpha),L_{n-2}(\cdot,\alpha)).$$

Последовательно применяя это соотношение и учитывая равенство $R(L_1(\cdot,\alpha),L_0(\cdot,\alpha))=1$, приходим к формуле

$$R(L_n(\cdot,\alpha),L_{n-1}(\cdot,\alpha))=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^k\right]=$$
$$=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n}k^{k-2n+1}\prod_{k=1}^{n-1}(k+\alpha)^k. \tag{2.10}$$

Мы воспользовались тем, что $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}k!=\prod_{k=1}^{n-1}k^{n-k}$.

2.6. Вычислим дискриминант $D(L_n(\cdot,\alpha))$ полинома $L_n(x,\alpha)$. Напомним, что дискриминантом полинома $P_n(x)$ с ненулевым

старшим коэффициентом a_n и корнями $x_1, \ldots, x_n$ называется выражение
$$D(P_n) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)^2.$$

При этом [3, с. 300]
$$D(P_n) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{-1} R(P_n, P_n'). \tag{2.11}$$

Для полиномов Лагерра согласно (2.2), (2.4) и (2.9) имеем
$$R(L_n(\cdot,\alpha), L_n'(\cdot,\alpha)) = \left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} L_n'\Big(u_{i,n}^{(\alpha)}, \alpha\Big) =$$
$$= \left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \left[-\frac{n+\alpha}{u_{i,n}^{(\alpha)}} L_{n-1}\Big(u_{i,n}^{(\alpha)}, \alpha\Big)\right] =$$
$$= (-1)^n (n+\alpha)^n \left[\prod_{i=1}^{n} u_{i,n}^{(\alpha)}\right]^{-1} R(L_n(\cdot,\alpha), L_{n-1}(\cdot,\alpha)). \tag{2.12}$$

По теореме Виета
$$\prod_{i=1}^{n} u_{i,n}^{(\alpha)} = \prod_{k=1}^{n} (k+\alpha). \tag{2.13}$$

Учитывая (2.12), (2.13) и (2.10), на основании (2.11) получаем
$$D(L_n(\cdot,\alpha)) = \prod_{k=1}^{n} \left[k^{k-2n+2} (k+\alpha)^{k-1}\right]. \tag{2.14}$$

2.7. Очевидно, что дискриминант $D(L_n(\cdot,\alpha))$ и определитель Вандермонда $V\Big(u_{1,n}^{(\alpha)}, \ldots, u_{n,n}^{(\alpha)}\Big)$ на корнях полинома Лагерра $L_n(x,\alpha)$ связаны соотношением
$$D(L_n(\cdot,\alpha)) = \left[\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)^{n-1} V\Big(u_{1,n}^{(\alpha)}, \ldots, u_{n,n}^{(\alpha)}\Big)\right]^2.$$

Отсюда в силу (2.14) и (2.9) следует, что

$$V\left(u_{1,n}^{(\alpha)}, \dots, u_{n,n}^{(\alpha)}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} k^k (k+\alpha)^{k-1}\right]^{1/2}. \qquad (2.15)$$

3. Обобщение задачи (1.1). Единственность решения

При $n = 1$ для любого плана (x_0, x_1) задачи (1.1) имеем

$$V(x_0, x_1) = x_1 - x_0 \le x_1 + x_0 \le A.$$

Равенство $V(x_0, x_1) = A$ достигается только при $x_0^* = 0$, $x_1^* = A$. Таким образом, $(x_0^*, x_1^*) = (0, A)$ — единственный оптимальный план и $V(x_0^*, x_1^*) = A$.

Тот же результат следует и из теоремы, если учесть, что в данном случае

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \qquad L_2'(x) = x - 2.$$

Единственный корень полинома $L_2'(x)$ равен 2. Согласно теореме $cx_1^* = 2$, где $c = 2A^{-1}$, так что $x_1^* = A$. Правая часть формулы (1.2) равна A. В дальнейшем считаем, что $n \ge 2$.

Очевидно, что решение задачи (1.1) существует. Более того, если $(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$ — оптимальный план, то в силу (1.3) необходимо $x_0^* = 0$. Задача (1.1) сводится к максимизации функции

$$W(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Введём более общую функцию

$$W_p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^p \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i), \quad p > 0,$$

и рассмотрим при $n \ge 2$ экстремальную задачу

$$W_p(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \max,$$

$$0 \le x_1 \le \ldots \le x_n, \tag{3.1}$$
$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \le A.$$

Отметим, что

$$V(0, x_1, \ldots , x_n) = W(x_1, \ldots , x_n) = W_1(x_1, \ldots , x_n), \tag{3.2}$$

$$W_p(\lambda x_1, \ldots , \lambda x_n) = \lambda^{np+n(n-1)/2} W_p(x_1, \ldots , x_n). \tag{3.3}$$

Мы установим, что задача (3.1) имеет единственное решение и что компонентами оптимального плана $(x_1^*, \ldots , x_n^*)$ являются корни полинома $L_n(cx, 2p-1)$, где $c = [n + (2p-1)]\, A^{-1}$.

Очевидно, что решение задачи (3.1) существует. Кроме того, если $(x_1^*, x_2^*, \ldots , x_n^*)$ — оптимальный план, то необходимо $0 < x_1^* < < \ldots < x_n^*$ и

$$\frac{x_1^* + \ldots + x_n^*}{n} = A. \tag{3.4}$$

Последнее равенство связано со свойством (3.3) целевой функции.

Покажем, что решение задачи (3.1) единственно. Для этого введём в $\mathbb{R}^n$ открытое выпуклое множество

$$U = \Big\{\xi = (x_1, \ldots , x_n) \,\Big|\, 0 < x_1 < \ldots < x_n\Big\}.$$

Лемма 3.1. *Функция $F_p(\xi) = -\ln W_p(\xi)$ строго выпукла на U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$F_p(\xi) = -p \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \ln(x_j - x_i) =: pS_0(\xi) + S_1(\xi).$$

Возьмём две различные точки $\xi_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots , x_n^{(0)}\right)$ и $\xi_1 = = \left(x_1^{(1)}, \ldots , x_n^{(1)}\right)$ из U. Нетрудно проверить, что

$$\langle S_0'(\xi_1) - S_0'(\xi_0)\, ,\, \xi_1 - \xi_0 \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_k^{(1)} - x_k^{(0)}\right)^2}{x_k^{(0)} x_k^{(1)}} > 0.$$

Это гарантирует строгую выпуклость $S_0(\xi)$ на U.

Далее, положим $h_k = x_k^{(1)} - x_k^{(0)}$ и запишем

$$\langle S_1'(\xi_1) - S_1'(\xi_0)\,,\, \xi_1 - \xi_0 \rangle =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} h_k \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{x_k^{(1)} - x_i^{(1)}} - \frac{1}{x_k^{(0)} - x_i^{(0)}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{h_k(h_k - h_i)}{\left(x_k^{(1)} - x_i^{(1)}\right)\left(x_k^{(0)} - x_i^{(0)}\right)} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \right) \frac{h_k(h_k - h_i)}{\left(x_k^{(1)} - x_i^{(1)}\right)\left(x_k^{(0)} - x_i^{(0)}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{h_k(h_k - h_i) + h_i(h_i - h_k)}{\left(x_k^{(1)} - x_i^{(1)}\right)\left(x_k^{(0)} - x_i^{(0)}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(h_i - h_k)^2}{\left(x_i^{(1)} - x_k^{(1)}\right)\left(x_i^{(0)} - x_k^{(0)}\right)} \geq 0.$$

Это гарантирует выпуклость $S_1(\xi)$ на U.

Теперь очевидно, что при любом $p > 0$ функция $F_p(\xi) = pS_0(\xi) + S_1(\xi)$ строго выпукла на U. Лемма доказана.

Вернёмся к задаче (3.1) и допустим, что у неё имеются два различных решения ξ_0 и ξ_1. Как отмечалось, и ξ_0, и ξ_1 принадлежат множеству U. При этом

$$W_p(\xi_0) = W_p(\xi_1) =: W_p^* > 0.$$

Введём вектор $\xi_* = (\xi_0 + \xi_1)/2$, который также принадлежит U в силу выпуклости этого множества. Более того, ξ_* является планом задачи (3.1). Согласно лемме 3.1 имеем

$$-\ln W_p(\xi_*) = F_p(\xi_*) = F_p\left(\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[F_p(\xi_0) + F_p(\xi_1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln W_p(\xi_0) + \ln W_p(\xi_1)\right] = -\ln W_p^*.$$

Отсюда следует, что $W_p(\xi_*) > W_p^*$. Но это противоречит определению W_p^*.

Единственность решения задачи (3.1) установлена.

4. Необходимое условие оптимальности

Задача (3.1) — это конечномерная экстремальная задача с линейными ограничениями, имеющая единственное решение $\xi_* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Составим полином

$$\omega(x) = (x - x_1^*)(x - x_2^*) \cdots (x - x_n^*).$$

Лемма 4.1. *Полином $\omega(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$xy'' + (2p - cx)y' + cny = 0, \tag{4.1}$$

где c – некоторая положительная константа.

Доказательство. Обозначим

$$G(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - A.$$

На оптимальном плане ξ_* лишь ограничение $G(\xi) \le 0$ задачи (3.1) является активным. По теореме Куна—Таккера [4, с. 88] найдется число $\lambda \ge 0$, такое, что

$$W_p'(\xi_*) = \lambda G'(\xi_*). \tag{4.2}$$

Вычислим градиент целевой функции. Имеем

$$W_p(\xi) = x_k^p (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k) \cdots (x_n - x_k)\eta_k(\xi),$$

где выражение $\eta_k(\xi)$ не зависит от переменной x_k. Дифференцируя по x_k, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} W_p(\xi) = W_p(\xi) \left[\frac{p}{x_k} + \frac{1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_n} \right]. \tag{4.3}$$

Покажем, что

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k^* - x_i^*} = \frac{\omega''(x_k^*)}{2\omega'(x_k^*)}. \tag{4.4}$$

Введем полином

$$g_k(x) = (x - x_1^*)\cdots(x - x_{k-1}^*)(x_{k+1}^* - x)\cdots(x_n^* - x).$$

Очевидно, что $g_k(x) > 0$ в окрестности точки x_k^*. Поскольку

$$\omega(x) = (-1)^{n-k}(x - x_k^*)g_k(x),$$

то

$$\omega'(x) = (-1)^{n-k}[g_k(x) + (x - x_k^*)g_k'(x)],$$

$$\omega''(x) = (-1)^{n-k}[2g_k'(x) + (x - x_k^*)g_k''(x)].$$

Значит,

$$\omega'(x_k^*) = (-1)^{n-k}g_k(x_k^*), \qquad \omega''(x_k^*) = 2(-1)^{n-k}g_k'(x_k^*)$$

и

$$\frac{\omega''(x_k^*)}{2\omega'(x_k^*)} = \frac{g_k'(x_k^*)}{g_k(x_k^*)} = [\ln g_k(x)]'_{x=x_k^*} =$$

$$= [\ln(x-x_1^*)+\ldots+\ln(x-x_{k-1}^*)+\ln(x_{k+1}^*-x)+\ldots+\ln(x_n^*-x)]'_{x=x_k^*} =$$

$$= \frac{1}{x_k^* - x_1^*} + \ldots + \frac{1}{x_k^* - x_{k-1}^*} + \frac{1}{x_k^* - x_{k+1}^*} + \ldots + \frac{1}{x_k^* - x_n^*}.$$

Формула (4.4) установлена.

Положим $W_p^* = W_p(\xi_*)$. На основании (4.3) и (4.4) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} W_p(\xi_*) = W_p^* \left[\frac{p}{x_k^*} + \frac{\omega''(x_k^*)}{2\omega'(x_k^*)}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Перепишем условие Куна—Таккера (4.2) в покомпонентном виде:

$$W_p^* \left[\frac{p}{x_k^*} + \frac{\omega''(x_k^*)}{2\omega'(x_k^*)}\right] = \frac{\lambda}{n}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Обозначим $c = 2\lambda\left(nW_p^*\right)^{-1}$. Согласно (4.5)

$$x_k^*\omega''(x_k^*) + (2p - cx_k^*)\omega'(x_k^*) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Как отмечалось, число λ неотрицательно. На самом деле, оно положительно. Действительно, в противном случае $c = 0$, и полином $x\omega''(x) + 2p\omega'(x)$ степени $n-1$ имеет n корней $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Но это невозможно, поскольку старший коэффициент данного полинома, равный $n(n-1+2p)$, отличен от нуля. Итак, $\lambda > 0$ и, следовательно, $c > 0$.

Введем полином $f(x) = x\omega''(x) + (2p - cx)\omega'(x)$. Он имеет степень n и согласно (4.6) обращается в ноль в точках $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Поскольку его старший коэффициент равен $(-cn)$, то

$$f(x) = -cn(x - x_1^*)(x - x_2^*)\cdots(x - x_n^*) = -cn\omega(x).$$

Учитывая определение $f(x)$, приходим к тождеству

$$x\omega''(x) + (2p - cx)\omega'(x) + cn\omega(x) = 0. \tag{4.7}$$

Последнее и означает, что полином $\omega(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.1). Лемма доказана.

5. Решение задач (3.1) и (1.1)

Напомним, что полином Лагерра $L_n(x, \alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6). Положим $\alpha_p = 2p - 1$. Для полинома $g(x) = L_n(cx, \alpha_p)$ имеем

$$\begin{gathered} xg''(x) + (2p - cx)g'(x) + cng(x) = \\ = c\left[cxL_n''(cx, \alpha_p) + (\alpha_p + 1 - cx)L_n'(cx, \alpha_p) + \right. \\ \left. + nL_n(cx, \alpha_p)\right] = 0, \end{gathered} \tag{5.1}$$

то есть полином $g(x)$ так же, как и $\omega(x)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.1).

Умножим (5.1) на $\omega(x)$, (4.7) — на $g(x)$ и вычтем из первого тождества второе. Получим

$$x(g''\omega - g\omega'') + (2p - cx)(g'\omega - g\omega') = 0. \tag{5.2}$$

Для функции $h(x) = x^{2p}e^{-cx}[g'(x)\omega(x) - g(x)\omega'(x)]$, непрерывной на $[0, +\infty)$, при $x > 0$ в силу (5.2) справедливо тождество $h'(x) \equiv 0$, так что $h(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[0, +\infty)$. Поскольку $h(0) = 0$, то $h(x) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$. Отсюда следует, что при положительных x

$$g'(x)\omega(x) - g(x)\omega'(x) \equiv 0.$$

Теперь отметим, что при $x > x_n^*$ выполняется равенство

$$\left[\frac{g(x)}{\omega(x)}\right]' = \frac{g'(x)\omega(x) - g(x)\omega'(x)}{\omega^2(x)} = 0.$$

Значит,

$$g(x) = \mathrm{const} \cdot \omega(x).$$

Это равенство установлено при $x > x_n^*$, но поскольку в обеих его частях стоят алгебраические полиномы, то оно верно при всех вещественных x. Учитывая, что старший коэффициент полинома $g(x) = L_n(cx, \alpha_p)$ равен $(-1)^n c^n / n!$, получаем

$$L_n(cx, \alpha_p) = \frac{(-1)^n}{n!} c^n \omega(x).$$

Данное тождество позволяет сделать принципиальный вывод о том, что компоненты оптимального плана $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ задачи (3.1) являются корнями полинома $L_n(cx, \alpha_p)$. Точнее,

$$cx_i^* = u_{i,n}^{(\alpha_p)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.3}$$

Найдём константу c. Согласно (5.3) и (3.4)

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,n}^{(\alpha_p)} = cnA. \tag{5.4}$$

По теореме Виета из явного представления (2.2) полинома Лагерра следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,n}^{(\alpha_p)} = n(n + \alpha_p).$$

Подставляя это в (5.4), получаем $n(n + \alpha_p) = cnA$, так что

$$c = (n + \alpha_p)A^{-1}.$$

Вычислим максимальное значение целевой функции в задаче (3.1). Согласно (5.3), (3.3), (2.13) и (2.15) имеем

$$W_p\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = W_p\left(c^{-1}u_{1,n}^{(\alpha_p)}, c^{-1}u_{2,n}^{(\alpha_p)}, \ldots, c^{-1}u_{n,n}^{(\alpha_p)}\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{n+\alpha_p}\right)^{n(n+2p-1)/2} \prod_{i=1}^{n}\left(u_{i,n}^{(\alpha_p)}\right)^p V\left(u_{1,n}^{(\alpha_p)}, u_{2,n}^{(\alpha_p)}, \ldots, u_{n,n}^{(\alpha_p)}\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{n+\alpha_p}\right)^{n(n+\alpha_p)/2} \prod_{k=1}^{n}\left(k+\alpha_p\right)^p \left[\prod_{k=1}^{n} k^k\left(k+\alpha_p\right)^{k-1}\right]^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{A}{n+\alpha_p}\right)^{n(n+\alpha_p)/2} \left[\prod_{k=1}^{n} k^k\left(k+\alpha_p\right)^{k+\alpha_p}\right]^{1/2}. \qquad (5.5)$$

Задача (3.1) решена полностью.

При $p = 1$ задача (3.1) переходит в задачу (1.1) с $x_0 = 0$. Учитывая равенство $\alpha_1 = 1$, на основании (3.2) заключаем, что компонентами оптимального плана $(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ задачи (1.1) будут корни полинома $xL_n(cx, 1)$, или, в соответствии с (2.5), полинома $xL'_{n+1}(cx)$, где $c = (n+1)\,A^{-1}$. Максимальное значение целевой функции задачи (1.1) вычисляется согласно формулам (3.2) и (5.5):

$$V(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*) = W_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) =$$

$$= \left[\left(\frac{A}{n+1}\right)^{n(n+1)} \prod_{k=1}^{n} k^k (k+1)^{k+1}\right]^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{A^n}{(n+1)^{n-1}}\right)^{(n+1)/2} \prod_{k=1}^{n} k^k.$$

Указатель литературы

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е. М.: Наука, 1979. 416 с.

3. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.

4. *Гаврурин М. К., Малозёмов В. Н.* Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.