УДК 513.88

Р е й н о в О. И. **О линейных операторах с p-ядерными сопряженными**

Если $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и T — линейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, с p-ядерным сопряженным, то, при условии, что одно из пространств X^* или Y^{***} обладает свойством аппроксимации, сам оператор T принадлежит идеалу, дуальному к идеалу N_p всех p-ядерных операторов. С другой стороны, существует банахово пространство W, для которого W^{**} имеет базис, и такое, что для каждого $p \in [1, +\infty], p \neq 2$, найдется оператор $T : W^{**} \to W$ с p-ядерным сопряженным, который не принадлежит, как оператор из W^{**} в W, идеалу, дуальному к N_p. Библиогр. 3 назв.

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ С p-ЯДЕРНЫМИ СОПРЯЖЕННЫМИ

О.И.Рейнов[†]

Если $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и T — линейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, с p-ядерным сопряженным, то, при условии, что одно из пространств X^* или Y^{***} обладает свойством аппроксимации, сам оператор T принадлежит идеалу, дуальному к идеалу N_p всех p-ядерных операторов. С другой стороны, существует банахово пространство W, для которого W^{**} имеет базис, и такое, что для каждого $p \in [1, +\infty], p \neq 2$, найдется оператор $T : W^{**} \to W$ с p-ядерным сопряженным, который не принадлежит, как оператор из W^{**} в W, идеалу, дуальному к N_p.

В ряде предыдущих заметок автор рассматривал вопросы, связанные с существованием или не существованием в конкретных банаховых пространствах не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными. Так, например, в недавней работе [3] такие "плохие" операторы были построены для всех $p \in [1, 2)$ в пространствах с базисами Шаудера. Здесь мы хотим разобраться с аналогичным случаем для операторов, *первые сопряженные к которым p-ядерны*. Еще в работе [2, §4] без доказательства были приведены соответствующие утверждения, в которых рассматриваемые пространства, однако, не обладали базисами, — в лучшем случае лишь одно из пространств, в которых действовали операторы, обладало свойством аппроксимации, но даже не ограниченной. В данной заметке, доказывая наконец, частично, те утверждения из [2], мы показываем, что подобные примеры можно найти в пространствах с базисами (и даже более хороших). Одновременно, приводятся достаточные условия для положительного ответа на соответствующий вопрос, связанный с p-ядерностью сопряженного оператора (причем, эти условия оказываются близкими к необходимым).

[†] Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36) и ФЦП "Интеграция", рег. номер 326.53.

[‡] Ключевые слова и фразы: p-ядерные операторы, дуальный идеал, базисы, свойства аппроксимации, тензорные произведения.

Все рассматриваемые нами пространства X, Y, $Z, \ldots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \ldots$, $x' \in X^*$, $y'' \in Y^{**}, \ldots$. Для $p \in [1, +\infty]$ сопряженный показатель p' определяется из соотношения $1/p + 1/p' = 1$. Через $\mathrm{L}\,(X, Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой. Каждое банахово пространство X мы будем также рассматривать как подпространство в его втором сопряженным, не вводя обычно никаких дополнительных обозначений для канонического вложения $X \to X^{**}$. Однако, если возникнет необходимость, через π_X мы обозначим это каноническое вложение.

Напомним, что *банахово пространство обладает свойством аппроксимации Гротендика* (свойством AP), если тождественный оператор на нем аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными операторами.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор T, действующий из X в Y, называется N^p*-оператором,* если его можно представить в следующем виде:

$$(1) \qquad Tx = \sum_{k=1}^{\infty} < x, x'_k, > y_k \qquad \text{для } x \in X,$$

где последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ таковы, что конечна величина

$$(2) \qquad \alpha := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p \right)^{1/p} \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} | < x'_k, x > |^{p'} \right)^{1/p'} : \ x \in X, \ \|x\| \le 1 \right\}$$

(напомним, что через p' мы обозначаем сопряженный к p показатель; в случае, когда один из показателей p, p' бесконечен, правую часть соотношения (2) надо понимать надлежащим образом). Множество всех N^p-операторов из X в Y обозначается нами через $N^p\,(X, Y)$, а точная нижняя грань $\inf \alpha$, где инфимум берется по всем представлениям вида (1) оператора T, — через $\nu^p\,(T)$. Для любого $p \ge 1$ класс N^p всех N^p-операторов является банаховым операторным идеалом [1]; при фиксированных пространствах X, Y $\;N^p\,(X, Y)$, — банахово пространство с нормой ν^p. Отметим, что для показателей $p, q \in [1, +\infty], p < q$, имеет место включение $N^p \subset N^q$ с соответствующим неравенством для норм.

Ассоциированное с пространством $N^p(X,Y)$ тензорное произведение мы обозначим чрез $X^*\widehat{\otimes}^p Y$: это есть пополнение алгебраического тензорного произведения $X^*\otimes Y$ по норме ν_0^p, которая для $z\in X^*\otimes Y$ определяется как точная нижняя грань по всевозможным представлениям $z=\sum_{k=1}^N x'_k\otimes y_k$ в $X^*\otimes Y$ чисел

$$\left(\sum_{k=1}^N \|y_k\|^p\right)^{1/p} \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^N |<x'_k,x>|^{p'}\right)^{1/p'} : \ x\in X,\ \|x\|\le 1\right\}$$

Нетрудно понять, что пространство $N^p(X,Y)$ есть образ $X^*\widehat{\otimes}^p Y$ при естественном отображении $X^*\widehat{\otimes}^p Y\to L(X,Y)$. Для $z\in X^*\widehat{\otimes}^p Y$ индуцированный этим тензором оператор мы будем обозначать через $\widetilde{z}$.

Ниже нам понадобится следующая переформулировка следствия 1.2 из [2]:

$(*)$ Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E такое, что для каждого $r\ne 2$ каноническое отображение $E^*\widehat{\otimes}^r E\to N^r(E,E)$ не является взаимно однозначным.

Пространство, сопряженное к $X^*\widehat{\otimes}^p Y$ естественным образом изометрически отождествляется с пространством $\Pi_{p'}^d(Y,X^{**})$, где через $\Pi_{p'}^d$ обозначается идеал, дуальный к идеалу абсолютно p'-суммирующих операторов с соответствующей нормой (см. [1]): если $z\in X^*\widehat{\otimes}^p Y$ и $U\in\Pi_{p'}^d(Y,X^{**})$, то двойственность задается при помощи следа $\operatorname{trace} U\circ z$. Отметим, что в случае когда одно из пространств X^* или Y обладает свойством аппроксимации, каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}^p Y\to L(X,Y)$ взаимно однозначно и, таким образом, мы можем написать, что в этом случае $X^*\widehat{\otimes}^p Y=N^p(X,Y)$.

Утверждение $(*)$ может быть переформулировано следующим образом:

$(**)$ для каждого $r\ne 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство E, тензорный элемент $z\in E^*\widehat{\otimes}^r E$ и оператор $U\in\Pi_{r'}^d(Y,X)$ такие, что $\operatorname{trace} U\circ z=1$ и ассоциированный с z оператор $\widetilde{z}=0$.

Теорема 1. *Пусть $p\in[1,+\infty]$. Если $X^*\in AP$ или $Y^{***}\in AP$ и $T\in L(X,Y)$. Если $T\in N^p(X,Y^{**})$, то $T\in N^p(X,Y)$. Иначе говоря, в этих условиях, из p-ядерности сопряженного оператора T^* вытекает принадлежность оператора T пространству $N^p(X,Y)$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой оператор $T \in L(X,Y)$, что $T \notin N^p(X,Y)$, но $\pi_Y\, T \in N^p(X,Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством AP, то $N^p(X,Y^{**}) = X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y\, T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}$; при этом, по выбору T, $t \notin X^*\widehat{\otimes}^p Y$ (пространство $X^*\widehat{\otimes}^p Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in \Pi^d_{p'}(Y^{**},X^{**}) = \left(X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}\right)^*$, что $\operatorname{trace} U \circ t = \operatorname{trace}\,(t^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\operatorname{trace} U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^*\widehat{\otimes}^p Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U\pi_Y = 0$ и $\pi_Y^*\, U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$< U\pi_Y\, y, x' >=< y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' >= \operatorname{trace}\ U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U\pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in AP$, то $X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**} = N^p(X,Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству $\operatorname{trace}\ U \circ t = 1$.

Пусть теперь $Y^{***} \in AP$. В этом случае оператор

$$V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^* :\ Y^{***} \to Y^* \to X^* \to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент t_0 из проективного тензорного призведения $Y^{****}\widehat{\otimes} Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x'_n \otimes y''_n$ для t как элемента пространства $X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}$. Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$\begin{aligned} V y''' = U_*\ (T^* \pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((\pi_Y T)^*\, \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') = \\ = U_*\ \Big((\sum y''_n \otimes x'_n)\, \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y'''\Big) = U_*\ \Big(\sum < y''_n, \pi_Y^*\, y''' >\ x'_n\Big) = \\ = \sum < \pi_Y^{**} y''_n, y''' >\ U_* x'_n. \end{aligned}$$

Итак, оператор V (или элемент t_0) имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes} Y^{***}$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y''_n) \otimes U_*(x'_n).$$

Следовательно,

$$\text{trace}\ t_0 = \text{trace}\ V = \sum < \pi_Y^{**}(y''_n), U_*(x'_n) >= \sum < y''_n, \pi_Y^*\, U_* x'_n >= \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$V y''' = U_* \left(\pi_Y T\right)^* y''' = U_* \circ t^*(y''') = U_* \left(\sum < y''_n, y''' >\ x'_n\right) = \sum < y''_n, y''' >\ U_* x'_n,$$

откуда $V = \sum y''_n \otimes U_*(x'_n)$. Поэтому

$$\text{trace}\ t_0 = \text{trace}\ V = \sum < y''_n, U_* x'_n >= \sum < U y''_n, x'_n >= \text{trace}\ U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Теорема 2. *Для каждого $r \in [1, \infty], r \neq 2$ существуют такие сепарабельное пространство W и оператор $T \in L(W^{**}, W)$, что W^{**} имеет базис, $T \in N^r(W^{**}, W^{**})$, но $T \notin N^r(W^{**}, W)$.*

Доказательство. Зафиксируем $r \in [1, \infty], r \neq 2$ и возьмем тройку (E, z, U) из утверждения $(**)$. Пусть W —такое сепарабельное пространство, что W^{**} имеет базис и существует такой линейны гомоморфизм φ из W^{**} на E с ядром $W \subset W^{**}$, что подпространство $\varphi^*(E^*)$ дополняемо в W^{***} (см. [4]). Поднимем тензорный элемент z, лежащий в $E^* \widehat{\otimes}^r E$ до элемента[1] $\alpha \in E^* \widehat{\otimes}^r W^{**}$, так что $\varphi \circ \alpha = z$, и положим $V := U \circ \varphi$. Так как trace $V \circ \alpha =$ trace $U \circ z = 1$ и W^{**} обладает свойством аппроксимации, то $\widetilde{\alpha} = \alpha \neq 0$. Кроме того, оператор $\widetilde{\varphi \circ \alpha} : E \to W^{**} \to W$, ассоциированный с тензором $\varphi \circ \alpha$, равен нулю. Поэтому $\alpha(E) \subset \operatorname{Ker} \varphi = W \subset W^{**}$, то есть оператор α действует из E в W.

Поскольку подпространство $\varphi^*(E^*)$ дополняемо в W^{***}, то $\alpha \circ \varphi \in W^{***} \widehat{\otimes}^r W = N^r(W^{**}, W)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in E^* \widehat{\otimes}^r W = N^r(E, W)$.

Если $\alpha \in N^r(E, W)$, то для произвольного его (ненулевого!) N^p-представления вида $\alpha = \sum e'_n \otimes w_n$ суперпозиция $\varphi \circ \alpha$ есть нулевой тензорный элемент в $E^* \widehat{\otimes} E$; но эта

[1] Если $z = \sum_{k=1}^N e'_k \otimes e_k$ — какое–либо представление z в $E^* \widehat{\otimes}^r E$, то мы выберем $\{w''_n\} \subset W^{**}$ так, чтобы последняя последовательность была абсолютно r-суммируемой и $\varphi(w''_n) = e_n$ для каждого n.

суперпозиция представляет собой элемент z, который по самому своему выбору не может быть нулевым. Таким образом, $\alpha \notin N^r(E,W)$ и, тем самым, $\alpha \circ \varphi \notin W^{***}\widehat{\otimes}^r W = N^r(W^{**},W)$. С другой стороны, конечно, $\alpha \circ \varphi \in W^{***}\widehat{\otimes}^r W^{**} = N^r(W^{**},W^{**})$. ■

Таким образом, аппроксимационные условия, наложенные на X и Y в теореме 1 существенны.

Ясно, что из теоремы 2 вытекает существование *одного пространства* W, для которого при всех указанных значениях параметра r верно заключение теоремы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир (1982), 536 с.
2. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
3. Рейнов О.И., *Аппроксимационные свойства* AP_s *и p-ядерные операторы (случай* $0 < s \le 1$*)*, (в печати).

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл., 2
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
кафедра математического анализа.
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru