УДК 519.677

ВЕЙВЛЕТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ[1]

В. А. Кирушев, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный

1. Пусть m, n, r — натуральные числа и $N = mn$. Положим

$$u(k) = \begin{cases} n^2 & \text{при} \quad k = 0, \\ \left(\sin \dfrac{\pi k}{m} \Big/ \sin \dfrac{\pi k}{N}\right)^2 & \text{при} \quad k = 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Функция целочисленного аргумента

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^r(k) \omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, называется дискретным периодическим B-сплайном порядка r [1]. Дискретный периодический сплайн порядка r определяется как линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn). \tag{2}$$

Множество дискретных периодических сплайнов порядка r обозначим через $\mathcal{S}_r^m$. Очевидно, что $\mathcal{S}_r^1$ есть пространство комплексных констант, а $\mathcal{S}_r^N = \mathbb{C}_N$, где $\mathbb{C}_N$ — пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей (сигналов). Индекс m у $\mathcal{S}_r^m$ обозначает размерность этого линейного пространства.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96–01–00269.

В данной заметке в пространстве $\mathcal{S}_r^m$ построен ортогональный базис. С его помощью при $m = 2^t$ получено вейвлетное разложение пространства $\mathcal{S}_r^m$. Выведены рекуррентные формулы для перехода от разложения по ортогональному базису к вейвлетному разложению и рекуррентные формулы для обратного перехода.

2. Положим

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn)\omega_m^{kp}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm+k)\omega_N^{j(lm+k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно (1)

$$\begin{aligned}\mu_k(j) &= \frac{1}{mN}\sum_{p=0}^{m-1}\left(\sum_{s=0}^{N-1} u^r(s)\omega_N^{(j-pn)s}\right)\omega_m^{kp} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} u^r(s)\omega_N^{js}\left\{\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}\omega_m^{p(k-s)}\right\}.\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}\omega_m^{jp} = \delta_m(j), \tag{4}$$

где $\delta_m(j)$ — единичный m-периодичный импульс, равный единице при $j = 0$ и нулю при $j = 1, \ldots, m-1$. Получим

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\delta_m(k-s)u^r(s)\omega_N^{js} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm+k)\omega_N^{j(lm+k)}.$$

Лемма доказана.

Согласно определению $u(k)$ имеем

$$u(m) = u(2m) = \cdots = u\big((n-1)m\big) = 0.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\mu_0(j) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm)\omega_n^{jl} \equiv \frac{1}{N}n^{2r}.$$

Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$$

и норму $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Теорема 1. *Сигналы* $\{\mu_k(j)\}_{k=0}^{m-1}$ *образуют ортогональный базис в пространстве* $\mathcal{S}_r^m$.

Доказательство. Очевидно, что все μ_k принадлежат $\mathcal{S}_r^m$. Проверим их ортогональность. При $k \neq s$ имеем в силу (3) и (4)

$$\langle \mu_k, \mu_s\rangle = \frac{1}{N}\sum_{p,q=0}^{n-1} u^r(pm+k)u^r(qm+s)\delta_N(pm+k-qm-s).$$

Поскольку $k \neq s$ и $k,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, то последовательности индексов $\{pm+k\}$ и $\{qm+s\}$ не имеют общих точек и не выходят из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Значит, правая часть в последней формуле равна нулю. Ортогональность системы $\{\mu_k\}_{k=0}^{m-1}$ установлена.

Остается учесть, что количество функций μ_k совпадает с размерностью пространства $\mathcal{S}_r^m$. Теорема доказана.

Отметим, что

$$\|\mu_k\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} u^{2r}(lm+k).$$

Лемма 2. *При* $k = 1,\ \ldots,\ m-1$ *справедливо равенство*

$$\mu_{m-k}(j) = \overline{\mu_k(j)}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Доказательство. В силу определения $u(k)$ имеем $u(N-k) = u(k)$ при $k = 1, \ldots, N-1$. Отсюда следует, что B-сплайн $Q_r(j)$ принимает только вещественные значения.

Далее

$$\overline{\mu_{m-k}(j)} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn)\omega_m^{-(m-k)p} = \mu_k(j).$$

Это равенство равносильно (5). Лемма доказана.

Сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ называется четным, если $x(N-j) = \overline{x(j)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

При фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ продолжим $\mu_k(j)$ по индексу k периодически с периодом m. Согласно лемме 2 последовательность $\{\mu_k(j)\}$ будет четной по k.

Лемма 3. *При всех целых k, l справедливо равенство*

$$\mu_k(j - ln) = \omega_m^{-kl}\mu_k(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Действительно,

$$\mu_k(j - ln) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r\big(j - (l+p)n\big)\omega_m^{k(l+p)-kl} = \omega_m^{-kl}\mu_k(j).$$

Лемма 4. *Пусть $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ и s — натуральное число. Если произведение ks не делится на m, то*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big[\mu_k(j)\big]^s = 0.$$

Доказательство основано на том, что согласно (6) и (4)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \big[\mu_k(j)\big]^s &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \big[\mu_k(q + ln)\big]^s \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{lks} \sum_{q=0}^{n-1} \big[\mu_k(q)\big]^s = m\delta_m(ks) \sum_{q=0}^{n-1} \big[\mu_k(q)\big]^s. \end{aligned}$$

В частности, при $k = 1, \ldots, m-1$, $k \neq m/2$, справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl[\mu_k(j)\bigr]^2 = 0.$$

Отметим, что при четном m

$$\mu_{m/2}(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p Q_r(j - pn).$$

3. В дальнейшем считаем, что $m = 2^t$. Положим $m_\nu = m/2^\nu$, $n_\nu = 2^\nu n$. В этом случае $m_\nu n_\nu = N$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, t$.

Обозначим через μ_k^ν ортогональные сплайны, соответствующие параметрам m_ν, n_ν. В частности, $\mu_k^0 = \mu_k$. Следующая лемма играет фундаментальную роль в вопросах декомпозиции пространства $\mathcal{S}_r^m$.

Лемма 5. *При $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$ справедлива рекуррентная формула*

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c^\nu(k)\mu_k^\nu(j) + c^\nu(k + m_{\nu+1})\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j), \tag{7}$$

где $c^\nu(k) = (2\cos \pi k/m_\nu)^{2r}$.

Доказательство. При $k = 0$ формула (7) принимает вид $\mu_0^{\nu+1}(j) = 2^{2r}\mu_0^\nu(j)$. Она верна, поскольку $\mu_0^\nu(j) \equiv \frac{1}{N} n_\nu^{2r}$.

Пусть $k = 1, \ldots, m_{\nu+1} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_k^{\nu+1}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n_{\nu+1}-1} u^r(l m_{\nu+1} + k)\omega_N^{j(l m_{\nu+1}+k)} \\ &= \frac{1}{N}\left(\sin\frac{\pi k}{m_{\nu+1}}\right)^{2r} \sum_{l=0}^{2n_\nu - 1}\left(\sin\frac{\pi(l m_{\nu+1} + k)}{N}\right)^{-2r} \omega_N^{j(l m_{\nu+1}+k)}.\end{aligned}$$

Последнюю сумму разобьем на две суммы — по четным индексам $l = 2s$ и по нечетным $l = 2s+1$, $s = 0, 1, \ldots, n_\nu - 1$. Получим

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = \frac{1}{N}\left(\sin\frac{2\pi k}{m_\nu}\right)^{2r} \sum_{s=0}^{n_\nu-1}\left(\sin\frac{\pi(s m_\nu + k)}{N}\right)^{-2r} \omega_N^{j(s m_\nu + k)}$$

$$+\frac{1}{N}\left(\sin\frac{2\pi k}{m_\nu}\right)^{2r} \sum_{s=0}^{n_\nu-1}\left(\sin\frac{\pi(s m_\nu + k + m_{\nu+1})}{N}\right)^{-2r} \omega_N^{j(s m_\nu + k + m_{\nu+1})}.$$

Так как $\sin\dfrac{2\pi k}{m_\nu} = 2\cos\dfrac{\pi k}{m_\nu}\sin\dfrac{\pi k}{m_\nu}$ и

$$\sin\frac{2\pi k}{m_\nu} = -\sin\frac{2\pi(k+m_{\nu+1})}{m_\nu} = -2\cos\frac{\pi(k+m_{\nu+1})}{m_\nu}\sin\frac{\pi(k+m_{\nu+1})}{m_\nu},$$

то

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c^\nu(k)\mu_k^\nu(j) + c^\nu(k+m_{\nu+1})\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j).$$

Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, следует, что $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}} \subset \mathcal{S}_r^{m_\nu}$ при $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$.

4. Введем дискретные сплайны

$$w_k^{\nu+1}(j) = d^\nu(k)\mu_k^\nu(j) + d^\nu(k+m_{\nu+1})\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j), \tag{8}$$

где $d^\nu(k) = \omega_{m_\nu}^k c^\nu(k+m_{\nu+1})\,\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2$. Очевидно, что $w_k^{\nu+1} \in \mathcal{S}_r^{m_\nu}$.

Лемма 6. *Сплайны $\{w_k^{\nu+1}\}_{k=0}^{m_{\nu+1}-1}$ образуют ортогональную систему. При этом $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_s^{\nu+1}\rangle = 0$ при всех k, $s = 0, 1, \ldots, m_{\nu+1}-1$ и*

$$\|w_k^{\nu+1}\| = \|\mu_k^\nu\|\,\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|\,\|\mu_k^{\nu+1}\|. \tag{9}$$

Доказательство. Равенства $\langle w_k^{\nu+1}, w_s^{\nu+1}\rangle = 0$ и $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_s^{\nu+1}\rangle = 0$ при $k \neq s$, k, $s = 0, 1, \ldots, m_{\nu+1}-1$, следуют из (7), (8) и ортогональности системы $\{\mu_k^\nu\}_{k=0}^{m_\nu-1}$. Остается проверить, что $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1}\rangle = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1}\rangle &= d^\nu(k)c^\nu(k)\|\mu_k^\nu\|^2 + d^\nu(k+m_{\nu+1})c^\nu(k+m_{\nu+1})\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 \\ &= c^\nu(k)c^\nu(k+m_{\nu+1})\|\mu_k^\nu\|^2\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2(\omega_{m_\nu}^k + \omega_{m_\nu}^{k+m_{\nu+1}}) = 0.\end{aligned}$$

Вычисление $\|w_k^{\nu+1}\|^2$ проводится непосредственно:

$$\begin{aligned}\|w_k^{\nu+1}\|^2 &= \big|d^\nu(k)\big|^2\|\mu_k^\nu\|^2 + \big|d^\nu(k+m_{\nu+1})\big|^2\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 \\ &= \|\mu_k^\nu\|^2\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2\Big(\big[c^\nu(k+m_{\nu+1})\big]^2\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 + \big[c^\nu(k)\big]^2\|\mu_k^\nu\|^2\Big) \\ &= \|\mu_k^\nu\|^2\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2\|\mu_k^{\nu+1}\|^2.\end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно (9). Лемма доказана.

Отметим, что $d^\nu(0) = 0$ и $d^\nu(m_\nu - k) = \overline{d^\nu(k)}$. Таким образом, m_ν-периодическая последовательность $\{d^\nu(k)\}$ является четной. Нетрудно также проверить, что при фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ $m_{\nu+1}$-периодическая по k последовательность $\{w_k^{\nu+1}(j)\}$ будет четной. При этом $w_0^{\nu+1}(j) = -2^{2r}\|\mu_0^\nu\|^2 \mu_{m_{\nu+1}}^\nu(j)$.

Нам потребуется еще одно свойство, легко следующее из (6) и (8):

$$w_k^{\nu+1}(j - ln_{\nu+1}) = d^\nu(k)\mu_k^\nu(j - 2ln_\nu) + d^\nu(k + m_{\nu+1})\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j - 2ln_\nu)$$

$$= \omega_{m_{\nu+1}}^{-kl} w_k^{\nu+1}(j). \tag{10}$$

5. Обозначим через $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ линейную оболочку, натянутую на сплайны $w_k^{\nu+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m_{\nu+1} - 1$. Согласно лемме 6 пространство $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$ можно рассматривать как ортогональную сумму подпространств $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}}$ и $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$: $\mathcal{S}_r^{m_\nu} = \mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}} \oplus \mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.

Разложим $\mathcal{S}_r^m = \mathcal{S}_r^{m_0}$ по схеме

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{S}_r^{m_0} & \to & \mathcal{S}_r^{m_1} & \to & \mathcal{S}_r^{m_2} & \to \ldots \to & \mathcal{S}_r^{m_t} & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
& & \mathcal{W}_r^{m_1} & & \mathcal{W}_r^{m_2} & & \ldots & & \mathcal{W}_r^{m_t}
\end{array}$$

Придем к формуле

$$\mathcal{S}_r^m = \mathcal{S}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_{t-1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_r^{m_1}. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{S}_r^{m_t} = \mathcal{S}_r^1$ — одномерное комплексное пространство с образующей функцией $\mu_0^t(j) \equiv N^{2r-1}$.

6. Введем в $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ вейвлетный базис. Для этого положим

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \frac{w_k^{\nu+1}(j)}{\|w_k^{\nu+1}\|}. \tag{12}$$

Очевидно, что $\theta_r^{\nu+1} \in \mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.

Лемма 7. *Сдвиги $\theta_r^{\nu+1}(j - ln_{\nu+1})$, $l = 0, 1, \ldots, m_{\nu+1} - 1$, образуют вещественный ортонормированный базис в $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.*

Доказательство. Согласно (10)

$$\theta_r^{\nu+1}(j-ln_{\nu+1})=\frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}}\sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1}\frac{\omega_{m_{\nu+1}}^{-kl}}{\|w_k^{\nu+1}\|}\,w_k^{\nu+1}(j).$$

Далее

$$\big\langle\theta_r^{\nu+1}(\cdot-ln_{\nu+1}),\theta_r^{\nu+1}(\cdot-sn_{\nu+1})\big\rangle=\frac{1}{m_{\nu+1}}\sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1}\omega_{m_{\nu+1}}^{k(s-l)}=\delta_{m_{\nu+1}}(s-l).$$

Тем самым, установлено, что сплайны $\theta_r^{\nu+1}(j-ln_{\nu+1})$, $l=0,1,\ldots,m_{\nu+1}-1$, принадлежат подпространству $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ и образуют в нем ортонормированный базис.

Покажем, что функция $\theta_r^{\nu+1}(j)$ принимает только вещественные значения. Для этого перепишем формулу (12) с учетом (8) в виде

$$\theta_r^{\nu+1}(j)=\frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\frac{d^\nu(k)}{\|w_k^{\nu+1}\|}\,\mu_k^\nu(j). \tag{13}$$

Обозначим $\sigma^\nu(k)=d^\nu(k)\ /\ \big(\sqrt{m_{\nu+1}}\,\|w_k^{\nu+1}\|\big)$. Отметим, что последовательность $\big\{\sigma^\nu(k)\big\}$ является четной. По определению

$$\mu_k^\nu(j)=\frac{1}{m_\nu}\sum_{p=0}^{m_\nu-1}Q_r^\nu(j-pn_\nu)\omega_{m_\nu}^{kp}, \tag{14}$$

где Q_r^ν — B-сплайн, соответствующий параметрам m_ν, n_ν. Подставив (14) в (13), получим

$$\theta_r^{\nu+1}(j)=\sum_{p=0}^{m_\nu-1}b^\nu(p)Q_r^\nu(j-pn_\nu).$$

Здесь $b^\nu(p)=m_\nu^{-1}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\sigma^\nu(k)\omega_{m_\nu}^{kp}$. Поскольку $\big\{\sigma^\nu(k)\big\}$ — четная последовательность, то коэффициенты $b^\nu(p)$ вещественны. B-сплайн Q_r^ν также принимает только вещественные значения. Значит, и вейвлет $\theta_r^{\nu+1}(j)$ принимает только вещественные значения. Лемма доказана.

Напомним, что $d^\nu(0) = 0$, поэтому формулу (13) можно записать так:

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \sum_{k=1}^{m_\nu - 1} \sigma^\nu(k)\mu_k^\nu(j).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\sum_{j=0}^{N-1} \theta_r^{\nu+1}(j) = 0$.

Объединяя формулу (11) и лемму 7, приходим к основному результату — вейвлетному разложению пространства $\mathbb{S}_r^m$.

Теорема 2. *При $m = 2^t$ любой сплайн $S \in \mathbb{S}_r^m$ допускает представление*

$$S(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{l=0}^{m_\nu - 1} \beta^\nu(l)\theta_r^\nu(j - ln_\nu). \tag{15}$$

7. По-прежнему считаем, что $m = 2^t$. Возьмем дискретный периодический сплайн $S(j)$ вида (2) и положим

$$\xi^0(k) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\omega_m^{-kp}.$$

Получим

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_0 - 1} \xi^0(k)\mu_k^0(j). \tag{16}$$

Вместе с тем, сплайн S допускает представление

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_1 - 1} \xi^1(k)\mu_k^1(j) + \sum_{l=0}^{m_1 - 1} \beta^1(l)\theta_r^1(j - ln_1). \tag{17}$$

Выведем формулы перехода от разложения (16) к разложению (17). Имеем

$$\begin{aligned}\xi^1(s)\|\mu_s^1\|^2 = \langle S, \mu_s^1\rangle &= \Big\langle \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^0(k)\mu_k^0, c^0(s)\mu_s^0 + c^0(s+m_1)\mu_{s+m_1}^0 \Big\rangle \\ &= \xi^0(s)c^0(s)\|\mu_s^0\|^2 + \xi^0(s+m_1)c^0(s+m_1)\|\mu_{s+m_1}^0\|^2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\xi^1(k) = c^0(k)\frac{\|\mu_k^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2}\xi^0(k) + c^0(k+m_1)\frac{\|\mu_{k+m_1}^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2}\xi^0(k+m_1).$$

Далее

$$\beta^1(s) = \big\langle S, \theta_r^1(\cdot - sn_1)\big\rangle = \Big\langle \sum_{k=0}^{m_0-1}\xi^0(k)\mu_k^0, \sum_{k=0}^{m_0-1}\frac{d^0(k)\omega_{m_1}^{-ks}}{\sqrt{m_1}\,\|w_k^1\|}\mu_k^0\Big\rangle$$
$$= \sum_{k=0}^{m_0-1}\frac{\overline{d^0(k)}\|\mu_k^0\|^2}{\sqrt{m_1}\,\|w_k^1\|}\xi^0(k)\omega_{m_1}^{ks}.$$

Положим $\eta^1 = \mathcal{F}_{m_1}(\beta^1)$, где $\mathcal{F}_{m_1}$ — дискретное преобразование Фурье порядка m_1. Компоненты сигнала η^1 вычисляются по формуле

$$\eta^1(l) = \sum_{k=0}^{m_0-1}\frac{\overline{d^0(k)}\|\mu_k^0\|^2}{\sqrt{m_1}\,\|w_k^1\|}\xi^0(k)\sum_{s=0}^{m_1-1}\omega_{m_1}^{s(k-l)}$$
$$= \sqrt{m_1}\sum_{k=0}^{m_0-1}\frac{\overline{d^0(k)}\|\mu_k^0\|^2}{\|w_k^1\|}\xi^0(k)\delta_{m_1}(k-l)$$
$$= \sqrt{m_1}\,\frac{\|\mu_l^0\|\,\|\mu_{l+m_1}^0\|}{\|\mu_l^1\|}\big[c^0(l+m_1)\xi^0(l) - c^0(l)\xi^0(l+m_1)\big]\omega_{m_0}^{-l}.$$

Мы воспользовались определением $d^0(k)$ и формулой (9). Вектор коэффициентов β^1 восстанавливается теперь по формуле обращения $\beta^1 = \mathcal{F}_{m_1}^{-1}(\eta^1)$.

В общем случае для разложения сплайна $S \in \mathcal{S}_r^m$ по вейвлетному базису можно использовать следующую рекуррентную схему:

$$\xi^{\nu+1}(k) = c^\nu(k)\frac{\|\mu_k^\nu\|^2}{\|\mu_k^{\nu+1}\|^2}\xi^\nu(k) + c^\nu(k+m_{\nu+1})\frac{\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2}{\|\mu_k^{\nu+1}\|^2}\xi^\nu(k+m_{\nu+1}),$$

$$\eta^{\nu+1}(k) = \sqrt{m_{\nu+1}}\,\frac{\|\mu_k^\nu\|\,\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|}{\|\mu_k^{\nu+1}\|}$$
$$\times\big[c^\nu(k+m_{\nu+1})\xi^\nu(k) - c^\nu(k)\xi^\nu(k+m_{\nu+1})\big]\omega_{m_\nu}^{-k}.$$

Здесь $k = 0, 1, \ldots, m_{\nu+1} - 1$, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$. В результате придем к представлению (15), в котором $\alpha = \xi^t(0)\mu_0^t(j) = \xi^t(0)N^{2r-1}$ и $\beta^\nu = \mathcal{F}_{m_\nu}^{-1}(\eta^\nu)$ при $\nu = 1, \ldots, t$.

8. Рассмотрим обратную задачу перехода от представления (15) с $\alpha = \xi^t(0)N^{2r-1}$ к представлению (16). Сделаем последний шаг преобразования. С учетом (7) и (13) имеем

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} \xi^1(k)\mu_k^1(j) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^1(k)c^0(k)\mu_k^0(j);$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l)\theta_r^1(j - ln_1) &= \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l) \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{d^0(k)\omega_{m_1}^{-kl}}{\sqrt{m_1}\,\|w_k^1\|}\mu_k^0(j) \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{d^0(k)}{\sqrt{m_1}\,\|w_k^1\|}\mu_k^0(j) \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l)\omega_{m_1}^{-kl} \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\omega_{m_0}^k c^0(k+m_1)\|\mu_{k+m_1}^0\|}{\sqrt{m_1}\,\|\mu_k^0\|\,\|\mu_k^1\|}\eta^1(k)\mu_k^0(j),\end{aligned}$$

где $\eta^1 = \mathcal{F}_{m_1}(\beta^1)$. Следовательно,

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \left[c^0(k)\xi^1(k) + \frac{\omega_{m_0}^k c^0(k+m_1)\|\mu_{k+m_1}^0\|}{\sqrt{m_1}\,\|\mu_k^0\|\,\|\mu_k^1\|}\eta^1(k) \right] \mu_k^0(j).$$

В общем случае преобразование коэффициентов выполняется по формуле

$$\xi^\nu(k) = c^\nu(k)\xi^{\nu+1}(k) + \frac{\omega_{m_\nu}^k c^\nu(k+m_{\nu+1})\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|}{\sqrt{m_{\nu+1}}\,\|\mu_k^\nu\|\,\|\mu_k^{\nu+1}\|}\eta^{\nu+1}(k).$$

Здесь $k = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1$, $\nu = t-1, t-2, \ldots, 0$. Считаем, что последовательности с индексом $\nu+1$ продолжены периодически с периодом $m_{\nu+1}$.

9. На рис. 1 представлены графики вейвлетов $\theta_2^5(j)$, $\theta_2^4(j)$, $\ldots$, $\theta_2^1(j)$ при $m = 32 = 2^5$ и $n = 3$.

10. В непрерывном случае аналогичные вопросы рассматривались в работах [2, 3, 4]. Теория кратно-масштабного анализа пространства $\mathbb{C}_N$ построена в [5].

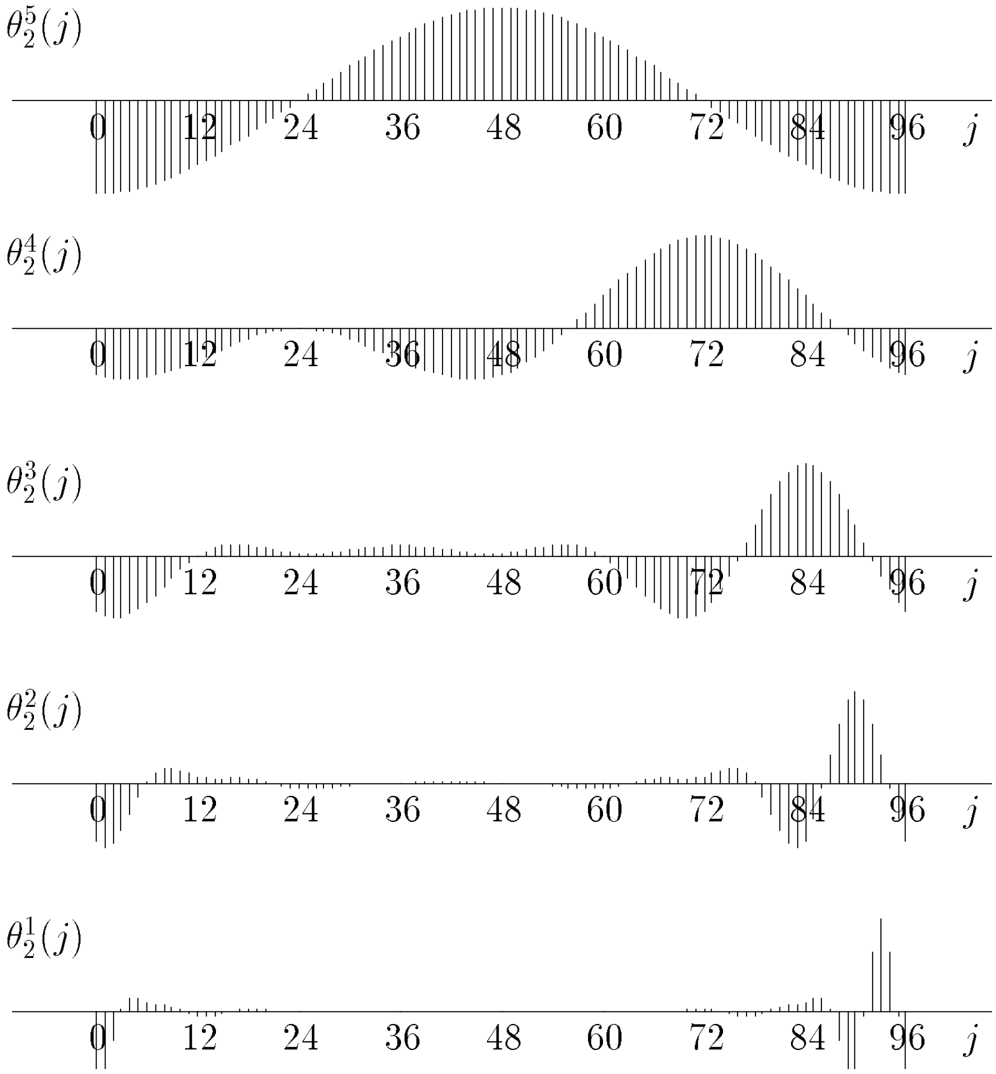
$\theta_2^5(j)$
$\theta_2^4(j)$
$\theta_2^3(j)$
$\theta_2^2(j)$
$\theta_2^1(j)$
0
12
24
36
48
60
72
84
96
j

Рис. 1

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Behr M. G., Malozemov V. N., Pevnyi A. B. A discrete version of spline-operational calculus. In: International Conference on Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts. St. Petersburg. 1995. P. 35.

[2] Masaru Kamada, Kazuo Toraichi, Ryoichi Mori. Periodic spline orthogonal bases // J. Approx. Theory. 1988. V. 55. № 1. P. 27–34.

[3] Желудев В. А. О вейвлетах на базе периодических сплайнов // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 9–13.

[4] Narcowich F. J., Ward J. D. Wavelets associated with periodic basis functions // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. V. 3. № 1. P. 40–56.

[5] Петухов А. П. Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. Вып. 3. С. 151–183.