ОБОБЩЕННЫЕ ВЕЙВЛЕТНЫЕ БАЗИСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДИСКРЕТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ВИЛЕНКИНА—КРЕСТЕНСОНА

© В. Н. Малоземов, С. М. Машарский

На основе дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона построены две рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$. Показано, как с их помощью сформировать обобщенные вейвлет-пакеты. Детально изучены вейвлетные базисы Хаара—Крестенсона, связанные с прореживанием по времени и прореживанием по частоте. Выяснена структура вейвлетных подпространств. Выведены формулы декомпозиции и реконструкции.

Ключевые слова: факторизация матриц, дискретные функции Виленкина—Крестенсона, обобщенные вейвлетные базисы, быстрые алгоритмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99-01-00747.

Введение

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) сыграло и продолжает играть заметную роль в развитии дискретного гармонического анализа [1, 2]. При длине периода N, равной 2^s, основным вариантом БПФ является алгоритм Кули—Тьюки [3]. В недавних работах [4, 5] предложен новый подход к алгоритму Кули—Тьюки, при котором результаты промежуточных вычислений интерпретируются как коэффициенты разложений по некоторым промежуточным базисам. Это позволило построить две рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве сигналов, и, соответственно, два новых вейвлет-пакета. В частности, выяснилось, что в процессе вычисления спектра Фурье любого сигнала вычисляется и его спектр Хаара. В [6] с аналогичных позиций проанализировано дискретное преобразование Уолша.

В данной статье обобщаются результаты работы [6] на случай $N = n^s$. В пространстве дискретных N-периодических сигналов строятся две рекуррентные последовательности ортогональных базисов, соответствующие прореживанию по частоте и прореживанию по времени. Финальным базисом в обеих последовательностях является дискретный базис Виленкина—Крестенсона. Речь пойдет не только о формальном обобщении — четче вырисовывается суть дела. Она заключается в том, что промежуточные базисы порождаются факторизацией матрицы Виленкина—Крестенсона. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы. После построения последовательности ортогональных базисов естественным образом формируется обобщенный вейвлет-пакет.

Прокомментируем содержание статьи по разделам. В разд. 1 приводятся необходимые сведения о функциях и матрице Виленкина—Крестенсона [7–10]. Матрица Виленкина—Крестенсона имеет порядок $N = n^s$ и является s-й кронекеровой степенью матрицы Фурье порядка n. Она стандартным приемом разлагается на множители (факторизуется) [11], причем сомножители в таком разложении допускают перестановку в любом порядке. Выделяются два порядка сомножителей, соответствующие в устоявшейся терминологии прореживанию по частоте и прореживанию по времени.

В разд. 2 и 3 на основе выделенных факторизаций матрицы Виленкина—Крестенсона строятся две рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$. Получены явные формулы для базисных сигналов. Показано, что базисные сигналы каждого уровня разбиваются на блоки, в каждом из которых сигналы различаются лишь сдвигом аргумента.

В разд. 4 описаны в явном виде быстрые алгоритмы разложения сигнала по всем промежуточным базисам. На заключительном этапе вычисляются коэффициенты разложения по базису Виленкина—Крестенсона. Дан строго математический анализ понятия частоты для дискретных функций Виленкина—Крестенсона, введенного на интуитивном уровне в монографии [9, с. 79–84].

В разд. 5 и 6 показывается, как, пользуясь последовательностью ортогональных базисов, сформировать обобщенный вейвлет-пакет. Детально исследуются вейвлетные базисы Хаара—Крестенсона, связанные с прореживанием по времени (разд. 5) и прореживанием по частоте (разд. 6). Случай прореживания по времени изучается, по-видимому, впервые (при $n = 2$ он рассматривался в [12]). Выясняется структура вейвлетных подпространств. Выводятся формулы декомпозиции и реконструкции.

В разд. 7 представлены два обобщенных кратно-масштабных анализа по основанию n пространства дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$, которые приводят к базисам Хаара—Крестенсона. Тем самым установлена связь полученных результатов с общей вейвлетной теорией [13–15].

Случай $n = 2$ исследовался в [16, 17, 6, 13, 15] и других работах.

1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами.*

В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводится скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}$$

и норма $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный 1, когда j делится на N, и равный 0 при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, $\ldots$, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, так что любой сигнал x допускает представление

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\delta_N(j-k) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Положим $u_k(j) = \omega_N^{kj}$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из 1. Сигналы $u_0(j)$, $u_1(j)$, $\ldots$, $u_{N-1}(j)$ образуют еще один ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. Ортогональность следует из элементарной формулы

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{pj} = \delta_N(p) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $\|u_k\|^2 = N$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Любой сигнал x можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,u_k(j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z},$$

где $X(k) = N^{-1}\langle x, u_k\rangle$.

1.2. В дальнейшем считаем, что $N = n^s$, где n и s — натуральные числа, отличные от единицы. Для k из $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ запись $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$ означает, что

$$k = k_{s-1}n^{s-1} + k_{s-2}n^{s-2} + \cdots + k_0.$$

Здесь $k_\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Возьмем еще $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$ и положим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu\, j_\nu.$$

Сигналы

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.3}$$

называются *дискретными функциями Виленкина—Крестенсона.* Формулой (1.3) сигналы $v_k(j)$ определены на основном периоде $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Далее они продолжаются N-периодически на все целые $j \in \mathbb{Z}$.

Предложение 1.1. *Сигналы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. При этом $\|v_k\|^2 = N$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Доказательство. При k, $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ согласно (1.2) имеем

$$\langle v_k, v_l \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_n^{\{k,j\}_s - \{l,j\}_s} = \sum_{j_{s-1}=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_0=0}^{n-1} \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1}(k_\nu - l_\nu) j_\nu} =$$

$$= \prod_{\nu=0}^{s-1} \sum_{j_\nu=0}^{n-1} \omega_n^{(k_\nu - l_\nu) j_\nu} = n^s \prod_{\nu=0}^{s-1} \delta_n(k_\nu - l_\nu).$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. •

Обозначим через $\lfloor \alpha \rfloor$ целую часть вещественного числа α. Тогда $\langle k \rangle_n := k - \lfloor k/n \rfloor n$ есть остаток от деления целого числа k на n. Пусть k, $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$, $l = (l_{s-1}, l_{s-2}, \ldots, l_0)_n$. Положим $m_\nu = \langle k_\nu + l_\nu \rangle_n$ и $m = (m_{s-1}, m_{s-2}, \ldots, m_0)_n$. Число m получено в результате поразрядного сложения по модулю n чисел k и l, представленных своими n-ичными кодами. Этот факт обычно записывается в виде $m = k \underset{n}{\oplus} l$.

Предложение 1.2. *Базис $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ является мультипликативным в том смысле, что при k, $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$*

$$v_k(j)\, v_l(j) = v_m(j),$$

где $m = k \underset{n}{\oplus} l$.

Действительно, учитывая, что $\omega_n^n = 1$, при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ получаем

$$v_k(j)\, v_l(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s + \{l,j\}_s} = \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1} \langle k_\nu + l_\nu \rangle_n \, j_\nu} = v_m(j).$$

1.3. Введем квадратную матрицу B_s с элементами

$$B_s[k, j] = v_k(j), \qquad k,\, j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.4}$$

Отметим, что здесь и далее индексы строк и столбцов квадратной матрицы порядка N изменяются от 0 до $N-1$. Нашей ближайшей целью является факторизация матрицы B_s.

Обозначим через F_n матрицу Фурье n-го порядка с элементами $F_n[k, j] = \omega_n^{kj}$, $k,\, j = 0, 1, \ldots, n-1$, и через $F_n^{[s]}$ — ее s-ю кронекерову степень (см., например, [18, с. 80–82]).

Предложение 1.3. *Справедливо равенство* $B_s = F_n^{[s]}$.

Доказательство. Напомним общий факт. Если квадратная матрица C порядка $N = n^s$ равна кронекерову произведению s квадратных матриц $A_1, A_2, \ldots, A_s$ порядка n, т. е. $C = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_s$, то элемент матрицы C с индексами $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$ вычисляется по формуле

$$C[k, j] = A_1[k_{s-1}, j_{s-1}]\, A_2[k_{s-2}, j_{s-2}] \cdots A_s[k_0, j_0]. \tag{1.5}$$

Поскольку $F_n^{[s]} = \underbrace{F_n \otimes F_n \otimes \cdots \otimes F_n}_{s \text{ раз}}$, то в силу (1.3) и (1.4)

$$F_n^{[s]}[k, j] = F_n[k_{s-1}, j_{s-1}]\, F_n[k_{s-2}, j_{s-2}] \cdots F_n[k_0, j_0] =$$

$$= \omega_n^{\{k,j\}_s} = v_k(j) = B_s[k, j].$$

Утверждение доказано. •

Пусть E_n — единичная матрица n-го порядка. При $\nu = 1, 2, \ldots, s$ положим

$$T_\nu = \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu) \text{ раз}} \otimes F_n \otimes \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1) \text{ раз}}.$$

Предложение 1.4. *Матрица* B_s *допускает факторизацию*

$$B_s = T_1\, T_2 \cdots T_s. \tag{1.6}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$
\begin{gathered}
(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_s)(A_{s+1} \otimes A_{s+2} \otimes \cdots \otimes A_{2s}) = \\
= (A_1 A_{s+1}) \otimes (A_2 A_{s+2}) \otimes \cdots \otimes (A_s A_{2s}),
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

справедливой для произвольных квадратных матриц A_1, A_2, $\ldots, A_{2s}$ порядка n. Согласно этой формуле

$$
T_1 T_2 = (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-1)\ \text{раз}} \otimes F_n)(\underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-2)\ \text{раза}} \otimes F_n \otimes E_n) =
$$

$$
= \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-2)\ \text{раза}} \otimes F_n \otimes F_n.
$$

Теперь ясно, что

$$
T_1\, T_2 \cdots T_s = \underbrace{F_n \otimes F_n \otimes \cdots \otimes F_n}_{s\ \text{раз}} = F_n^{[s]}.
$$

Остается сослаться на предложение 1.3. •

Из определения T_ν и (1.7) следует, что $T_\nu T_\mu = T_\mu T_\nu$ при $\nu \neq \mu$. Это значит, что *сомножители в правой части* (1.6) *можно переставить в любом порядке.* В частности,

$$
B_s = T_s\, T_{s-1} \cdots T_1. \tag{1.8}
$$

2. Первая последовательность промежуточных базисов

2.1. На основе разложения (1.8) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $f_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $f_s(k;j) = v_k(j)$. Сигналы $f_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $f_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-сигнала $f_\nu = \big(f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его формулой

$$
f_\nu = T_\nu\, T_{\nu-1} \cdots T_1\, f_0, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{2.1}
$$

Согласно (1.8), $f_s = B_s f_0$. Пользуясь (1.4) и (1.1), перепишем последнее равенство в развернутом виде:

$$f_s(k;j) = \sum_{l=0}^{N-1} B_s[k,l]\,\delta_N(j-l) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\,\delta_N(j-l) = v_k(j).$$

Разберемся с промежуточными базисами $f_1, \ldots, f_{s-1}$. Обозначим $Q_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1$.

Лемма 2.1. *При всех $\nu = 1, \ldots, s$ справедлива формула*

$$Q_\nu Q_\nu^* = n^\nu E_N,$$

где Q_ν^* — сопряженная по отношению к Q_ν матрица.

Доказательство. Прежде всего отметим, что согласно (1.2) $F_n F_n^* = nE_n$. Далее в силу (1.7)

$$T_\nu T_\nu^* = (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes F_n \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}}) \times$$

$$\times (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes F_n^* \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}}) =$$

$$= \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes (F_n F_n^*) \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}} = nE_N.$$

Наконец,

$$Q_\nu Q_\nu^* = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1 T_1^* \cdots T_{\nu-1}^* T_\nu^* = n^\nu E_N.$$

Лемма доказана. •

По существу установлено, что строки матрицы Q_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. Учитывая соотношение $f_\nu = Q_\nu f_0$, приходим к такому выводу.

Теорема 2.1. *При всех $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ сигналы $f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$ и $\|f_\nu(k)\|^2 = n^\nu$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

2.2. Из (2.1) следует, что

$$f_\nu = T_\nu f_{\nu-1}, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \tag{2.2}$$

Рассмотрим матрицу T_ν более детально. Обозначим $N_\nu := N/n^\nu = n^{s-\nu}$, $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$.

Лемма 2.2. *Матрица T_ν имеет следующую структуру:*

$$T_\nu[(np+\sigma)\Delta_\nu + l, (np+\tau)\Delta_\nu + l] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma, \tau = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$T_\nu[k, j] = 0 \quad \textit{при остальных } k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Доказательство. Согласно определению T_ν и (1.5)

$$T_\nu[k, j] = E_n[k_{s-1}, j_{s-1}] \cdots E_n[k_\nu, j_\nu] \times$$

$$\times F_n[k_{\nu-1}, j_{\nu-1}]\, E_n[k_{\nu-2}, j_{\nu-2}] \cdots E_n[k_0, j_0].$$

Это выражение отлично от нуля только тогда, когда

$$k_\mu = j_\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, \nu-2,\, \nu,\, \nu+1, \ldots, s-1. \tag{2.3}$$

Зафиксируем $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n = (np + k_{\nu-1})\Delta_\nu + l$, где $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Условие (2.3) выполняется для индексов j вида $j = (np + j_{\nu-1})\Delta_\nu + l$ и только для них. При этом $T_\nu[k, j] = \omega_n^{k_{\nu-1} j_{\nu-1}}$. Указанные факты соответствуют утверждению леммы. •

Следствие. В строке матрицы T_ν с индексом $k = p\Delta_{\nu+1} + \sigma\Delta_\nu + l$ отличны от нуля лишь n элементов. Ненулевые элементы принимают значения $1, \omega_n^\sigma, \omega_n^{2\sigma}, \ldots, \omega_n^{(n-1)\sigma}$.

Формула (2.2) и лемма 2.2 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису f_ν:

$$f_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$f_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, f_{\nu-1}\big(l + (np+\tau)\Delta_\nu\big), \tag{2.4}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n - 1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

Поясним эту схему. Предполагается, что базис $f_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с внутренней индексацией $np + \tau$. Согласно (2.4) блок с индексом l базиса $f_{\nu-1}$ порождает n блоков базиса f_ν с индексами $l+\sigma\Delta_\nu$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, причем в каждом таком блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом p. Рис. 1 иллюстрирует схему ветвления (2.4) при $N = 3^2$. Квадратами выделены блоки. Число внутри квадрата показывает, сколько элементов (сигналов) содержится в данном блоке.

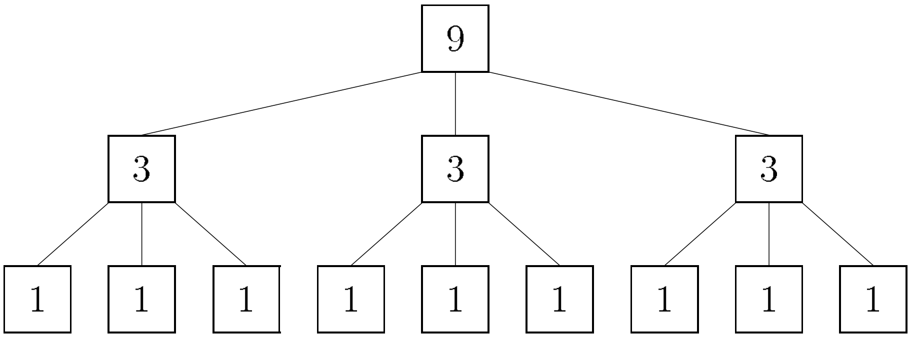

Рис. 1

При $\nu = 1$ формула (2.4) принимает вид

$$f_1(np + \sigma) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \, f_0(np + \tau), \tag{2.5}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1.$$

2.3. Получим явное представление для базисных сигналов. Для этого потребуется одно вспомогательное утверждение. Обозначим $B_\nu = F_n^{[\nu]}$, $\nu = 1, \ldots, s$.

Лемма 2.3. *При* $l, q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, $\nu \in \{2, \ldots, s\}$ *справедливы формулы*

$$B_{\nu-1}[l, q] = B_\nu[l, q] = \omega_n^{-\sigma\tau} \, B_\nu[l + \sigma\Delta_\nu, q + \tau\Delta_\nu], \tag{2.6}$$

$$B_{\nu-1}[l,q] = B_\nu[nl,nq] = \omega_n^{-\sigma\tau}\, B_\nu[nl+\sigma, nq+\tau]. \tag{2.7}$$

Доказательство. Согласно (1.4) и (1.3)

$$B_\nu[l,q] = \omega_n^{\{l,q\}_\nu} \quad \text{при} \quad l,q \in \{0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1\}. \tag{2.8}$$

Если $l,q \in \{0,1,\ldots,\Delta_\nu - 1\}$, то

$$\{l,q\}_{\nu-1} = \{l,q\}_\nu = \{l+\sigma\Delta_\nu, q+\tau\Delta_\nu\}_\nu - \sigma\tau =$$

$$= \{nl,nq\}_\nu = \{nl+\sigma, nq+\tau\}_\nu - \sigma\tau.$$

Отсюда и из (2.8) следует требуемое. •

Теорема 2.2. *Имеет место явное представление*

$$f_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l,q]\, f_0(q+p\Delta_{\nu+1}), \tag{2.9}$$

$$l = 0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1, \quad p = 0,1,\ldots,N_\nu - 1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (2.9) принимает вид

$$f_1(l+np) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{lq}\, f_0(q+np),$$

$$l = 0,1,\ldots,n-1, \quad p = 0,1,\ldots,N_1 - 1.$$

Это совпадает с (2.5), если заменить l на σ и q на τ. Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1\}$ и воспользуемся тем, что $l = \sigma\Delta_\nu + l'$ при некоторых $l' \in \{0,1,\ldots,\Delta_\nu - 1\}$ и $\sigma \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. На основании (2.4), индукционного предположения и (2.6) получаем

$$f_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(l'+\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, f_{\nu-1}\big(l' + (np+\tau)\Delta_\nu\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \Big\{ \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} B_{\nu-1}[l', q'] \, f_0\big(q' + (np+\tau)\Delta_\nu\big) \Big\} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} B_\nu[l' + \sigma\Delta_\nu, q' + \tau\Delta_\nu] \, f_0(q' + \tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l, q] \, f_0(q + p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. •

Следствие. Справедливы формулы

$$f_\nu(0; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - q), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{2.10}$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q - \tau\Delta_\nu), \tag{2.11}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Формула (2.10) очевидна. Проверим (2.11). Согласно (2.9) и (2.8) имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu - 1} B_\nu[\sigma\Delta_\nu, q'] \, f_0(q'; j) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q'=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q') = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q - \tau\Delta_\nu),$$

что и требовалось установить. Если ограничиться основным периодом, то формулы (2.10) и (2.11) можно переписать так:

$$f_\nu(0; j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N - 1; \end{cases}$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu; j) = \begin{cases} \omega_n^{\sigma\tau} & \text{при} \quad j = \tau\Delta_\nu, \ldots, (\tau+1)\Delta_\nu - 1, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \tau = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N - 1. \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Справедливо тождество*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(l; j - p\Delta_{\nu+1}), \tag{2.12}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. В соответствии с (2.9) имеем

$$f_\nu(l; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l, q]\, \delta_N(j - q).$$

Поэтому

$$f_\nu(l; j - p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l, q]\, \delta_N\big(j - (q + p\Delta_{\nu+1})\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l, q]\, f_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Теорема доказана. •

Таким образом, сигналы l-го блока в базисе f_ν получаются из сигнала $f_\nu(l; j)$ с помощью сдвига аргумента на число, кратное $\Delta_{\nu+1}$.

Теорема 2.4. *При* $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *выполняется соотношение*

$$f_{\nu+1}(\sigma\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(\sigma\Delta_\nu; \lfloor j/n \rfloor), \tag{2.13}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s - 1.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$\delta_N(\lfloor j/n \rfloor) = \sum_{r=0}^{n-1} \delta_N(j - r), \quad j = -N + n, \ldots, N - 1. \tag{2.14}$$

При $j \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ обе части в (2.14) равны единице, а при $j \in \{n, \ldots, N - 1\} \cup \{-N + n, \ldots, -1\}$ равны нулю. Отметим, что при $j = N$ и $j = -N + n - 1$ равенство (2.14) нарушается.

Согласно (2.11) и (2.14) при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu; \lfloor j/n \rfloor) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N\big(\lfloor (j - qn - \tau\Delta_{\nu+1})/n \rfloor\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{r=0}^{n-1} \delta_N\big(j - (qn + r) - \tau\Delta_{\nu+1}\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} \delta_N(j - q' - \tau\Delta_{\nu+1}) = f_{\nu+1}(\sigma\Delta_{\nu+1}; j).$$

Теорема доказана. •

3. Вторая последовательность промежуточных базисов

3.1. Вторую последовательность ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ обозначим $\{g_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Она строится на основе разложения (1.6) так, чтобы $g_0(k; j) = \delta_N(j - k)$ и $g_s(k; j) = v_k(j)$. Сигналы $g_\nu(k; j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $g_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-сигнала $g_\nu = \big(g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его формулой

$$g_\nu = T_{s-\nu+1} T_{s-\nu+2} \cdots T_s\, g_0, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Так же, как и в предыдущем разделе, доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.1. *При каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ сигналы $g_\nu(0)$, $g_\nu(1)$, …, $g_\nu(N-1)$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$ и $\|g_\nu(k)\|^2 = n^\nu$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

3.2. Согласно лемме 2.2

$$T_{s-\nu+1}[(np + \sigma)\Delta_{s-\nu+1} + l, (np + \tau)\Delta_{s-\nu+1} + l] = \omega_n^{\sigma\tau}, \qquad (3.1)$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{s-\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_{s-\nu+1} - 1.$$

Отметим, что $\Delta_{s-\nu+1} = N_\nu$ и $N_{s-\nu+1} = \Delta_\nu$. Поменяв в (3.1) местами индексы p и l, получим

$$T_{s-\nu+1}[(nl+\sigma)N_\nu + p, (nl+\tau)N_\nu + p] = \omega_n^{\sigma\tau}, \tag{3.2}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1.$$

Равенство $g_\nu = T_{s-\nu+1} g_{\nu-1}$ и формула (3.2) позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}$ к базису g_ν:

$$g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$g_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{3.3}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

Поясним эту схему. Предполагается, что базис $g_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с внутренней индексацией $\tau N_\nu + p$. Согласно (3.3) блок с индексом l базиса $g_{\nu-1}$ порождает n блоков базиса g_ν с индексами $nl+\sigma$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, причем в каждом таком блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом p. Приведенный ранее рис. 1 иллюстрирует схему ветвления (3.3) при $N = 3^2$.

При $\nu = 1$ формула (3.3) принимает вид

$$g_1(\sigma N_1 + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_0(\tau N_1 + p), \tag{3.4}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

3.3. Получим явное выражение для базисных сигналов.

Теорема 3.2. *Имеет место представление*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l,q]\, g_0(qN_\nu + p), \tag{3.5}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (3.5) совпадает с (3.4), если заменить l на σ и q на τ. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и воспользуемся тем, что $l = l'n + \sigma$ при некоторых $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$. Опираясь на (3.4), индукционное предположение и (2.7), запишем

$$g_\nu(lN_\nu + p) = g_\nu\bigl((nl' + \sigma)N_\nu + p\bigr) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(l'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \Bigl\{ \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} B_{\nu-1}[l', q']\, g_0(q'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) \Bigr\} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} B_\nu[l'n + \sigma, q'n + \tau]\, g_0\bigl((q'n + \tau)N_\nu + p\bigr) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} B_\nu[l, q]\, g_0(qN_\nu + p).$$

Теорема доказана. •

Следствие. Справедливы равенства

$$g_\nu(0; j) = \delta_{N_\nu}(j), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{3.6}$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \tag{3.7}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Формула (3.6) равносильна очевидному соотношению

$$\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} \delta_N(j - qN_\nu) = \delta_{N_\nu}(j). \tag{3.8}$$

Проверим (3.7). Согласно (3.5), (2.8) и (3.8) имеем

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} B_\nu[\sigma, qn+\tau]\, g_0\big((qn+\tau)N_\nu; j\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - \tau N_\nu - qN_{\nu-1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu),$$

что и требовалось установить. Формула (3.7) показывает, в частности, что сигнал $g_\nu(\sigma N_\nu; j)$ является $N_{\nu-1}$-периодическим.

Из (3.7) следует также равенство

$$g_{\nu+1}(\sigma N_{\nu+1}; j) = g_\nu(\sigma N_\nu; nj), \tag{3.9}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Действительно,

$$g_\nu(\sigma N_\nu; nj) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}\big(n(j - \tau N_{\nu+1})\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_\nu}(j - \tau N_{\nu+1}) = g_{\nu+1}(\sigma N_{\nu+1}; j).$$

Теорема 3.3. *При* $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ *выполняются тождества*

$$g_\nu(lN_\nu + p; j) = g_\nu(lN_\nu; j - p), \tag{3.10}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1;$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j - kN_\nu) = \omega_n^{-\sigma k}\, g_\nu(\sigma N_\nu; j), \tag{3.11}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Согласно (3.5)

$$g_\nu(lN_\nu; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} B_\nu[l, q]\, \delta_N(j - qN_\nu),$$

так что

$$g_\nu(lN_\nu; j-p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l,q]\,\delta_N\bigl(j-(qN_\nu+p)\bigr) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} B_\nu[l,q]\,g_0(qN_\nu+p;j) = g_\nu(lN_\nu+p;j).$$

Тождество (3.10) установлено.

Переходя к (3.11), зафиксируем j и введем дискретную функцию $h(\tau) = \omega_n^{\sigma\tau}\,\delta_{N_{\nu-1}}(j-\tau N_\nu)$. Эта функция n-периодична, поэтому

$$\sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau+k) = \sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau) \qquad \forall k\in\mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

С учетом (3.7) получаем

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j-kN_\nu) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma(\tau+k)-\sigma k}\,\delta_{N_{\nu-1}}\bigl(j-(\tau+k)N_\nu\bigr) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma k}\sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau+k) = \omega_n^{-\sigma k}\sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau) = \omega_n^{-\sigma k}\,g_\nu(\sigma N_\nu;j).$$

Теорема доказана. •

4. Быстрое преобразование Виленкина—Крестенсона

4.1. Любой сигнал x можно разложить по ортогональному базису $f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)$ при каждом $\nu\in\{0,1,\ldots,s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\,f_\nu(k). \tag{4.1}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, f_\nu(k)\rangle$. В частности,

$$x_0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\delta_N(j-k) = x(k), \quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

Согласно (2.4)

$$x_\nu(l+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\big\langle x, f_{\nu-1}\big(l+(np+\tau)\Delta_\nu\big)\big\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}\big(l+(np+\tau)\Delta_\nu\big).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (4.1):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$x_\nu(l+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}\big(l+(np+\tau)\Delta_\nu\big), \quad (4.2)$$

$$l = 0,1,\ldots,\Delta_\nu-1, \quad p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \sigma = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$\nu = 1,\ldots,s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по базису Виленкина—Крестенсона (1.3):

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, v_k(j). \quad (4.3)$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (4.2) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}\big(l+(np+\tau)\Delta_\nu\big) = \sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu(l+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}), \quad (4.4)$$

$$l = 0,1,\ldots,\Delta_\nu-1, \quad p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \tau = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$\nu = s, s-1,\ldots,1.$$

Основная роль формулы (4.4) заключается в том, что с ее помощью вычисляются значения сигнала x, заданного в виде (4.3), на основном периоде, а именно $x(k) = x_0(k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$.

4.2. Аналогично сигнал x можно разложить по ортогональному базису $g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)$ при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{4.5}$$

Здесь $y_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(k)\rangle$. Коэффициенты разложений (4.5) в силу (3.3) вычисляются по рекуррентной схеме

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{4.6}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} y_s(k)\, v_k(j),$$

т. е. $y_s(k) = x_s(k)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по каждому промежуточному базису g_ν, которые, конечно, отличны от коэффициентов разложений по промежуточным базисам f_ν.

Формула (4.6) допускает обращение:

$$y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, y_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big), \tag{4.7}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

С помощью (4.7) можно вычислить значения сигнала x, заданного в виде (4.5) при некотором $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, на основном периоде.

Схемы (4.2) и (4.6) называются *быстрыми преобразованиями Виленкина—Крестенсона*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени.*

4.3. Напомним, что

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \qquad k, j \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

В этой формуле степень $\{k, j\}_s$ изменяется немонотонно при возрастании j от 0 до $N-1$. Например, при $n = 2$, $s = 3$, $k = 2 = (0, 1, 0)_2$ имеем

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{k, j\}_3$	0	0	1	1	0	0	1	1

Чтобы добиться монотонности, запишем для $v_k(j)$ другое представление

$$v_k(j) = \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu (j_\nu + j_{\nu+1} n + \ldots + j_s n^{s-\nu})}.$$

Обозначим степень через $\varphi_k(j)$. Тогда

$$v_k(j) = \omega_n^{\varphi_k(j)}. \tag{4.8}$$

Считаем, что аргумент j изменяется от 0 до N, так что коэффициент j_s может равняться 0 или 1. При этом, если $j_s = 1$, то $j_{s-1} = j_{s-2} = \ldots = j_0 = 0$.

Положим при $l = 0, 1, \ldots, s-1$

$$a_l = \sum_{\nu=0}^{l} k_\nu n^{l-\nu}.$$

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$\varphi_k(j) = n a_{s-1} j_s + \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l. \tag{4.9}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_k(j) = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu \sum_{l=\nu}^{s} j_l n^{l-\nu} = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu j_s n^{s-\nu} + \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu \sum_{l=\nu}^{s-1} j_l n^{l-\nu} =$$

$$= n\, j_s a_{s-1} + \sum_{l=0}^{s-1} j_l \sum_{\nu=0}^{l} k_\nu n^{l-\nu} = n a_{s-1} j_s + \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l,$$

что и требовалось установить. •

Лемма 4.2. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$a_l = (n-1)\sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu + \sum_{p=0}^{l} k_p, \quad l = 1, \ldots, s-1, \tag{4.10}$$

$$a_0 = k_0.$$

Доказательство. Формула (4.10) связана со схемой Горнера, однако ее можно вывести и непосредственно. Запишем

$$\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{l}\sum_{p=0}^{\nu} k_p n^{\nu-p} = \sum_{\nu=1}^{l}\sum_{p=0}^{\nu-1} k_p n^{\nu-p} + \sum_{p=0}^{l} k_p. \tag{4.11}$$

Отметим, что

$$\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{p=0}^{\nu-1} k_p n^{\nu-p} = \sum_{\nu'=0}^{l-1}\sum_{p=0}^{\nu'} k_p n^{\nu'+1-p} = n\sum_{\nu'=0}^{l-1} a_{\nu'}. \tag{4.12}$$

Объединяя (4.11) и (4.12), приходим к (4.10). •

Следствие. При $l \in \{1, \ldots, s-1\}$ выполняется неравенство

$$a_l \geq (n-1)\sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *При возрастании j от 0 до N функция $\varphi_k(j)$ изменяется от 0 до na_{s-1}, монотонно не убывая.*

Доказательство. Согласно (4.9), $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(N) = na_{s-1}$. Остается проверить, что $\varphi_k(j) \leq \varphi_k(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$. Тогда $\varphi_k(j) = \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l$. Если $j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, то

$$\varphi_k(j+1) = a_0(j_0+1) + \sum_{l=1}^{s-1} a_l j_l \geq \varphi_k(j).$$

Предположим, что $j_0 = n - 1$. В случае $j_0 = j_1 = \ldots = j_{p-1} = n - 1,\ j_p < n - 1$ при некотором $p \in \{1, \ldots, s-1\}$ имеем

$$\varphi_k(j+1) = a_p(j_p + 1) + \sum_{l=p+1}^{s-1} a_l j_l.$$

Согласно (4.13)

$$\varphi_k(j+1) - \varphi_k(j) = a_p - (n-1)\sum_{l=0}^{p-1} a_l \geq 0.$$

Наконец, если $j = N - 1$, то

$$\varphi_k(j+1) - \varphi_k(j) = n a_{s-1} - (n-1)\sum_{l=0}^{s-1} a_l =$$

$$= a_{s-1} - (n-1)\sum_{l=0}^{s-2} a_l \geq 0.$$

Теорема доказана. •

4.4. Перепишем формулу (4.8) в виде

$$v_k(j) = \exp\left(\tfrac{2\pi i}{n}\,\varphi_k(j)\right).$$

При фиксированном j комплексное число $v_k(j)$ лежит на единичной окружности комплексной плоскости и его аргумент равен $(2\pi/n)\varphi_k(j)$. Согласно теореме 4.1 этот аргумент при возрастании j от 0 до N изменяется от 0 до $2\pi a_{s-1}$, монотонно не убывая. Другими словами, при возрастании j от 0 до N точка $v_k(j)$ обегает единичную окружность a_{s-1} раз. Число a_{s-1} естественно принять за частоту дискретной функции $v_k(j)$.

Напомним, что $a_{s-1} = k_0 n^{s-1} + k_1 n^{s-2} + \ldots + k_{s-1}$. Поскольку $k = k_{s-1} n^{s-1} + k_{s-2} n^{s-2} + \ldots + k_0$, то a_{s-1} есть целое число, n-ичный код которого равен перевернутому n-ичному коду числа k.

Введем обозначение

$$\mathrm{rev}_s(k) = k_0 n^{s-1} + k_1 n^{s-2} + \ldots + k_{s-1}.$$

Идентификатор rev связан со словом *reverse*. Индекс s у rev указывает на количество ревертируемых n-ичных разрядов. Учитывая, что $a_{s-1} = \mathrm{rev}_s(k)$, приходим к следующему результату: *частота функции* $v_k(j)$ *равна* $\mathrm{rev}_s(k)$.

Теперь функции ортогональной мультипликативной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ можно упорядочить по возрастанию частоты, положив

$$\mathrm{Pal}_k(j) := v_{\mathrm{rev}_s(k)}(j), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Очевидно, что частота $\mathrm{Pal}_k(j)$ равна k. Формула (4.3) принимает вид

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)\,\mathrm{Pal}_k(j).$$

4.5. Опишем быстрый алгоритм вычисления $\mathrm{rev}_s(k)$ сразу для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$. Обозначим при $\nu = 1, \ldots, s$

$$\mathrm{rev}_\nu(k) = k_0 n^{\nu-1} + k_1 n^{\nu-2} + \ldots + k_{\nu-1}.$$

Теорема 4.2. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathrm{rev}_1(p) = p, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + p) = pn^{\nu-1} + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l),$$

$$l = 0, 1, \ldots, n^{\nu-1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 2, \ldots, s.$$

Доказательство. То, что $\mathrm{rev}_1(p) = p$ при $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, очевидно. Возьмем $l = l_{\nu-2} n^{\nu-2} + \ldots + l_0$. Имеем

$$\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) = l_0 n^{\nu-2} + \ldots + l_{\nu-2}.$$

Поскольку $nl + p = l_{\nu-2} n^{\nu-1} + \ldots + nl_0 + p$, то

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + p) = pn^{\nu-1} + l_0 n^{\nu-2} + \ldots + l_{\nu-2} = pn^{\nu-1} + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l).$$

Теорема доказана. •

В табл. демонстрируется, как, пользуясь теоремой 4.2 при $N = 2^3$, вычислить $\mathrm{rev}_3(k)$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Таблица

ν	$\mathrm{rev}_\nu(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, 2^\nu - 1$							
1	0	1						
2	0	2	1	3				
3	0	4	2	6	1	5	3	7

5. Обобщенные вейвлеты, связанные с прореживанием по времени

5.1. На рис. 1 было показано, как на горизонтальных уровнях $\nu = 0, 1, \ldots, s$ последовательно формируются ортогональные базисы $f_0, f_1, \ldots, f_s$ и $g_0, g_1, \ldots, g_s$. Количество ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если использовать вертикальную составляющую. Это демонстрируется на рис. 2 при $N = 3^3$. Сигналы, находящиеся в висячих блоках, во всех четырех представленных примерах образуют ортогональные базисы. Действительно, ортогональность сигналов ν-го уровня известна. Сигналы каждого висячего блока $(\nu+1)$-го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока ν-го уровня и поэтому они ортогональны сигналам из остальных блоков ν-го уровня.

Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$, образованные из блоков всех уровней $\nu = 1, \ldots, s$, будем называть *обобщенными вейвлетными базисами.* Далее мы детально рассмотрим обобщенные вейвлетные базисы, соответствующие схеме ветвления (а) на рис. 2.

5.2. Вначале воспользуемся последовательностью базисов g_0, $g_1, \ldots, g_s$. Обозначим через V_ν, $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$, линейную оболочку, натянутую на сигналы $g_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, а через $W_\nu^{(\sigma)}$, $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, — линейную оболочку, натянутую на $g_\nu(\sigma N_\nu + p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$. По теореме 3.1 подпространства V_ν, $W_\nu^{(1)}$, ..., $W_\nu^{(n-1)}$ попарно ортогональны при всех $\nu \in \{1, \ldots, s\}$.

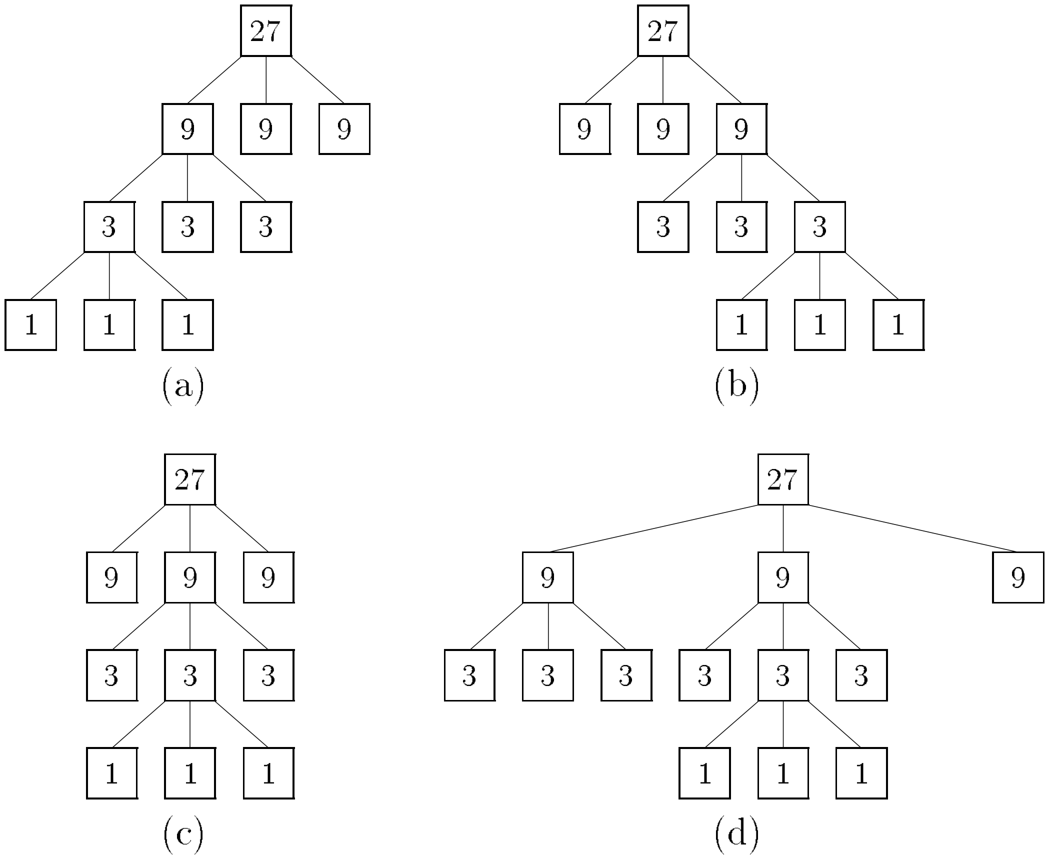

Рис. 2

Согласно (3.3) при $l = 0$ имеем

$$g_\nu(\sigma N_\nu + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{5.1}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Отсюда, в частности, следует, что $V_\nu \subset V_{\nu-1}$ и $W_\nu^{(\sigma)} \subset V_{\nu-1}$ при $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Если учесть, что размерность всех подпространств V_ν, $W_\nu^{(1)}$, $\ldots$, $W_\nu^{(n-1)}$ равна N_ν и что сумма этих размерностей равна размерности $V_{\nu-1}$, то придем к представлению

$$V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}. \tag{5.2}$$

Обозначим $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Тогда формулу (5.2) можно записать короче:

$$V_{\nu-1} = W_\nu \oplus V_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{5.3}$$

Поскольку

$$V_0 = \operatorname{lin}\Big(\big\{g_0(p)\big\}_{p=0}^{N-1}\Big) = \operatorname{lin}\Big(\big\{\delta_N(\cdot - p)\big\}_{p=0}^{N-1}\Big) = \mathbb{C}_N,$$

то в силу (5.3) получаем вейвлетное разложение

$$\mathbb{C}_N = V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = \ldots =$$

$$= W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus V_s. \tag{5.4}$$

5.3. Выясним структуру вейвлетных подпространств.

Теорема 5.1. *Справедливы формулы*

$$V_\nu = \mathbb{C}_{N_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{5.5}$$

$$W_\nu^{(\sigma)} = \big\{x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}} \,\big|\, x(j - \tau N_\nu) = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j) \quad \forall\, \tau \in \{1, \ldots, n-1\}\big\}, \tag{5.6}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Согласно (3.10) и (3.6), при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ имеем

$$g_\nu(p; j) = g_\nu(0; j - p) = \delta_{N_\nu}(j - p).$$

Отсюда очевидным образом следует (5.5). В частности, $V_s := \operatorname{lin}\big(g_s(0)\big)$ есть подпространство комплексных констант, так как $g_s(0; j) \equiv 1$ в силу (3.5).

Обозначим правую часть формулы (5.6) через $G_\nu^{(\sigma)}$ и покажем вначале, что $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$. Пусть $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Тогда

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j - p).$$

Как отмечалось, сигналы $g_\nu(\sigma N_\nu; j)$ являются $N_{\nu-1}$-периодическими, поэтому $x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$. Далее в силу (3.11)

$$x(j - \tau N_\nu) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, \big[\omega_n^{-\sigma\tau} g_\nu(\sigma N_\nu; j - p)\big] = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j).$$

Получили, что $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Включение $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$ установлено.

Проверим обратное включение. Возьмем $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Поскольку $x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, то

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_{\nu-1}-1} a(p)\, \delta_{N_{\nu-1}}(j-p) = \sum_{p=0}^{nN_\nu-1} a(p)\, g_{\nu-1}(0; j-p).$$

По определению $G_\nu^{(\sigma)}$ при $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем

$$x(j) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j - \tau N_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{p=0}^{nN_\nu-1} a(p)\, g_{\nu-1}(0; j-p-\tau N_\nu) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{p=0}^{nN_\nu-1} a(p)\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu; j-p).$$

Сложив эти равенства и поделив на n, на основании (5.1), (3.11) и (3.10) получим

$$x(j) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{nN_\nu-1} a(p) \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} g_{\nu-1}(\tau N_\nu; j-p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{nN_\nu-1} a(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j-p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=kN_\nu}^{(k+1)N_\nu-1} a(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j-p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} a(p+kN_\nu)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j-p-kN_\nu) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma k} a(p+kN_\nu) \Big) g_\nu(\sigma N_\nu + p; j).$$

Значит, $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Включение $G_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu^{(\sigma)}$, а с ним и теорема, доказаны. •

5.4. Согласно (5.4) любой сигнал x допускает представление

$$x = y_s(0)\, g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\sigma N_\nu + p)\, g_\nu(\sigma N_\nu + p). \qquad (5.7)$$

Здесь $y_s(0) = N^{-1}\langle x, g_s(0)\rangle = \dfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)$ и $y_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(\sigma N_\nu + p)\rangle$. Учитывая (5.1), запишем

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \left\langle x, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p).$$

При этом

$$y_0(k) = \langle x, g_0(k)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Приходим к рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложения (5.7):

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \qquad (5.8)$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $y_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu+1)$-го уровня.

Обращение преобразования (5.8) приводит к следующей схеме:

$$y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, y_\nu(\sigma N_\nu + p),$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu - 1, \quad \tau = 0,1,\ldots,n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Эта схема позволяет вычислить значения сигнала x, заданного в виде (5.7), на основном периоде, а именно $x(k) = y_0(k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$.

Разложение (5.7) назовем *разложением Хаара—Крестенсона, связанным с прореживанием по времени*, а схему (5.8) — *быстрым преобразованием Хаара—Крестенсона.*

Отметим, что в (5.7) базисные сигналы $g_\nu(\sigma N_\nu + p)$ можно сформировать из $n-1$ сигнала $g_1(\sigma N_1)$, $\sigma = 1,\ldots,n-1$. Это следует из (3.9) и (3.10). Для образующих сигналов $g_1(\sigma N_1)$ согласно (3.7) имеется явное представление

$$g_1(\sigma N_1; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_N(j - \tau N_1).$$

5.5. Формулу (5.7) можно вывести непосредственно, без привлечения высокой теории. Такой вывод представляется достаточно поучительным.

Запишем тождество

$$x(j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \Big(\frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\Big) x(j-\tau N_1) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\Big(\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\, x(j-\tau N_1)\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{n}\big[x(j) + x(j-N_1) + x(j-2N_1) + \ldots + x\big(j-(n-1)N_1\big)\big] +$$

$$+ \tfrac{1}{n}\big[x(j) + \omega_n x(j-N_1) + \omega_n^2 x(j-2N_1) + \ldots + \omega_n^{n-1} x\big(j-(n-1)N_1\big)\big] +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \tfrac{1}{n}\big[x(j) + \omega_n^{n-1} x(j-N_1) + \omega_n^{2(n-1)} x(j-2N_1) + \ldots +$$

$$+ \omega_n^{(n-1)^2} x\big(j-(n-1)N_1\big)\big] =:$$

$$=: v_1(j) + w_1^{(1)}(j) + \ldots + w_1^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_1(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} x(j-\tau N_1) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N-1} x(q)\,\delta_N(j-q-\tau N_1) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_1-1} x(kN_1+p)\,\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{N_1-1}\sum_{k=0}^{n-1} x(kN_1+p)\sum_{\tau=0}^{n-1}\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_0(kN_1+p)\Big\}\Big\{\sum_{\tau'=0}^{n-1}\delta_N(j-p-\tau' N_1)\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(p)\sum_{\tau'=0}^{n-1} g_0(\tau' N_1+p;j) = \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(p)\,g_1(p;j).$$

Аналогично при $\sigma = 1,\ldots,n-1$

$$w_1^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau} x(j-\tau N_1) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\sum_{q=0}^{N-1} x(q)\,\delta_N(j-q-\tau N_1) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_1-1}\omega_n^{\sigma(\tau+k)-\sigma k} x(kN_1+p)\,\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma k} y_0(kN_1+p)\Big\}\Big\{\sum_{\tau'=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau'} g_0(\tau' N_1+p;j)\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(\sigma N_1+p)\,g_1(\sigma N_1+p;j).$$

Мы воспользовались формулой (3.12). Слагаемые $w_1^{(\sigma)}(j)$ являются вейвлетными составляющими. Они входят в (5.7) при $\nu = 1$. Сигнал $v_1(j)$ преобразуется по такому же правилу

$$v_1(j) = v_2(j) + w_2^{(1)}(j) + \ldots + w_2^{(n-1)}(j),$$

где

$$v_2(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} v_1(j-\tau N_2) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N_1-1} y_1(q)\, g_1(q; j-\tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_2-1} y_1(kN_2+p)\, g_1(kN_2+p; j-\tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{n-1} y_1(kN_2+p)\sum_{\tau=0}^{n-1} g_1\big(0; j-p-(\tau+k)N_2\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_1(kN_2+p)\Big\}\Big\{\sum_{\tau'=0}^{n-1} g_1(0; j-p-\tau' N_2)\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} y_2(p)\sum_{\tau'=0}^{n-1} g_1(\tau' N_2+p; j) = \sum_{p=0}^{N_2-1} y_2(p)\, g_2(p; j)\,;$$

$$w_2^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau} v_1(j-\tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_2-1}\omega_n^{\sigma\tau} y_1(kN_2+p)\, g_1\big(0; j-p-(\tau+k)N_2\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma k} y_1(kN_2+p)\Big\}\Big\{\sum_{\tau'=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau'} g_1(\tau' N_2+p; j)\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} y_2(\sigma N_2+p)\, g_2(\sigma N_2+p; j).$$

Мы воспользовались n-периодичностью дискретной функции $h(\tau) = \omega_n^{\sigma\tau} g_1(0; j-p-\tau N_2)$ и формулой (3.12). Слагаемые $w_2^{(\sigma)}(j)$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$, входят в (5.7) при $\nu = 2$. Сигнал $v_2(j)$ подвергается дальнейшему преобразованию.

Общий шаг этого процесса выглядит так:

$$v_\nu(j) = v_{\nu+1}(j) + w_{\nu+1}^{(1)}(j) + \ldots + w_{\nu+1}^{(n-1)}(j), \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Здесь

$$v_{\nu+1}(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} v_\nu(j - \tau N_{\nu+1}),$$

$$w_{\nu+1}^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} v_\nu(j - \tau N_{\nu+1}).$$

Осуществив все указанные разложения, придем к (5.7).

6. Обобщенные вейвлеты, связанные с прореживанием по частоте

6.1. Проведем аналогичное исследование, используя последовательность базисов $f_0, f_1, \ldots, f_s$. Обозначим через V_ν, $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$, линейную оболочку, натянутую на сигналы $f_\nu(p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, а через $W_\nu^{(\sigma)}$, $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, — линейную оболочку, натянутую на $f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$. По теореме 2.1 подпространства V_ν, $W_\nu^{(1)}$, …, $W_\nu^{(n-1)}$ попарно ортогональны при всех $\nu \in \{1, \ldots, s\}$. Согласно (2.4) при $l = 0$ имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{6.1}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Отсюда, как и в предыдущем разделе, следует представление

$$V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus W_\nu^{(2)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}.$$

Обозначим $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Учитывая, что $V_0 = \mathbb{C}_N$, приходим к вейвлетному разложению

$$\mathbb{C}_N = V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = \ldots =$$
$$= W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus V_s. \tag{6.2}$$

6.2. Выясним структуру вейвлетных подпространств. Нам потребуются две леммы, в которых используется операция $\underset{n}{\oplus}$ поразрядного сложения по модулю n двух целых неотрицательных чисел, представленных своими n-ичными кодами (см. разд. 1).

Лемма 6.1. *Пусть* $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. *При любых* $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$ *и* $j = 0, 1, \ldots, N-1$ *выполняется равенство*

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j). \tag{6.3}$$

Доказательство. Согласно (2.12) и (2.11) имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = f_\nu\big(\sigma\Delta_\nu; (j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1}\big) =$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\lambda} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1} - q - \lambda\Delta_\nu\big). \tag{6.4}$$

Обозначим через τ^* целое число из $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, такое, что $\tau \underset{n}{\oplus} \tau^* = 0$. Тогда

$$\delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1} - q - \lambda\Delta_\nu\big) = \delta_N\big((j_{s-1}\Delta_s + \ldots + j_\nu\Delta_{\nu+1} +$$
$$+ (j_{\nu-1} \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_\nu + j_{\nu-2}\Delta_{\nu-1} + \ldots + j_0) - p\Delta_{\nu+1} - \lambda\Delta_\nu - q\big) =$$
$$= \left\{\begin{array}{l} 1, \text{ если } j_{s-1}\Delta_s + \ldots + j_\nu\Delta_{\nu+1} = p\Delta_{\nu+1},\ j_{\nu-1} = \lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*, \\ \qquad\qquad j_{\nu-2}\Delta_{\nu-1} + \ldots + j_0 = q; \\ 0 \ \text{ при остальных } j \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \end{array}\right\} =$$
$$= \delta_N\big(j - p\Delta_{\nu+1} - (\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*)\Delta_\nu - q\big). \tag{6.5}$$

Отметим, что

$$\omega_n^{\sigma\lambda} = \omega_n^{\sigma[(\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*) \underset{n}{\oplus} \tau]} = \omega_n^{\sigma(\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*) + \sigma\tau}. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.5) и (6.6) в (6.4), получаем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma(\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*)} \delta_N\big(j - p\Delta_{\nu+1} - (\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*)\Delta_\nu - q\big) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\lambda'=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\lambda'} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - \lambda'\Delta_\nu - q) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Мы воспользовались тем, что при фиксированном τ^* отображение $\lambda \to \lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*$ есть перестановка множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Лемма доказана. •

Лемма 6.2. *Зафиксируем сигнал x и индекс $\nu \in \{1, \ldots, s\}$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

$$x(j) = x\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1; \tag{6.7}$$

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x(j), \quad q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $j = p\Delta_{\nu+1} + l$, где $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Если выполняется условие (6.7), то $x(j) = x(p\Delta_{\nu+1})$. Вместе с тем, при любом $q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ в силу того же условия (6.7) имеем

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x\big(\lfloor (j \underset{n}{\oplus} q)/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big) =$$

$$= x\Big(\big\lfloor \big(p\Delta_{\nu+1} + (l \underset{n}{\oplus} q)\big)/\Delta_{\nu+1} \big\rfloor \Delta_{\nu+1}\Big) = x(p\Delta_{\nu+1}) = x(j),$$

т. е. выполняется условие (6.8).

Наоборот, согласно (6.8)

$$x(j) = x(p\Delta_{\nu+1} + l) = x(p\Delta_{\nu+1} \underset{n}{\oplus} l) = x(p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= x\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big),$$

так что из (6.8) следует (6.7). Лемма доказана. •

Замечание. Условие (6.8) равносильно более простому условию

$$x(j \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu) = x(j), \quad \mu = 1, \ldots, \nu, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6.9}$$

Достаточно проверить импликацию (6.9)⇒(6.8). Сначала отметим, что

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\mu) = x(j), \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6.10}$$

При $\tau = 0$ и $\tau = 1$ это очевидно. При $\tau \geq 2$ на основании (6.9) получаем

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\mu) = x\Big(\big(j \underset{n}{\oplus} (\tau-1)\Delta_\mu\big) \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu\Big) = x\big(j \underset{n}{\oplus} (\tau-1)\Delta_\mu\big) =$$

$$= \ldots = x(j \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu) = x(j).$$

Учитывая (6.10), запишем

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2 + q_0\Delta_1)\big) =$$

$$= x\Big(\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2)\big) \underset{n}{\oplus} q_0\Delta_1\Big) =$$

$$= x\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2)\big) = \ldots = x(j \underset{n}{\oplus} q_{\nu-1}\Delta_\nu) = x(j),$$

что и требовалось установить.

Теорема 6.1. *Сигнал x является элементом подпространства V_ν тогда и только тогда, когда выполняется условие* (6.8).

Доказательство. По определению, V_ν состоит из сигналов вида

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, f_\nu(0; j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Поскольку

$$f_\nu(0; j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N-1, \end{cases}$$

то элементы V_ν являются кусочно-постоянными функциями, точнее

$$x(j) = x(p\Delta_{\nu+1}) \quad \text{при} \quad j = p\Delta_{\nu+1}, \ldots, (p+1)\Delta_{\nu+1} - 1,$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1.$$

Последнее условие можно записать иначе:

$$x(j) = x\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Остается сослаться на лемму (6.2). •

Теорема 6.2. *Справедлива формула*

$$W_\nu^{(\sigma)} = \Big\{ x \in V_{\nu-1} \,\Big|\, x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j) \;\; \textit{при всех} \;\; \tau = 1, \ldots, n-1 \;\; \textit{и} \;\; j = 0, 1, \ldots, N-1 \Big\}. \quad (6.11)$$

Доказательство. Обозначим через $G_\nu^{(\sigma)}$ множество, стоящее в правой части (6.11), и покажем сначала, что $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$. Пусть $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Так как $W_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu \subset V_{\nu-1}$, то $x \in V_{\nu-1}$. Далее

$$x = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

Согласно (6.3)

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j).$$

Значит, $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Включение $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$ установлено.

Проверим обратное включение. Пусть $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. В частности, $x \in V_{\nu-1}$. Учитывая, что $V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$, запишем

$$x = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(\lambda, p)\, f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

В силу определения $G_\nu^{(\sigma)}$ и (6.3) при $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем

$$x(j) = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma\tau} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(\lambda, p)\, \omega_n^{\lambda\tau} f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Сложив эти равенства и поделив на n, получим

$$x = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1}\omega_n^{\lambda\tau}c(\lambda,p)\,f_\nu(\lambda\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1}\sum_{\lambda=0}^{n-1}c(\lambda,p)\,f_\nu(\lambda\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})\Big\{\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{(\lambda-\sigma)\tau}\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1}c(\sigma,p)\,f_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}),$$

т. е. $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Включение $G_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu^{(\sigma)}$, а с ним и теорема, доказаны. ●

6.3. Согласно (6.2) любой сигнал x допускает представление

$$x = x_s(0)\,f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1}x_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})\,f_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}). \tag{6.12}$$

Здесь $x_s(0) = N^{-1}\langle x, f_s(0)\rangle = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}x(j)$ и

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\langle x, f_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})\rangle.$$

Учитывая (6.1), запишем

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\,\langle x, f_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\,x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}).$$

При этом $x_0(k) = \langle x, f_0(k)\rangle = x(k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Приходим к рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложения (6.12):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \qquad (6.13)$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $x_\nu(p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu+1)$-го уровня.

Обращение преобразования (6.13) приводит к следующей схеме:

$$x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Эта схема позволяет вычислить значения сигнала x, заданного в виде (6.12), на основном периоде, а именно $x(k) = x_0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Разложение (6.12) назовем *разложением Хаара—Крестенсона, связанным с прореживанием по частоте*, а схему (6.13) — *быстрым преобразованием Хаара—Крестенсона.*

Отметим, что в (6.12) базисные сигналы $f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})$ можно сформировать из $n-1$ сигнала $f_1(\sigma\Delta_1)$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Это следует из (2.12) и (2.13). Для образующих сигналов $f_1(\sigma\Delta_1)$ согласно (2.11) имеется явное представление

$$f_1(\sigma\Delta_1; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\delta_N(j-\tau).$$

6.4. Формулу (6.12) можно вывести непосредственно. При этом проясняется роль операции $\underset{n}{\oplus}$ поразрядного сложения по модулю n при прореживании по частоте.

Начнем с одного вспомогательного утверждения.

Лемма 6.3. *Справедливо равенство*

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(0; j \underset{n}{\oplus} p^*\Delta_{\nu+1}), \qquad (6.14)$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s, \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1,$$

где p^* *— целое число из* $\{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, *определяемое условием* $p \underset{n}{\oplus} p^* = 0$.

Доказательство. При $\nu = s$ формула (6.14) тривиальна, поскольку $f_s(0; j) \equiv 1$. Пусть $\nu \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. В силу (2.10)

$$f_\nu(0; j \underset{n}{\oplus} p^* \Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} p^* \Delta_{\nu+1}) - q\big).$$

При этом

$$\delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} p^* \Delta_{\nu+1}) - q\big) = \delta_N\big((\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \underset{n}{\oplus} p^*)\Delta_{\nu+1} + \langle j \rangle_{\Delta_{\nu+1}} - q\big) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } \; \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor = p \; \text{ и } \; \langle j \rangle_{\Delta_{\nu+1}} = q\,; \\ 0 \;\; \text{при остальных } \; j \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \end{array} \right\} =$$

$$= \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q).$$

Значит,

$$f_\nu(0; j \underset{n}{\oplus} p^* \Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) =$$

$$= f_\nu(0; j - p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Лемма доказана. •

Из (6.14) следует, что

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1}) = f_\nu\big((p \underset{n}{\oplus} k^*)\Delta_{\nu+1}; j\big), \qquad (6.15)$$

$$p, k = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s, \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Действительно,

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1}; j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(0; j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1} \underset{n}{\oplus} p^* \Delta_{\nu+1}) =$$

$$= f_\nu\big(0; j \underset{n}{\oplus} (k \underset{n}{\oplus} p^*)\Delta_{\nu+1}\big) = f_\nu\big((p \underset{n}{\oplus} k^*)\Delta_{\nu+1}; j\big).$$

Мы воспользовались тем, что $(k \underset{n}{\oplus} p^*)^* = p \underset{n}{\oplus} k^*$.

Переходим к непосредственному выводу формулы (6.12). При $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеем

$$x(j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \Big\} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) =$$

$$= v_1(j) + w_1^{(1)}(j) + \ldots + w_1^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_1(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(q)\, f_0(q; j \underset{n}{\oplus} \tau).$$

Пользуясь формулой (6.15) при $\nu = 0$ и (6.1), получаем

$$v_1(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(q)\, f_0(q \underset{n}{\oplus} \tau^*; j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{N-1} x(q' \underset{n}{\oplus} \tau)\, f_0(q'; j) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{n-1} x\big(np + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\big)\, f_0(np + k; j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_0(k\Delta_1 + p\Delta_2; j) \Big\} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\tau'=0}^{n-1} x_0(\tau'\Delta_1 + p\Delta_2) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} x_1(p\Delta_2)\, f_1(p\Delta_2; j).$$

Аналогично при $\sigma = 1, \ldots, n-1$

$$w_1^{(\sigma)}(j) := \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(q \underset{n}{\oplus} \tau)\, f_0(q; j) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma(k \underset{n}{\oplus} \tau) + \sigma k} x\big(np + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\big)\, f_0(np + k; j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma k} f_0(k\Delta_1 + p\Delta_2; j) \Big\} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\tau'=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau'} x_0(\tau'\Delta_1 + p\Delta_2) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} x_1(\sigma\Delta_1 + p\Delta_2)\, f_1(\sigma\Delta_1 + p\Delta_2; j).$$

Слагаемые $w_1^{(\sigma)}(j)$ являются вейвлетными составляющими. Они входят в (6.12) при $\nu = 1$. Сигнал $v_1(j)$ преобразуется по такому же правилу

$$v_1(j) = v_2(j) + w_2^{(1)}(j) + \ldots + w_2^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_2(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} v_1(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N_1-1} x_1(q\Delta_2)\, f_1(q\Delta_2; j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N_1-1} x_1(q\Delta_2)\, f_1\big((q \underset{n}{\oplus} \tau^*)\Delta_2; j\big) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q'=0}^{N-1} x_1\big((q' \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_2\big)\, f_1(q'\Delta_2; j) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{n-1} x_1\big(p\Delta_3 + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_2\big)\, f_1(p\Delta_3 + k\Delta_2; j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} \Big\{\sum_{k=0}^{n-1} f_1(k\Delta_2 + p\Delta_3; j)\Big\}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{\tau'=0}^{n-1} x_1(\tau'\Delta_2 + p\Delta_3)\Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} x_2(p\Delta_3)\, f_2(p\Delta_3; j)\,;$$

$$w_2^{(\sigma)}(j) := \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} v_1(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} x_2(\sigma\Delta_2 + p\Delta_3)\, f_2(\sigma\Delta_2 + p\Delta_3; j)\,.$$

Общий шаг этого процесса выглядит так:

$$v_\nu(j) = v_{\nu+1}(j) + w^{(1)}_{\nu+1}(j) + \ldots + w^{(n-1)}_{\nu+1}(j), \quad \nu = 1, \ldots, s-1,$$

где

$$v_{\nu+1}(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} v_\nu(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_{\nu+1}),$$

$$w^{(\sigma)}_{\nu+1}(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} v_\nu(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_{\nu+1}).$$

Осуществив все указанные разложения, придем к (6.12).

7. Обобщенный кратно-масштабный анализ

7.1. Ортогональные базисы Хаара—Крестенсона

$$\bigl\{f_s(0);\ f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),\\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s\bigr\},$$

$$\bigl\{g_s(0);\ g_\nu(\sigma N_\nu + p),\\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s\bigr\}$$

можно получить также с помощью кратно-масштабного анализа пространства $\mathbb{C}_N$ по основанию n.

Введем сигналы

$$\varphi_\nu(j) = \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \delta_N(j-k).$$

Обозначим $\mathcal{V}_\nu = \operatorname{lin}\bigl(\{\varphi_\nu(\cdot - qN_\nu)\}_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}\bigr)$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Очевидно, что $\mathcal{V}_\nu \subset \mathbb{C}_N$ — подпространство кусочно-постоянных сигналов с ортогональным базисом $\{\varphi_\nu(\cdot - qN_\nu)\}_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}$, причем

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_s = \mathbb{C}_N. \tag{7.1}$$

Найдем ортогональное дополнение $\mathcal{W}_1$ подпространства $\mathcal{V}_0$ до $\mathcal{V}_1$. Для этого построим ортогональный базис в $\mathcal{V}_1$, содержащий сигнал φ_0. Положим

$$\psi^{(\sigma)}_1(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q} \varphi_1(j - qN_1), \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Сигналы $\psi_1^{(\sigma)}$ принадлежат $\mathcal{V}_1$ и попарно ортогональны, поскольку

$$\langle\psi_1^{(\sigma_1)},\, \psi_1^{(\sigma_2)}\rangle = N_1\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{(\sigma_1-\sigma_2)q} = N\delta_n(\sigma_1-\sigma_2).$$

К тому же их количество совпадает с размерностью $\mathcal{V}_1$. Значит, $\{\psi_1^{(\sigma)}\}_{\sigma=0}^{n-1}$ — ортогональный базис подпространства $\mathcal{V}_1$. При этом

$$\psi_1^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1}\varphi_1(j-qN_1) \equiv 1 \equiv \sum_{k=0}^{N-1}\delta_N(j-k) = \varphi_0(j).$$

Обозначим $\mathcal{W}_1 = \mathrm{lin}\big(\{\psi_1^{(\sigma)}\}_{\sigma=1}^{n-1}\big)$. Учитывая, что $\mathcal{V}_0 = \mathrm{lin}(\varphi_0)$, получаем $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_1$.

В общем случае при $\nu = 2,\ldots,s$ положим

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma q}\,\varphi_\nu(j-qN_\nu), \quad \sigma = 0,1,\ldots,n-1.$$

Нетрудно проверить, что при фиксированном ν

$$\begin{aligned}\big\langle\psi_\nu^{(\sigma_1)}(\cdot-k_1N_{\nu-1}),\,\psi_\nu^{(\sigma_2)}(\cdot-k_2N_{\nu-1})\big\rangle = \\ = N_{\nu-1}\delta_n(\sigma_1-\sigma_2)\,\delta_{\Delta_\nu}(k_1-k_2)\end{aligned} \tag{7.2}$$

для $\sigma_1,\sigma_2 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $k_1,k_2 \in \{0,1,\ldots,\Delta_\nu-1\}$. Действительно, обозначим через S левую часть формулы (7.2) и преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned}S = \Big\langle \sum_{q_1=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma_1q_1}\,\varphi_\nu(\cdot-k_1N_{\nu-1}-q_1N_\nu),\\ \sum_{q_2=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma_2q_2}\,\varphi_\nu(\cdot-k_2N_{\nu-1}-q_2N_\nu)\Big\rangle =\end{aligned}$$

$$= \sum_{q_1,q_2=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma_1q_1-\sigma_2q_2}\,\big\langle\varphi_\nu\big(\cdot-(k_1n+q_1)N_\nu\big),\,\varphi_\nu\big(\cdot-(k_2n+q_2)N_\nu\big)\big\rangle.$$

При $k_1 \neq k_2$ согласно определению φ_ν имеем $S = 0$, что соответствует (7.2). Пусть $k_1 = k_2$. Тогда

$$S = N_\nu \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{(\sigma_1 - \sigma_2)q} = N_{\nu-1} \delta_n(\sigma_1 - \sigma_2),$$

что также соответствует (7.2).

Определим подпространство $\mathcal{W}_\nu^{(\sigma)}$ как линейную оболочку системы ортогональных сигналов $\{\psi_\nu^{(\sigma)}(\cdot - kN_{\nu-1})\}_{k=0}^{\Delta_\nu - 1}$. В силу (7.2) подпространства $\mathcal{W}_\nu^{(0)}, \mathcal{W}_\nu^{(1)}, \ldots, \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}$ ортогональны. Поскольку сигналы $\psi_\nu^{(\sigma)}(j - kN_{\nu-1})$, $k = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат $\mathcal{V}_\nu$ и их количество $\Delta_{\nu+1}$ совпадает с размерностью $\mathcal{V}_\nu$, то

$$\mathcal{V}_\nu = \mathcal{W}_\nu^{(0)} \oplus \mathcal{W}_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}. \tag{7.3}$$

Отметим, что

$$\psi_\nu^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \varphi_\nu(j - qN_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big(j - (qN_\nu + k)\big) =$$

$$= \sum_{k'=0}^{N_{\nu-1}-1} \delta_N(j - k') = \varphi_{\nu-1}(j).$$

Как следствие, получаем $\mathcal{W}_\nu^{(0)} = \mathcal{V}_{\nu-1}$. Если обозначить $\mathcal{W}_\nu = \mathcal{W}_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}$, то (7.3) примет вид $\mathcal{V}_\nu = \mathcal{V}_{\nu-1} \oplus \mathcal{W}_\nu$, $\nu = 2, \ldots, s$. Как отмечалось, последнее равенство верно и при $\nu = 1$.

Теперь имеем

$$\mathbb{C}_N = \mathcal{V}_s = \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{V}_{s-1} = \mathcal{W}_s \oplus (\mathcal{W}_{s-1} \oplus \mathcal{V}_{s-2}) = \ldots =$$

$$= \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{W}_{s-1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{V}_0.$$

Это значит, что любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = \alpha\varphi_0(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} \alpha_\nu^{(\sigma)}(k) \psi_\nu^{(\sigma)}(j - kN_{\nu-1}). \tag{7.4}$$

Сравним формулы (7.4) и (6.12). Прежде всего отметим, что $\varphi_0(j) \equiv f_s(0;\, j) \equiv 1$. Далее, в силу равенства $N_\nu = \Delta_{s-\nu+1}$ и соотношений (2.11) и (2.12)

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q} \sum_{k=0}^{\Delta_{s-\nu+1}-1} \delta_N(j-k-q\Delta_{s-\nu+1}) = f_{s-\nu+1}(\sigma\Delta_{s-\nu+1};\, j),$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j-kN_{\nu-1}) = f_{s-\nu+1}(\sigma\Delta_{s-\nu+1};\, j-k\Delta_{s-\nu+2}) =$$
$$= f_{s-\nu+1}(\sigma\Delta_{s-\nu+1}+k\Delta_{s-\nu+2};\, j).$$

Приходим к другой форме записи разложения (7.4):

$$x = \alpha f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_{s-\nu+1}-1} \alpha_\nu^{(\sigma)}(k) f_{s-\nu+1}(\sigma\Delta_{s-\nu+1}+k\Delta_{s-\nu+2}). \tag{7.5}$$

Видно, что формула (7.5) лишь порядком слагаемых по ν отличается от (6.12).

Таким образом, цепочка вложенных подпространств (7.1) обеспечивает обобщенный кратно-масштабный анализ пространства $\mathbb{C}_N$, приводящий к разложению сигналов по базису Хаара—Крестенсона с прореживанием по частоте.

Рассмотрим случай прореживания по времени. Положим

$$\varphi_\nu(j) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j),$$

$$V_\nu = \operatorname{lin}\big(\{\varphi_\nu(\cdot - k)\}_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}\big), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s;$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \varphi_\nu(j-q\Delta_\nu),$$

$$W_\nu^{(\sigma)} = \operatorname{lin}\big(\{\psi_\nu^{(\sigma)}(\cdot - k)\}_{k=0}^{\Delta_\nu-1}\big), \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s.$$

Очевидно, что $V_\nu = \mathbb{C}_{\Delta_{\nu+1}}$. В частности, $V_s = \mathbb{C}_N$ и $V_0 = \operatorname{lin}(\varphi_0)$, где $\varphi_0(j) \equiv 1$. При этом

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_s = \mathbb{C}_N. \tag{7.6}$$

Далее, при фиксированном $\nu \in \{2, \ldots, s\}$

$$\left\langle \psi_\nu^{(\sigma_1)}(\cdot - k_1),\, \psi_\nu^{(\sigma_2)}(\cdot - k_2) \right\rangle = N_{\nu-1} \delta_n(\sigma_1 - \sigma_2)\, \delta_{\Delta_\nu}(k_1 - k_2)$$

для $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$. Это доказывается по той же схеме, что и (7.2). Поскольку сигналы $\psi_\nu^{(\sigma)}(j-k)$, $k = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат V_ν, попарно ортогональны и их количество $\Delta_{\nu+1}$ совпадает с размерностью V_ν, то

$$V_\nu = W_\nu^{(0)} \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}. \tag{7.7}$$

Отметим, что

$$\psi_\nu^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \varphi_\nu(j - q\Delta_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j - q\Delta_\nu) = \delta_{\Delta_\nu}(j) = \varphi_{\nu-1}(j).$$

Как следствие, получаем $W_\nu^{(0)} = V_{\nu-1}$. Если обозначить $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$, то (7.7) примет вид $V_\nu = V_{\nu-1} \oplus W_\nu$, $\nu = 2, \ldots, s$. Эта формула верна и при $\nu = 1$.

Теперь имеем $\mathbb{C}_N = V_s = W_s \oplus V_{s-1} = \ldots = W_s \oplus W_{s-1} \oplus \ldots \oplus W_1 \oplus V_0$. Это значит, что любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = \beta \varphi_0(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} \beta_\nu^{(\sigma)}(k) \psi_\nu^{(\sigma)}(j - k). \tag{7.8}$$

Сравним формулы (7.8) и (5.7). Прежде всего отметим, что $\varphi_0(j) \equiv g_s(0;\, j) \equiv 1$. Далее, согласно (3.7) и (3.10)

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j - q\Delta_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \delta_{N_{s-\nu}}(j - qN_{s-\nu+1}) =$$

$$= g_{s-\nu+1}(\sigma N_{s-\nu+1};\, j),$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j - k) = g_{s-\nu+1}(\sigma N_{s-\nu+1} + k;\, j).$$

Приходим к другой форме записи разложения (7.8):

$$x = \beta g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_{s-\nu+1} - 1} \beta_\nu^{(\sigma)}(k)\, g_{s-\nu+1}(\sigma N_{s-\nu+1} + k). \tag{7.9}$$

Видно, что формула (7.9) лишь порядком слагаемых по ν отличается от (5.7).

Таким образом, цепочка вложенных подпространств (7.6) обеспечивает обобщенный кратно-масштабный анализ пространства $\mathbb{C}_N$, приводящий к разложению сигналов по базису Хаара—Крестенсона с прореживанием по времени.

Список литературы

[1] Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М., *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов*, Пер. с англ., Радио и связь, М., 1983.

[2] Блейхут Р., *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*, Пер. с англ., Мир, М., 1989.

[3] Cooley J. W., Tukey J. W., *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. **19** (1965), 297–301.

[4] Малоземов В. Н., Третьяков А. А., *Новый подход к алгоритму Кули—Тьюки*, Вестн. СПбГУ, сер. 1, 1997, вып. 3 (№ 15), 57–60.

[5] Малоземов В. Н., Третьяков А. А., *Алгоритм Кули—Тьюки и дискретное преобразование Хаара*, Вестн. СПбГУ, сер. 1, 1998, вып. 3 (№ 15), 31–34.

[6] Малоземов В. Н., Третьяков А. А., *Секционирование, ортогональность и перестановки*, Вестн. СПбГУ, сер. 1, 1999, вып. 1 (№ 1), 16–21.

[7] Виленкин Н. Я., *Об одном классе полных ортогональных систем*, Изв. АН СССР, сер. матем. **11** (1947), 363–400.

[8] Chrestenson H. E., *A class of generalized Walsh functions*, Pacific J. Math. **5** (1955), 17–31.

[9] Трахтман А. М., Трахтман В. А., *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*, Сов. радио, М., 1975.

[10] Дагман Э. Е., Кухарев Г. А., *Быстрые дискретные ортогональные преобразования*, Наука, Новосибирск, 1983.

[11] Good I. J., *The interaction algorithm and practical Fourier analysis*, J. Royal Stat. Soc. **B-20** (1958), 361–372.

[12] Малоземов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А., *Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений*, Пробл. передачи инф. **34** (1998), вып. 2, 77–85.

[13] Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[14] Новиков И. Я., Стечкин С. Б., *Основы теории всплесков*, Успехи матем. наук **53** (1998), вып. 6, 53–128.

[15] Петухов А. П., *Введение в теорию базисов всплесков*, Изд-во СПбГТУ, СПб., 1999.

[16] Ахмед Н., Рао К. Р., *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов*, Пер. с англ., Связь, М., 1980.

[17] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., *Ряды и преобразования Уолша*, Наука, М., 1987.

[18] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., *Матрицы и вычисления*, Наука, М., 1984.

С.-Петербургский государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

E-mail: malv@gamma.math.spbu.ru
smash@scientist.com