МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ - ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЧЕРНЫШЕВ Владимир Евгеньевич

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ КОНТУРЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ УСТОЙЧИВЫЙ ХАОС

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук

Научный консультант — член-корреспондент
Российской Академии наук, доктор
физико-математических наук, профессор
Плисс Виктор Александрович

Санкт - Петербург
1998

Оглавление

Введение

Имеется много примеров трехмерных автономных систем дифференциальных уравнений таких, что наличие у них достаточно простого инвариантного множества — гетероклинического контура — влечет существование хаотического инвариантного множества в любой окрестности гетероклинического контура. В этом случае будем говорить, что гетероклинический контур порождает хаос.

Определение. *Гетероклиническим контуром* Γ *будем называть связное компактное инвариантное множество системы дифференциальных уравнений, состоящее из конечного числа траекторий* $\gamma_i, \ i \in 1:m$, *и их* α *и* ω *- предельных множеств:*

$$\Gamma = \{\cup_{i \in 1:m} \gamma_i\} \cup \{\cup_{i \in 1:m} \alpha(\gamma_i)\} \cup \{\cup_{i \in 1:m} \omega(\gamma_i)\}.$$

При этом каждое предельное множество, входящее в контур Γ *является либо замкнутой траекторией системы, либо точкой покоя и они гиперболичны.*

Определение.[45]

Инвариантное множество J *будем называть хаотическим, если выполнены следующие три условия*

1. Множество J *транзитивно, то есть существует всюду плотная в* J *траектория системы дифференциальных уравнений.*

2. Множество периодических траекторий плотно в J.

3. Имеется чувствительная зависимость от начальных данных, то есть существует число $\varepsilon > 0$ *такое, что для любой точки* $x \in J$ *и любого числа* $\delta > 0$ *существуют точка* y *и момент времени* $t > 0$ *такие, что* $\rho(x, y) < \delta$ *и* $\rho(g^t x, g^t y) > \varepsilon$, *где через* $\rho(x, y)$ *обозначено расстояние между точками, а через* g^t *— поток, порожденный автономной системой.*

В первую очередь к гетероклиническим контурам, порождающим хаос, следует отнести трансверсальные гетероклинические циклы на замкнутых гиперболических траекториях.

Определение.

Гетероклинический контур Γ *будем называть гетероклиническим циклом, если нумерацию траекторий в нем можно выбрать так, что* $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1}), \ i \in 1 : m-1, \quad \omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1)$ *и* $\alpha(\gamma_i) \cap \alpha(\gamma_j) = \emptyset$ *при* $i \neq j (\bmod m)$.

Каждое предельное множество, входящее в трансверсальный гетероклинический цикл на замкнутых траекториях, представляет собой замкнутую гиперболическую траекторию системы, при этом устойчивое многообразие W_i^s предельного множества

$\alpha(\gamma_i)$ трансверсально пересекает неустойчивое многообразие W_{i-1}^u предельного множества $\omega(\gamma_i)$ по траектории $\gamma_i, \ i \in 1 : m$. Порожденные такими гетероклиническими циклами хаотические инвариантные множества подробно исследованы ([36], [18], [21], [22], [53]). Из этих работ следует, что хаотическое инвариантное множество, порожденное таким циклом, сохраняется при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы. Более того, оно является локально грубым.

Определение.[3, стр. 47]

Инвариантное множество J системы дифференциальных уравнений будем называть локально грубым, если у него имеются такие окрестности $U \supset V \supset J$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой системы дифференциальных уравнений, которая отличается в U в $\mathbb{C}^1$-метрике от исходной системы меньше чем на δ, существует гомеоморфизм $h: V \to U$, который сдвигает точки меньше, чем на ε, и переводит дуги траекторий исходной системы, лежащие в V, в дуги траекторий возмущенной системы, лежащие в hV, с сохранением ориентации.

Ситуация коренным образом меняется, если рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет гетероклинический цикл, содержащий точки покоя. В этом случае при некотором i устойчивое многообразие W_i^s пересекается с неустойчивым многообразием W_{i-1}^u нетрансверсально по траектории γ_i и такой цикл может быть разрушен сколь угодно $\mathbb{C}^1$ - малым возмущением исходной системы дифференциальных уравнений. Это означает, что любое инвариантное множество исходной системы, содержащее такой гетероклинический цикл, не может быть локально грубым.

Однако, имеются примеры систем дифференциальных уравнений, имеющих гетероклинический цикл с точками покоя такой, что в любой его окрестности лежит хаотическое инвариантное множество возмущенной системы дифференциальных уравнений, если возмущение достаточно $\mathbb{C}^1$ - мало.

В этом случае будем говорить, что хаотическое инвариантное множество персистентно.

Хронологически первым примером такого гетероклинического цикла был цикл в $\mathbb{R}^3$, состоящий из точки покоя типа седло - фокус и гомоклинической к нему траектории [37]. Исследованию структуры хаотического инвариантного множества, порожденного таким циклом, и возможных бифуркаций, связанных с его разрушением, посвящено много работ ([10], [12], [46], [39]).

Исследовались [59] также трехмерные системы с гетероклиническими циклами, содержащими два и более предельных множества, одно из которых седло - фокус, а другие — точки покоя с вещественными ненулевыми собственными числами матрицы первого приближения, причем имеются собственные числа разных знаков. (Далее будем называть такие точки покоя седловыми или седлами.) Доказано, что в окрестности такого цикла лежит нетривиальное гиперболическое множество со счетным числом замкнутых траекторий как у исходной невозмущенной системы, так и у всех $\mathbb{C}^1$ - близких к ней систем.

Рассматриваемые циклы с седло - фокусом не являются локально грубыми. Это следует, например, из результата Афраймовича и Ильяшенко [4], которые доказали для гладкого векторного поля в $\mathbb{R}^3$, имеющего гомоклиническую траекторию к точке покоя типа седло - фокус с собственными числами $\alpha \pm i\beta, \quad \lambda$ $(\alpha \cdot \lambda < 0)$, что число α/λ является топологическим инвариантом.

Описанные выше гетероклинические циклы трехмерных автономных систем дифференциальных уравнений порождают в своей окрестности персистентное хаотическое инвариантное множество. При этом хаотическое инвариантное множество не является локально грубым, то есть при сколь угодно $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы меняется его топологическая структура.

Гетероклинические циклы с точками покоя представляют несомненный интерес для понимания того, как сложная динамика может возникать из простой. В работе [38] рассматривается система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ с гетероклиническим циклом, которая лежит на границе множества систем типа Морса – Смейла, то есть систем, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и периодических траекторий, устойчивые и неустойчивые многообразия которых пересекаются трансверсально. Рассматриваемая система имеет неблуждающее множество, состоящее из конечного числа траекторий. Однако, сколь угодно малым в смысле $\mathbb{C}^1$ возмущением можно получить систему, которая имеет хаотическое инвариантное множество.

Такую бифуркацию неблуждающего множества называют Ω - взрывом.

Гетероклинический цикл, рассмотренный в работе [38], содержал среди предельных множеств седловую замкнутую траекторию и седловое состояние равновесия. Возмущение гетероклинических циклов, среди предельных множеств которых содержатся лишь седловые замкнутые траектории, но нарушено условие трансверсальности пересечения их устойчивых и неустойчивых многообразий, может приводить к Ω - взрыву. В работах [14], [15], [17] рассматривался гетероклинический цикл в трехмерной автономной системе, состоящий из замкнутой седловой траектории и траектории, двоякоасимптотической к ней, по которой устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются нетрансверсально. Было доказано, что наличие такого цикла приводит к Ω - взрыву.

К Ω - взрыву может привести наличие в системе гетероклинического цикла, содержащего среди предельных множеств лишь точки покоя. В работах [5], [8] рассматривался гетероклинический цикл, состоящий из вырожденной точки покоя с одним нулевым собственным числом матрицы первого приближения и гомоклинической к нему траектории. Доказано, что $\mathbb{C}^1$ - малое возмущение, разрушающее точку покоя, приводит к Ω - взрыву.

Гетероклинический цикл, содержащий среди предельных множеств состояния равновесия, не может встречаться в системах общего положения, поскольку хотя бы по одной траектории цикла устойчивое и неустойчивое многообразия ее предельных множеств будут пересекаться нетрансверсально. Гетероклинические циклы с k неподвижными седловыми точками покоя могут встречаться неустранимым образом лишь в k - параметрических семействах систем дифференциальных уравнений. Бифуркации гетероклинического цикла, состоящего из двух седловых точек покоя и пары гетероклинических к ним траекторий, в двухпараметрическом семействе подробно описаны в работе [43]. Из результатов этой работы, в частности, следует, что при выполнении некоторого условия общего положения не может рождаться хаотическое инвариантное множество. Это условие состоит в том, что пересечение замыкания устойчивого многообразия ω - предельного множества траектории из цикла с устойчивым многообразием ее α - предельного множества должно совпадать с сильно устойчивым многообразием ее α - предельного множества.

Как показано в работе [40], нарушение этого условия в гетероклиническом цикле трехмерной системы может приводить к Ω - взрыву при разрушении цикла.

Резюмируя перечисленные выше работы, можно отметить, что гетероклинический цикл, содержащий среди предельных множеств только точки покоя, отличные от седло - фокусов, не порождает персистентное хаотическое множество, то есть существуют сколь угодно $\mathbb{C}^1$ - малые возмущения системы такие, что неблуждающее множество возмущенной системы, лежащее в некоторой окрестности гетероклинического цикла, конечно.

Самым известным примером трехмерной автономной системы, обладающей персистентным хаотическим инвариантным множеством, является система Лоренца [52]:

$$\begin{cases} \dot{x} = & -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = & rx - y - xz \\ \dot{z} = & -bz + xy. \end{cases}$$

Если зафиксировать в системе параметры σ, b, положив $\sigma = 4,\ b = 8/3$, то при изменении параметра r происходит ряд бифуркаций, описание которых приведено в работах [58], [3].

При $r = r_1 \approx 13.926$ одномерные неустойчивые сепаратрисы Γ_1, Γ_2 седловой точки покоя $O = (0,0,0)$ становятся двоякоасимптотическими к седлу O. Таким образом, возникает гетероклинический контур, состоящий из двух симметричных гомоклинических циклов, каждый из которых содержит седло O и гомоклиническую к нему траекторию. При возрастании параметра r из каждого гомоклинического цикла рождается замкнутая траектория седлового типа. Одновременно появляется инвариантное хаотическое множество. Такое поведение траекторий было названо в работе [50] метастабильным хаосом. Обозначим через L_1 замкнутую траекторию, родившуюся при $r \approx 13.926$ из гомоклинического цикла, содержащего неустойчивую сепаратрису Γ_1, вторую замкнутую траекторию обозначим через L_2.

При $r = r_2 \approx 24.06$ система обладает более сложным гетероклиническим контуром, состоящим из двух гетероклинических циклов. Первый из них состоит из седла O неустойчивой сепаратрисы Γ_1 замкнутой траектории L_2 и траектории γ_1 трансверсального пересечения неустойчивого многообразия $W^u(L_2)$ траектории L_2 с устойчивым многообразием $W^s(O)$ седла O. Аналогично устроен второй, симметричный гетероклинический цикл.

При дальнейшем возрастании r оба гетероклинических цикла разрушаются. Аттрактор Лоренца рождается при появлении описанного гетероклинического контура и сохраняется при возрастании r. Как отмечается в главе 2 работы [3], такое описание последовательных бифуркаций в системе Лоренца представляет из себя интерпретацию численных экспериментов.

Для изучения потока, порожденного системой Лоренца, было предложено два подхода. Первый, изложенный, например, в работах [6], [7], состоит в изучении отображения последования T, которое возникает на некоторой области D плоскости $z = r - 1$. Если предположить, что отображение T удовлетворяет некоторым условиям, то можно аналитически доказать описанные выше бифуркации в системе Лоренца. Выполнение части этих условий для системы Лоренца подтверждается численными экспериментами на ЭВМ [57].

Другой подход при интерпретации результатов численных экспериментов состоит в исследовании полупотока на двумерном разветвленном многообразии [61], [62]. Этот подход предполагает существование сильно устойчивого слоения у системы Лоренца, что строго не доказано. Исследованная в работах [61], [62] динамическая система носит название геометрической модели Лоренца. Для нее доказано существование дифференцируемого сильно устойчивого слоения [54]. Хаотические инвариантные множества, появляющиеся при бифуркациях в геометрической модели Лоренца хотя и не являются локально грубыми, так как при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях может меняться их внутренняя топологическая структура, но сохраняются при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях.

В работе [55] Робинсон, модифицируя систему Рыхлика [56], предложил свою трехмерную систему, в которой хаотическое инвариантное множество появляется при разрушении гетероклинического контура, аналогичного первому контуру системы Лоренца. Следует заметить, что система Робинсона при бифуркационном значении параметров, то есть при наличии гетероклинического контура, имеет простое неблуждающее множество, так что сам контур Робинсона не порождает хаотического множества и его система лежит на границе множества систем Морса - Смейла.

Если гетероклинический контур содержит несколько гетероклинических циклов, то, хотя каждый из них в отдельности может не порождать персистентного хаотического инвариантного множества, лежащего в достаточно малой его окрестности, они вместе могут порождать хаотическое инвариантное множество, лежащее в объединении их достаточно малых окрестностей. Пример такого гетероклинического контура в $\mathbb{R}^3$, состоящего из двух седловых точек покоя и трех гетероклинических к ним траекторий, содержится в работе [13]. Одна из точек покоя, входящая в этот контур, имеет двумерное неустойчивое многообразие, которое трансверсально пересекается с двумерным устойчивым многообразием второй точки покоя по двум траекториям. В контур так же входит гетероклиническая траектория, которая является устойчивой сепаратрисой для первой точки покоя и неустойчивой сепаратрисой для второй.

Анализируя приведенные примеры динамических систем в $\mathbb{R}^3$, имеющих гетероклинические циклы, среди предельных множеств которых есть точки покоя и нет седло - фокусов, можно заключить, что в общем случае такой гетероклинический цикл может порождать персистентное хаотическое инвариантное множество, если среди его предельных множеств есть как седловые точки покоя, так и седловые замкнутые траектории. Два простейших гетероклинических цикла такого типа имеются у системы Лоренца при рождении аттрактора Лоренца, поэтому оправдано следующее определение.

Определение. *Гетероклинический цикл трехмерной автономной системы, среди предельных множеств которого содержатся как седловые точки покоя, так и седловые замкнутые траектории с ориентируемыми устойчивыми и неустойчивыми многообразиями и нет точек покоя типа седло - фокус, будем называть гетероклиническим циклом типа Лоренца или Лоренцевым гетероклиническим циклом.*

Такой гетероклинический цикл является основным объектом изучения в данной работе.

Впервые простейший гетероклинический цикл Γ типа Лоренца трехмерной автономной системы был исследован в работе [24]. Такой цикл содержит два предельных множества, именно: замкнутую седловую траекторию и седловую точку покоя и пару гетероклинических к ним траекторий. При некоторых дополнительных предположениях, которые будут сформулированы ниже в общем случае, было доказано существование инвариантного множества, содержащего бесконечно много замкнутых траекторий и лежащего в сколь угодно малой окрестности цикла Γ. Фактически в работе [24] была доказана хаотичность этого инвариантного множества, поскольку для него была построена символическая динамика.

Персистентность этого инвариантного множества J была доказана в работе [25]. Точнее было доказано, что для любой окрестности V гетероклинического цикла Γ типа Лоренца трехмерной автономной системы найдется такое число $\varepsilon > 0$, что любая система, отличающаяся от исходной в $\mathbb{C}^1$ - норме меньше, чем на ε, имеет в окрестности V инвариантное множество $J(\varepsilon)$, содержащее бесконечно много замкнутых траекторий.

Несколько позже в работе [51] рассматривался гетероклинический контур, состоящий из двух гетероклинических циклов Лоренцева типа. Он состоит из трех траекторий трехмерной автономной системы, заданной в шаре, и двух предельных множеств. Одно из этих множеств — седловая замкнутая траектория, другое — седловая точка покоя с двумерным устойчивым многообразием, которое трансверсально пересекает двумерное неустойчивое многообразие замкнутой траектории по двум траекториям, входящим в контур. Третья траектория гетероклинического контура совпадает с неустойчивой сепаратрисой седловой точки покоя. При этом как предельные множества, так и неустойчивая сепаратриса лежат на границе шара. В работе [51] показано, что $\mathbb{C}^1$ - малые возмущения системы, оставляющие инвариантной границу, не разрушают описанного гетероклинического контура и сама система является структурно устойчивой в классе таких возмущений. Почти очевидно, что неблуждающее множество этой системы не гиперболично, поскольку оно содержит описанный гетероклинический контур.

Следует отметить, что результат работы [51] можно получить, если рассмотреть один из двух гетероклинических циклов Лоренцева типа, составляющих описанный в [51] гетероклинический контур. Действительно, то, что такой цикл сохраняется при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях, оставляющих инвариантной границу шара, доказано в работе [51], а из работы [24] следует, что он порождает хаотическое инвариантное множество, которое не гиперболично.

Условия, накладываемые на гетероклинические контуры, делятся на два класса. К первому относятся требования общности положения. Они имеются практически во всех работах об инвариантных множествах, порождаемых гетероклиническими циклами и различаются только по форме. (Из цитируемых выше работ исключение составляют [14], [15], [17], [40].) Эти условия обеспечивают минимальную коразмерность рассматриваемой задачи.

К ним в первую очередь относится гиперболичность предельных множеств, входящих в гетероклинический контур, и трансверсальность пересечения их устойчивых и неустойчивых многообразий, в тех случаях, когда сумма размерностей последних больше размерности фазового пространства. Остальные условия общности положения сформулируем для простейшего гетероклинического цикла типа Лоренца в той форме, как они были сформулированы в работах [24], [25]:

Все собственные числа матрицы первого приближения в точке покоя из гетероклинического цикла — простые.

Гетероклиническая траектория из цикла входит в точку покоя, касаясь ведущего направления, то есть собственного направления, соответствующего наибольшему из двух отрицательных собственных чисел. (Для определенности предполагаем, что устойчивое многообразие точки покоя из цикла — двумерно. Случай, когда двумерно неустойчивое многообразие точки покоя, сводится к предыдущему заменой t на $-t$.)

Устойчивое многообразие замкнутой траектории из гетероклинического цикла содержит неустойчивую сепаратрису точки покоя, лежащей в гетероклиническом цикле. Поэтому замыкание устойчивого многообразия замкнутой траектории пересекается с устойчивым многообразием точки покоя по инвариантному множеству, содержащему точку покоя.

Последнее условие общности положения состоит в том, что компонента связности, содержащая точку покоя, пересечения этого инвариантного множества с достаточно малой окрестностью точки покоя должна касаться сильно устойчивого направления, то есть собственного направления, соответствующего минимальному собственному числу матрицы первого приближения. (Эквивалентную формулировку третьего требования в терминах системы в вариациях для решения, параметризующего неустойчивую сепаратрису, можно найти в [4] стр. 128.)

Второй класс требований к гетероклиническим контурам составляют условия, достаточные для того, чтобы система, имеющая такой гетероклинический контур, обладала требуемыми свойствами. Например, лежала на границе систем Морса - Смейла, или имела странный аттрактор, или персистентное хаотическое множество и так далее. Естественно, что эти условия меняются в зависимости от поставленной задачи.

Основная задача данной работы состоит в получении таких условий на гетероклинический цикл типа Лоренца, при выполении которых он порождает персистентное хаотическое множество.

Условия общности положения, наложенные на простейший гетероклинический цикл типа Лоренца в работах [24] – [26], отличаются по форме от условий общности положения, которые накладываются здесь на гетероклинический цикл типа Лоренца в общем случае. Это связано с тем, что при построении персистентного инвариантного множества в [24] – [26] не использовалось инвариантное сильно устойчивое слоение, которое существует в достаточно малой окрестности гетероклинического цикла типа Лоренца.

Построение хаотического инвариантного персистентного множества в окрестности общего гетероклинического цикла типа Лоренца, приведенное в работах [27],[28], существенно использовало инвариантное сильно устойчивое слоение. При этом подробное доказательство существования инвариантного сильно устойчивого слоения было проведено в работах [29], [30] в более общей ситуации. Именно, в [29] для n - мерной автономной системы, имеющей гетероклинический цикл, который при

$n = 3$ является гетероклиническим циклом типа Лоренца, было доказано существование сильно устойчивого расслоения над некоторой окрестностью гетероклинического цикла как для исходной системы, так и для ее $\mathbb{C}^1$ - малых возмущений. Далее, в работе [30] в случае, когда сильно устойчивое расслоение одномерно, была доказана его интегрируемость, то есть существование инвариантного слоения, точнее — ламинации, слои которой касаются соответствующих прямых сильно устойчивого расслоения в некоторой окрестности гетероклинического цикла, рассмотренного в работе [29]. Точные определения будут приведены ниже. Остается заметить, что при $n = 3$ сильно устойчивое расслоение одномерно. Таким образом, основные технические результаты, используемые в данной работе, приведены в [27] – [30].

Факторизация исходной системы по слоям инвариантного сильно устойчивого слоения в окрестности гетероклинического цикла приводит к динамической системе меньшей размерности, которая исследовалась в работах [16], [35].

Как показывает пример из работы [38], одних условий общности положения даже для простейшего гетероклинического цикла типа Лоренца не достаточно для того, чтобы он порождал персистентное хаотическое множество. Действительно, трехмерная автономная система, описанная в [38], имеет гетероклинический цикл типа Лоренца, удовлетворяющий всем условиям общности положения, и лежит на границе множества систем Морса - Смейла. Следовательно, этот гетероклинический цикл не порождает персистентного инвариантного хаотического множества.

Несколько слов о нумерации утверждений и формул данной работы. Все, что относится к введению, нумеруется одной цифрой. Для нумерации по главам и параграфам используются три цифры, первая — латинская означает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — номер в параграфе.

Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3),\ r \geq 3. \qquad \textbf{(1)}$$

Будем считать, что она порождает поток, то есть все ее решения продолжимы на всю ось. Предположим, что она обладает гетероклиническим циклом Лоренцева типа, состоящим из траекторий $\gamma_i,\ i \in 1 : m,\ m \geq 2$, и их предельных множеств $\alpha(\gamma_i),\ \omega(\gamma_i),\ i \in 1 : m$. Нумерация траекторий выбрана так, что $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1}),\ i \in 1 : m-1$, и $\omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1)$, при этом $\alpha(\gamma_i) \cap \alpha(\gamma_j) = \emptyset$, когда $i \neq j$. Предельное множество $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1 : m$, является либо седловым состоянием равновесия O_i, либо седловой замкнутой траекторией P_i с ориентируемыми устойчивым и неустойчивым многообразиями. Будем считать, что нумерация траекторий в гетероклиническом цикле Γ выбрана так, что предельное множество $\alpha(\gamma_1)$ является замкнутой траекторией P_1.

Определение. *Гетероклинический контур будем называть равноразмерностным, если размерности устойчивых многообразий всех предельных множеств в контуре равны между собой.*

Далее будем рассматривать равноразмерностные циклы типа Лоренца. Поскольку среди предельных множеств цикла есть седловые замкнутые траектории, то размерность устойчивых многообразий предельных множеств равна двум. Для седловой точки покоя $O_i \in \Gamma$ обозначим через $\mu_i > 0 > \lambda_i > \nu_i$ собственные числа матрицы линейного приближения $D\,X(O_i)$. Предположим, что выполнено следующее условие

I. $\lambda_i > -\mu_i, \quad \lambda_i - \mu_i > \nu_i.$

Следующее условие касается характера приближения траекторий γ_i гетероклинического цикла к предельным множествам. Это условие общности положения

II. *Существует непрерывный пучок P плоскостей $P(x)$, $x \in \Gamma$, инвариантный относительно дифференциала $D\,g^t$, $t \in \mathbb{R}$, отображения g^t сдвига на время t по траекториям системы 1. При этом $P(O_i)$ совпадает с плоскостью $\langle v_i^s, v_i^u\rangle$, натянутой на собственные векторы v_i^s, v_i^u, соответствующие собственным числам μ_i, λ_i. Для точек $x \in P_j$ плоскость $P(x)$ является касательной плоскостью в точке x к неустойчивому многообразию W_j^u замкнутой траектории P_j.*

Пусть P_{l_1}, $P_{l_2}, \ldots, P_{l_k}$ — все замкнутые траектории, входящие в цикл Γ, $l_1 = 1 < l_2 < \cdots < l_k$. Как будет доказано в теореме I.1.1, из условия II, в частности, следует, что неустойчивое многообразие $W_{l_i}^u$ замкнутой траектории трансверсально пересекает устойчивое многообразие $W_{l_i+1}^s$ следующего предельного множества в цикле Γ по траектории γ_{l_i} : $W_{l_i}^u \cap W_{l_i+1}^s = \gamma_{l_i}$. Кроме того, траектории цикла Γ входят в точки покоя, касаясь ведущего , то есть соответствующего собственному числу λ_i, направления.

Следующее условие, как и условие I, не относится к условиям общности положения.

III. *В пучке P можно задать ориентацию так, чтобы она была непрерывна на множестве $\Gamma \setminus \{\cup \gamma_{l_i},\ i \in 1:k\}$. При этом в плоскостях $P(O_i)$ она задается репером (v_i^s, v_i^u), где v_i^s (v_i^u) есть предельное направление вектора $X(x)$ при $x \to O_i$, $x \in \gamma_{i-1}$ $(x \in \gamma_i)$. В плоскости $P(x)$ для точки x, лежащей на замкнутой траектории P_{l_i}, $i \in 1:k$, ориентация задается репером $(X(x), v^u(x))$, где $v^u(x)$ — касательный вектор к неустойчивому многообразию $W^u(x)$ точки $x \in P_{l_i}$, направленный в сторону пересечения $W^u(x)$ с траекторией γ_{l_i}.*

Основной результат данной работы состоит в том, что равноразмерностный гетероклинический цикл Лоренцева типа, удовлетворяющий условиям I, II, III, порождает хаотическое персистентное инвариантное множество.

Простейший равноразмерностный гетероклинический цикл Лоренцева типа, удовлетворяющий условиям I, II, III, изображен на рисунке 1.

Перейдем теперь к изложению содержания данной работы. Она состоит из двух глав.

В первой главе исследуются общие свойства гетероклинических контуров. Утверждения, доказанные в четырех параграфах этой главы и опубликованные в статьях [33], [34], представляют самостоятельный интерес и существенно используются во второй главе, в которой доказаны основные результаты данной работы.

В §1 главы 1 рассматриваются равноразмерностные контуры типа Лоренца. По аналогии с гетероклиническими циклами Лоренцева типа контуром типа Лоренца будем называть такой гетероклинический контур, предельные множества которого являются либо седловыми точками покоя, либо седловыми замкнутыми траекториями. При этом среди предельных множеств есть как первые, так и вторые.

Условие II общности положения, сформулированное выше для гетероклинических циклов дословно переносится на случай гетероклинических контуров. При иссле-

Рис. 1

довании динамики системы в окрестности гетероклинических контуров часто используются иные, отличные от условия II, условия общности положения, которые упоминались выше.

В параграфе 1 они подробно формулируются и в теореме I.1.1 доказывается их эквивалентность условию II для равноразмерностных контуров Лоренцева типа.

Определение. *Гетероклинический контур не имеет ветвления, если нумерацию траекторий, входящих в такой контур, можно выбрать так, что* $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1}),\ i \in 1 : m-1,$ *и* $\alpha(\gamma_i) \cap \alpha(\gamma_j) = \emptyset,\ i, j \in 1 : m,\ i \neq j.$

Во втором параграфе рассматриваются гетероклинические контуры без ветвления Лоренцева типа, удовлетворяющие условиям I, II, специального вида. Именно, предполагается, что предельные множества $\alpha(\gamma_i),\ i \in 2 : m$, являются седловыми точками покоя, а предельное множество $\alpha(\gamma_1)$ является седловой замкнутой траекторией с ориентируемыми устойчивым и неустойчивым многообразиями.

Определение. *Описанные выше контуры будем называть простыми контурами Лоренцева типа.*

Теорема I.2.2. *Для простого контура* Γ*Лоренцева типа существует окрестность* $V(\Gamma)$ *такая, что в ней система 1 обладает локально инвариантной гладкой поверхностью* Q*,содержащей контур* Γ. *При этом пучок плоскостей* $P(x),\ x \in \Gamma$, *из условия II совпадает с пучком касательных плоскостей* $T_xQ,\ x \in \Gamma$, *к поверхности* Q.

Далее в §2 описывается поведение траекторий системы 1 на поверхности Q. Описание проводится в терминах отображения Пуанкаре h по траекториям системы 1 трансверсали $s_1 \subset Q$ к траектории γ_1 в трансверсаль $s_{m+1} \subset Q$ к траектории γ_m.

Контур $\Gamma \subset Q$ делит кривую s_1 на две части s_1^+ и s_1^-.

В теореме I.2.3 доказано, что при выполнении условия III отображение h определено на одной из кривых s_1^+ или s_1^- и в подходящих координатах имеет вид:

$$h(\eta_1) = C\eta_1^E + q(\eta_1^E)$$
$$h'(\eta_1) = CE\eta_1^{E-1} + r(\eta_1^{E-1}),$$

где число $E < 1$, а функции q, r являются бесконечно малыми при $\eta_1 \to 0$.

Так как $E < 1$, то отображение h растягивает при малых η_1. Поэтому часть поверхности Q, состоящую из траекторий, пересекающих ту кривую, на которой определено отображение h, естественно назвать неустойчивой поверхностью контура Γ.

В дальнейшем, в главе II, доказывается, что простые циклы Лоренцева типа, удовлетворяющие условию III, порождают хаос. Простые циклы Лоренцева типа по определению не содержат седло - фокусов среди предельных множеств. Как показывает пример гомоклинического цикла с одним седло - фокусом [37], циклы с седло - фокусами могут порождать хаос. Можно расширить класс гетероклинических циклов, порождающих хаос, допустив наличие среди предельных множеств точек покоя типа седло - фокус. Для этого в параграфе §3 выделен класс гетероклинических контуров с седло - фокусами, которые названы простыми контурами Лоренцева типа с седло - фокусами. Этот класс содержит рассмотренные ранее простые гетероклинические контуры типа Лоренца, удовлетворяющие условию III. В теореме I.3.1 доказано, что в любой окрестности простого контура Лоренцева типа с седло - фокусами лежит простой гетероклинический контур Лоренцева типа, удовлетворяющий условию III. Причем последний будет циклом, если исходный контур был циклом. Поскльку простые циклы типа Лоренца, удовлетворяющие условию III, порождают хаос, то гетероклинические циклы с седло - фокусами, рассматриваемые в §3, порождают хаос.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 3, \quad ||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon, \qquad \textbf{(2)}$$

являющуюся $\mathbb{C}^1$ - малым возмущением системы 1. Гетероклинический контур Γ системы 1 не является грубым множеством, поскольку он содержит точки покоя. В параграфе §4 доказано, что в случае, когда Γ — простой гетероклинический контур типа Лоренца, удовлетворяющий условию III, он не исчезает при достаточно малых $\mathbb{C}^1$ - возмущениях системы 1, а лишь меняет свою топологическую структуру. Именно, в теореме I.4.1 доказано, что для любой окрестности W контура Γ найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что система 2 при $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет гетероклинический контур Γ', лежащий в окрестности W. Предельные множества контура Γ' являются седловыми точками покоя или седловыми замкнутыми траекториями системы 2, которые получаются из грубых предельных множеств системы 1, содержащихся в контуре Γ, при возмущении системы 1. Контур Γ' является либо простым контуром типа Лоренца, удовлетворяющим условию III, либо контур Γ' сводится к двум седловым замкнутым траекториям и траектории γ, являющейся трансверсальным пересечением неустойчивого многообразия первой замкнутой траектории с устойчивым многообразием второй. Если Γ'

— простой гетероклинический цикл Лоренцева типа, удовлетворяющий условию III, то контур Γ' тоже цикл.

Таким образом, при бифуркациях простых контуров типа Лоренца, удовлетворяющих условию III, может меняться лишь число точек покоя, входящих в контур.

Во второй главе доказываются основные результаты работы (опубликованные в статьях [24] – [32]) о достаточности условий I, II, III для того, чтобы гетероклинический цикл Γ Лоренцева типа порождал персистентное инвариантное хаотическое множество. Относительно системы 1 и ее возмущения 2 будем предполагать, что класс гладкости их правых частей $r \geq 4$. Это условие носит технический характер. Глава состоит из пяти параграфов. Во всех параграфах предполагается, что невозмущенная система 1 имеет гетероклинический цикл Γ типа Лоренца, удовлетворяющий условиям I, II, III. Обозначим через g_ε^t отображение сдвига по траекториям системы 2 на время t, а через $D\,g_\varepsilon^t$ его дифференциал. Как и в первой главе, предположим, что система 2 порождает поток, то есть отображения g_ε^t, $D\,g_\varepsilon^t$ заданы при всех t.

Первый шаг в доказательстве основного результата главы II, имеющий самостоятельный интерес, состоит в построении инвариантного сильно устойчивого расслоения над некоторой окрестностью цикла Γ. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема II.2.1. *Пусть равноразмерностный цикл Γ типа Лоренца удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, $\lambda^i < 0$, $\Lambda^i < 0$, $\lambda^i < \Lambda^i$, $i \in 1:m$, окрестность $V(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ, окрестности $V_i \subset V(\Gamma)$ предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1:m$, такие, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует непрерывное и инвариантное относительно $D\,g^t_\varepsilon$ разложение в прямую сумму:*

$$\mathbb{R}^3 = E^{ss}_\varepsilon(x) \oplus E^v_\varepsilon(x), \quad x \in V(\Gamma), \tag{3}$$

в котором $E^{ss}_\varepsilon(x)$ — прямая, а $E^v_\varepsilon(x)$ — плоскость такие, что выполняются оценки

$$||D\,g^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\lambda^i t)||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_\varepsilon(x),\ [x,\ g^t_\varepsilon(x)] \in V_i, \tag{4}$$

$$||D\,g^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\Lambda^i t)||v||, \quad t \le 0, \quad v \in E^v_\varepsilon(x),\ [x,\ g^t_\varepsilon(x)] \in V_i, \tag{5}$$

где через $[x, g^t_\varepsilon(x)]$ обозначена дуга траектории точки x с концами в точках x и $g^t_\varepsilon(x)$. При этом пучок прямых $E^{ss}_\varepsilon(x)$, $x \in V(\Gamma)$, удовлетворяет локально условию Липшица.

Поскольку гетероклинический цикл Γ не имеет инвариантной относительно отображения g^t_ε окрестности, то под инвариантностью разложения 3 относительно $D\,g^t_\varepsilon$ подразумевается следующее.

Определение. *Пучки линейных подпространств $E^{ss}_\varepsilon(x)$, $E^v_\varepsilon(x)$, $x \in V(\Gamma)$, над окрестностью $V(\Gamma)$ цикла Γ инвариантны относительно $D\,g^t_\varepsilon$, если*

$$D\,g^t_\varepsilon(x)E^{ss}_\varepsilon(x) = E^{ss}_\varepsilon(g^t_\varepsilon(x)), \quad D\,g^t_\varepsilon E^v_\varepsilon(x) = E^v_\varepsilon(g^t_\varepsilon(x)),$$

если $g^\tau_\varepsilon(x) \in V(\Gamma)$ при $\tau \in [0,t]$.

Определение. *Пучок прямых $E^{ss}_\varepsilon(x)$, $x \in \Gamma$, локально удовлетворяет условию Липшица на $V(\Gamma)$, если для произвольной точки $x \in V(\Gamma)$ найдется ее окрестность $O(x)$ и векторное поле $v(y)$, $y \in O(x)$, такие, что векторное поле $v(y)$ удовлетворяет условию Липшица на $O(x)$ и прямая $E^{ss}_\varepsilon(y)$ натянута на вектор $v(y): \quad E^{ss}_\varepsilon(y) = \langle v(y)\rangle$.*

Сформулированная теорема доказывается в первых двух параграфах в два этапа. В первом параграфе в теореме II.1.1 разложение 3 строится над гетероклиническим циклом Γ для невозмущенной системы 1, при этом доказывается, что оба слагаемых в разложении 3 над циклом Γ локально удовлетворяют условию Липшица и выполняются оценки 4, 5.

Разложение 3 касательного пучка над некоторой окрестностью $V(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ строится во втором параграфе в леммах II.2.1 — II.2.18. Для этого разложение 3 над циклом Γ, полученное в параграфе 1, продолжается с сохранением липшецевости на некоторую окрестность $W(\Gamma)$ цикла Γ. Полученное продолжение

$$\mathbb{R}^3 = \widetilde{E}^{ss}_1(x) \oplus \widetilde{E}^v_1(x), \quad x \in W(\Gamma),$$

может уже не быть инвариантным относительно $D\,g^t_\varepsilon$ ни при каких ε. Построение каждого из инвариантных относительно отображения $D\,g^t_\varepsilon$ слагаемых в формуле 3 проводится в параграфе 2 при помощи схожих конструкций. Поэтому подробно опишем только способ построения первого слагаемого.

Пусть $\mathfrak{L}$ — пучок над некоторой окрестностью $W(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ, слоем $\mathfrak{L}(x)$ которого над точкой $x \in W(\Gamma)$ является множество всех прямых, трансверсальных плоскости $\widetilde{E}_1^v(x)$. Каждая такая прямая является графиком линейного отображения $P(x): \ \widetilde{E}_1^{ss}(x) \to \widetilde{E}_1^v(x)$, с которым ее отождествим.

Выберем окрестность $V(\Gamma)$ цикла Γ так, чтобы она содержалась в $W(\Gamma)$ вместе со своим замыканием. Рассмотрим пространство L непрерывных секущих пучка $\mathfrak{L}$, то есть множество непрерывных отображений $P: \ V(\Gamma) \to \mathfrak{L}$ таких, что $P(x)$ есть линейное отображение из $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$ в $\widetilde{E}_1^v(x)$. Окрестность $V(\Gamma)$ выбирается замкнутой, поэтому в норме $\mathbb{C}$ L — банахово пространство. В пространстве L при достаточно малых ε определяется отображение H_ε, переводящее некоторое замкнутое выпуклое подмножество L в себя со сжатием. Это отображение является преобразованием графиков [48] линейных отображений $P(x), \ x \in V(\Gamma)$, под действием $D\, g_\varepsilon^{-l\tau}$, где $l \in N, \ \tau \in \mathbb{R}$ — некоторые числа. Таким образом, пучок прямых $E_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$, соответствующий неподвижной точке преобразования H_ε, оказывается инвариантным относительно отображения $D\, g_\varepsilon^{-l\tau}$. Используя единственность неподвижной точки у сжимающего отображения, можно доказать инвариантность пучка $E_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$, относительно $D\, g_\varepsilon^t$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Далее доказывается, что полученный пучок $E_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$, удовлетворяет условию Липшица в окрестности $V(\Gamma)$.

Аналогично строится второе инвариантное слагаемое $E_\varepsilon^v(x), \ \ x \in V(\Gamma)$, в разложении 3. Однако, поле плоскостей $E_\varepsilon^v(x), \ x \in V(\Gamma)$, может не быть липшецевым в окрестности цикла Γ.

Расслоение $E_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma),$ используется в параграфе 3 (теорема II.3.1) для построения сильно устойчивой одномерной ламинации $W_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma),$ в окрестности гетероклинического цикла Γ. Под этим понимается следующее.

Определение. [3 стр. 31] *Одномерная ламинация, заданная на окрестности $V(\Gamma)$, есть разбиение ее на связные одномерные иммерсированные гладкие подмногообразия, называемые слоями. При этом для каждой точки $x \in V(\Gamma)$ найдутся окрестность U этой точки, подмножество $W \subset I^{n-1}$ и гомеоморфизм φ : $I \times I^{n-1} \to U$ такие, что φ диффеоморфно отображает $I \times w, \ w \in W$, на связную компоненту пересечения некоторого слоя с U. Кроме того, в локальных координатах $v, \ w$ производная $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(v, w)$ непрерывна по v, w.*

В этом определении через I обозначен отрезок $(-1, 1)$, а в n - мерном кубе $I^n = I \times I^{n-1}$ используются координаты $v, \ w, \ v \in I, \ w \in I^{n-1}$.

Касательным полем ламинации $W_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$, является пучок прямых $E_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$. Поскольку этот пучок липшецев, то нетрудно показать, что гомеоморфизм φ в определении ламинации в рассматриваемом случае локально удовлетворяет условию Липшица по w. Кроме того, в параграфе 3 доказано, что семейство кривых $W_\varepsilon^{ss}(x), \ x \in V(\Gamma)$, инвариантно относительно отображения g_ε^τ, то есть $g_\varepsilon^\tau W_\varepsilon^{ss}(x) \cap V(\Gamma) \subset W_\varepsilon^{ss}(g_\varepsilon^\tau(x)), \ x \in V(\Gamma), \ \tau \in \mathbb{R},$ и вдоль слоев отображение g_ε^τ сжимает. Последнее означает, что существуют числа $\lambda > 0, \ K > 0, \ \sigma > 0$, такие, что для $z, y \in W_\varepsilon^{ss}(x) \cap B_\sigma(x), \ x \in V(\Gamma)$, выполняется неравенство

$$d(g_\varepsilon^t(z), g_\varepsilon^t(y)) \leq K \exp(-\lambda t)\, d(z, y),$$

если точки $g_\varepsilon^\tau(y),\ g_\varepsilon^\tau(z) \in V(\Gamma)$ при $\tau \in [0,t]$. (Здесь через $d(z,y)$ обозначено расстояние между точками z, y, а через $B_\sigma(x)$ — шар радиуса σ с центром в точке x.)

Для дуги $\widetilde{\gamma}$ траектории системы 2, отличной от точки покоя и такой, что $\widetilde{\gamma} \subset V(\Gamma)$ определим сильно устойчивое множество

$$W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}, \delta) = \bigcup_{x \in \widetilde{\gamma}} W_\varepsilon^{ss}(x, \delta),$$

где $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta) = W_\varepsilon^{ss}(x) \cap B_\delta(x)$. При достаточно малом δ это множество является двумерным гладким многообразием.

Множество $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}, \delta)$ *будем называть сильно устойчивым многообразием дуги* $\widetilde{\gamma}$ *траектории системы* 2 *размера* δ.

Для произвольной трансверсали S к траекториям системы 2, лежащей в окрестности $V(\Gamma)$, и точки $x \in S$ компонента связности пересечения $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}, \delta) \cap S$, содержащая точку x, через которую проходит достаточно малая дуга $\widetilde{\gamma}$ ее траектории, не зависит от выбора дуги $\widetilde{\gamma}$, если число δ достаточно мало. Эта компонента $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ представляет из себя гладкую кривую, если S — гладкая трансверсаль.

Будем называть $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ *сильно устойчивым многообразием (или сильно устойчивой кривой) точки* x *размера* δ *на трансверсали* S.

В конце §3 доказано, что если для двух гладких трансверселей определено отображение Пуанкаре, то оно сжимает вдоль сильно устойчивых кривых.

В §4 строится хаотическое инвариантное множество J для невозмущенной системы 1. Именно, в нем доказана следующая теорема.

Теорема II.4.2. *Для любой окрестности* $\widetilde{V}$ *гетероклинического цикла* Γ, *удовлетворяющего условиям* I, II, III, *существует хаотическое инвариантное множество* $J \subset \widetilde{V}$.

Инвариантное множество J определяется как множество траекторий системы 1, проходящих через точки инвариантного множества I отображения Пуанкаре F некоторой трансверсали $S(1) \subset \widetilde{V}$.

Инвариантное множество I строится в леммах II.4.1 — II.4.8 как образ при взаимно однозначном отображении Ψ пространства Ω, точками которого являются бесконечные в обе стороны последовательности $\omega = \{\omega_s\},\ s \in Z$. При этом члены этих последовательностей лежат в бесконечном множестве E целочисленных k - мерных векторов. Если ввести в Ω метрику стандартным образом, то отображение Ψ оказывается гомеоморфизмом $\Psi : \Omega \to \Psi\Omega = I$. Это доказано в лемме II.4.9. На пространстве Ω определен гомеоморфизм сдвига σ. Из способа определения отображения Ψ следует, что оно сопрягает отображение σ на Ω и отображение F на I. Таким образом, для отображения $F|_I$ построена символическая динамика. На основании чего в теореме II.4.1 доказано, что инвариантное множество I хаотично. Описанный способ построения хаотического инвариантного множества хорошо известен [22], [2]. Однако, в рассматриваемом случае для построения символических последовательностей используется бесконечный алфавит E. Это приводит к тому, что инвариантное множество I, как и пространство Ω, не компактны и это по существу, поскольку отображение F нельзя доопределить на замыкании множества I

с сохранением непрерывности. Кодировка точек из множества I последовательностями $\{\omega_s\}$, $s \in Z$, имеет простой геометрический смысл. Если вектор ω_s имеет координаты $(e_1^s, \ldots, e_k^s)$, $e_i^s \in N$, то траектория точки x после s-го пересечения трансверсали $S(1)$ сделает e_1^s оборотов вокруг замкнутой траектории P_{l_1}, оставаясь в ее окрестности, потом e_2^s оборотов вокруг P_{l_2} и так далее, e_k^s оборотов вокруг $P_{l_k} \subset \Gamma$ и после этого пересечет $s+1$-ый раз трансверсаль $S(1)$.

Основные свойства отображения сдвига σ на символическом пространстве с конечным числом символов без труда переносятся на рассматриваемый случай, из чего следует хаотичность отображения σ.

В теореме II.4.1 на основании топологической сопряженности отображения $F|_I$ и отображения σ доказана хаотичность множества I.

Из этой теоремы следует, что для инвариантного множества J, определенного выше, выполняются свойства плотности в нем замкнутых траекторий и существование в J всюду плотной полутраектории. Третье свойство траекторий из J, входящее в определение хаотического множества, именно, чувствительная зависимость решений от начальных данных, устанавливается в теореме II.4.2, которая утверждает, что инвариантное множество J системы 1 хаотично. Инвариантное множество $\overline{J}$ также хаотично. В силу того, что множество I не компактно, $\overline{J} \neq J$.

В теореме II.4.3 и следствиях из нее описывается структура инвариантных множеств $\overline{J} \cap W^u_{l_i}$, $i \in 1:k$. В частности, доказано, что гетероклинический цикл Γ лежит в замыкании инвариантного множества J.

Последний параграф 5 посвящен исследованию возмущенной системы 2, в которой возмущение $Y(x)$ $\mathbb{C}^1$ - мало. Основной является следующая теорема.

Теорема II.5.1. *Пусть система 1 имеет гетероклинический цикл* Γ *Лоренцева типа, удовлетворяющий условиям* I, II, III. *Тогда для любой окрестности* $V(\Gamma)$ *цикла* Γ *найдется число* ε_0 *такое, что возмущенная система* 2 *при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *имеет хаотическое инвариантное множество, лежащее в* $V(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы содержится в леммах II.5.1 — II.5.7 и во многом повторят доказательство теоремы II.4.2. Именно, хаотическое множество $J(\varepsilon)$ определяется как множество точек траекторий системы 2, проходящих через точки хаотического инвариантного множества $I(\varepsilon)$ отображения $F(\varepsilon)$ первого возвращения трансверсали $S(1)$ в себя по траекториям системы 2, не покидающим некоторую окрестность $W(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ. Здесь и далее зависимость от ε означает, что рассматривается возмущенная система 2, в которой $||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon$.

Отображение $F(\varepsilon)|_{I(\varepsilon)}$ топологически сопряжено сдвигу σ на инвариантном подмножестве пространства $\Omega(\varepsilon)$ бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, $\omega_s \in E(\varepsilon)$, $s \in Z$. Это инвариантное относительно σ подмножество, на котором сдвиг σ хаотичен, выделяется требованием правильности пересечений некоторых множеств. Последнее требование весьма громоздко и аналогично требованию из работы [2].

Отличие от случая невозмущенной системы в первую очередь состоит в том, что алфавит $E(\varepsilon)$, используемый для кодировки точек из $I(\varepsilon)$, при некоторых возмущениях может оказаться конечным. Это влечет компактность инвариантного множества $I(\varepsilon)$ и его локальную максимальность, что доказано в лемме II.5.8. Отсюда в следующей лемме получаем, что в случае конечности $E(\varepsilon)$ инвариантное множество $J(\varepsilon)$, построенное в теореме II.5.1, компактно и локально максимально. По своему определению инвариантное множество $J(\varepsilon)$ не содержит точек покоя возмущенной системы, лежащих в окрестности $W(\Gamma)$, а также траекторий, асимптотических к ним. Следовательно, в силу компактности $J(\varepsilon)$, в случае конечного $E(\varepsilon)$ хаотическое инвариантное множество отделено от точек покоя возмущенной системы.

В теореме II.5.2 доказывается, что при выполнении некоторого дополнительного условия, которое обеспечивает топологическую сопряженность отображения $F(\varepsilon)|_{I(\varepsilon)}$ и сдвига σ на всем пространстве $\Omega(\varepsilon)$, множество $J(\varepsilon)$ будет максимальным компактным хаотическим инвариантным множеством, лежащим в окрестности $W(\Gamma)$, которое не содержит точек покоя системы 2 и траекторий, к ним асимптотических.

В теореме II.5.3 описывается структура инвариантного множества $\overline{J(\varepsilon)} \setminus J(\varepsilon)$ в том случае, когда нарушается первое условие теоремы II.5.2, именно, конечность множества $E(\varepsilon)$. Доказательство этой теоремы содержится в леммах II.5.10 — II.5.14.

Условия теоремы II.5.2, обеспечивающие максимальность инвариантного множества $J(\varepsilon)$ в окрестности $W(\Gamma)$, накладываются не непосредственно на возмущение $Y(x)$. Поэтому в конце параграфа строится такое возмущение $Y(x)$, что для него выполняются условия теоремы II.5.2 и $\mathbb{C}^1$ - норма возмущения $Y(x)$ может быть сделана сколь угодно малой. Это построение оформлено в виде теоремы II.5.5, в которой доказано, что сколь угодно $\mathbb{C}^1$ - малым возмущением системы 1 хаотическое максимальное инвариантное множество $\overline{J(\varepsilon)}$ можно отделить от точек покоя.

Глава I. Гетероклинические контуры

В этой главе будем рассматривать автономную систему дифференциальных уравнений 1, имеющую гетероклинический контур Г.

Везде, где это возможно, будем накладывать такие условия, чтобы они были условиями общего положения. Это означает, что в топологии, индуцированной $\mathbb{C}^1$ - метрикой, системы, имеющие гетероклинический контур и удовлетворяющие накладываемому условию, должны образовывать множество второй категории.

Таким условием является гиперболичность предельных множеств, входящих в гетероклинический контур Г. Обозначим через W_i^s, W_i^u устойчивое и неустойчивое многообразия предельного множества $\alpha(\gamma_i)$, входящего в Г.

Определение. Предельное множество будем называть седловым, если оно гиперболично и размерность каждого из многообразий W_i^s, W_i^u больше или равна единице.

Не седловые гиперболические предельные множества являются либо источниками, либо стоками. Ясно, что для такого предельного множества найдется окрестность, которая не пересекается с хаотическими инвариантными множествами. Поэтому везде далее будем рассматривать гетероклинические контуры, содержащие лишь седловые предельные множества.

Везде далее, если не оговаривается противное, будут рассматриваться лишь равноразмерностные контуры. Заметим, что, если в контур входит предельное множество, являющееся седловой замкнутой траекторией, то размерности всех устойчивых многообразий остальных предельных множеств равны двум.

Определение. Гетероклинический равноразмерностный контур, предельные множества которого являются либо седловыми состояниями равновесия, либо седловыми замкнутыми траекториями с ориентируемыми устойчивыми многообразиями, причем среди предельных множеств есть как первые так и вторые, будем называть гетероклиническим контуром Лоренцева типа.

В литературе часто используются [4] условия общности положения, отличные от условия II, принятого в работе. В первом параграфе эти условия подробно формулируются и сравниваются с условием II, принятым в данной работе. В леммах I.1.1 — I.1.4 доказывается их эквивалентность условию II.

Во втором параграфе рассматриваются простые гетероклинические контуры Лоренцева типа.

Определение. Простыми гетероклиническими контурами Лоренцева типа будем называть гетероклинические контуры Лоренцева типа без ветвления, удовлетворяющие условиям I, II, в которых первое предельное множество — $\alpha(\gamma_1)$ является замкнутой седловой траекторией, предельные множества $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 2 : m$, являются седловыми точками покоя, а последнее предельное множество $\omega(\gamma_m)$ может быть либо седловой замкнутой траекторией, либо седловой точкой покоя.

Для таких контуров доказана следующая теорема.

Теорема I.2.2. Для простого контура Г Лоренцева типа существует окрестность $V(\Gamma)$ такая, что в ней система 1 обладает локально инвариантной гладкой поверхностью Q, содержащей контур Г. При этом пучок плоскостей $P(x)$, $x \in \Gamma$, из условия II совпадает с пучком касательных плоскостей T_xQ, $x \in \Gamma$, к поверхности Q.

Простой гетероклинический контур Γ типа Лоренца, удовлетворяющий условию III, делит поверхность Q на две компоненты связности. Все траектории, лежащие на одной из них, за исключением траекторий, асимптотических к предельным множествам контура Γ, покидают некоторую окрестность контура Γ как с ростом, так и с убыванием времени. Такие траектории не представляют интереса при построении хаотического множества, лежащего в достаточно малой окрестности гетероклинического контура. Траектории, лежащие на другой компоненте связности поверхности Q экспоненциально расходятся. Их поведение описано в теореме I.2.3 в терминах некоторого отображения последования.

В параграфе 3 рассматриваются гетероклинические контуры без ветвления, отличающиеся от простых контуров Лоренцева типа, удовлетворяющих условию III, тем что среди предельных множеств, являющихся точками покоя, в таких контурах могут быть седло - фокусы. В теореме I.3.1 доказано, что в любой окрестности контура с седло - фокусами лежит простой гетероклинический контур типа Лоренца, удовлетворяющий условию III. При этом, если исходный контур был циклом, то простой контур типа Лоренца будет циклом.

В главе II для простых циклов Лоренцева типа будет доказано, что они порождают персистентное хаотическое множество. Отсюда следует, что гетероклинические контуры с седло - фокусами, рассматриваемые в параграфе 3, порождают устойчивый хаос. Это согласуется с известными результатами [59].

В параграфе 4 изучаются возможные бифуркации простых гетероклинических контуров типа Лоренца, удовлетворяющих условию III, при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы 1. В теореме I.4.1 доказано, что при достаточно $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы 1 простой гетероклинический контур типа Лоренца не исчезает, а лишь меняет свою топологическую структуру.

§1 Равноразмерностные гетероклинические контуры Лоренцева типа

При исследовании инвариантных множеств, порождаемых гетероклиническими контурами, многие авторы [36], [6], [10], накладывают на контур условия общего положения, отличные от условия II, сформулированного во введении. Здесь эти условия приводятся и доказывается их эквивалентность условию II для равноразмерностных контуров типа Лоренца.

Сформулируем условия 1, 2, 3 на гетероклинический контур Г системы 1.

Условие 1. Пусть для траектории $\gamma_j \in \Gamma$ неустойчивое многообразие W^u_j ее α-предельного множества и устойчивое многообразие W^s_{j+1} ее ω-предельного множества двумерны. Тогда W^u_j пересекает W^s_{j+1} трансверсально по траектории γ_j.

Хорошо известно [20, стр. 67], что это условие общего положения.

Прежде, чем сформулировать второе условие на контур Г, рассмотрим случай, когда $\dim W^s_{j+1} = 2$ и предельное множество $\omega(\gamma_j)$ является точкой покоя O_{j+1} системы 1. Поскольку O_{j+1} — гиперболическая точка покоя, то она либо седло-фокус, либо седло. В первом случае собственные числа матрицы первого приближения $DX(O_{j+1})$ имеют вид: $\mu_{j+1}, \alpha_{j+1} \pm i\beta_{j+1},\ \mu_{j+1} > 0 > \alpha_{j+1}$. Во втором — вещественные и, если система 1 — система общего положения, простые: $\mu_{j+1} > 0 > \lambda_{j+1} > \nu_{j+1}$. В первом случае вектор $X(x)$ не имеет предельного направления при $x \to O_{j+1},\ x \in \gamma_j$. Во втором имеются две возможности: траектория γ_j может входить в точку O_{j+1}, касаясь ведущего направления $< v^s_{j+1} >$ или касаясь неведущего направления $< v^{ss}_{j+1} >$, где через $< v^s_{j+1} >$ обозначена прямая, натянутая на собственный вектор v^s_{j+1}, соответствующий собственному числу λ_{j+1}, а через $< v^{ss}_{j+1} >$ — прямая, натянутая на собственный вектор v^{ss}_{j+1}, соответствующий собственному числу ν_{j+1}.

Условие 2. Пусть для каждого предельного множества $\omega(\gamma_j)$ из гетероклинического контура Г, являющегося седлом O_{j+1}, траектория γ_j входит в точку покоя O_{j+1}, касаясь ведущего направления.

Известно [4 стр. 128], что для системы 1 общего положения реализуется именно эта возможность.

Устойчивое многообразие W^s_{j+1} содержит траекторию γ_j, поэтому его замыкание пересекается с устойчивым многообразием W^s_j по непустому множеству. В силу инвариантности многообразий W^s_j и W^s_{j+1} это пересечение $\overline{W}^s_{j+1} \cap W^s_j$ инвариантно. В случае, когда предельное множество $\alpha(\gamma_j)$ — замкнутая траектория, множество $\overline{W}^s_{j+1}$ содержит W^s_j по λ-лемме [20]. Рассмотрим случай, когда $\alpha(\gamma_j)$ — седловая точка покоя. Следующее условие на гетероклинический цикл Г обычно [4 стр. 129] формулируется так:

Условие 3. Компонента связности пересечения множества $\overline{W}^s_{j+1} \cap W^s_j$ с достаточно малой окрестностью V_j предельного множества $\alpha(\gamma_j)$, содержащая точку O_j, совпадает с компонентой связности пересечения $V_j \cap W^{ss}_j$, содержащей точку O_j, где через W^{ss}_j обозначено сильно устойчивое многообразие точки покоя O_j.

Теорема I.1.1. Для равноразмерностного контура Г Лоренцева типа условие II введения эквивалентно приведенным выше трем условиям.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Итак, рассматривается гетероклинический контур $\Gamma = \bigcup(\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)),\ i \in 1 : m$, такой, что среди предельных множеств $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1 : m$, есть как гиперболические замкнутые траектории с ориентируемыми устойчивыми многообразиями, так и седловые точки покоя с двумерными устойчивыми многообразиями и простыми характеристическими показателями.

Замечание.(О выборе специальной системы координат в окрестности предельного множества из контура Γ, являющегося замкнутой траекторией)

Пусть ω — период периодического решения системы 1, параметризующего замкнутую траекторию P_1. (Для простоты обозначений рассматриваем первую замкнутую траекторию контура.)

Траектория P_1 является $\mathbb{C}^{r+1}$ гладкой кривой, поэтому у нее существует нормальная окрестность V, то есть окрестность, расслоенная дисками $B(g^t(x_0)),\ x_0 \in P_1,\ t \in [0,\omega)$, ортогональными к траектории P_1 в точке $g^t(x_0)$. Диск $B(g^t(x_0))$ является открытым кругом D^2 некоторого фиксированного радиуса, лежащим в плоскости, ортогональной к траектории P_1 в точке $g^t(x_0)$. Введем на траектории P_1 координату $\zeta \in [0,\omega)$ так, чтобы для точки $g^t(x_0) \in P_1 \quad \zeta = t$. Диск $B(\zeta) = B(g^t(x_0)) \quad \mathbb{C}^r$ гладко зависит от ζ, так как P_1 — $\mathbb{C}^{r+1}$ гладкая кривая. Поэтому в каждом круге $B(\zeta),\ \zeta \in [0,\omega)$ можно выбрать координаты u, v так, чтобы начало координат лежало на кривой P_1 и чтобы переход от исходной системы координат к координатам u, ζ, v в окрестности V осуществлялся $\mathbb{C}^r$ - гладким преобразованием. В новых координатах в окрестности V система 1 примет вид

$$\begin{cases} u' = a(\zeta)u + b(\zeta)v + f(u,\zeta,v) \\ \zeta' = 1 + q(u,\zeta,v) \\ v' = c(\zeta)u + d(\zeta)v + g(u,\zeta,v), \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

где функции $a,b,c,d,f,q,g \in \mathbb{C}^{r-1}(V)$, $f(0,\zeta,0) = q(0,\zeta,0) = g(0,\zeta,0) = 0$ и частные производные функций f,g по u и v равны нулю при $u = v = 0$.

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\zeta} = a(\zeta)u + b(\zeta)v \\ \dfrac{dv}{d\zeta} = c(\zeta)u + d(\zeta)v. \end{cases}$$

Можно рассматривать эту систему при всех ζ, продолжив ее периодически по ζ. Поскольку устойчивое и неустойчивое многообразия траектории P_1 ориентируемы, то мультипликаторы этой системы положительны и по условию один больше единицы, другой меньше единицы. Поэтому существует вещественная ω- периодическая матрица $U(\zeta)$ такая, что замена

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U(\zeta) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\xi} \\ \widetilde{\eta} \end{pmatrix}$$

приводит линейную систему к диагональному виду с постоянной матрицей $\mathrm{diag}\,(\nu_1, \mu_1)$.

Сделаем эту замену в системе (*), получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}' = \nu_1 \widetilde{\xi} + f_1(\widetilde{\xi}, \zeta, \widetilde{\eta}) \\ \zeta' = 1 + q_1(\widetilde{\xi}, \zeta, \widetilde{\eta}) \\ \widetilde{\eta}' = \mu_1 \widetilde{\eta} + g_1(\widetilde{\xi}, \zeta, \widetilde{\eta}), \end{cases}$$

в которой функции f_1, q_1, g_1 обладают теми же свойствами, что и функции f, q, g.

Если рассматривать полученную систему при всех ζ, продолжив ее периодически, то по теореме 3.2 из работы [21] ее устойчивая и неустойчивая интегральные поверхности будут иметь вид

$$\widetilde{\eta} = w(\zeta, \widetilde{\xi}), \quad \widetilde{\xi} = v(\zeta, \widetilde{\eta}),$$

где функции w, v ω-периодичны по ζ и $r-1$ раз непрерывно дифференцируемы. При этом $\frac{\partial w}{\partial \widetilde{\xi}}(\zeta, 0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial \widetilde{\eta}}(\zeta, 0)$.

Сделав в последней системе замену

$$\widetilde{\xi} = w(\zeta, \widetilde{\xi}) + \xi, \quad \widetilde{\eta} = v(\zeta, \widetilde{\eta}) + \eta,$$

уменьшая, если надо, окрестность V, получим систему

$$\begin{cases} \xi' = \nu_1 \xi + F_1(\xi, \zeta, \eta) \\ \zeta' = 1 + Q_1(\xi, \zeta, \eta) \\ \eta' = \mu_1 \eta + G_1(\xi, \zeta, \eta), \end{cases} \qquad \mathbf{(I.1.0)}$$

где функции $F_1, G_1 \in \mathbb{C}^{r-2}(V)$, $Q_1 \in \mathbb{C}^{r-1}(V)$, $F_1(0, \zeta, \eta) = 0$, $Q_1(0, \zeta, 0) = 0$, $G_1(\xi, \zeta, 0) = 0$ и частные производные функций F_1, G_1 по ξ и η равны нулю при $\xi = 0$, $\eta = 0$. ■

Лемма I.1.1. Пусть выполнено условие II и предельное множество $\alpha(\gamma_i) = P_i$ является замкнутой траекторией. Тогда многообразия W_i^u и W_{i+1}^s пересекаются трансверсально по траектории γ_i.

Доказательство. Докажем, что пучок $P(x)$, $x \in \gamma_i$, из условия II в этом случае совпадает с пучком $T_x W_i^u$, $x \in \gamma_i$. В силу инвариантности этих пучков достаточно доказать, что $T_x W_i^u = P(x)$ хотя бы для одной точки $x \in \gamma_i$. Пусть V_i является описанной выше нормальной окрестностью замкнутой траектории P_i, а ξ_i, ζ_i, η_i введенные в ней выше координаты. Далее для краткости индекс i у координат опустим. Исключая переменную t из системы I.1.0, получим систему, интегральные кривые которой совпадают с траекториями системы 1 в окрестности V_i:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \nu_i \xi + F_i(\xi, \zeta, \eta) \\ \dot{\eta} = \mu_i \eta + G_i(\xi, \zeta, \eta), \end{cases} \qquad \mathbf{(I.1.1)}$$

где $\mu_i > 0 > \nu_i$ и функции $F_i, G_i \in \mathbb{C}^{r-2}(V_i)$ и равны нулю вместе со своими частными производными по ξ и η при $\xi = 0,\ \eta = 0$. Нулевое решение этой системы соответствует замкнутой траектории P_i, а множества $\{(\xi, \zeta, \eta) :\ \xi = 0\}$ и $\{(\xi, \zeta, \eta) :\ \eta = 0\}$ являются локально устойчивым и локально неустойчивым многообразием траектории P_i соответственно. При этом траектория γ_i в окрестности V_i лежит во множестве $\{(\xi, \zeta, \eta) \in V_i :\ \xi = 0,\ \eta > 0\}$. Из вида системы в вариациях для решения $\varphi(\zeta)$ системы I.1.1, задающего траекторию γ_i в окрестности V_i, следует, что в координатах $\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}$ в касательном пространстве, которые индуцированы выбранной в V_i системой координат, плоскость $P(x)$ задается уравнением $\tilde{\eta} = 0$. Действительно, система в вариациях имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}' = \nu_i \tilde{\xi} + \dfrac{\partial F_i}{\partial \xi}(\varphi(\zeta), \zeta)\tilde{\xi} + \dfrac{\partial F_i}{\partial \eta}(\varphi(\zeta), \zeta)\tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}' = \mu_i \tilde{\eta} + \dfrac{\partial G_i}{\partial \xi}(\varphi(\zeta), \zeta)\tilde{\xi} + \dfrac{\partial G_i}{\partial \eta}(\varphi(\zeta), \zeta)\tilde{\eta}. \end{cases} \quad \textbf{(I.1.2)}$$

Поскольку решение $\varphi(\zeta)$ стремится к нулю при $\zeta \to -\infty$, то матрица этой линейной системы стремится к диагональной матрице $\mathrm{diag}\{\nu_i, \mu_i\}$. Поэтому, если $\tilde{\eta}(0) \neq 0$ для решения $\tilde{\xi}(\zeta),\ \tilde{\eta}(\zeta)$ системы I.1.2, то отношение $|\tilde{\xi}(\zeta)|/|\tilde{\eta}(\zeta)| \to \infty$ при $\zeta \to -\infty$ и предельное положение вектора $(\tilde{\xi}(\zeta), \tilde{\eta}(\zeta))$ ортогонально плоскости $\tilde{\eta} = 0$. Так как решение $\varphi(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to -\infty$, то предельное положение плоскости $P(\varphi(\zeta))$ при $\zeta \to -\infty$ по непрерывности пучка $P(x),\ x \in \Gamma$, и условию II совпадает с плоскостью $\tilde{\eta} = 0$. Отсюда следует, в силу инвариантности пучка, что плоскость $P(x),\ x \in \gamma_i$, задается уравнением $\tilde{\eta} = 0$ и, таким образом, совпадает с плоскостью $T_x W_i^u$.

Допустим теперь, что многообразия $W_i^u,\ W_{i+1}^s$ пересекаются не трансверсально в некоторой точке $x \in \gamma_i$. Так как вектор $X(x) \in T_x W_i^u \cap T_x W_{i+1}^s$, это означает, что $T_x W_i^u = T_x W_{i+1}^s = P(x)$. В силу инвариантности пучков плоскостей $P(x)$ и $T_x W_{i+1}^s,\ x \in \gamma_i$, получаем $P(x) = T_x W_{i+1}^s$ при всех $x \in \gamma_i$. Последнее противоречит непрерывности пучка $P(x),\ x \in \Gamma$, поскольку для точек $x \in \gamma_i$, достаточно близких к предельному множеству $\omega(\gamma_i)$, плоскость $T_x W_{i+1}^s$ трансверсальна по условию II к плоскости $P(y),\ y \in \omega(\gamma_i)$. Лемма I.1.1 доказана. ■

Замечание. В доказательстве леммы I.1.1 было показано, что при выполнении условия II пучок $P(x),\ x \in \gamma_i$, совпадает с пучком $T_x W_i^u,\ x \in \gamma_i$, если предельное множество $\alpha(\gamma_i)$ есть седловая замкнутая траектория P_i. Таким образом, пучок $P(x),\ x \in \gamma_i$, определяется однозначно условием II в этом случае.

Лемма I.1.2. Пусть выполнено условие II и предельное множество $\omega(\gamma_i) = O_{i+1}$ является точкой покоя. Тогда траектория γ_i входит в точку O_{i+1}, касаясь ведущего направления $< v_{i+1}^s >$.

Доказательство. Пусть решение $q(t)$ системы 1 параметризует траекторию γ_i. Рассмотрим систему в вариациях для решения $q(t)$:

$$\dot{v} = DX(q(t))v. \quad \textbf{(I.1.3)}$$

Вектор-функция $X(q(t))$ — ее решение. Для сопряженной системы:

$$\dot{w} = -[DX(q(t))]^T w,$$

(где Т – знак транспонирования матрицы) рассмотрим решение $p(t)$ такое, что вектор $p(0)$ ортогонален плоскости $P(q(0))$. В силу инвариантности пучка плоскостей $P(x),\ x \in \gamma_i$, плоскость $P(q(t))$ состоит из решений $v(t)$ системы I.1.3 таких, что $v(0) \in P(q(0))$. Поскольку для решений $p(t)$ и $v(t)$ сопряженных систем скалярное произведение постоянно, то вектор $p(t)$ ортогонален плоскости $P(q(t))$ при всех $t \in \mathbb{R}$. По условию II предельное положение вектора $p(t)$ при $t \to -\infty$ ортогонально предельному направлению вектора $X(q(t))$ при $t \to -\infty$, если $\omega(\gamma_i)$ — точка покоя.

Вектор $X(q(t))$ — решение системы I.1.3, а вектор $p(t)$ — решение сопряженной к ней системы, поэтому скалярное произведение этих векторов постоянно и равно своему предельному значению, равному нулю, при всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\omega(\gamma_i)$ — периодическая траектория. При доказательстве леммы I.1.1 было показано, что в этом случае плоскость $P(x)$ совпадает с касательной плоскостью $T_x W_i^u,\ x \in \gamma_i$. Поскольку многообразие W_i^u содержит траекторию γ_i, то отсюда следует, что и в этом случае вектор $X(q(t))$ ортогонален $p(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует, что $X(q(t)) \in P(q(t)),\ t \in \mathbb{R}$.

Предельное положение плоскости $P(q(t))$ при $t \to +\infty$ по условию II не содержит сильно устойчивого направления $< v_{i+1}^{ss} >$. Следовательно, предельное положение вектора $X(q(t))$ при $t \to +\infty$ не может совпадать с $< v_{i+1}^{ss} >$. Лемма I.1.2 доказана. ■

Нетрудно доказать утверждение обратное к леммам I.1.1, I.1.2.

Лемма I.1.3. Пусть траектория $\gamma_i \in \Gamma$ такова, что $\alpha(\gamma_i) = P_i$ является замкнутой траекторией и многообразия W_i^u и W_{i+1}^s пересекаются трансверсально по траектории γ_i. Кроме того, если $\omega(\gamma_i) = O_i$ является точкой покоя, траектория γ_i входит в нее касаясь направления $< v_{i+1}^s >$. Тогда существует непрерывный инвариантный пучок $P(x),\ x \in \alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i \cup \omega(\gamma_i)$, удовлетворяющий условию II.

Доказательство. Определим плоскость $P(x)$ для $x \in \alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i$ как касательную плоскость $T_x W_i^u$ к неустойчивому многообразию W_i^u. Тогда свойство II автоматически выполняется на множестве $\alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i$. Проверим, что, если предельное множество $\omega(\gamma_i) = O_{i+1}$ есть точка покоя, то плоскость $P(x)$ стремится к плоскости $< v_{i+1}^s, v_{i+1}^u >$ при $x \to O_{i+1},\ x \in \gamma_i$. Это непосредственно следует из сильной λ-леммы [41]. Докажем это, рассуждая аналогично доказательству леммы I.1.2. Именно, в достаточно малой окрестности V_{i+1} предельного множества O_{i+1} можно ввести координаты ξ, ζ, η так, что система 1 примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \nu_{i+1}\xi + X_{i+1}(\xi,\zeta,\eta) \\ \dot{\zeta} = \lambda_{i+1}\zeta + Y_{i+1}(\xi,\zeta,\eta) \\ \dot{\eta} = \mu_{i+1}\eta + Z_{i+1}(\xi,\zeta,\eta), \end{cases} \qquad \textbf{(I.1.4)}$$

где $\mu_{i+1} > 0 > \lambda_{i+1} > \nu_{i+1}$, функции $X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1} \in \mathbb{C}^{r-2}(V_{i+1})$ и равны нулю вместе со своими частными производными первого порядка при $\xi = \zeta = \eta = 0$. Кроме того, $X_{i+1}(0,0,\eta) = 0 = Y_{i+1}(0,0,\eta)$; $Y_{i+1}(\xi,0,0) = 0$ и $Z_{i+1}(\xi,\zeta,0) = 0$. Возможность введения таких координат доказана в работе [42]. Геометрически указанные условия означают, что ось ξ является сильно устойчивым многообразием, ось η —

неустойчивым многообразием, а плоскость (ξ, η) — устойчивым многообразием предельного множества O_{i+1}. Пусть решение $\varphi(t)$ системы I.1.4 задает траекторию γ_i в окрестности V_{i+1}. Рассмотрим систему в вариациях для решения $\varphi(t)$:

$$\dot{q} = A(t)q, \qquad \textbf{(I.1.5)}$$

где $q = (\widetilde{\xi}, \widetilde{\zeta}, \widetilde{\eta})$. Матрица $A(t)$ стремится к диагональной матрице $\mathrm{diag}(\nu_{i+1}, \lambda_{i+1}, \mu_{i+1})$ при $t \to +\infty$, так как $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а частные производные функций $X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$ равны нулю в нуле.

Поскольку многообразия W_i^u и W_{i+1}^s пересекаются трансверсально и плоскость $P(x) = T_x W_i^u$, $x = \varphi(t_0) \in \gamma_i$, то плоскость $P(x)$ содержит касательный вектор v_0 с ненулевой третьей координатой. Рассмотрим решение $q(t)$ системы I.1.5 такое, что $q(t_0) = v_0$. Если точка x достаточно близка к точке покоя O_{i+1} или, что то же самое, t_0 достаточно велико, то из вида системы в вариациях следует, что ее решение $q(t)$ будет стремиться по направлению к вектору $v_{i+1}^u = (0,0,1)$, так как первые две его координаты будут стремиться к нулю, а третья — неограниченно возрастать с ростом t.

Заметим, что вектор $X(\varphi(t))$ лежит в плоскости $P(\varphi(t))$, поскольку $\gamma_i \subset W_i^u$. По условию вектор $X(\varphi(t))$ по направлению стремится к вектору $v_{i+1}^s = (0,1,0)$. Таким образом, плоскость $P(\varphi(t))$ содержит два линейно независимых вектора $q(t)$ и $X(\varphi(t))$, которые имеют линейно независимые предельные направления. Отсюда следует, что, если положить $P(O_{i+1}) =< v_{i+1}^s, v_{i+1}^u >$, то пучок плоскостей $P(x) = T_x W_i^u$ будет непрерывен и в точке O_{i+1}.

Рассмотрим теперь случай, когда предельное множество $\omega(\gamma_i) = P_{i+1}$ является замкнутой траекторией. Для выполнения условия II следует определить плоскость $P(x)$ для $x \in P_{i+1}$ как касательную плоскость к неустойчивому многообразию W_{i+1}^u : $P(x) = T_x W_{i+1}^u$, $x \in P_{i+1}$. Проверим непрерывность доопределенного пучка $P(x)$, $x \in \alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i \cup \omega(\gamma_i)$.

Пусть V_{i+1} — окрестность замкнутой траектории P_{i+1}, в которой можно ввести координаты ξ, ζ, η так, что траектории системы 1 совпадают в ней с интегральными кривыми системы I.1.1. Неустойчивое многообразие W_{i+1}^u в этих координатах задается уравнением $\eta = 0$. Система в вариациях для решения $\varphi(\zeta)$, задающего траекторию γ_i в окрестности V_{i+1}, имеет вид I.1.2. По условию леммы и определению плоскости $P(x)$ для $\varphi(\zeta_0) = x$, $x \in \gamma_i$, она трансверсальна к плоскости $\tilde{\xi} = 0$, касательной к устойчивому многообразию W_{i+1}^s. Следовательно, существует вектор $v_0 = (\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0) \in P(x)$ такой, что $\tilde{\xi}_0 \neq 0$. Тогда из вида системы в вариациях I.1.2 следует, что ее решение $v(\zeta)$ такое, что $v(\zeta_0) = v_0$, стремится по направлению к плоскости $\tilde{\eta} = 0$. Это означает, что плоскость $P(\varphi(\zeta))$ стремится к плоскости $\tilde{\eta} = 0$ при возрастании ζ, так как при всех ζ $P(\varphi(\zeta))$ содержит вектор $(0,0,1)$.

Итак, пучок $P(x)$ непрерывен на $\alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i \cup \omega(\gamma_i)$. По своему определению он удовлетворяет остальным требованиям условия II. Лемма I.1.3 доказана. ■

Пусть теперь предельные множества $\alpha(\gamma_i)$, $\omega(\gamma_i)$ траектории γ_i — седловые точки покоя.

Лемма I.1.4. Пусть траектория γ_i такова, что $\alpha(\gamma_i) = O_i$, $\omega(\gamma_i) = O_{i+1}$ — седловые точки покоя, и для нее выполняются условия **2** и **3**. Тогда существует непрерывный пучок плоскостей $P(x)$, $x \in \alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i \cup \omega(\gamma_i)$, удовлетворяющий условию II.

Доказательство. Условие **3** означает, что касательная плоскость $T_x W^s_{i+1}$ стремится к плоскости $< v_i^{ss}, v_i^u >$, натянутой на сильно устойчивый и неустойчивый собственные векторы, если точка x стремится к точке покоя O_i вдоль траектории γ_i. Пусть n_0 — вектор нормали в точке $x_0 \in \gamma_i$ к плоскости $T_{x_0} W^s_{i+1}$, при этом $x_0 \in V_i$.

Рассмотрим систему, сопряженную к системе в вариациях I.1.5 для решения $\varphi(t) = g^t(x_0)$ системы I.1.4. Пусть $n(t)$ — решение этой системы с начальными данными $n(0) = n_0$. В силу свойств решений сопряженных систем вектор $n(t)$ будет ортогонален плоскости $T_{g^t(x_0)} W^s_{i+1}$ при всех t. Поскольку последняя плоскость стремится по условию **3** к плоскости $< v_i^{ss}, v_i^u >$, то предельное направление вектора $n(t)$ будет совпадать с направлением собственного вектора v_i^s, соответствующего собственному числу λ_i.

Рассмотрим плоскость $< X(\varphi(t)), n(\varphi(t)) >$, $t \le 0$. В силу определения это инвариантная относительно отображения Dg^t плоскость, стремящаяся к плоскости $< v_i^s, v_i^u >$, если $t \to -\infty$. Если определить пучок плоскостей $P(x)$, $x \in V_i \cap \gamma_i$, положив $P(x) = < X(\varphi(t)), n(\varphi(t)) >$, если $x = g^t(x_0)$, $t \le 0$ и $P(O_i) =< v_i^s, v_i^u >$, то мы получим непрерывный пучок плоскостей. Продолжим его по траектории γ_i инвариантным образом за окрестность V_i. Плоскость $P(x)$ трансверсальна плоскости $T_x W^s_{i+1}$ при всех $x \in \gamma_i$, так как она была таковой в окрестности V_i. Рассуждая как при доказательстве леммы I.1.3 получим, что предельное положение плоскости $P(x)$ при $x \to O_{i+1}$, $x \in \gamma_i$, будет совпадать с плоскостью $< v_{i+1}^s, v_{i+1}^u >$. Таким образом, положив $P(O_{i+1}) =< v_{i+1}^s, v_{i+1}^u >$, получим непрерывный инвариантный относительно Dg^t пучок плоскостей $P(x)$, $x \in \alpha(\gamma_i) \cup \gamma_i \cup \omega(\gamma_i)$, удовлетворяющий условию II.

Лемма I.1.4, а с ней и теорема I.1.1 доказаны. ∎

Заметим, что из условия I введения следует, что гетероклинический контур Γ не содержит точек покоя типа седло-фокус. Поэтому при выполнении условия I условие II следует из условий **1**, **2**, **3**. Поскольку последние являются условиями общего положения на гетероклинический контур Γ [4 стр. 129], то из доказанного следует, что и условие II является условием общего положения.

§2 Неустойчивые поверхности гетероклинических контуров Лоренцева типа

В этом параграфе будем рассматривать простые гетероклинические контуры Γ Лоренцева типа системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 3 \tag{I.2.1}$$

Ясно, что произвольный гетероклинический контур Лоренцева типа, удовлетворяющий условиям I, II, можно представить в виде объединения таких контуров.

Условие III, накладываемое на контур Γ, в рассматриваемом случае принимает следующий вид. В пучке плоскостей $P(x)$, $x \in \{\bigcup_{i\in 1:m}\omega(\gamma_i)\}\cup\{\bigcup_{i\in 2:m}\gamma_i\}$, можно задать непрерывную ориентацию так, что в плоскости $P(O_i)$, $i \in 2:m$, она задается репером (v_i^s, v_i^u), где $v_i^s \quad (v_i^u)$ есть предельное положение вектора $X(x)$ при $x \to O_i$, $x \in \gamma_{i-1} \quad (\gamma_i)$, $i \in 2:m$. Если контур Γ является циклом и предельное множество $\omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1) = P_1$ — седловая замкнутая траектория, то ориентация в плоскости $P(x)$, $x \in P_1$, задается репером $(v^u(x), X(x))$, где $v^u(x)$ — касательный вектор к неустойчивому многообразию $W^u(x)$ точки $x \in P_1$, направленный в сторону пересечения кривой $W^u(x)$ с траекторией γ_1.

Если гетероклинический контур Γ не является циклом, ориентация в плоскости $P(x)$, $x \in \omega(\gamma_m)$, безразлична.

Все дальнейшие построения будем проводить в окрестности V контура Γ, имеющей специальный вид:

$$V = \{\bigcup_{i\in 1:m}(V_i \cup Q_i)\} \cup V_{m+1}, \tag{I.2.2}$$

где V_i — окрестность предельного множества $\omega(\gamma_{i-1})$, $i \in 2:m+1$, V_1 — окрестность замкнутой траектории P_1, а Q_i — траекторная окрестность дуг траектории γ_i с концами на границах окрестностей V_i и V_{i+1}.

Рассмотрим точку покоя $O_i = \alpha(\gamma_i)$, входящую в контур Γ. По условию I собственные числа λ_i, μ_i, ν_i матрицы линейного приближения $DX(O_i)$ удовлетворяют неравенствам $0 > \lambda_i > -\mu_i$, $\lambda_i - \mu_i > \nu_i$, которые означают, что выполнены условия теоремы Белицкого о $\mathbb{C}^1$-линеаризации [9, стр 152, т.5.9]:

Теорема I.2.1. Пусть $\Lambda: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Для того, чтобы каждая $\mathbb{C}^2$-система:

$$x' = \Lambda x + f(x), \quad f(0) = f'(0) = 0$$

была в окрестности начала координат $\mathbb{C}^1$-эквивалентна линейной, необходимо и достаточно, чтобы собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оператора Λ удовлетворяли условию

$$\mathrm{Re}\lambda_i \neq \mathrm{Re}\lambda_j + \mathrm{Re}\lambda_k, \quad (\mathrm{Re}\lambda_j \leq 0 \leq \mathrm{Re}\lambda_k).$$

Таким образом, окрестность V_i точки покоя O_i можно считать столь малой, что в ней можно ввести координаты ξ_i, ζ_i, η_i такие, что система I.2.1 примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \nu_i\xi_i \\ \dot{\zeta}_i = \lambda_i\zeta_i \\ \dot{\eta}_i = \mu_i\eta_i \end{cases} \tag{I.2.3}$$

и переход к координатам ξ_i, ζ_i, η_i осуществляется $\mathbb{C}^1$-диффеоморфизмом.

Непосредственным следствием представления системы I.2.1 в виде I.2.3 является следующее утверждение.

Следствие. Пусть гетероклинический контур Γ удовлетворяет условиям I, II и предельное множество $\alpha(\gamma_i) = O_i$ траектории $\gamma_i \in \Gamma$ является точкой покоя седлового типа. Тогда пучок $P(x),\ x \in \gamma_i$, определяется единственным образом и плоскость $P(x)$ совпадает для $x \in V_i \cap \gamma_i$ с плоскостью $\xi_i = 0$.

Рассмотрим множество $\Gamma' = \Gamma \setminus (P_1 \cup \omega(\gamma_m))$.

Теорема I.2.2. Пусть Γ — простой гетероклинический контур Лоренцева типа. Тогда существует окрестность $V(\Gamma)$ контура Γ такая, что в ней система I.2.1 обладает локально инвариантной гладкой поверхностью Q, содержащей Γ', при этом пучок плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma'$, совпадает с пучком касательных плоскостей $T_xQ,\ x \in \Gamma'$, к поверхности Q.

Доказательство. Будем строить поверхность Q, двигаясь последовательно вдоль траекторий $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ контура Γ. Для этого в окрестностях $V_i,\ i \in 2:m$, выберем трансверсали S_i к траекториям системы. В координатах ξ_i, ζ_i, η_i они имеют вид:

$$S_i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i):\ \zeta_i = -\delta,\ |\xi_i|, |\eta_i| < \varepsilon_i\}, \qquad \textbf{(I.2.4)}$$

где $\delta, \varepsilon_i > 0$ — достаточно малые числа.

В качестве траекторной окрестности Q_1 возьмем множество дуг траекторий системы I.2.1, которые пересекают трансверсаль S_2 с концами на границах окрестностей V_1 и V_2. Рассмотрим поверхность Q такую, что на множестве $V_1 \cup Q_1$ она совпадает с компонентой связности пересечения $W_1^u \cap (Q_1 \cup V_1)$, содержащей траектории P_1 и γ_1. По замечанию к лемме I.1.1 пучок $P(x),\ x \in \gamma_1$, совпадает с пучком касательных плоскостей $T_xW_1^u,\ x \in \gamma_1$. Поэтому построенная часть поверхности Q будет обладать сформулированными в теореме свойствами.

Построим поверхность Q в окрестности V_2, используя координаты ξ_2, ζ_2, η_2. Продолжим траекторно поверхность Q в положительном направлении. По лемме I.1.1 из условия II следует, что неустойчивое многообразие W_1^u трансверсально пересекает устойчивое многообразие W_2^s вдоль траектории γ_1. Поэтому пересечение $S_2 \cap Q = s_2$ является гладкой кривой, трансверсальной к устойчивому многообразию W_2^s. Из этого следует, что при достаточно малом числе ε_2 (из определения трансверсали S_2) кривая s_2 представляется как график непрерывно дифференцируемой функции $f_2(\eta):\quad s_2 = \{(\xi, \eta):\ \xi = f_2(\eta),\ |\eta| < \varepsilon_2\}$.

(Здесь и далее все построения проводятся в окрестности V_2, поэтому индексы у координат будем опускать.)

Из вида системы I.2.3 нетрудно получить, что траекторное продолжение поверхности Q в окрестности V_2 будет графиком функции

$$F(\zeta, \eta) = f(\eta(\zeta/\delta)^{-\mu/\lambda}) \cdot (\zeta/\delta)^{\nu/\lambda}, \quad -\delta < \zeta < 0, \quad |\eta| < \delta.$$

Из условия I на собственные числа ν, λ, μ следует, что $F \in \mathbb{C}^1$ и $F(\zeta, \eta) \to 0$, $\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, \eta)$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}(\zeta, \eta) \to 0$ при $\zeta \to -0$. Поэтому, если доопределить поверхность Q так, чтобы она совпадала с полуплоскостью $\{(\xi,\zeta,\eta)\in V_2:\ \xi=0,\ 0\le\zeta<\delta,\ |\eta|<\delta\}$, то полученная поверхность будет гладкой и касательная плоскость $T_xQ,\ x\in\gamma_2$, будет совпадать по следствию к лемме I.2.1 с плоскостью $P(x)$. Из построения следует, что поверхность Q локально инвариантна и трансверсально пересекает W_3^s по траектории γ_2. Ее траекторное продолжение в положительном направлении пересечет трансверсаль S_3 по кривой s_3, которая является графиком непрерывно дифференцируемой функции, если число ε_3 в определении S_3 достаточно мало. В качестве траекторной окрестности Q_2 дуги траектории γ_2 возьмем объединение множества дуг траекторий, пересекающих трансверсаль S_3 с концами на границах окрестностей V_2 и V_3. Повторяя последовательно построение, выполненное для точки покоя O_2, построим окрестности $Q_3,\dots,Q_{m-1}$ и продолжение поверхности Q за точки покоя $O_3,\dots,O_m$. Когда предельное множество $\omega(\gamma_m)$ является точкой покоя, построение трубки траекторий Q_m и продолжение поверхности Q в окрестность V_{m+1} предельного множества $\omega(\gamma_m)$ проводится аналогичным образом. Пусть предельное множество $\omega(\gamma_m)$ является замкнутой траекторией. В этом случае будем считать, что окрестность V_{m+1} и координаты ξ,ζ,η в ней выбраны так, что траектории системы I.2.1 совпадают с интегральными кривыми системы I.1.2, введенной в доказательстве леммы I.1.1 и имеющей вид:

$$\begin{cases}\dot\xi=\nu_{m+1}\xi+F_{m+1}(\xi,\zeta,\eta)\\ \dot\eta=\mu_{m+1}\eta+G_{m+1}(\xi,\zeta,\eta).\end{cases}\tag{I.2.5}$$

В координатах ξ,ζ,η трансверсаль S_{m+1} задается так:

$$S_{m+1}=\{(\xi,\zeta,\eta)\in V_{m+1}:\ \zeta=0,\ |\xi-\bar\xi|<\varepsilon_{m+1},\ |\eta|<\varepsilon_{m+1}\},\tag{I.2.6}$$

где $(\bar\xi,0,0)$ — точка пересечения γ_m с плоскостью $\zeta=0$. Траекторное продолжение поверхности Q в окрестность V_{m+1} пересекает S_{m+1} по гладкой кривой

$$s_{m+1}=\{(\xi,\eta):\ \xi=f_{m+1}(\eta)+\bar\xi,\ f_{m+1}(0)=0,|\eta|<\varepsilon_{m+1}\},$$

если число ε_{m+1} достаточно мало, так как по условию II касательная плоскость к траекторному продолжению Q в точках, принадлежащих γ_m, трансверсальна к устойчивому многообразию W^s_{m+1}. Определяя как и раньше трубку траекторий Q_m по трансверсали S_{m+1}, завершим построение окрестности $V(\Gamma)$ контура Γ. Траекторное продолжение поверхности Q за трансверсаль S_{m+1} в окрестность V_{m+1} дает искомую инвариантную поверхность. Теорема I.2.2 доказана. ■

Замечание. Когда ω-предельное множество $\omega(\gamma_m)$ является замкнутой траекторией, построенная локально инвариантная поверхность Q содержит в своем предельном множестве $\overline{Q}\setminus Q$ локальное неустойчивое многообразие замкнутой траектории P_{m+1}.

Действительно, кривая $s_{m+1}=Q\cap S_{m+1}$ трансверсально пересекает W^s_{m+1}. Применяя λ-лемму [19] к отображению T первого возвращения Пуанкаре для трансверсали S_{m+1}, получим, что гладкие кривые $T^k(s_{m+1})$ сходятся в $\mathbb{C}^1$-метрике к кривой $\{(\xi,\zeta,\eta):\ \xi=0\}$, которая совпадает с пересечением $S_{m+1}\cap W^u_{m+1}$. Отсюда и из теоремы об интегральной непрерывности следует утверждение замечания. ■

Для того, чтобы описать поведение траекторий на локально инвариантной поверхности Q, дополнительно введем трансверсали S^i к траекториям $\gamma_i,\ i \in 1:m$, лежащие в окрестностях $V_i,\ i \in 1:m$. Пусть в координатах ξ_i, ζ_i, η_i они имеют вид:

$$S^i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in V_i:\ \eta_i = \delta,\ |\xi_i|, |\zeta_i| < \varepsilon^i\}, \quad i \in 2:m,$$

$$S^1 = \{(\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in V_1:\ \zeta_1 = 0,\ |\xi_1| < \varepsilon^1,\ |\eta_1 - \eta_1^0| < \varepsilon^1\}, \tag{I.2.7}$$

где $(0, \eta_1^0, 0)$ — точка пересечения траектории γ_1 с плоскостью $\zeta_1 = 0$. При этом, как и в лемме I.1.1, координата η выбрана так, что $\eta_1^0 > 0$. Если на контур Γ не накладывать дополнительно к условиям I, II никаких ограничений, то на поверхности Q может не быть траекторий, пересекающих как трансверсаль S^1, так и трансверсаль S_{m+1}. Это связано с тем, что из траекторий, пересекающих кривую

$$s_i = S_i \cap Q = \{(\xi_i, \eta_i) \in V_i:\ \xi_i = f_i(\eta_i),\ |\eta_i| < \varepsilon_i\}, \quad i \in 2:m,$$

только траектории, проходящие через точки кривой

$$s_i^+ = \{(\xi_i, \eta_i) : \xi_i = f_i(\eta_i),\ 0 < \eta_i < \varepsilon_i\},$$

пересекут трансверсаль S^i при возрастании времени. Траектории, проходящие через точки кривой

$$s_i^- = \{(\xi_i, \eta_i) :\ \xi_i = f_i(\eta_i),\ 0 > \eta_i > -\varepsilon_i\},$$

покинут окрестность $V(\Gamma)$ гетероклинического контура Γ. Так как кривая s_i^+ является графиком функции $f_i(\eta_i)$, то η_i можно рассматривать как координату на s_i^+.

Рассмотрим кривую $s^1 = S^1 \cap Q$. В координатах ξ_1, η_1 на S^1 она имеет вид $s^1 = \{(\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in V_1 :\ \ \xi_1 = 0,\ |\eta_1 - \eta_1^0| < \varepsilon^1\}$. Пусть s_+^1 (s_-^1) ее часть, на которой $\eta_1 > \eta_1^0$ $(\eta_1 < \eta_1^0)$. Для удобства введем на кривой s^1 координату $\bar\eta_1 = \eta_1 - \eta_1^0$.

Теорема I.2.3. Пусть простой гетероклинический контур Лоренцева типа удовлетворяет условию III. Тогда определено гладкое отображение h по траекториям системы I.2.1 одной из кривых s_+^1, s_-^1 в кривую s_{m+1}^+, имеющее в координатах $\bar\eta_1, \eta_{m+1}$ вид:

$$\begin{aligned} \eta_{m+1} = h(\bar\eta_1) = C|\bar\eta_1|^E + q(|\bar\eta_1|^E) \\ h'(\bar\eta_1) = CE|\bar\eta_1|^{E-1} + r(|\bar\eta_1|^{E-1}), \end{aligned} \tag{I.2.8}$$

где $E = |\lambda_2/\mu_2| \cdot \ldots \cdot |\lambda_m/\mu_m|$, а функции $q(t)$ и $r(t)$ являются бесконечно малыми при $t \to 0$, а постоянная $C > 0$.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Пусть следующее за точкой покоя O_i предельное множество в контуре Γ так же является точкой покоя O_{i+1} и $i + 1 < m$.

Все траектории системы I.2.1, проходящие через точки кривой s_i^+ при достаточно малом числе ε_i, после пересечения трансверсали S^i будут пересекать трансверсаль S_{i+1} либо в точках кривой s_{i+1}^+, либо в точках кривой s_{i+1}^-, поскольку траектория γ_i локально делит поверхность Q на две компоненты связности. В первом случае (когда пересечение происходит в точках кривой s^+_{i+1}) определено отображение h_i по траекториям системы I.2.1, лежащим на поверхности Q, кривой s^+_i в кривую s^+_{i+1}: $h_i:\ s^+_i \to s^+_{i+1}$. Во втором (пересечение происходит в точках кривой s^-_{i+1}) — все траектории системы после пересечения покинут окрестность контура $V(\Gamma)$.

Лемма I.2.1. Второй случай не может реализоваться, если выполнено условие III на гетероклинический контур Г.

Доказательство. Рассмотрим кривую $s^i = S^i \cap Q \subset Q_i$, параметризованную координатой ζ_i. Из представления поверхности Q в окрестности Q_i в координатах ξ_i, ζ_i, η_i следует, что ее касательный вектор $v(y_i)$ в точке $y_i = s^i(0)$, принадлежащей траектории γ_i, лежит в плоскости $\xi_i = 0$, то есть в плоскости $P(y_i)$. Пара векторов $(v(y_i), X(y_i))$ задает ту же ориентацию, что и пара (v^s_i, v^u_i), то есть ориентацию в плоскости $P(y_i)$, $y_i \in \gamma_i \cap V_{i-1}$, которая требуется в условии III. Пусть Dg^t — дифференциал отображения сдвига вдоль траекторий системы I.2.1 на время t. Ориентация, задаваемая в плоскости $P(g^t(y_i))$ парой векторов $(Dg^t v(y_i), X(g^t(y_i)))$, непрерывна по t. При $t = 0$ она совпадает с ориентацией, требуемой в условии III для плоскости $P(O_i)$. Рассмотрим число $\tau > 0$ такое, что $x_i = g^\tau(y_i) \in \gamma_i \cap S_{i+1}$. Вектор $Dg^\tau(v(y_i))$ во втором случае лежит в полуплоскости $\eta_{i+1} < 0$. Следовательно, пара векторов $(Dg^\tau v(y_i), X(g^\tau(y_i)))$ задает ориентацию в плоскости $P(x_i)$, противоположную той, которая требуется по условию III. Поскольку ориентация, задаваемая в плоскости $P(g^t(y_i))$, $t \in [0, \tau]$, парой векторов $(Dg^t v(y_i), X(g^t(y_i)))$ меняется непрерывно, то в рассматриваемом случае в пучке $P(x)$, $x \in \gamma_i$, не задать непрерывную ориентацию так, чтобы выполнялось условие III. Лемма I.2.1 доказана. ■

Допустим, что простой гетероклинический контур Г Лоренцева типа удовлетворяет условию III. Тогда при $i \in 2:m$ определено отображение $h_i:\ s^+_i \to s^+_{i+1}$ по траекториям системы I.2.1.

Лемма I.2.2. Отображение h_i и его производная имеют вид

$$\begin{aligned} h_i(\eta_i) &= C_i \eta_i^{E_i} + q_i(\eta_i^{E_i}) \\ h_i'(\eta_i) &= C_i E_i \eta_i^{E_i - 1} + r_i(\eta_i^{E_i - 1}), \end{aligned} \qquad \textbf{(I.2.9)}$$

где функции $q_i(t), r_i(t)$ — бесконечно малые при $t \to 0$, $\quad |\lambda_i/\mu_i| = E_i$.

Доказательство. Это отображение представляет из себя сужение на гладкую кривую s^+_i отображения H_i трансверсали $S^+_i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in S_i :\ \eta_i > 0\}$ в трансверсаль S_{i+1} по траекториям системы I.2.1. Представим отображение H_i как композицию двух отображений $H_i = R_i \cdot G_i$, где R_i — отображение по траекториям системы I.2.1 трансверсали S^i в трансверсаль S_{i+1}, а G_i — отображение по траекториям системы I.2.1 в окрестности V_i точки покоя O_i трансверсали S^+_i в S^i. В координатах ξ_i, ζ_i, η_i отображение G_i имеет вид:

$$(\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i) = G_i(\xi_i, \zeta_i), \quad \bar{\xi}_i = \xi_i(\eta_i/\delta)^{|\nu_i/\mu_i|}, \quad \bar{\zeta}_i = -\delta(\eta_i/\delta)^{|\lambda_i/\mu_i|}.$$

Очевидно, что его можно доопределить при $\eta_i = 0$ с сохранением гладкости, положив $G_i(\xi_i, 0) = (0, 0)$.

Отображение $R_i: \ S^i \to S_{i+1}$ есть $\mathbb{C}^r$ - локальный диффеоморфизм, переводящий точку $y_i = S_i \cap \gamma_i$ в точку $x_{i+1} = S_{i+1} \cap \gamma_i$. Переход от исходных декартовых координат к координатам ξ_i, ζ_i, η_i и $\xi_{i+1}, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}$ в окрестностях V_i и V_{i+1} осуществляется $\mathbb{C}^1$ - диффеоморфизмами. Поэтому в этих координатах отбражение R_i имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\xi_{i+1}, \eta_{i+1}) = R_i(\xi_i, \zeta_i), \\ &\xi_{i+1} = a_i\xi_i + b_i\zeta_i + \bar{p}_i(\xi_i, \zeta_i), \\ &\eta_{i+1} = c_i\xi_i + d_i\zeta_i + \bar{g}_i(\xi_i, \zeta_i). \end{aligned} \qquad \textbf{(I.2.10)}$$

Функции $\bar{p}_i, \bar{g}_i$ равны нулю вместе со своими частными производными первого порядка при $\xi_i = 0 = \zeta_i$. Кроме того, поскольку устойчивое многообразие W^s_{i+1} трансверсально плоскости $P(x_i)$, которая в окрестностях V_i, V_{i+1} задается соответственно уравнениями $\{(\xi_{i+1}, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}) \in V_{i+1}: \ \eta_{i+1} = 0\}$ и $\{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in V_i: \ \xi_i = 0\}$, то $d_i \neq 0$, а из условия III следует, что $d_i < 0$. Таким образом, композиция отображений R_i и G_i в координатах ξ_i, η_i и ξ_{i+1}, η_{i+1} имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\xi_{i+1}, \eta_{i+1}) = H_i(\xi_i, \eta_i) = (R_i \cdot G_i)(\xi_i, \eta_i), \\ &\xi_{i+1} = \tilde{a}_i\xi_i\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|} + \tilde{b}_i\eta_i^{|\lambda_i/\mu_i|} + \tilde{p}_i(\xi_i\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|}, \eta_i^{|\lambda_i/\mu_i|}), \\ &\eta_{i+1} = \tilde{c}_i\xi_i\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|} + \tilde{d}_i\eta_i^{|\lambda_i/\mu_i|} + \tilde{g}_i(\xi_i\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|}, \eta_i^{|\lambda_i/\mu_i|}), \quad \tilde{d}_i > 0. \end{aligned} \qquad \textbf{(I.2.11)}$$

Кривая $s_i^+, \ i \in 2:m$, параметризована координатой η_i

$$s_i^+ = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in V_i: \ \xi_i = f_i(\eta_i), \ 0 < \eta_i < \varepsilon_i, \ \zeta_i = -\delta\},$$

где f_i — $\mathbb{C}^1$ - гладкая функция, $f_i(0) = 0$. Поэтому отображение $h_i: \ s_i^+ \to s_{i+1}^+, \quad h_i = H_i|_{s_i^+}$ имеет вид:

$$\eta_{i+1} = \tilde{c}_i f_i(\eta_i)\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|} + \tilde{d}_i\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|} + \tilde{g}_i(f_i(\eta_i)\eta_i^{|\nu_i/\mu_i|}, \eta_i^{|\lambda_i/\mu_i|}).$$

Учитывая, что по условию I $\quad |\nu_i/\mu_i| > |\lambda_i/\mu_i| = E_i$, получим

$$\begin{aligned} &\eta_{i+1} = h_i(\eta_i) = C_i\eta_i^{E_i} + q_i(\eta_i^{E_i}) \\ &\frac{d\eta_{i+1}}{d\eta_i} = h_i'(\eta_i) = C_iE_i\eta_i^{E_i-1} + r_i(\eta_i^{E_i-1}), \end{aligned}$$

где функции $q_i(t), r_i(t)$ — бесконечно малые при $t \to 0$ и $C_i > 0$.

Такой же вид имеет отображение $h_m: \ s_m^+ \to s_{m+1}^+$ по траекториям системы I.2.1, если предельное множество $\omega(\gamma_m)$ есть седловая точка покоя. Если же $\omega(\gamma_m)$ — седловая замкнутая траектория, то первая координатная функция отображения H_m имеет дополнительно постоянное слагаемое $\bar{\xi}$, что не влияет на окончательный вид отображения h_m. Лемма I.2.2 доказана. ■

Введем отображение $r_1: \ s^1 \to s_2$ по траекториям системы I.2.1. Оно является сужением на кривую $s^1 = S^1 \cap Q$ отображения сдвига R_1 по траекториям трансверсали S^1 в трансверсаль S_2 и переводит точку y_1 в точку x_2. Переход к координатам

ξ_1, ζ_1, η_1 и ξ_2, ζ_2, η_2 соответственно в окрестностях V_1 и V_2 осуществляется $\mathbb{C}^{r-1}$ и $\mathbb{C}^1$ - диффеоморфизмами, кривая s^1 $\mathbb{C}^{r-1}$ - гладкая. Поэтому отображение r_1 в координатах $\bar{\eta}_1$ на s^1 и η_2 на s_2 будет $\mathbb{C}^1$ - гладким. Оно переводит одну из кривых s^1_+, s^1_- в кривую s^+_2. Будем для простоты считать, что реализуется первый случай. Рассмотрим композицию отображений h_i, $i \in 2 : m, r_1 :$ $h = h_m \cdot \ldots \cdot h_2 \cdot r_1 : s^1_+ \to s^+_{m+1}$. Из формул I.2.9 следует, что она и ее производная в координатах $\bar{\eta}_1$ на s^1 и η_{m+1} на s_{m+1} имеют вид:

$$h(\bar{\eta}_1) = \eta_{m+1} = C\bar{\eta}_1^E + q(\bar{\eta}_1^E)$$
$$h'(\bar{\eta}_1) = CE\bar{\eta}_1^{E-1} + r(\bar{\eta}_1^{E-1}),$$

где $|\bar{\eta}_1| < \varepsilon_1$, $E = E_2 \cdot \ldots \cdot E_m$, а функции $q(t), r(t)$ являются бесконечно малыми при $t \to 0$, $C > 0$.

По условию I $E_i < 1$, $i \in 2 : m$, поэтому отображение h растягивает при малых $\bar{\eta}_1$ и коэффициент растяжения может быть сделан сколь угодно большим, если число ε_1 достаточно мало.

Отображение h определено лишь на кривой

$$s^1_+ = \{(\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in S^1 : \xi_1 = 0,\ \zeta_1 = 0,\ 0 < \bar{\eta}_1 < \varepsilon^1\}$$

при достаточно малых ε^1, поскольку траектории системы I.2.1, начинающиеся на кривой s^1 в точках с неположительной координатой $\bar{\eta}_1$, покидают окрестность гетероклинического контура $V(\Gamma)$, не пересекая трансверсаль S^2. Теорема I.2.3 доказана. ■

Рассмотрим поверхность $Q^u \subset Q$, состоящую из траекторий, лежащих в окрестности $V(\Gamma)$ и пересекающих кривую s^1. Это $\mathbb{C}^r$-гладкая локально инвариантная поверхность, полученная продолжением $\mathbb{C}^r$-гладкого неустойчивого многообразия W^u_1 вдоль контура Γ, который входит в ее границу. Она содержится в $\mathbb{C}^1$-гладкой поверхности $Q \supset \Gamma$. Понижение гладкости поверхности Q по сравнению с гладкостью системы I.2.1 связано с тем, что траектории контура Γ, входящие в точки покоя, имеют лишь конечную гладкость. Более точно, условие $E_i = |\lambda_i/\mu_i| < 1$ обеспечивает лишь $\mathbb{C}^1$-гладкость в точке покоя O_i кривой $\gamma_{i+1} \cup O_i$.

Из построения поверхности Q^u следует, что, если ее объединить с контуром Γ, получим гладкую поверхность $Q^u(\Gamma)$ с краем [23]. Множество касательных векторов к поверхности $Q^u(\Gamma)$ в точках $x \in \Gamma$, отличных от точек покоя, является полуплоскостью плоскости $P(x)$. Для точки покоя $O_i \in \Gamma$ множество касательных векторов является сектором, в границу которого входят векторы v^u_i, $-v^s_i$.

Замечание. Все доказанное в этом параграфе для постого контура Лоренцева типа остается справедливым и для гетероклинического контура $\alpha(\gamma_1) \cup \gamma_1$, в котором $\alpha(\gamma_1) = P_1$, $\omega(\gamma_1) = P_2$ — замкнутые гиперболические траектории. При этом W^u_1 трансверсально пересекает W^s_2 по траектории γ_1. Единственное отличие состоит в том, что в формулах для отображения h следует считать $E = 1$.

Далее такие вырожденные контуры будем так же называть Лоренцевыми.

§3 Гетероклинические контуры с седло - фокусами

В этом параграфе будем рассматривать гетероклинические контуры более общего вида, чем простые контуры Лоренцева типа. Именно, будем предполагать, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 3 \tag{I.3.1}$$

имеет компактное инвариантное множество

$$\Gamma = \bigcup_{i \in 1:m} (\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)) \cup \omega(\gamma_m),$$

при этом $\alpha(\gamma_{i+1}) = \omega(\gamma_i),\ i \in 1 : m-1,\ \alpha(\gamma_i) \cap \alpha(\gamma_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, где $\gamma_i,\ i \in 1 : m$, — траектории системы I.3.1. Как и в §2 будем предполагать, что предельное множество $\alpha(\gamma_1) = P_1$ является замкнутой траекторией седлового типа, а остальные предельные множества, лежащие в контуре Γ, являются гиперболическими точками покоя $\alpha(\gamma_i) = O_i,\ i \in 2 : m$, предельное множество $\omega(\gamma_m) = P_{m+1}$ есть седловая замкнутая траектория, при этом не исключается случай, когда $P_1 = P_m$. Отличие рассматриваемого гетероклинического контура Γ от простых контуров типа Лоренца состоит в том, что среди точек покоя $O_i,\ i \in 2 : m$, могут быть седло - фокусы. В таких точках покоя O_j матрица первого приближения $DX(O_j)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных чисел $\rho_j \pm i\omega_j,\ \rho_j, \omega_j \neq 0$, и одно вещественное собственное число β_j, при этом $\rho_j\beta_j < 0$. Остальные точки покоя, входящие в контур Γ, являются седловыми точками покоя с двумерными устойчивыми многообразиями. Как и раньше будем обозначать через $\mu_i > 0 > \lambda_i > \nu_i$ собственные числа матрицы линейного приближения $DX(O_i)$ для точки покоя O_i, не являющейся седло - фокусом.

Определение. Гетероклинический контур Γ, описанный выше, назовем простым контуром Лоренца с седло - фокусами.

Наложим на контур Γ условия I', II', III' так, чтобы при отсутствии седло - фокусов в контуре Γ они совпадали с условиями I, II, III.

Условие I'. Пусть $\alpha(\gamma_i) = O_i$ — седловая точка покоя. Тогда $\lambda_i > -\mu_i,\ \lambda_i - \mu_i > \nu_i$. В контуре Γ нет траекторий γ_i таких, что предельные множества $\alpha(\gamma_i)$ и $\omega(\gamma_i)$ являются седло - фокусами и $\dim W_i^u = \dim W_{i+1}^s = 1$.

Условие II'. Существует инвариантный пучок двумерных плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma$, непрерывный на множестве $\Gamma \setminus \Gamma'$, где $\Gamma' = \cup\alpha(\gamma_j)$ и объединение берется по всем $j \in 2 : m$ таким, что предельное множество $\alpha(\gamma_j)$ является седло - фокусом. Кроме того, для точек покоя $O_i \in \Gamma$, не являющихся седло -фокусами, $P(O_i) =< v_i^s, v_i^u >$, где $< v_i^s, v_i^u >$ — плоскость, натянутая на собственные векторы матрицы $DX(O_i)$, соответствующие собственным числам λ_i и μ_i. Для точек $x \in P_j,\ j = 1, m+1$, плоскость $P(x)$ является касательной плоскостью в точке x к неустойчивому многообразию W_i^u замкнутой траектории P_j. Предположим дополнительно, что , если $\alpha(\gamma_i) = O_i$ — точка покоя типа седло - фокус, для $x \in \gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)$ плоскость $P(x)$ содержит касательное пространство $T_xW_i^u$ к неустойчивому многообразию W_i^u. Если $\omega(\gamma_i) = O_{i+1}$ — точка покоя типа седло - фокус, предположим, что для $x \in \gamma_i$ плоскость $P(x)$ и касательное пространство $T_x W^s_{i+1}$ пересекаются по прямой $P(x) \cap T_x W^s_{i+1} =< X(x) >,\ x \in \gamma_i$.

Прежде, чем сформулировать условие III' на ориентацию в плоскостях $P(x),\ x \in \Gamma$, рассмотрим траекторию $\gamma_i \subset \Gamma$ такую, что ее предельное множество $\omega(\gamma_i)$ является седло - фокусом O_{i+1} с двумерным устойчивым многообразием. Из условия II' в этом случае следует, что плоскость $P(x),\ x \in \gamma_i$, трансверсальна плоскости $T_x W^s_{i+1}$. Вектор v^u_{i+1} не лежит в плоскости $T_{O_{i+1}} W^s_{i+1}$. Поэтому для точки $x \in \gamma_i$, достаточно близкой к точке O_{i+1}, проекция вектора v^u_{i+1} на плоскость $P(x)$ параллельно плоскости $T_{O_{i+1}} W^s_{i+1}$ не равна нулевому вектору. Обозначим эту проекцию через $\mathrm{Pr}_x v^u_{i+1}$. Через Γ'' обозначим множество $\Gamma'' = \cup(\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i))$, где объединение берется по всем i таким, что предельное множество является седло - фокусом.

Сформулируем последнее условие на контур Γ.

Условие III'. В пучке плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma \setminus (\Gamma'' \cup \gamma_1)$ можно задать непрерывную ориентацию так, что в седловых точках покоя $O_i \in \Gamma$ она задается репером (v^s_i, v^u_i). Для точек x, лежащих на траектории γ_i, у которой предельное множество $\omega(\gamma_i)$ является седло - фокусом O_{i+1} с двумерным устойчивым многообразием, достаточно близко к точке O_{i+1} ориентация в плоскости $P(x)$ задается репером $(X(x), \mathrm{Pr}_x v^u_{i+1})$.

Теорема I.3.1. Пусть система I.3.1 имеет простой гетероклинический контур Γ типа Лоренца с седло - фокусами, удовлетворяющий условиям I', II', III'. Тогда в любой его окрестности $V(\Gamma)$ лежит простой гетероклинический контур G типа Лоренца, удовлетворяющий условию III. Кроме того, $G = \bigcup_{i \in 1:k}(\alpha(g_i) \cup g_i)$, где $g_i,\ i \in 1:k$, — траектории системы I.3.1, лежащие в окрестности $V(\Gamma)$ и $\alpha(g_1) = P_1 = \alpha(\gamma_1),\ \omega(g_k) = P_{m+1} = \omega(\gamma_m)$. Остальные предельные множества $\alpha(g_i),\ i \in 2:k$, являются седловыми точками покоя, принадлежащими первоначальному контуру Γ.

Доказательство теоремы состоит в последовательном уничтожении седло - фокусов в контуре Γ, то есть в построении нового контура, который обходит седло - фокусы. Метод построения зависит от размерности устойчивых многообразий седло - фокусов. Поэтому разобьем доказательство теоремы на леммы, предварительно введя в окрестностях седло - фокусов из контура Γ специальные координаты.

Пусть $\omega(\gamma_{i-1}) = O_i$ — точка покоя типа седло - фокус в контуре Γ. Собственные числа матрицы линейного приближения $DX(O_i)$ $\rho \pm i\omega$ и λ таковы, что отсутствуют резонансы второго порядка. По теореме Белицкого [9] в достаточно малой окрестности V_i точки покоя O_i система I.3.1 $\mathbb{C}^1$ - сопряжена своей линейной части. Переходя от линеаризующей системы координат в окрестности V_i к цилиндрическим координатам, получим систему

$$\dot r = \rho r, \quad \dot\varphi = \omega, \quad \dot z = \lambda z. \tag{I.3.2}$$

Рассмотрим первый седло - фокус O_i в контуре Γ. Возможны два случая. В первом — $\dim W^u_i = 1$ и во втором — $\dim W^u_i = 2$.

Лемма I.3.1. Если $\dim W_i^u = 1$, в любой окрестности V контура Γ лежит гетероклинический контур

$$\Gamma_1 = P_1 \cup \gamma \cup (\bigcup_{j \in i+1:m} (\alpha(\gamma_j) \cup \gamma_j) \cup P_{m+1},$$

где γ — некоторая траектория системы I.3.1, лежащая в окрестности V. Если среди предельных множеств $\alpha(\gamma_j),\ j \in i+1:m$, нет седло - фокусов, контур Γ_1 является простым гетероклиническим контуром типа Лоренца, удовлетворяющим условию III. Если среди предельных множеств $\alpha(\gamma_j),\ j \in i+1:m$, есть седло - фокусы, Γ_1 является простым гетероклиническим контуром типа Лоренца с седло - фокусами, удовлетворяющим условиям I', II', III'.

Доказательство. По условию $\rho < 0,\ \lambda > 0$. Можно считать, что координатная полуось $\{(r, \varphi, z) \in V_i:\ r = 0,\ 0 < z\}$ совпадает в окрестности V_i с траекторией γ_i.

Рассмотрим часть контура $\Gamma:\ \Gamma_0 = \bigcup_{j \in 1:i-1} (\alpha(\gamma_j) \cup \gamma_j)$. Контур Γ_0 удовлетворяет условиям теоремы I.2.2 §2, поскольку он удовдетворяет условиям I, II, III. Поэтому у него есть локально инвариантная гладкая неустойчивая поверхность $Q^u(\Gamma_0)$. Рассмотрим две трансверсали S_i и S^i к траекториям γ_{i-1} и γ_i соответственно.

$$S_i = \{(r, \varphi, z) \in V_i:\ r = \sigma,\ |\varphi - \varphi_0| < \delta,\ 0 < z < \delta\},$$

$$S^i = \{(r, \varphi, z) \in V_i:\ r < \delta,\ z = \sigma\},$$

где $(\sigma, \varphi_0, 0)$ — точка пересечения трансверсали S_i с траекторией γ_{i-1}. По условию III' касательная полуплоскость $P^+(x)$ к поверхности $Q^u(\Gamma_0)$ в точках $x \in \gamma_{i-1} \subset \Gamma$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки покоя O_i, лежит по ту же сторону от касательной плоскости $T_x W_i^s$ к устойчивому многообразию W_i^s, что и вектор v_i^u. Поэтому поверхность $Q^u(\Gamma_0)$ пересечет трансверсаль S_i по гладкой кривой

$$s_i = \{(r, \varphi, z) \in S_i:\ z = f(\varphi),\ f(\varphi_0) = 0,\ f'(\varphi_0) \neq 0,\ 0 \leq \varphi - \varphi_0 < \delta\}.$$

Отличие от нуля производной $f'(\varphi_0)$ следует из условия II': $P(x) \cap T_x W_i^s = < X(x) >$ для $x \in \gamma_{i-1}$. Для простоты обозначений будем считать, что $\varphi_0 = 0$. Рассмотрим продолжение поверхности $Q^u(\Gamma_0)$ за точку покоя O_i по траекториям системы I.3.2, сохранив за продолжением то же обозначение $Q^u(\Gamma_0)$. Докажем, что пересечение поверхности $Q^u(\Gamma_0)$ с трансверсалью S^i является спиралью. Отображение H по траекториям системы I.3.2 трансверсали S_i в трансверсаль S^i имеет вид:

$$H(\varphi_1, z_1) = (\varphi_2, r_2):\ r_2 = \sigma(\sigma/z_1)^{\rho/\lambda}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + (\omega/\lambda)\ln(\sigma/z_1),$$

где φ_1, z_1 и φ_2, z_2 системы координат на трансверсалях S_i и S^i соответственно, индуцированные системой координат r, φ, z в окрестности V_i. Легко видеть, что образ Hs_i кривой $s_i \subset S_i$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &Hs_i = \{(\varphi_2(\varphi_1), r_2(\varphi_1)) \in S^i: \\ &r_2(\varphi_1) = \sigma(f(\varphi_1)/\sigma)^{-\rho/\lambda}, \\ &\varphi_2(\varphi_1) = \varphi_1 + (\omega/\lambda)\ln(\sigma/f(\varphi_1)),\ 0 \leq \varphi_1 < \delta\}. \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

Отсюда следует, что $r_2(\varphi_1) \to 0,\ \varphi_2(\varphi_1) \to -\infty$ при $\varphi_1 \to 0$.

При $\dim W_i^u = 1$ по условию I' предельное множество $\omega(\gamma_i)$ не может быть точкой покоя типа седло - фокус такой, что $\dim W_{i+1}^s = 1$. Седловые точки покоя и замкнутые траектории из контура Γ имеют двумерные устойчивые многообразия. Итак, $\dim W_{i+1}^s = 2$. Из этого следует, что множество $s^i = S^i \cap W_{i+1}^s$ является гладкой кривой, проходящей через точку $(0,0) \in S^i$. Очевидно, что спираль Hs_i имеет бесконечно много точек пересечения с кривой s^i, которые сгущаютя к точке $(0,0) = S^i \cap \gamma_i$. Любая точка пересечения кривых Hs_i и s^i лежит на траектории γ системы I.3.1 такой, что $\alpha(\gamma) = P_1$ и $\omega(\gamma) = O_{i+1}$. Ясно, что для любой окрестности V гетероклинического контура Γ траекторию $\gamma \in W_{i+1}^s \cap W_1^u$ можно выбрать так, что $\gamma \in V$. Из вида I.3.3 кривой Hs_i следует, что ее точки пересечения с кривой s^i будут трансверсальными точками пересечения, если они лежат достаточно близко к точке $(0,0) = S^i \cap \gamma_i$. Это означает, что многообразия W_{i+1}^s и W_1^u пересекаются трансверсально по траекториям, проходящим через эти точки.

Рассмотрим гетероклинический контур Γ_1, который получается из контура Γ заменой траекторий $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ и их предельных множеств $\alpha(\gamma_k),\ k \in 2:i$, на траекторию γ:

$$\Gamma_1 = P_1 \cup \gamma \cup \big(\bigcup_{j \in i+1:m} (\alpha(\gamma_j) \cup \gamma_j) \big) \cup P_{m+1}.$$

Определим пучок плоскостей $P^1(x),\quad x \in \Gamma_1$, положив для $x \in \gamma$ $P^1(x) = T_x W_1^u$ и $P^1(x) = P(x)$ для остальных точек контура Γ_1. Проверим, что так определенный гетероклинический контур Γ_1 и пучок плоскостей $P^1(x)$ над ним удовлетворяют условиям I', II', III'.

Из построения гетероклинического контура Γ_1 ясно, что условие I' выполняется для Γ_1. Проверим непрерывность пучка $P^1(x)$ на множестве $\Gamma_1 \setminus \Gamma_1'$, где $\Gamma_1' = \cup \alpha(\gamma_j)$ и объединение берется по $j \in i+1:m$ таким, что $\alpha(\gamma_j)$ — седло - фокус.

Если предельное множество $\alpha(\gamma_{i+1})$ — точка покоя типа седло - фокус, непрерывность пучка $P^1(x)$ очевидна, так как множество $\Gamma_1' \supset \alpha(\gamma_{i+1})$, пучок $P^1(x) = T_x W_1^u,\ x \in \gamma \cup \alpha(\gamma)$ непрерывен, а на остальной части гетероклинического контура Γ_1 пучок $P^1(x)$ совпадает с непрерывным пучком $P(x)$.

Если предельное множество $\alpha(\gamma_{i+1})$ не является седло - фокусом, непрерывность пучка P^1 достаточно проверить на этом множестве. Если $i = m$, то $\omega(\gamma_i) = P_{m+1}$. По построению контура Γ_1 трансверсальное пересечение $W_1^u \cap W_{m+1}^s$ содержит γ. По λ- лемме [19] касательный пучок $T_x W_1^u,\ x \in \gamma$, непрерывен на $\gamma \cup \omega(\gamma)$ в этом случае.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда предельное множество $\omega(\gamma_i)$ является седлом и $i < m$. Поскольку многообразия W_1^u и W_{i+1}^s пересекаются трансверсально по траектории γ, то по лемме I.1.3 достаточно проверить, что траектория γ входит в точку O_{i+1}, касаясь ведущего направления. Заметим, что по лемме I.1.2 траектория γ_i входила в точку покоя O_{i+1}, касаясь ведущего направления. По построению траектория γ пересекает достаточно малую трансверсаль S_i к траектории γ_i. По построению S_i не содержит точек сильно устойчивого многообразия W_{i+1}^{ss} точки O_{i+1}. Только траектории, лежащие на многообразии W_{i+1}^{ss}, входят в точку O_{i+1}, касаясь неведущего направления. Поэтому траектория γ касается ведущего направления.

Таким образом, непрерывность пучка $P^1(x),\ x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_1'$, проверена.

Для завершения проверки условия II' для контура Γ_1 и пучка $P^1(x)$, $x \in \Gamma_1$, осталось убедиться , что $P^1(x) \cap T_x W^s_{i+1} = \langle X(x) \rangle$, $x \in \gamma$, если O_{i+1} — точка покоя типа седло - фокус. Это непосредственно следует из трансверсальности пересечения $W^s_{i+1} \cap W^u_i \supset \gamma$ и определения пучка P^1.

Условие III' для Γ_1 выполняется автоматически, так как γ является первой траекторией в контуре Γ_1.

Если среди предельных множеств $\alpha(\gamma_j)$, $j \in i+1 : m$, нет седло - фокусов, то, очевидно, что Γ_1 — простой гетероклинический контур типа Лоренца, а условия I', II', III' превращаются в условия I, II, III.

Когда среди множеств $\alpha(\gamma_j)$, $j \in i+1 : m$, есть седло -фокусы, то из вида контура Γ_1 следует, что это простой гетероклинический контур типа Лоренца с седло - фокусами, удовлетворяющий условиям I', II', III'. Лемма I.3.1 доказана. ■

Замечание. В доказательстве леммы при построении траектории γ и проверке условий I', II', III' для контура Γ_1 по существу использовалась лишь трансверсальность пересечения двумерной инвариантной поверхности $Q^u(\Gamma_0)$ с трансверсалью S_i и трансверсальность пересечения двумерного устойчивого многообразия W^s_{i+1} с трансверсалью S^i. Размерность же неустойчивого многообразия W^u_i не имела значения, так как при построении траектории γ в случае $\dim W^u_i = 2$ достаточно рассмотреть отображение H^{-1} вместо H и трансверсали S_i и S^i поменять ролями, оставив остальные рассуждения без изменений. При проверке условий I', II', III' для контура Γ_1 условие $\dim W^u_i = 1$ не использовалось.

Если в простом гетероклиническом контуре Γ типа Лоренца с седло - фокусами, удовлетворяющем условиям I', II', III', имеется седло - фокус O_k такой, что размерность многообразий W^u_{k-1} и W^s_{k+1} равны двум, то они трансверсально пересекают S_k и S^k соответственно. В этом случае справедливы все рассуждения доказанной леммы. Поэтому в любой окрестности контура Γ найдется траектория γ системы I.3.1 такая, что $\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma_{k-1})$ и $\omega(\gamma) = \omega(\gamma_k)$. Кроме того, гетероклинический контур $\widetilde{\Gamma}$, получающийся из контура Γ заменой множества $\gamma_{k-1} \cup O_k \cup \gamma_k$ на траекторию γ, будет удовлетворять условиям I', II', III', если определить пучок плоскостей $P(x)$, $x \in \gamma$, так, что $P(x)$ совпадает с касательной плоскостью $T_x W^u_{k-1}$ к неустойчивому многообразию W^u_{k-1} в точке $x \in \gamma$. ■

Рассмотрим теперь второй случай, когда первый седло - фокус O_i в контуре Γ имеет двумерное неустойчивое многообразие.

Лемма I.3.2. В любой окрестности V контура Γ лежит гетероклинический контур

$$\Gamma_2 = \bigcup_{i \in 1:l} (\alpha(g_i) \cup g_i)$$

системы I.3.1, в котором $\alpha(\gamma_i) \subset \Gamma$, $i \in 1 : l$, и $\alpha(g_1) = P_1$, $\omega(g_l) = P_{m+1}$. Контур Γ_2 либо является простым контуром типа Лоренца, удовлетворяющим условию III, либо содержит меньшее число седло - фокусов, чем контур Γ, и является простым гетероклиническим контуром типа Лоренца с седло - фокусами, удовлетворяющим условиям I', II', III'.

Доказательство. Пусть число k таково, что $m \geq k \geq i$, и для $j \in i : k$ точка покоя O_j является седло -фокусом с двумерным неустойчивым многообразием. Для предельного множества $\omega(\gamma_k)$ размерность устойчивого многообразия равна двум.Такое число k найдется, так как размерность устойчивого многообразия W^s_{i+1} может равняться единице только, если предельное множество $\omega(\gamma_i)$ — седло - фокус.

Рассмотрим произвольную окрестность V контура Γ.

Пусть $k > i$. Тогда по выбору числа k имеем $\dim W^u_{k-1} = 2$ и $\dim W^s_{k+1} = 2$. По замечанию в окрестности V лежит простой контур $\widetilde{\Gamma}$ типа Лоренца, число седло - фокусов в котором на единицу меньше, чем в контуре Γ, и который удовлетворяет условиям I', II', III'. Положим $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_2$. Таким образом, при $k > i$ лемма доказана.

Пусть $k = i$, то есть предельное множество $\alpha(\gamma_{k-1})$ не является седло - фокусом. Если $k = 2$, оно совпадает с замкнутой траекторией P_1. При $k > 2$ предельные множества $\alpha(\gamma_j)$, $j \in 2 : k-1$, являются седлами по выбору числа i. И в том и другом случае гетероклинический контур

$$\widetilde{\Gamma} = (\bigcup_{j \in 1:k-1} (\alpha(\gamma_j) \cup \gamma_j)) \cup \gamma_k$$

удовлетворяет условиям теоремы I.2.2, так как он не содержит седло - фокусов. По этой теореме у контура $\widetilde{\Gamma}$ есть гладкая инвариантная неустойчивая поверхность $Q^u(\widetilde{\Gamma}) \subset W^u_1$, которая трансверсально пересекает секущую S_k.

По выбору числа k устойчивое многообразие W^s_{k+1} двумерно. Оно трансверсально пересекает секущую S^k. Тогда (по замечанию к лемме I.3.1) в окрестности V гетероклинического контура Γ лежит простой гетероклинический контур Γ_2 с нужными свойствами. Лемма I.3.2 доказана. ■

Для завершения доказательства теоремы I.3.1 достаточно заметить, что для произвольной окрестности V контура Γ, удовлетворяющего условиям теоремы, применяя либо лемму I.3.1, либо лемму I.3.2, можно найти контур $\Gamma_1 \subset V$, удовлетворяющий условиям I', II', III', число седло - фокусов в котором меньше , чем в Γ. Если Γ_1 не содержит седло - фокусов, то Γ_1 — искомый контур. Если в Γ_1 есть седло - фокусы среди предельных множеств, то выбрав окрестность V_1 контура Γ_1 так, чтобы $V_1 \subset V$, по леммам I.3.1, I.3.2 найдем гетероклинический контур Γ_2 с меньшим числом седло - фокусов, чем в Γ_1. Повторяя этот процесс, придем к контуру Γ_l без седло - фокусов. Каждый из гетероклинических контуров Γ_i, $i \in 1 : l$, удовлетворяет условиям I', II', III' и является простым контуром с седло - фокусами. Кроме того, первое предельное множество в Γ_i совпадает с траекторией P_1, а последнее с траекторией P_{m+1}. Поэтому, положив $G = \Gamma_l$, завершим доказательство теоремы. ■

§4 Возмущение гетероклинических контуров

В этом параграфе изучается поведение гетероклинического контура при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы.

Рассмотрим наряду с системой

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 3 \tag{I.4.1}$$

ее $\mathbb{C}^1$ - малое возмущение

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad ||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon. \tag{I.4.2}$$

Допустим, что система I.4.1 имеет простой гетероклинический контур Γ типа Лоренца, удовлетворяющий условию III:

$$\Gamma = (\bigcup_{i \in 1:m} (\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)) \cup \omega(\gamma_m).$$

Предельное множество $\omega(\gamma_m)$ представляет из себя либо замкнутую траекторию P_{m+1}, либо седло O_{m+1}. Не исключается случай, когда контур Γ — цикл, то есть $\omega(\gamma_m) = P_1 = \alpha(\gamma_1)$.

Предельные множества $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1:m,\ \omega(\gamma_m)$ являются грубыми, то есть при достаточно малом числе ε система I.4.2 имеет предельные множества $P_1(\varepsilon),\ O_i(\varepsilon),\ i \in 2:m$, того же типа, что и система I.4.1 и предельное множество, соответствующее $\omega(\gamma_m)$, являющееся либо замкнутой траекторией $P_{m+1}(\varepsilon)$, либо седло - узлом $O_{m+1}(\varepsilon)$. Эти предельные множества лежат в сколь угодно малых окрестностях соответствующих предельных множеств из Γ, если число ε достаточно мало.

Гетероклинический контур Γ не является грубым инвариантным множеством. Однако, справедливо следующее утверждение.

Теорема I.4.1. Для любой окрестности W простого гетероклинического контура Γ типа Лоренца, удовлетворяющего условию III, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ у системы I.4.2 есть гетероклинический контур Γ', лежащий в окрестности W. Контур Γ' содержит замкнутую траекторию $P_1(\varepsilon)$, которая является α-предельным множеством первой траектории из Γ'. Если в Γ предельное множество $\omega(\gamma_m)$ — точка покоя, то контур Γ' содержит хотя бы одну из точек покоя $O_i(\varepsilon),\ i \in 2:m$, и является простым гетероклиническим контуром типа Лоренца, удовлетворяющим условию III. Если $\omega(\gamma_m)$ — замкнутая траектория, то в контуре Γ' последнее предельное множество является замкнутой траекторией $P_{m+1}(\varepsilon)$ и он либо содержит хотя бы одну из точек $O_i(\varepsilon),\ i \in 2:m$, и является простым гетероклиническим контуром типа Лоренца, удовлетворяющим условию III, либо Γ' состоит из траектории γ, по которой трансверсально пересекаются неустойчивое многообразие траектории $P_1(\varepsilon)$ с устойчивым многообразием траектории $P_{m+1}(\varepsilon)$, и траекторий $P_1(\varepsilon)$ и $P_{m+1}(\varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность W контура Γ и впишем в нее стандартную окрестность I.2.2:

$$V = \{ \bigcup_{i \in 1:m} (V_i \cup Q_i)\} \cup V_{m+1}.$$

Построим трансверсали $S_i,\ i \in 2:m, \quad S_{m+1}, \quad S^i,\ i \in 2:m$, заданные формулами I.2.4, I.2.6, I.2.7 соответственно. Ясно, что при достаточно малом числе ε_0 они будут трансверсалями к траекториям системы I.4.2. Напомним, что трансверсали S_i и S^i лежат в окрестности V_i, при этом S_i является трансверсалью к траектории γ_{i-1}, а S^i — к траектории γ_i.

Число ε_0 будем считать столь малым, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0$ точки покоя $O_i(\varepsilon),\ i \in 2:m$, и замкнутые траектории $P_1(\varepsilon),\ P_{m+1}(\varepsilon)$ возмущенной системы I.4.2 лежали в окрестностях $V_i, \dots, V_{m+1}$ соответствующих предельных множеств из гетероклинического контура Γ и для их характеристических показателей $\lambda_i', \mu_i', \nu_i'$ выполнялись те же неравенства из условия I: $\lambda_i' > -\mu_i', \quad \lambda_i' - \mu_i' > \nu_i'$, что и для характеристических показателей предельных множеств невозмущенной системы.

Как и при построении неустойчивой поверхности контура Γ, будем продолжать неустойчивое многообразие $W_1^u(\varepsilon)$ седловой замкнутой траектории $P_1(\varepsilon)$ системы I.4.2. В силу трансверсальности пересечения $W_1^u \cap W_2^s \supset \gamma_1$ при достаточно малом ε_0 неустойчивое многообразие $W_1^u(\varepsilon)$ трансверсально пересекает устойчивое многообразие $W_2^s(\varepsilon)$ точки покоя $O_2(\varepsilon)$ системы I.4.2 по траектории $\gamma_1(\varepsilon)$, лежащей в V. При этом траектория $\gamma_1(\varepsilon)$ входит в точку $O_2(\varepsilon)$, касаясь ведущего направления, поскольку этим свойством обладала траектория γ_1 системы I.4.1.

При таких ε множество $S^2 \cap W_1^u(\varepsilon) = s^2(\varepsilon)$ представляет собой гладкую кривую, содержащую точку $y_2(\varepsilon) = W_2^u(\varepsilon) \cap S^2$ в своем замыкании. Рассмотрим траекторию $\gamma_2(\varepsilon) \subset W_2^u(\varepsilon)$, проходящую через точку $y_2(\varepsilon)$. Для точки покоя $O_2(\varepsilon)$ ее характеристические показатели удовлетворяют условию I. Поэтому, рассуждая аналогично доказательству теоремы I.2.2, получим, что пучок $P_\varepsilon(x)$ касательных плоскостей к неустойчивому многообразию $W_1^u(\varepsilon)$ замкнутой траектории $P_1(\varepsilon)$ непрерывно продолжается на множество $O_2(\varepsilon) \cup \gamma_2(\varepsilon)$. Это продолжение примем за пучок плоскостей $P_\varepsilon(x), \quad x \in P_1(\varepsilon) \cup \gamma_1(\varepsilon) \cup O_2(\varepsilon) \cup \gamma_2(\varepsilon)$. Так как многообразия $W_1^u(\varepsilon)$ и $W_2^s(\varepsilon)$ пересекаются трансверсально по траектории $\gamma_1(\varepsilon)$ и она входит в точку покоя $O_2(\varepsilon)$, касаясь ведущего направления, то по лемме I.1.3 получим, что $P_\varepsilon(O_2(\varepsilon)) = < v_2^s(\varepsilon), v_2^u(\varepsilon) >$. По построению пучок $P_\varepsilon(x)$ инвариантен относительно дифференциала отображения сдвига по траекториям системы I.4.2.

Посмотрим как зависит пучок $P_\varepsilon(x),\ x \in \gamma_2(\varepsilon)$, от возмущения $Y(x)$. Пусть $q(t), q_\varepsilon(t)$ — решения систем I.4.1, I.4.2, параметризующие соответственно траектории γ_2 и $\gamma_2(\varepsilon)$ и такие, что $q(0) = y_2,\ q_\varepsilon(0) = y_2(\varepsilon)$. Поскольку неустойчивые многообразия W_2^u и $W_2^u(\varepsilon)$ точек покоя O_2 и $O_2(\varepsilon)$ одномерны и на компактных подмножествах непрерывно зависят от возмущения, точки $q(0)$ и $q_\varepsilon(0)$ сколь угодно близки, если ε_0 достаточно мало.

Пусть векторы $p(t)$ и $p_\varepsilon(t)$ — нормали к плоскостям $P(q(t))$ и $P_\varepsilon(q_\varepsilon(t))$ соответственно. Они являются решениями систем, сопряженных к системам в вариациях,

$$\dot p(t) = -DX(q(t))^T p(t), \tag{I.4.3}$$

$$\dot p_\varepsilon(t) = -DX(q_\varepsilon(t))^T p_\varepsilon(t) + DY(q_\varepsilon(t))^T p_\varepsilon(t). \tag{I.4.4}$$

Векторы $p(t)$ и $p_\varepsilon(t)$ стремятся при $t \to -\infty$ по направлению к векторам v^{ss} и $v^{ss}(\varepsilon)$, так как плоскости $P(q(t))$ и $P_\varepsilon(q_\varepsilon(t))$ стремятся к плоскостям $< v_2^s, v_2^u >$ и

$< v_2^s(\varepsilon), v_2^u(\varepsilon) >$. Это означает, что решения $p(t)$ и $p_\varepsilon(t)$ систем I.4.3, I.4.4 лежат на сильно устойчивых многообразиях этих систем. Матрицы этих систем стремятся при $t \to -\infty$ к постоянным матрицам $\mathrm{diag}(-\nu_2, \lambda_2, \mu_2)$ и $\mathrm{diag}(-\nu_2, \lambda_2, \mu_2) + H$ соответственно, при этом $||H|| < \varepsilon$. На полуоси $(-\infty, 0)$ система I.4.3 обладает свойством экспоненциальной дихотомии решений. По грубости этого свойства [44] получаем, что сильно устойчивые многообразия этих систем сколь угодно близки, если ε_0 достаточно мало. Это означает, что единичные векторы нормалей к плоскостям $P(q(t))$ и $P_\varepsilon(q_\varepsilon(t))$ сколь угодно близки при таком ε_0.

Устойчивое многообразие $W_3^s(\varepsilon)$ точки покоя $O_3(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль S^2 и делит ее на две компоненты, если ε_0 достаточно мало. При этом через одну из компонент (обозначим ее $\widetilde{S}^2$) проходят траектории, пересекающие при возрастании времени трансверсаль S^3. Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров следует, что через кривую $s^2(\varepsilon)$ при достаточно малом ε_0 проходят траектории, пересекающие трансверсаль S^3. Поэтому возможны три случая: либо кривая $s^2(\varepsilon)$ не пересекается с многообразием $W_3^s(\varepsilon)$ и лежит в компоненте $\widetilde{S}^2$, либо точка $y_2(\varepsilon) \in W_3^s(\varepsilon)$ и плоскость $P_\varepsilon(y_2(\varepsilon))$ трансверсальна к многообразию $W_3^s(\varepsilon)$ в точке $y_2(\varepsilon)$, либо $W_3^s(\varepsilon)$ трансверсально пересекает $W_1^u(\varepsilon)$ и $W_3^s(\varepsilon) \cap W_1^u(\varepsilon) \supset g_2(\varepsilon)$, где траектория $g_2(\varepsilon)$ целиком лежит в окрестности V. Во всех трех случаях множество $s^3(\varepsilon) = S^3 \cap W_1^u(\varepsilon)$ является гладкой кривой $\mathbb{C}^1$ - близкой к кривой $s^3 = S^3 \cap W_1^u$, поскольку, как было показано выше, плоскости $P(q(o))$ и $P_\varepsilon(q_\varepsilon(0))$ близки.

В третьем случае система I.4.2 имеет гетероклинический контур $P_1(\varepsilon) \cup g_2(\varepsilon) \cup O_3(\varepsilon)$. Инвариантный пучок $P_\varepsilon(x)$ на нем определим, положив $P_\varepsilon(x) = T_x W_1^u(\varepsilon)$, $x \in P_1(\varepsilon) \cup g_2(\varepsilon)$; $P_\varepsilon(O_3(\varepsilon)) = < v_3^s(\varepsilon), v_3^u(\varepsilon) >$. Из трансверсальности пересечения $W_1^u(\varepsilon) \cap W_3^s(\varepsilon)$ по лемме I.1.3 получим непрерывность так определенного пучка.

Во втором случае возмущенная система I.4.2 имеет гетероклинический контур $P_1(\varepsilon) \cup \gamma_1(\varepsilon) \cup O_2(\varepsilon) \cup \gamma_2(\varepsilon) \cup O_3(\varepsilon)$, на котором был определен непрерывный и инвариантный пучок $P(x)$ везде, кроме точки $O_3(\varepsilon)$. Положив $P_\varepsilon(O_3(\varepsilon)) =< v_3^s(\varepsilon), v_3^u(\varepsilon) >$, получим непрерывный инвариантный пучок на всем контуре. Это следует из леммы I.1.4 и того, что траектория $\gamma_2(\varepsilon)$ входит в точку $O_3(\varepsilon)$, касаясь ведущего направления, поскольку траектория γ_2 входила в точку O_3, так же касаясь ведущего направления.

В этих двух случаях множество $S^3 \cap W_1^u(\varepsilon) = s^3(\varepsilon)$ содержит точку $y_3(\varepsilon) = W_3^u(\varepsilon) \cap S^2$ в своем замыкании. Рассмотрим траекторию $\gamma_3(\varepsilon)$, проходящую через нее. Рассуждая так же как это сделано для $\gamma_2(\varepsilon)$, получим, что пучок касательных плоскостей к многообразию $W_1^u(\varepsilon)$ непрерывно продолжается на траекторию $\gamma_3(\varepsilon)$ и это продолжение примем за пучок $P_\varepsilon(x)$ на $\gamma_3(\varepsilon)$. Таким образом, удается осуществить продолжение неустойчивого многообразия $W_1^u(\varepsilon)$ за точку $O_3(\varepsilon)$ так, что в край этого продолжения входят описанные выше гетероклинические контуры, которые удовлетворяют условиям I, II, III.

В первом случае траектория $\gamma_2(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль S^3 : $\gamma_2(\varepsilon) \cap S^3 = y^3(\varepsilon)$ и, повторяя рассуждения, проведенные для траектории $\gamma_2(\varepsilon)$ и трансверсали S^2, можно и в этом случае осуществить процесс продолжения за точку $O_4(\varepsilon)$.

На i-м шаге продолжения либо к уже построенному контуру присоединяется траектория $\gamma_i(\varepsilon)$ и точка покоя $O_{i+1}(\varepsilon)$, либо находится контур вида $P_1(\varepsilon)\cup g_i(\varepsilon)\cup O_{i+1}(\varepsilon)$, в котором $W_1^u(\varepsilon)$ трансверсально пересекает $W_{i+1}^s(\varepsilon)$ по траектории $g_i(\varepsilon)$, либо последняя траектория в построенном на предыдущем шаге контуре пересекает следующую трансверсаль S^{i+1} и точка $O_{i+1}(\varepsilon)$ не входит в строящийся контур.

Может случиться, что на всех шагах продолжения реализуется третья возможность и точки покоя $O_1, \dots, O_m$ не входят в строящийся контур. Это означает, что найдется траектория $g_m(\varepsilon)$ системы I.4.2 такая, что $W_1^u(\varepsilon)$ трансверсально пересекает $W_{m+1}^s(\varepsilon)$ по ней. Если $\omega(\gamma_m)$ — замкнутая траектория, то имеется трансверсальный гетероклинический контур на двух седловых замкнутых траекториях $P_1(\varepsilon)$ и $P_{m+1}(\varepsilon)$. Если предельное множество $\omega(\gamma_m)$ — точка покоя,то получим контур $P_1(\varepsilon)\cup g_m(\varepsilon)\cup O_{m+1}(\varepsilon)$, образованный трансверсальным пересечением многообразий $W_1^u(\varepsilon)$ и $W_{m+1}^s(\varepsilon)$.

Во всех остальных случаях контур у возмущенной системы будет содержать хотя бы одну точку покоя O_i, $i \in 2 : m$, и удовлетворять условиям I, II, III, так как они выполнялись на каждом шаге построения контура. Теорема I.4.1 доказана. ■

Замечание. Рассмотрим детальнее последний шаг построения гетероклинического контура Γ' в случае, когда $\omega(\gamma_m) = P_{m+1}$ — гиперболическая замкнутая траектория. Введем на трансверсали $S(m+1)$ к траектории P_{m+1} координаты $\xi(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, непрерывно зависящие от ε так, что устойчивое многообразие $W_{m+1}^s(\varepsilon)$ замкнутой траектории $P_{m+1}(\varepsilon)$ задается уравнением $\xi(\varepsilon) = 0$. Можно считать, что трансверсаль S_{m+1} содержится в $S(m+1)$. Положительное направление оси $\eta(\varepsilon)$ зададим так, чтобы при $\varepsilon = 0$ пара векторов $(v_\eta(\varepsilon), X(0))$ задавала ориентацию, совпадающую с ориентацией из условия III на контур Γ.

На предпоследнем этапе построения был построен контур Γ'', в котором последнее предельное множество является одной из точек покоя $O_j(\varepsilon)$, $j \in 2 : m$. Одна из неустойчивых сепаратрис $g_j(\varepsilon)$ этой точки покоя пересекает трансверсаль S_{m+1} при достаточно малом ε_0, поскольку она пересекала трансверсаль S^m.

Гетероклинический контур Γ'' Лоренцева типа удовлетворяет условию III, поэтому определена его неустойчивая поверхность $Q(\Gamma'')$. Контур Γ'' делит эту поверхность на две компоненты Q^+, Q^-. При этом Q^+ состоит из траекторий, не покидающих окрестности W и лежащих на неустойчивом многообразии первой в контуре Γ'' замкнутой траектории $P_1(\varepsilon)$. В силу того, что в контуре Γ'' есть неподвижная точка, вторая компонента Q^- не содержит таких траекторий. Пусть $x_{m+1}(\varepsilon) = (\xi_{m+1}(\varepsilon), \eta_{m+1}(\varepsilon))$ — точка пересечения контура Γ'' с трансверсалью $S(m+1)$, а $s^{m+1} = S(m+1) \cap Q(\Gamma'')$. Точка $x_{m+1}(\varepsilon)$ делит кривую s^{m+1} на две части s_+^m, s_-^m, соответствующие возрастанию и убыванию координаты η. По условию III из леммы I.2.1 следует, что именно компонента Q^+ поверхности $Q(\Gamma'')$ пересекает трансверсаль $S(m+1)$ по кривой s_+^{m+1}. Мыслимы три возможности $\xi_{m+1}(\varepsilon) > 0$, $\xi_{m+1}(\varepsilon) < 0$, $\xi_{m+1}(\varepsilon) = 0$. В последнем случае траектория $g_m(\varepsilon) \subset W_{m+1}^s(\varepsilon)$ и контур Γ' получается прибавлением к контуру Γ'' траектории $P_{m+1}(\varepsilon)$. В первом случае контур Γ' совпадает с Γ''. Во втором случае кривая s_-^m пересекает $W_{m+1}^s(\varepsilon)$, если число ε_0 достаточно мало. Это означает, что трансверсальное пересечение $W_{m+1}^s(\varepsilon) \cap W_1^u(\varepsilon) \supset g_{m+1}(\varepsilon) \subset W$ и в этом случае $\Gamma' = P_1(\varepsilon) \cup g_{m+1}(\varepsilon) \cup P_{m+1}(\varepsilon)$.

Таким образом, во всех трех случаях точка $x_{m+1}(\varepsilon)$ пересечения последней траектории из контура Γ'' с трансверсалью $S(m+1)$ имеет неотрицательную координату $\xi_{m+1}(\varepsilon)$. При этом та компонента $Q(\Gamma)\setminus\Gamma$, которая содержит кривую s_+^m, состоит из траекторий возмущенной системы, лежащих на $W_1^u(\varepsilon)$ и не покидающих окрестность W. ■

Глава II
Гетероклинические циклы Лоренцева типа, порождающие персистентные хаотические множества

В этой главе будет рассматриваться система

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 4, \tag{1}$$

имеющая равноразмерностный гетероклинический цикл

$$\Gamma = \bigcup_{i \in 1:m} (\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i))$$

типа Лоренца, удовлетворяющий условиям I, II, III и ее $\mathbb{C}^1$ - малое возмущение

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 4, \quad ||Y||_{\mathbb{C}^1} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Будем предполагать, что системы 1, 2 порождают потоки g^t и g^t_ε соответственно.

В первом параграфе строится инвариантное относительно отображения $D\,g^t$ разложение 3 над гетероклиническим циклом Γ такое, чтобы выполнялись оценки 4, 5 и слагаемые в разложении 3 удовлетворяли условию Липшица по x локально.

Во втором параграфе разложение 3 строится уже над некоторой окрестностью цикла Γ, при этом оно инвариантно относительно отображения $D\,g^t_\varepsilon$ и выполняются оценки 4, 5. Условию Липшица удовлетворяет лишь первое слагаемое в разложении 3. Это одномерное векторное расслоение над некоторой окрестностью $V(\Gamma)$ цикла Γ интегрируемо, поскольку оно локально удовлетворяет условию Липшица.

В параграфе 3 по полю направлений, заданному первым слагаемым, строится сильно устойчивая ламинация на окрестности $V(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ, которая является разбиением на интегральные кривые, определяемые этим полем направлений. По построению она инвариантна относительно отображения g^t_ε.

В параграфе 4 для системы 1, имеющей гетероклинический цикл типа Лоренца, удовлетворяющий условиям I, II, III, строится инвариантное хаотическое множество J системы 1, лежащее в окрестности цикла Γ. При этом существенно используется существование сильно устойчивой ламинации.

В пятом параграфе доказывается персистентность хаотического инвариантного множества $J(\varepsilon)$. Кроме того, строится возмущение системы 1, то есть система 2, при котором хаотическое инвариантное множество отделяется от точек покоя.

В этой главе нам понадобятся некоторые обозначения.

Предельные множества, лежащие в цикле Γ, являются грубыми. Поэтому можно выбрать окрестности U_i предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1:m$, и число ε_0 такие, что возмущенная система 2 при $\varepsilon < \varepsilon_0$ будет иметь в окрестности U_{l_i}, $i \in 1:k$, единственную седловую замкнутую траекторию $P_{l_i}(\varepsilon)$, а в окрестности U_j, $j \neq l_i$, $i \in 1:k$, $j \in 1:m$, единственное седловое состояние равновесия $O_j(\varepsilon)$.

Обозначим через $\nu_{l_i}(\varepsilon)$, $\mu_{l_i}(\varepsilon)$ ненулевые характеристические показатели замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$, $i \in 1:k$, а через $\nu_j(\varepsilon)$, $\lambda_j(\varepsilon)$, $\mu_j(\varepsilon)$ собственные числа матрицы $D\,X(O_j(\varepsilon)) + D\,Y(O_j(\varepsilon))$, $\quad j \neq l_i$, $i \in 1:k$, $j \in 1:m$.

§1 Построение сильно устойчивого расслоения над гетероклиническим циклом Γ

Цель этого параграфа построить разложение 3 над гетероклиническим циклом Γ для невозмущенной системы 1.

Поскольку гетероклинический цикл Γ удовлетворяет условию I, то можно выбрать число $\varepsilon_0 > 0$ и числа $M^i, \bar{\lambda}^i, \bar{\Lambda}^i$, $i \in 1:m$, так что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &M^i > \mu_i(\varepsilon) > 0 > \lambda_i(\varepsilon) > \bar{\Lambda}^i > -\mu_i(\varepsilon) > \bar{\lambda}^i > -M^i > \nu_i(\varepsilon), \\ &\bar{\lambda}^i + M^i - \bar{\Lambda}^i < 0, \quad i \in 1:m,\ i \neq l_j,\ j \in 1:k, \\ &M^{l_j} > \mu_{l_j}(\varepsilon) > 0 > \bar{\Lambda}^{l_j} > \bar{\lambda}^{l_j} > \nu_{l_j}(\varepsilon), \quad j \in 1:k. \end{aligned} \qquad \textbf{(II.1.0)}$$

Теорема II.1.1. Пусть гетероклинический цикл Γ типа Лоренца системы 1 удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда существуют окрестности W_i предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1:m$, постоянная $\overline{C}$ и непрерывное и инвариантное относительно отображения Dg^t, $t \in \mathbb{R}$, разложение:

$$\mathbb{R}^3 = E_1^{ss}(x) \oplus E_1^v(x), \quad x \in \Gamma, \qquad \textbf{(II.1.1)}$$

в котором $E_1^{ss}(x)$ — прямая, $E_1^v(x)$ — плоскость такие, что для $i \in 1:m$ справедливы оценки:

$$||Dg^t(x)v|| \le \overline{C}\exp(\bar{\lambda}^i t)||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E_1^{ss}(x), \quad x, g^t(x) \in W_i, \qquad \textbf{(II.1.2)}$$

$$||Dg^t(x)v|| \le \overline{C}\exp(\bar{\Lambda}^i t)||v||, \quad t \le 0, \quad v \in E_1^v(x), \quad x, g^t(x) \in W_i. \qquad \textbf{(II.1.3)}$$

При этом пучок прямых $E_1^{ss}(x)$, $x \in \Gamma$, и пучок плоскостей $E_1^v(x)$, $x \in \Gamma$, удовлетворяют локально условию Липшица. $\triangle$

Доказательство начнем с выбора локальных координат ξ_i, ζ_i, η_i в некоторых окрестностях W_i предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1:m$, входящих в цикл Γ.

Рассмотрим замкнутую траекторию P_i. В главе I §1 было доказано, что существует нормальная окрестность W_i замкнутой траектории P_i, являющаяся полноторием, такая что в ней можно выбрать координаты ξ_i, ζ_i, η_i так, что система 1 примет вид

$$\begin{cases} \xi_i' = \nu_i\xi_i + \widetilde{F}_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \\ \zeta_i' = 1 + Q_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \\ \eta_i' = \mu_i\eta_i + \widetilde{G}_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i), \end{cases}$$

где функции $\widetilde{F}_i$, $\widetilde{G}_i \in \mathbb{C}^{r-2}(W_i)$, функция $Q_i \in \mathbb{C}^{r-1}(W_i)$, $\widetilde{F}_i(0, \zeta_i, \eta_i) = 0$, $\widetilde{G}_i(\xi_i, \zeta_i, 0) = 0$, $Q_i(0, \zeta_i, 0) = 0$, и частные производные функций $\widetilde{F}_i, \widetilde{G}_i$, по ξ_i, и η_i равны нулю при $\xi_i = 0 = \eta_i$.

Координата ζ_i меняется от 0 до ω_i, где ω_i – период какого - либо решения системы 1, параметризующего замкнутую траекторию P_i. Будем для простоты считать, что периоды одинаковы для всех замкнутых траекторий и равны ω. Точка (ξ_i, η_i) лежит в круге радиуса δ_i в нормальной к P_i плоскости с центром на траектории P_i. Будем считать, что все радиусы совпадают и равны δ.

Учитывая, что $r \geq 4$, функции $\widetilde{F}_i, \widetilde{G}_i$ по лемме Адамара можно представить в виде

$$\widetilde{F}_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) = F_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)\xi_i, \quad \widetilde{G}_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) = G_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)\eta_i,$$

где функции $F_i, G_i \in \mathbb{C}^{r-3}(W_i)$ и равны нулю при $\xi_i = 0 = \eta_i,\ i \in 1:k$.

Тогда система 1 в окрестности W_i примет вид:

$$\begin{cases} \xi_i' = \nu_i\xi_i + F_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)\xi_i \\ \zeta_i' = 1 + Q_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \\ \eta_i' = \mu_i\eta_i + G_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)\eta_i \end{cases}, \qquad \textbf{(II.1.4)}$$

где $F_i, G_i \in \mathbb{C}^{r-3}(W_i)$ и они равны нулю при $\eta_i = 0, \xi_i = 0$. Функция $Q_i \in \mathbb{C}^{r-1}(W_i)$, и $Q_i(0, \zeta_i, 0) = 0$. При этом множества

$$\{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i : \quad \eta_i = 0\}, \quad \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i : \quad \xi_i = 0\}$$

являются локально устойчивым и неустойчивым многообразиями замкнутой траектории P_i.

Как это было указано при доказательстве леммы I.1.3, в окрестностях $W_i, i \in 2 : m,\ i \neq l_j,\ j \in 1 : k$, представляющих собой достаточно малые шары с центрами в точках покоя O_i, координаты ξ_i, ζ_i, η_i можно выбрать так, что система 1 примет вид:

$$\begin{cases} \xi_i' = \nu_i\xi_i + X_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \\ \zeta_i' = \lambda_i\zeta_i + Y_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \\ \eta_i' = \mu_i\eta_i + Z_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \end{cases}, \qquad \textbf{(II.1.5)}$$

где функции $X_i, Y_i, Z_i \in \mathbb{C}^{r-2}(W_i),\ i \in 2 : m$, и равны нулю вместе со своими частными производными первого порядка при $\xi_i = \zeta_i = \eta_i = 0$. Кроме того, ось ξ_i является локальным сильно устойчивым многообразием точки покоя O_i, ось η_i — ее локальным неустойчивым многообразием; при этом плоскость (ξ_i, ζ_i) является локальным устойчивым многообразием точки покоя O_i, то есть $X_i(0, 0, \eta_i) = 0$, $Y_i(0, 0, \eta_i) = 0$, $Y_i(\xi_i, 0, 0) = 0$, и $Z_i(\xi_i, \zeta_i, 0) = 0$, $i \in 2 : m$.

Определим сначала второе слагаемое в разложении II.1.1 для невозмущенной системы 1, положив $E_1^v(x) = P(x),\ x \in \Gamma$.

По условию II так определенный пучок $E_1^v(x),\ x \in \Gamma$, непрерывен на Γ и инвариантен относительно отображения Dg^t.

Лемма II.1.1. Для пучка $E_1^v(x),\ x \in \Gamma$, выполнена оценка II.1.3.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $i = 1$. Для точки $x \in W_1 \cap \Gamma$ имеются три возможности: $x \in P_1$, $\quad x \in \gamma_1 \cap W_1 \subset W_1^u \cap W_1$ и $x \in \gamma_m \cap W_1 \subset W_1^s \cap W_1$. При реализации первой или второй возможностей точка $x \in W_1^u$ и плоскость $E_1^v(x)$ является касательной плоскостью к неустойчивому многообразию W_1^u замкнутой траектории P_1 по замечанию к лемме I.1.1. Неустойчивое многообразие W_1^u задается в окрестности W_1 уравнением $\xi_1 = 0$. Если обозначить через $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$ систему координат в касательном пространстве T_x в точке $x \in \Gamma \cap W_1$, которая порождена системой координат ξ_1, ζ_1, η_1 в окрестности W_1, то из сказанного следует, что плоскость $E_1^v(x)$ задается уравненмем $\bar{\xi}_1 = 0$ и что пучок плоскостей $E_1^v(x),\ x \in (P_1 \cup \gamma_1) \cap W_1$, инвариантен относительно отображения Dg^t. Пусть $\varphi(t) = g^t(x)$ есть решение системы II.1.4 и точка $x \in (P_1 \cup \gamma_1) \cap W_1$. Тогда матрица отображения Dg^t в координатах $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$ является фундаментальной матрицей системы в вариациях для решения $\varphi(t)$, нормированной при $t = 0$. Из вида системы II.1.4 следует, что плоскость $\bar{\xi}_1 = 0$ является инвариантной для системы в вариациях. Следовательно, вектор $D\,g^t(x)v_0 \in E_1^v(g^t(x))$, если вектор $v_0 \in E_1^v(x)$. Вектор $X(\varphi(t))$ является решением системы в вариациях и лежит в плоскости $E_1^v(\varphi(t))$ при $t \leq 0$. Очевидно, что найдется постоянная L_1, не зависящая от x такая, что $||X(g^t(x))|| \leq L_1||X(x)||$ при $x \in \gamma_1 \cap W_1$ и $t \leq 0$. Поэтому для решения $X(\varphi(t))$ имеем $||X(\varphi(t))|| \leq L_1||X(\varphi(0))||,\ t \leq 0$. Для второго линейно независимого с $X(\varphi(t))$ решения $\psi(t)$ системы в вариациях такого, что $E_1^v(\varphi(t)) =< X(\varphi(t)), \psi(t) >$, выполняется аналогичная оценка $||\psi(t)|| \leq L_2||\psi(0)||,\ t \leq 0$, поскольку число μ_1 положительно. При этом постоянная L_2 не зависит от $\psi(0)$. Из этих двух оценок следует, что найдется постоянная C такая, что $||Dg^t(x)v_0|| \leq C||v_0||$ при $t \leq 0$. В рассматриваемом случае оценка II.1.3 получена.

Перейдем к случаю $x \in \gamma_m \cap W_1$. По условию II, наложенному на гетероклинический цикл Γ, плоскость $P(x) = E_1^v(x)$ сколь угодно близка к плоскости $\{(\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1) :\ \bar{\xi}_1 = 0\}$, если окрестность W_1 достаточно мала. Будем считать, что окрестность W_1 выбрана так, что для для $x \in \gamma_m \cap W_1$ и вектора $v_0 = (\bar{\xi}_1^0, \bar{\zeta}_1^0, \bar{\eta}_1^0) \in E_1^v(x)$ выполняется неравенство

$$|\bar{\xi}_1^0| < \frac{1}{4}(|\bar{\zeta}_1^0| + |\bar{\eta}_1^0|). \qquad (+)$$

Как и в предыдущем случае, взяв поизвольно точку $x \in \gamma_m \cap W_1$, рассмотрим систему в вариациях для решения $\varphi(t) = g^t(x)$ системы II.1.4. Взяв окрестность W_1 столь малой, чтобы она не содержала состояний равновесия, положим $L = \frac{\max ||X(x)||}{\min ||X(x)||},\ \ x \in \overline{W}_1$. Решение $X(\varphi(t))$ системы в вариациях лежит в плоскости $E_1^v(\varphi(t))$ по лемме I.1.1. По выбору L имеем $||X(\varphi(0))|| \leq L||X(\varphi(t))||$ при $t \geq 0$.

Рассмотрим решение $\psi(t) = (\bar{\xi}_1(t), \bar{\zeta}_1(t), \bar{\eta}_1(t))$ системы в вариациях, которое вместе с решением $X(\varphi(t))$ порождает пространство $E_1^v(\varphi(t))$, то есть $E_1^v(\varphi(t) =< X(\varphi(t), \psi(t) >$. Такое решение существует в силу инвариантности пучка E_1^v. Заметим, что $\bar{\eta}_1(0) \neq 0$. Действительно, последнее уравнение системы в вариациях имеет вид:

$$\bar{\eta}_1' = \mu_1\bar{\eta}_1 + G_1(\xi_1(t), \zeta_1(t), 0)\bar{\eta}_1 \qquad (*)$$

в силу того, что траектория γ_m лежит на W_1^s. Из сказанного следует, что если $\bar{\eta}_1(0) = 0$, то $\bar{\eta}_1(t) = 0$ при $t \geq 0$ и плоскость $< X(\varphi(t)), \psi(t) >$ не может стремиться к плоскости $\{(\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1) :\ \bar{\xi}_1 = 0\}$.

Из уравнения (*) следует, что $\bar{\eta}_1(t) \geq \exp(-\bar{\Lambda}^1 t)\bar{\eta}_1(0)$ при $t \geq 0$, если окрестность W_1 столь мала, что

$$\mu_1 + \bar{\Lambda}^1 > ||G_1(\xi_1, \zeta_1, \eta_1)||, \quad (\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in W_1.$$

Оценим норму решения $\psi(t)$:

$$||\psi(t)|| \geq |\bar{\eta}_1(t)| + |\bar{\zeta}_1(t)| \geq \exp{(-\bar{\Lambda}^1 t)}|\bar{\eta}_1(0)|.$$

Можно считать, что $\bar{\zeta}_1(0) = 0$. Действительно, при достаточно малой окрестности W_1 для точки $x \in \gamma_m \cap W_1$ плоскость
$\{(\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1): \ \bar{\zeta}_1 = 0\}$ в касательном пространстве T_x в точке x не содержит прямой $< X(x) >$ и пересекается с плоскостью $E_1^v(x)$. Поэтому вектор $\psi(0) = (\bar{\xi}_1(0), \bar{\zeta}_1(0), \bar{\eta}_1(0))$ можно выбрать так, что $\bar{\zeta}_1(0) = 0$ и так, что он линейно независим с вектором $X(x)$. Из сказанного и неравенства (+) следует, что

$$||\psi(0)|| \leq \sqrt{(\frac{1}{4}|\bar{\eta}_1(0)|)^2 + |\bar{\eta}_1(0)|^2} \leq \frac{\sqrt{17}}{4}|\bar{\eta}_1(0)|,$$

следовательно,

$$||\psi(t)|| \geq \frac{4}{\sqrt{17}}\exp{(-\bar{\Lambda}^1 t)}||\psi(0)|| \geq \frac{4}{\sqrt{17}}||\psi(0)||.$$

Поскольку для двух линейно независимых решений $X(\varphi(t))$ и $\psi(t)$ имеем оценки

$$||X(\varphi(t))|| \geq L^{-1}||X(\varphi(0))||, \quad ||\psi(t)|| \geq \frac{4}{\sqrt{17}}||\psi(0)||,$$

то для любого решения $v(t)$ уравнения в вариациях такого, что $v(0) \in E_1^v(y)$, будем иметь $||v(t)|| \geq \frac{1}{C}||v(0)||$ при $t \geq 0$, где C не зависит от выбора точки x. Учитывая, что $v(t) = Dg^t(x)v(0)$ и что Dg^t — изоморфизм, получим

$$||D\, g^{-t}(y)w|| \leq C||w|| \leq C\exp(-\bar{\Lambda}^i t)||w||,$$

$$t \geq 0, \quad y = g^t(x), \quad w \in E_1^v(y).$$

Таким образом, для $i = 1$ оценка II.1.3 доказана. Для $i = l_j, \ j \in 2:m$, рассуждения аналогичны.

Перейдем к случаю $i \geq 2, \ i \neq l_j, \ j \in 1:k$. Как и ранее для точки $x \in W_i \cap \Gamma$ имеем три возможности: $x = O_i, \ x \in \gamma_i \cap W_i$ и $x \in \gamma_{i-1} \cap W_i$.

При $x = O_i, i \in 2:m$, оценка II.1.3 следует из выбора числа $\bar{\Lambda}^i$.

Рассмотрим последнюю возможность $x \in \gamma_{i-1} \cap W_i, \ i \in 2:m$.

Пусть $\varphi(t) = (\xi_i(t), \zeta_i(t), \eta_i(t))$ — решение системы II.1.5, задающее траекторию γ_{i-1} такое, что $\varphi(0) = x$. Траектория γ_{i-1} лежит на W_i^s, поэтому $\eta_i(t) = 0$.

Пусть $v(t) = (\bar{\xi}_i(t), \bar{\zeta}_i(t), \bar{\eta}_i(t))$ — решение системы в вариациях для решения $\varphi(t)$, при этом $v_0 = v(0) \in E_1^v(x) = P(x)$. Другими словами $v(t) = D\,g^t(x)v_0$. Заметим, что решение $v(t)$ задано при всех $t \geq 0$, так как точка $g^t(x) \in W_i$ и $v(t) \in E_1^v(\varphi(t)) = P(\varphi(t))$. По условию II введения плоскость $P(\varphi(t))$ стремится при $t \to -\infty$ к плоскости $\langle v_i^s, v_i^u \rangle$, которая в координатах $\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i$ имеет вид $\bar{\xi}_i = 0, \ i \in 2:m$. Из этого следует, что окрестность $W_i, i \in 2:m$, можно считать столь малой, что $(\bar{\xi}_i)^2 < \frac{1}{16}((\bar{\zeta}_i)^2 + (\bar{\eta}_i)^2)$, если вектор $v = (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i) \in E_1^v(y)$, где $y \in \gamma_{i-1} \cap W_i, \ i \in 2:m$.

Оценим $||v(t)||$ при $t \geq 0$. Поскольку $\eta(t) = 0$, то для решения $v(t)$ системы в вариациях, имеем:

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_i'(t) = \lambda_i \bar{\zeta}_i(t) + \dfrac{\partial Y_i}{\partial \xi_i}(\varphi(t))\bar{\xi}_i(t) + \dfrac{\partial Y_i}{\partial \zeta_i}(\varphi(t))\bar{\zeta}_i(t) + \dfrac{\partial Y_i}{\partial \eta_i}(\varphi(t))\bar{\eta}_i(t) \\ \bar{\eta}_i'(t) = \mu_i \bar{\eta}_i(t) + \dfrac{\partial Z_i}{\partial \eta_i}(\varphi(t))\bar{\eta}_i(t), \end{cases}$$

где во втором уравнении учтено, что $\frac{\partial Z_i}{\partial \xi_i}(\varphi(t)) = 0, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \zeta_i}(\varphi(t)) = 0$, так как $Z_i(\xi_i, \zeta_i, 0) = 0$.

Пусть $d_i = \max(||\mathrm{grad}\, Y_i(x)|| + ||\mathrm{grad}\, Z_i(x)||),\ x \in W_i$.

Число d_i можно считать сколь угодно малым, если окрестность W_i достаточно мала. Учитывая, что для вектора $v(t) = (\bar{\xi}_i(t), \bar{\zeta}_i(t), \bar{\eta}_i(t)) \in E_1^v(\varphi(t))$ выполнено неравенство

$$|\bar{\xi}_i(t)| < \frac{1}{4}(|\bar{\zeta}_i(t)| + |\bar{\eta}_i(t)|),$$

после несложных выкладок получим неравенство

$$\frac{1}{2}(\bar{\zeta}_i^2(t) + \bar{\eta}_i^2(t))' \geq$$

$$\geq \min(\lambda_i, \mu_i)(\bar{\zeta}_i^2(t) + \bar{\eta}_i^2(t)) - d_i(\frac{5}{4}\bar{\zeta}_i(t)^2 + \frac{9}{5}|\bar{\zeta}_i(t)||\bar{\eta}_i(t)|).$$

Поскольку число $\bar{\Lambda}^i$ выбрано так, что $0 > \lambda_i > \bar{\Lambda}^i > -\mu_i$, то в достаточно малой окрестности W_i при $t \geq 0$ будем иметь

$$|\bar{\zeta}_i(t)| + |\bar{\eta}_i(t)| \geq (|\bar{\zeta}_i(0)| + |\bar{\eta}_i(0)|)\exp(\bar{\Lambda}^i t).$$

Отсюда получим

$$||v(t)|| = ||D\, g^t(x)v(0)|| \geq \sqrt{|\bar{\zeta}_i(t)|^2 + |\bar{\eta}_i(t)|^2} \geq$$

$$\geq \exp(\bar{\Lambda}^i t)\sqrt{(\bar{\zeta}_i(0))^2 + (\bar{\eta}_i(0))^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\exp(\bar{\Lambda}^i t)||v(0)||, \quad i \in 2:m.$$

Обозначим $w = D\, g^t v(0)$, тогда получим

$$||w|| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\exp(\bar{\Lambda}^i t)||D\, g^{-t} w||, \quad t \geq 0$$

или

$$||D\, g^{-t} w|| \leq C\exp(-\bar{\Lambda}^i t)||w||, \quad t \geq 0.$$

учитывая, что $D\, g^t$ — изоморфизм и что семейство плоскостей $P(x)$ инвариантно относительно $D\, g^t$, получим оценку II.1.3 в этом случае.

Оценка II.1.3 получена в системе координат $\bar{\xi}_i,\ \bar{\zeta}_i,\ \bar{\eta}_i$ в касательном пространстве. Переход к исходным координатам может изменить лишь константу C.

Пусть теперь $x \in \gamma_i \cap W_i$. Приведенное выше доказательство по существу использовало два факта. Во-первых, инвариантность пучка $P(x) = E_1^v(x), x \in \Gamma$, и во-вторых, то, что плоскость $P(x)$ стремится к плоскости $< v_i^s, v_i^u >$ при стремлении точки x к $O_i, i \in 2 : m$. Оба эти факта остаются в силе и в рассматриваемом случае. Поэтому доказательство оценки II.1.3 существенно не меняется, что и доказывает лемму II.1.1. ■

Определим первое слагаемое в разложении II.1.1 сначала для точек $x \in \bigcup(W_i \cap \Gamma), i \in 1 : m$.

Рассмотрим случай $i = l_j,\ j \in 1 : k$. Поскольку построение первого слагаемого в разложении II.1.1 на множествах $W_{l_j} \cap \Gamma,\ j \in 1 : k$, производится одинаково, приведем подробные доказательства лишь для $i = 1$ в леммах II.1.2, II.1.3.

Для $x \in (\gamma_m \cup P_1) \cap W_1$ определим прямую $E_1^{ss}(x) = T_x W^s(y)$, где через $T_x W^s(y)$ обозначено касательное пространство к устойчивому многообразию точки $y \in P_1$, такой что $x \in W^s(y)$. Это определение корректно, так как локальные устойчивые многообразия $W^s(y) \cap W_1, y \in P_1$, расслаивают локальное устойчивое многообразие $W_1^s \cap W_1$ замкнутой траектории P_1, если окрестность W_1 достаточно мала: $W_1^s \cap W_1 = \bigcup(W_1 \cap W^s(y)), y \in P_1$, а траектории γ_m и P_1 принадлежат ему. [3, стр. 126] Из определения пучка $E_1^{ss}(x), x \in (\gamma_m \cup P_1) \cap W_1$, следует его инвариантность относительно $Dg^t, t \geq 0$. Кроме того, известно [3, стр. 127], что слой $E_1^{ss}(x)$ непрерывно зависит от x.

Рассмотрим точку x_1, являющуюся точкой выхода траектории γ_1 из W_1, и выберем прямую $E_1^{ss}(x_1)$ так, чтобы она была трансверсальна плоскости $T_x W_1^u$. Далее выбор прямой $E_1^{ss}(x_1)$ будет уточнен. Для любой точки $x \in \gamma_1 \cap W_1$ найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что $x = g^t(x_1)$. Положим $E_1^{ss}(x) = Dg^t E_1^{ss}(x_1)$. Из определения следует, что пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_1 \cap W_1$, инвариантен относительно $Dg^t,\ t \leq 0$.

Лемма II.1.2. Определенный выше пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \Gamma \cap W_1$, локально удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Заметим, что для точек $x \in (\gamma_1 \cup \gamma_m) \cap W_1$ результат следует из того, что сдвиг по траекториям g^t дважды непрерывно дифференцируем. Действительно, для такой точки x найдется окрестность $V(x) \subset W_1$ такая, что множество $l = V(x) \cap (\gamma_1 \cup \gamma_m)$ является дугой траектории точки $x\ : l = \{g^t(x), |t| < \alpha\}$. Пространство $E_1^{ss}(y) =< D\, g^t(x) v >$, где v — какой-либо ненулевой вектор из $E_1^{ss}(x)$, а $y = g^t(x)$. Отображение $D\, g^t(x)$ $\ r-1$ раз непрерывно дифференцируемо по $t,\ r \geq 4$, поэтому вектор-функция $D\, g^t(x) v$ удовлетворяет условию Липшица по $t,\ |t| < \alpha$. Поскольку во множестве W_1 отсутствуют особые точки, найдется постоянная K такая, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in l$ выполненно $|x_1 - x_2| > K|t_1 - t_2|$, где $x_i = g^{t_i}(x), i = 1, 2$. Следовательно, пучок прямых $E_1^{ss}(x)$ удовлетворяет локально условию Липшица на множестве $(\gamma_1 \cup \gamma_m) \cap W_1$.

Поскольку устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(y)$ и $W^u(y)$ точки $y \in P_1$ являются гладкими кривыми, лежащими в многообразиях W_1^s

и W_1^u, касательные плоскости к которым в координатах ξ_1, ζ_1, η_1 ортогональны, а переход к старым координатам осуществляется гладким отображением класса $\mathbb{C}^{r-2}$, то для любой точки $y \in P_1$ найдется ее окрестность $V(y)$ и число K такие, что для точек $x_1, x_2 \in V(y)$, $x_1 \in W^u(y_1)$, $x_2 \in W^s(y_2)$, верно неравенство $|x_1 - x_2| > K(|x_1 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_2|)$. Из этого следует, что если пучки $E_1^{ss}(x)$, $x \in (P_1 \cup \gamma_1) \cap W_1$, и $E_1^{ss}(x)$, $x \in (P_1 \cup \gamma_m) \cap W_1$, в отдельности удовлетворяют локальному условию Липшица, то и пучок $E_1^{ss}(x)$, $x \in (P_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_m) \cap W_1$, будет удовлетворять локально условию Липшица.

Уточним вид прямой $E_1^{ss}(y)$ для точек $y \in P_1$. Для этого рассмотрим систему в вариациях для ω-периодического решения $\varphi(t) = (0, \zeta(t), 0)$, параметризующего траекторию P_1. Учитывая, что в системе II.1.4 функции F_1, Q_1, G_1 обращаются в ноль на траектории P_1, получим систему:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1' = \nu_1 \bar{\xi}_1 \\ \bar{\zeta}_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0, \zeta(t), 0)\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\alpha \eta_1}(0, \zeta(t), 0)\bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_1' = \mu_1 \bar{\eta}_1 \end{cases} . \qquad \textbf{(II.1.6)}$$

Оператор монодромии этой системы имеет простые собственные числа равные $\exp(\nu_1\omega)$, 0, $\exp(\mu_1$
Пусть точка $y \in P_1$ такова, что $y = \varphi(t_0)$. Если рассмотреть фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ системы II.1.6, нормированную при $t = t_0$: $\Phi(t_0) = E$, то собственные подпространства, соответствующие собственным числам $\exp(\nu_1\omega)$ и $\exp(\mu_1\omega)$ являются касательными прямыми в точке y к устойчивому и неустойчивому многообразиям $W^s(y)$ и $W^u(y)$ соответственно, а собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному числу, натянуто на вектор скорости $X(y)$ [3, стр. 127]. Следовательно, прямая $E_1^{ss}(y)$ совпадает с собственным подпространством для собственного числа $\exp(\nu_1\omega)$.

Система II.1.6 ω периодична, следовательно, приводима периодическим по t линейным преобразованием к системе с постоянными коэффициентами. Матрица получаемой системы имеет простые собственные числа ν_1, 0, μ_1, следовательно, ее можно считать диагональной. Итак, существует линейная замена переменных $(\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1)^T = U(t)(\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1)^T$ такая, что система II.1.6 примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1' = \nu_1 \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\zeta}_1' = 0 \\ \tilde{\eta}_1' = \mu_1 \tilde{\eta}_1 \end{cases} . \qquad \textbf{(II.1.7)}$$

Пространство $E_1^{ss}(y)$, $y \in P_1$, будет совпадать с осью $\tilde{\xi}_1$ в координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1$.

Проверим теперь выполнение локального условия Липшица для пучка $E_1^{ss}(x)$, $x \in (\gamma_m \cup P_1) \cap W_1$. Как было показано, достаточно доказать локальную липшецевость на цикле P_1. Для пары точек $y_1, y_2 \in P_1$, лежащих достаточно близко друг к другу, оценка угла между прямыми $E_1^{ss}(y_1)$ и $E_1^{ss}(y_2)$ через $||y_1 - y_2||$ производится так же как это было сделано для точек траекторий γ_1 и γ_m в начале доказательства леммы.

Остается рассмотреть случай, когда точка $x_1 \in \gamma_m$ и $x_2 \in P_1$. Пусть траектория γ_m параметризована решением $\psi(t) = (\xi_1(t), \zeta_1(t), \eta_1(t))$ системы II.1.4. Траектория γ_m лежит на устойчивом многообразии W_1^s замкнутой траектории P_1, то есть $\eta_1(t) = 0$ при любом t, $\xi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Известно [3, стр. 177], что траектории, лежащие на W_1^s, имеют ассимптотическую фазу, то есть $|\zeta_1(t) - \zeta(t+C)| \to 0$ при $t \to \infty$, где C — некоторая постоянная.

Рассмотрим систему в вариациях для решения $\psi(t)$. Так как $\eta_1(t) = 0$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1' = \nu_1 \bar{\xi}_1 + F_1(t)\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(t)\xi_1(t)\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \zeta_1}(t)\xi_1(t)\bar{\zeta}_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \eta_1}(t)\xi_1(t)\bar{\eta}_1 \\ \bar{\zeta}_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(t)\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \zeta_1}(t)\bar{\zeta}_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \eta_1}(t)\bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_1' = \mu_1 \bar{\eta}_1 + G_1(t)\bar{\eta}_1, \end{cases} \qquad \textbf{(II.1.8)}$$

где $F_1(t) = F_1(\xi_1(t), \zeta_1(t), 0)$, $G_1(t) = G_1(\xi_1(t), \zeta_1(t), 0)$, $Q_1(t) = Q_1(\xi_1(t), \zeta_1(t), 0)$. Аналогичное обозначение использовано для значений частных производных функций F_1, G_1, Q_1 на решении $\psi(t)$.

Инвариантное относительно Dg^t пространство $E_1^{ss}(g^t(x))$ лежит в касательном пространстве к W_1^s, которое в координатах $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$ задается уравнением $\bar{\eta}_1 = 0$. Поэтому можно ограничиться сужением системы II.1.8 на инвариантное подпространство $\bar{\eta}_1 = 0$. Это сужение имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1' = \nu_1 \bar{\xi}_1 + F_1(t)\bar{\xi}_1 + [\dfrac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(t)\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \zeta_1}(t)\bar{\zeta}_1]\xi_1(t) \\ \bar{\zeta}_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0, \zeta(t), 0)\bar{\xi}_1 + [\dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(t) - \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0, \zeta(t), 0)]\bar{\xi}_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \zeta_1}(t)\bar{\zeta}_1 \end{cases}.$$

Эту систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1' = \nu_1 \bar{\xi}_1 + B_{11}(t)\bar{\xi}_1 + B_{12}(t)\bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0, \zeta(t), 0)\bar{\xi}_1 + B_{21}(t)\bar{\xi}_1 + B_{22}(t)\bar{\zeta}_1 \end{cases}, \qquad \textbf{(II.1.9)}$$

где компоненты матрицы $B(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Главная часть системы II.1.9 совпадает на пространстве $\bar{\eta}_1 = 0$ с системой II.1.6, поэтому в координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1$ в касательном пространстве, в которых система II.1.6 автономна, таковой будет и главная часть системы II.1.9, то есть эта система примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1' = \nu_1 \tilde{\xi}_1 + \tilde{B}_{11}(t)\tilde{\xi}_1 + \tilde{B}_{12}(t)\tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_1' = 0 + \tilde{B}_{21}(t)\tilde{\xi}_1 + \tilde{B}_{22}(t)\tilde{\zeta}_1 \end{cases}. \qquad \textbf{(II.1.10)}$$

Уточним скорость стремления к нулю компонент матрицы $\tilde{B}$. Для этого докажем, что функция $\xi_1(t)$ допускает оценку вида $|\xi_1(t)| \le K_0 \exp(\nu_1 t)$. Действительно,

$$\xi_1'(t) = \nu_1 \xi_1(t) + F_1(\xi_1(t), \zeta_1(t), 0)\xi_1(t).$$

Окрестность W_1 можно считать столь малой, что выполнено неравенство $|F_1(\xi_1,\zeta_1,0)| < |\nu_1|/2$, если точка $(\xi_1,\zeta_1,0)\in W_1$. Отсюда имеем $\xi_1'(t)/\xi_1(t) < \nu_1/2$, поэтому $|\xi_1(t)| < K_1\exp(\frac{\nu_1}{2}t)$ и $\xi_1(t)$ сохраняет знак. Пусть, для определенности, $\xi_1(t) > 0$. Функция $F_1 \in \mathbb{C}^{r-3}$, следовательно,

$$F_1(\xi_1(t),\zeta_1(t),0) = F_1(0,\zeta_1(t),0) + \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(\xi_1^*(t),\zeta_1(t),0)\xi_1(t).$$

Учитывая, что $F_1(0,\zeta_1(t),0) = 0$, получим

$$|F_1(\xi_1(t),\zeta_1(t),0)| \le K_2\xi_1(t) < K_1K_2\exp(\frac{\nu_1}{2}t),$$

где $K_1 \ge \max|\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(\xi_1,\zeta_1,0)|,\quad (\xi_1,\zeta_1,0)\in W_1$. Подстановка этой оценки в первое уравнение системы II.1.4, дает

$$\xi_1'(t) \le [\nu_1 + K_3\exp(\frac{\nu_1}{2}t)]\xi_1(t),$$

где $K_3 = K_1K_2$. Интегрируя неравенство

$$\xi_1'(t)/\xi_1(t) \le \nu_1 + K_3\exp(\frac{\nu_1}{2}t),$$

окончательно получим $|\xi_1(t)| \le K_0\exp(\nu_1 t)$.

Аналогично получается оценка снизу $|\xi_1(t)| \ge K^0\exp(\nu_1 t)$ для некоторого числа K^0.

Оценим компоненты матрицы $B(t)$. Компонента $B_{11}(t)$ состоит из двух слагаемых. Первое — $F_1(t)$ уже оценивалось: $|F_1(t)| \le K_1|\xi_1(t)|$. Второе — $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(\xi_1(t),\zeta_1(t),0)\xi_1(t)$ содержит множителем функцию $\xi_1(t)$, поэтому допускает аналогичную оценку.

Компонента $B_{12}(t) = \frac{\partial F_1}{\partial \zeta_1}(t)\xi_1(t)$ содержит множителем функцию $\xi_1(t)$, поэтому допускает аналогичную оценку с другой константой.

$$B_{21}(t) = \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(\xi_1(t),\zeta_1(t),0) - \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0,\zeta_1(t),0) =$$

$$= \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi_1^2}(\xi_1^*(t),\zeta_1(t),0)\xi_1(t),$$

$$B_{22}(t) = \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta_1}(\xi_1(t),\zeta_1(t),0) = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \zeta_1\partial \xi_1}(\xi_1^*(t),\zeta_1(t),0)\xi_1(t),$$

поскольку $\frac{\partial Q_1}{\partial \zeta_1}(0,\zeta_1(t),0) = 0$ и $Q_1 \in \mathbb{C}^{r-1}(W_1)$.

Таким образом, учитывая полученную выше оценку для $\xi_1(t)$, имеем $||B(t)|| \le C\exp(\nu_1 t)$, где C — некоторая постоянная.

Матрица $\widetilde{B}(t)$ в системе II.1.10 связана с матрицей $B(t)$ соотношением $\widetilde{B}(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t)$, где $U(t)$ периодическая неособая непрерывная матрица. Поэтому $||\widetilde{B}(t)|| \le K\exp(\nu_1 t),\ t \ge 0$, где K – некоторая постоянная.

Перейдем к оценке угла между подпространствами $E_1^{ss}(g^t(y))$ и $E_1^{ss}(g^t(x))$, где $x \in W^s(y), \quad y \in P_1$, а траектория $g^t(y)$ задается в координатах ξ_1, ζ_1, η_1 вектором $(0, \zeta(t+C), 0)$. Поскольку обе прямые лежат в плоскости $\bar{\eta}_1 = 0$, то последнее уравнение в системах II.1.6 и II.1.7 можно опустить. Эти прямые состоят из начальных данных тех решений систем II.1.7 и II.1.10 соответственно, которые имеют характеристический показатель на $+\infty$ равный ν_1. Оценку угла $\alpha(t)$ между подпространствами $E_1^{ss}(g^t(y))$ и $E_1^{ss}(g^t(x))$ проведем в координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1$. Так как переход к координатам $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1$ от координат $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1$ осуществляется ограниченной матрицей, аналогичная оценка будет справедлива и в координатах $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1$. Докажем, что $\alpha(t) < L \exp{(\nu_1 t)}$ при достаточно больших t. В координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1$ прямая $E_1^{ss}(g^t(y))$ совпадает с осью $\tilde{\xi}_1$, поэтому можно считать, что сдвиг фазы в решении $g^t(y) = (0, \zeta(t+C), 0)$ отсутствует: $C = 0$. Пусть $v(t)$ — решение системы II.1.10 такое, что $E_1^{ss}(g^t(x)) =< v(t) >$, а вектор $v_1(t)$ равен $v(t)/||v(t)||$. Тогда $||v_1(t) - (1,0)|| = 2 \sin \frac{\alpha(t)}{2}$. Поэтому достаточно оценить $||v_1(t) - (1,0)||$.

Получим сначала оценку для вектора $v_1(t)$. Как известно [1, стр. 166], решение $v(t)$ системы II.1.10, имеющее характеристический показатель ν_1, можно получить как предел пикаровских приближений $\{v^m(t)\}_{m=0}^{\infty}$.

$$v^0(t) = (\exp{(\nu_1 t)}, 0),$$

$$v^m(t) = v^0(t) + \int_{+\infty}^{t} X(t,\tau) \tilde{B}(\tau) v^{(m-1)}(\tau)\, d\tau, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $X(t,\tau)$ — матрица Коши для системы II.1.7 без последнего уравнения:

$$X(t,\tau) = \operatorname{diag}(\exp(\nu_1(t-\tau)), 1).$$

Так как $\nu_1 < 0$, то при $t < \tau$ имеем $||X(t,\tau)|| < K_4 \exp(\nu_1(t-\tau))$. Учитывая, что $||\tilde{B}(t)|| < K \exp{(\nu_1 t)}$, получим

$$|| \int_{+\infty}^{t} X(t,\tau) \tilde{B}(\tau) v^{m-1}(\tau)\, d\tau|| \leq K K_4 \exp{(\nu_1 t)} \int_t^{\infty} ||v^{m-1}(\tau)||\, d\tau.$$

Докажем по индукции, что пикаровские приближения определены на множестве $[0, \infty)$ и существует число $T > 0$ такое, что при $t > T$ выполнено неравенство $||v^m(t)|| \leq 2 \exp{(\nu_1 t)}$. База очевидна и индукционная оценка обеспечивает сходимость интеграла на $[0, \infty)$.

$$||v^m(t)|| \leq ||v^0(t)|| + K K_4 \exp{(\nu_1 t)} \int_t^{\infty} ||v^{m-1}(\tau)||\, d\tau \leq$$

$$\leq \exp{(\nu_1 t)} + K K_4 \exp{(\nu_1 t)} \int_t^{\infty} 2 \exp{(\nu_1 \tau)}\, d\tau =$$

$$= \exp{(\nu_1 t)} [1 + \frac{K K_4 2}{\nu_1} \exp{(\nu_1 t)}].$$

Поскольку $\nu_1 < 0$, то при $T = \frac{1}{|\nu_1|}\ln(2K_4K)$, получим

$$||v^m(t)|| < 2\exp(\nu_1 t).$$

Аналогично доказывается, что при $t > T$

$$||v^m(t)|| > \exp(\nu_1 t)[1 - K_4 K 2\exp(\nu_1 t)] > \frac{\exp(\nu_1 t)}{2}.$$

Пикаровский процесс сходится на полуоси $[0, \infty)$ [1, стр. 167], поэтому

$$\frac{\exp(\nu_1 t)}{2} < ||v(t)|| < 2\exp(\nu_1 t), \quad t > T. \qquad (**)$$

Оценим теперь $||(1,0) - \frac{v(t)}{||v(t)||}||$ для $t > \frac{1}{|\nu_1|}\ln(2KK_4)$. Для первой компоненты имеем

$$|1 - \frac{v^1(t)}{||v(t)||}| <$$

$$< |1 - \frac{e^{\nu_1 t} + \int_t^\infty K_4 e^{\nu_1(t-\tau)} K e^{\nu_1 \tau} 2 e^{\nu_1 \tau}\, d\tau}{e^{\nu_1 t} - - \int_t^\infty K_4 e^{\nu_1(t-\tau)} K e^{\nu_1 \tau} 2 e^{\nu_1 \tau}\, d\tau}| \leq$$

$$\leq \frac{4KK_4 \int_t^\infty e^{\nu_1 \tau}\, d\tau}{1 - 2KK_4 \int_t^\infty e^{\nu_1 \tau}\, d\tau} \leq K_5 e^{\nu_1 t}, \quad t > T.$$

Оценим вторую компоненту вектора $v(t)$

$$|\frac{v^2(t)}{||v(t)||}| \leq \frac{2KK_4 \int_t^\infty e^{\nu_1(t-\tau)} e^{\nu_1 \tau} e^{\nu_1 \tau}\, d\tau}{\frac{1}{2} e^{\nu_1 t}} <$$

$$< 4KK_4 e^{\nu_1 t} \leq K_5 e^{\nu_1 t}, \quad t > T.$$

Итак, $2\sin\frac{\alpha(t)}{2} \leq K_5 e^{\nu_1 t}$. Из этого неравенства следует, что $\alpha(t) \leq L e^{\nu_1 t}$ при $t > T$, где L — некоторая постоянная. Так как в координатах $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$ расстояние от точки $(\xi_1(t), \zeta_1(t), \eta_1(t))$ до траектории P_1 больше $|\xi_1(t)|$ и функция $|\xi_1(t)| > K^0 e^{\nu_1 t}$, а для точки $y \in P_1$ имеем $E_1^{ss}(y) = (1, 0)$, то получим

$$\alpha(E_1^{ss}(g^t(x)), E_1^{ss}(y)) < \frac{L}{K^0}||g^t(x) - y||, \quad t > T, \quad y \in P_1.$$

Таким образом, если сузить окрестность W_1 так, чтобы в новую окрестность попадали лишь те точки $g^t(x)$ траектории γ_m, для которых $t > T$, то в такой окрестности цикла P_1 пучок $E_1^{ss}(x)$, $x \in \gamma_m \cup P_1$, удовлетворяет условию Липшица.

Для завершения доказательства леммы II.1.2 осталось проверить, что пучок $E_1^{ss}(x)$, $x \in (\gamma_1 \cup P_1) \cap W_1$, удовлетворяет локально условию Липшица. Пусть решение $\theta(t) = (0, \zeta_1(t), \eta_1(t))$ параметризует траекторию γ_1 в координатах ξ_1, ζ_1, η_1 в окрестности

W_1. Система в вариациях для решения $\theta(t)$ в индуцированной в касательном пространстве системе координат $\bar\xi_1, \bar\zeta_1, \bar\eta_1$ имеет вид:

$$\begin{cases} \bar\xi_1' = \nu_1\bar\xi_1 + F_1(\theta(t))\bar\xi_1 \\ \bar\zeta_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(\theta(t))\bar\xi_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \zeta_1}(\theta(t))\bar\zeta_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \eta_1}(\theta(t))\bar\eta_1 \\ \bar\eta_1' = \mu_1\bar\eta_1 + G_1(\theta(t))\bar\eta_1 + \dfrac{\partial G_1}{\partial \xi_1}(\theta(t))\eta_1(t)\bar\xi_1 + \dfrac{\partial G_1}{\partial \zeta_1}(\theta(t))\eta_1(t)\bar\zeta_1 + \\ \qquad + \dfrac{\partial G_1}{\partial \eta_1}(\theta(t))\eta_1(t)\bar\eta_1. \end{cases} \qquad \textbf{(II.1.11)}$$

По определению пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_1$, прямая $E_1^{ss}(g^t(x_0))$ совпадает со значениями тех решений системы II.1.11, которые при $t = 0$ принимают значения на фиксированной прямой $E_1^{ss}(x_0)$. Другими словами нас интересуют решения с начальными данными $t_0 = 0,\ v_0 \in E_1^{ss}(x_0)$.

Обратим время в системах II.1.4, II.1.6, II.1.7, II.1.11, сохранив для решения, параметризующего траекторию γ_1, старое обозначение. Траектория γ_1 лежит на неустойчивом многообразии W_1^u замкнутой траектории P_1. Поэтому на решении $\theta(t)$ последняя координата $\eta_1(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Как и в предыдущем случае можно получить следующую оценку $|\eta_1(t)| < K_6 e^{-\mu_1 t}$, где K_6 — некоторая постоянная. Учитывая, что $F_1(0, \zeta(t), 0) = 0 = G_1(0, \zeta(t), 0) = Q_1(0, \zeta(t), 0)$ и что функции $F_1, G_1, Q_1 \in \mathbb{C}^{r-2}(W_1)$, $r \geq 4$, систему II.1.11 (после замены t на $-t$) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \bar\xi_1' = -\nu_1\bar\xi_1 + C_{11}(t)\bar\xi_1 + C_{12}(t)\bar\zeta_1 + C_{13}(t)\bar\eta_1 \\ \bar\zeta_1' = \dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(0, \zeta(t), 0)\bar\xi_1 + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \eta_1}(0, \zeta(t), 0)\bar\eta_1 + C_{21}(t)\bar\xi_1 + C_{22}(t)\bar\zeta_1 + \\ \qquad + C_{23}(t)\bar\eta_1 \\ \bar\eta_1' = -\mu_1\bar\eta_1 + C_{31}(t)\bar\xi_1 + C_{32}(t)\bar\zeta_1 + C_{33}(t)\bar\eta_1, \end{cases} \qquad \textbf{(II.1.12)}$$

в которой матрица $C(t)$ допускает оценку $||C(t)|| \leq K_7 e^{-\mu_1 t},\ t \geq 0$. Делая как и ранее замену $(\bar\xi_1, \bar\zeta_1, \bar\eta_1)^T = U(t)(\tilde\xi_1, \tilde\zeta_1, \tilde\eta_1)^T$, приводящую главную часть системы II.1.12 к диагонали с постоянными коэффициентами, получим:

$$\begin{cases} \tilde\xi_1' = -\nu_1\tilde\xi_1 + \tilde C_{11}(t)\tilde\xi_1 + \tilde C_{12}(t)\tilde\zeta_1 + \tilde C_{13}(t)\tilde\eta_1 \\ \tilde\zeta_1' = 0 + \tilde C_{21}(t)\tilde\xi_1 + \tilde C_{22}(t)\tilde\zeta_1 + \tilde C_{23}(t)\tilde\eta_1 \\ \tilde\eta_1' = -\mu_1\tilde\eta_1 + \tilde C_{31}(t)\tilde\xi_1 + \tilde C_{32}(t)\tilde\zeta_1 + \tilde C_{33}(t)\tilde\eta_1, \end{cases} \qquad \textbf{(II.1.13)}$$

где матрица $\tilde C(t)$ допускает экспоненциальную оценку
$||\tilde C(t)|| \leq K_8 e^{-\mu_1 t}, \quad t \geq 0.$

Система II.1.7 после обращения времени имеет вид

$$\begin{cases} \tilde\xi_1' = -\nu_1\tilde\xi_1 \\ \tilde\zeta_1' = 0 \\ \tilde\eta_1' = -\mu_1\tilde\eta_1 \end{cases} . \qquad \textbf{(II.1.14)}$$

В координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1$ для точек $y \in P_1$ прямая $E_1^{ss}(y)$ совпадает с осью $\tilde{\xi}_1$. Пусть $w(t)$ — решение системы II.1.13 такое, что $w(0) \in E_1^{ss}(x_0)$, а $\beta(t)$ — угол между прямой $E_1^{ss}(g^t(x_0))$ и осью $\tilde{\xi}_1$. Тогда $2\sin\frac{\beta(t)}{2} = ||(1,0,0) - \frac{w(t)}{||w(t)||}||$. Рассуждая как в предыдущем случае, получим, что для доказательства липшецевости пучка $E_1^{ss}(x)$, $x \in (\gamma_1 \cup P_1) \cap W_1$, достаточно доказать оценку $||(1,0,0) - \frac{w(t)}{||w(t)||}|| < Le^{-\mu_1 t}$, $t \geq 0$.

Рассмотрим решение $w^0(t)$ системы II.1.14, имеющее те же начальные данные, что и решение $w(t)$ системы II.1.13: $w^0(0) = w(0) = (\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\zeta}_1^0, \tilde{\eta}_1^0)$. Из определения пучка $E_1^{ss}(x)$, $x \in \gamma_1$, следует, что $\tilde{\xi}_1^0 \neq 0$, так как прямая $E_1^{ss}(x_0)$ трансверсальна плоскости $T_{x_0}W_1^u$. Таким образом, решение $w^0(t)$ имеет характеристический показатель на бесконечности равный $-\nu_1$. Решение $w(t)$ системы II.1.13 удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(t) = w^0(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\tilde{C}(\tau)w(\tau)\,d\tau,$$

в котором $\Phi(t,\tau)$ — матрица Коши для системы II.1.14, то есть $\Phi(t,\tau) = \mathrm{diag}(e^{-\nu_1(t-\tau)}, 1, e^{-\mu_1(t-\tau)})$, а t_0 зависит от номера координаты и равно ∞ для первой координаты и 0 для остальных. Решение $w^0(t) = (\tilde{\xi}_1^0 e^{-\nu_1 t}, \tilde{\zeta}_1^0, \tilde{\eta}_1^0 e^{-\mu_1 t})$ имеет оценку $||w^0(t)|| \leq K_9 e^{-\nu_1 t}$, $t \geq 0$, где K_9 — некоторая постоянная. Решение $w(t)$ системы II.1.13 является пределом приближений по Пикару [1, стр. 166] $\{w^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$w^{m+1}(t) = w^0(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\tilde{C}(\tau)w^m(\tau)\,d\tau,$$

где выбор t_0 описан выше. Учитывая выбор t_0, вид матрицы Коши $\Phi(t,\tau)$ и оценку $||\tilde{C}(t)|| \leq K_8 e^{-\mu_1 t}$, $t \geq 0$, по индукции легко доказать, что пикаровские приближения корректно определены на $[0,\infty)$ и имеют оценки [1, стр. 166]

$$\frac{K_9 e^{-\nu_1 t}}{2} \leq ||w^m(t)|| \leq 2K_9 e^{-\nu_1 t}, \quad t \geq T,$$

где $T = \frac{1}{\mu_1}\ln(2K_8K_9)$. Переходя к пределу по m, получим аналогичные оценки для решения $w(t)$

$$\frac{K_9 e^{-\nu_1 t}}{2} \leq ||w(t)|| \leq 2K_9 e^{-\nu_1 t}, \quad t \geq T. \qquad \textbf{(II.1.15)}$$

Оценим модули координат вектора

$$(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\tilde{C}(\tau)w(\tau)\,d\tau$$

при $t > T$.

$$|r_1(t)| \leq \int_t^{\infty} e^{-\nu_1(t-\tau)}||\tilde{C}(\tau)||||w(\tau)||\,d\tau \leq$$

$$\leq 2K_8K_9 e^{-\nu_1 t}\int_t^{\infty} e^{\nu_1 t}e^{-\mu_1\tau}e^{-\nu_1\tau}\,d\tau = \frac{2K_8K_9}{\mu_1}e^{(-\nu_1-\mu_1)t},$$

$$|r_2(t)| \le \int_0^t ||\tilde{C}(\tau)|| ||w(\tau)|| \, d\tau \le$$

$$\le 2K_8K_9 \int_0^t e^{-\mu_1 \tau} e^{-\nu_1 \tau} \, d\tau = 2K_8K_9 \frac{e^{(-\nu_1-\mu_1)t} - 1}{-\nu_1 - \mu_1}$$

По условию $-\nu_1 > \mu_1 > 0$, поэтому существует постоянная K_{11} такая, что $|r_2(t)| \le K_{11} e^{-(\nu_1+\mu_1)t}$.

$$|r_3(t)| \le \int_0^t e^{-\mu_1(t-\tau)} ||\tilde{C}(\tau)|| ||w(\tau)|| \, d\tau \le$$

$$\le 2K_8K_9 e^{-\mu_1 t} \int_0^t e^{-\nu_1 \tau} \, d\tau =$$

$$= \frac{2K_8K_9}{-\nu_1}(e^{-\nu_1 t} - 1)e^{-\mu_1 t} \le K_{12} e^{-(\nu_1+\mu_1)t},$$

где K_{12} — некоторая постоянная.

Из доказанных оценок и условия $\tilde{\xi}_1^0 \ne 0$ следует, что существует такое число $T_1 > T$ и такая ограниченная функция $u(t): \ |u(t)| < K_{13}, \ t \ge 0$, что

$$||w(t)|| = \tilde{\xi}_1^0 e^{-\nu_1 t}[1 + u(t)e^{-\mu_1 t}], \quad t > T_1.$$

Опишем подробнее вектор $\frac{w(t)}{||w(t)||} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$u_1(t) = \frac{\tilde{\xi}_1^0 e^{-\nu_1 t} + r_1(t)}{\tilde{\xi}_1^0 e^{-\nu_1 t}[1 + u(t)e^{-\mu_1 t}]} =$$

$$= 1 + \frac{r_1(t)e^{\nu_1 t} - u(t)e^{-\mu_1 t}}{\tilde{\xi}_1^0[1 + u(t)e^{-\mu_1 t}]}.$$

Учитывая оценку для функции $r_1(t)$, получим $u_1(t) = 1 + h_1(t)e^{-\mu_1 t}$, где $h_1(t)$ — ограниченная на $[0, \infty)$ функция.

$$u_2(t) = \frac{\tilde{\zeta}_1^0 + r_2(t)}{||w(t)||} = \frac{\tilde{\zeta}_1^0 e^{\nu_1 t} + r_2(t)e^{\nu_1 t}}{\tilde{\xi}_1^0[1 + u(t)e^{-\mu_1 t}]}.$$

Учитывая, что $\nu_1 < -\mu_1$, оценку для $r_2(t)$ и то, что $\tilde{\xi}_1^0 \ne 0$, получим $u_2(t) = h_2(t)e^{-\mu_1 t}$, где $h_2(t)$ — ограниченная на $[0, \infty)$ функция.

$$u_3(t) = \frac{\tilde{\eta}_1^0 e^{-\mu_1 t} + r_3(t)}{||w(t)||} = \frac{\tilde{\eta}_1^0 e^{(\nu_1-\mu_1)t} + r_3(t)e^{\nu_1 t}}{\tilde{\xi}_1^0[1 + u(t)e^{-\mu_1 t}]}.$$

Учитывая, что $\nu_1 - \mu_1 < 0, \quad |r_3(t)| < K_{12} e^{-(\nu_1+\mu_1)t}$ и что $\xi_1^0 \ne 0$, получим $u_3(t) = h_3(t)e^{-\mu_1 t}$, где $h(t)$ — ограниченная на $[0, \infty)$ функция.

Из приведенного выше представления компонент u_1, u_2, u_3 вектора $\frac{w(t)}{||w(t)||}$ следует неравенство

$$||\frac{w(t)}{||w(t)||} - (1,0,0)|| \leq Le^{-\mu_1 t}, \quad t > T_1,$$

где L — некоторая постоянная. Достаточная для липшецевости пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in (\gamma_1 \cup P_1) \cap W_1$, оценка получена, что завершает доказательство леммы II.1.2. ■

Лемма II.1.3. Для пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \Gamma \cap W_1$, справедливо неравенство II.1.2.

Доказательство. Пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \Gamma \cap W_1$, состоит из трех пучков: $E_1^{ss}(x), x \in P_1$; $\quad E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_m \cap W_1$; $\quad E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_1 \cap W_1$. Каждый из этих пучков инвариантен относительно отображения Dg^t в том смысле, что $E_1^{ss}(g^t(x)) = Dg^t E_1^{ss}(x)$, если точки $x, g^t(x) \in W_1$. Из этого следует, что неравенство II.1.2 можно проверять для каждого пучка в отдельности. Действие отображения $Dg^t(x)$ на вектор $v_0 \in E_1^{ss}(x)$ можно описать следующим образом. Рассмотрим решение $v(t)$ системы в вариациях для траектории точки x с начальными данными t_0, v_0, то есть решение одной из систем II.1.6, II.1.8 или II.1.11 такое, что $v(t_0) = v_0$. При этом число t_0 выберем так, чтобы $x = \varphi(t_0)$, где $\varphi(t)$ — решение системы II.1.4, параметризующее траекторию P_1, γ_m или γ_1 соответственно рассматриваемому случаю. Тогда $D\,g^t(x)v_0 = v(t+t_0)$. Неравенство II.1.2 в терминах решения $v(t)$ означает, что существует число C, не зависящее от t_0 и v_0 и рассматриваемого случая, такое что

$$||v(t+t_0)|| \leq \overline{C} e^{\bar{\lambda}^1 t} ||v_0||, \quad t > 0. \qquad \textbf{(II.1.16)}$$

Заметим, что для систем в вариациях II.1.6, II.1.8, II.1.11, описывающих поведение пучков, в касательном пространстве используется система координат $\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$. Переход к первоначальным координатам может изменить лишь постоянную C.

Сделав в каждой из указанных систем замену $(\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1)^T = U(t)(\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1)^T$, приводящую главную часть к постоянным коэффициентам, получим системы II.1.7, II.1.10 и II.1.13 соответственно. Достаточно получить оценку II.1.16 для решений этих систем, так как непрерывная и периодическая по t замена может изменить лишь постоянную C.

Для пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in P_1$, и, следовательно , системы II.1.7, неравенство II.1.16 очевидно. Действительно, в координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1$ прямая $E_1^{ss}(x)$ совпадает с осью $\tilde{\xi}_1$, а для этой координаты уравнение из системы II.1.7 имеет вид: $\tilde{\xi}_1' = \nu_1 \tilde{\xi}_1$. Число $\nu_1 < \bar{\lambda}^1$ по выбору $\bar{\lambda}^1$, поэтому неравенство II.1.16 справедливо.

Рассмотрим пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_m \cap W_1$, и соответствующую ему систему II.1.10. Для решения $v(t)$ этой системы, порождающего указанный пучок в том смысле, что $E_1^{ss}(g^t(x_0)) =< v(t) >$, в ходе доказательства предыдущей леммы II.1.2 была получена оценка (**):

$$\frac{e^{\nu_1 t}}{2} \leq ||v(t)|| \leq 2e^{\nu_1 t} \qquad (**)$$

при $t > T$. Для произвольного числа t_0 и вектора $v_0 \in E_1^{ss}(\varphi(t_0))$ найдется число ρ такое, что $v_0 = v(t_0)\rho$, так как $< v(t_0) >= E_1^{ss}(\varphi(t_0))$. По неравенству (**) имеем

$$||v(t+t_0)\rho|| \leq 2\rho e^{\nu_1 (t+t_0)},\ t + t_0 > T.$$

С другой стороны $||v(t_0)|| \geq \frac{1}{2}e^{\nu_1 t_0},\ t_0 > T$. Из этих двух неравенств получим

$$||Dg^t(\varphi(t_0))v_0|| = ||v(t+t_0)\rho|| \leq e^{\nu_1 t}||v_0||, \quad t > 0,\ t_0 > T.$$

Ограничение $t_0 > T$ можно снять, если рассматривать лишь те точки $x = \varphi(t_0)$ траектории γ_m, для которых $t_0 > T$, то есть если сузить окрестность W_1. Таким образом, в рассматриваемом случае оценка II.1.2 получена.

Для третьего пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_1 \cap W_1$, доказательство неравенства II.1.2 полностью совпадает с приведенным выше, поскольку в ходе доказательства леммы II.1.2 было получено неравенство II.1.15, аналогичное неравенству (**), из которого следовало II.1.2. Лемма II.1.3 доказана. ■

Продолжим определение пучка E_1^{ss} на контуре Γ. Для некоторого $i \in 2:m,\ i \neq l_j, j \in 1:k$, рассмотрим множество $\Gamma \cap W_i$. Оно состоит из особой точки O_i и двух полутраекторий $\gamma_{i-1} \cap W_i$ и $\gamma_i \cap W_i$. Для точки O_i определим $E_1^{ss}(O_i)$ как сильно устойчивое собственное подпространство матрицы $DX(O_i)$, отвечающее собственному числу ν_i. Для точек $x \in \gamma_{i-1} \cap W_i$ определим $E_1^{ss}(x)$ следующим образом. Пусть x_i — точка входа траектории γ_{i-1} в окрестность W_i и $\varphi(t) = g^t(x_i),\ t \geq 0$.

Рассмотрим систему в вариациях для решения $\varphi(t)$ системы II.1.5. В координатах $\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i$, индуцированных системой координат
ξ_i, ζ_i, η_i, имеем:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_i' = \nu_i \bar{\xi}_i + (\operatorname{grad} X_i(\varphi(t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \\ \bar{\zeta}_i' = \lambda_i \bar{\zeta}_i + (\operatorname{grad} Y_i(\varphi(t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \\ \bar{\eta}_i' = \mu_i \bar{\eta}_i + (\operatorname{grad} Z_i(\varphi(t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \end{cases} . \qquad \textbf{(II.1.17)}$$

Спектр системы II.1.17 совпадает со спектром ее автономной части, так как частные производные функций X_i, Y_i, Z_i стремятся к нулю, если аргумент стремится к нулю, а решение $\varphi(t)$ стремится к вектору $(0,0,0)$ при $t \to \infty$.[1, стр. 164]

Для точки $x = g^{t_0}(x_i),\ t_0 \geq 0$, рассмотрим множество $E_1^{ss}(x)$ векторов v_0 таких, что решение системы II.1.17 с начальными данными t_0, v_0 имеет характеристический показатель на бесконечности равный ν_i. Поскольку $\nu_i < \lambda_i < 0 < \mu_i$, то это — прямая. В силу своего определения пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_{i-1} \cap W_i$, инвариантен относительно отображения $D\,g^t$.

Для точек $x \in \gamma_i \cap W_i$ определим прямую $E_1^{ss}(x)$ следующим образом. Пусть y_i — точка выхода траектории γ_i из окрестности W_i, а $E_1^{ss}(y_i)$ – произвольная прямая, трансверсальная плоскости $P(y_i)$. Для точки $x = g^t(y_i),\ t \leq 0$, положим $E_1^{ss}(x) = D\,g^t(y_i)E_1^{ss}(y_i)$. Из определения пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_i$, следует его инвариантность относительно отображения $D\,g^t$. Кроме того, в силу инвариантности пучка плоскостей $P(x)$, $x \in \Gamma$, прямая $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_i$, трансверсальна плоскости $P(x)$. Пучок плоскостей $P(x),\ x \in \gamma_i$, непрерывен в точке O_i и плоскость $P(O_i)$ совпадает с плоскостью $\bar{\xi}_i = 0$. Поэтому можно считать окрестность W_i столь малой, что прямая $E_1^{ss}(y_i)$ трансверсальна плоскости $\bar{\xi}_i = 0$.

Лемма II.1.4. Определенный выше пучок прямых $E_1^{ss}(x),\ x\in\Gamma\cap W_i$, локально удовлетворяет условию Липшица, при этом выполняется неравенство II.1.2 для $i\in 2:m,\ i\neq l_j,\ j\in 1:k$.

Доказательство. Как и в случае $i=1$ достаточно доказать липшецевость и выполнение неравенства II.1.2 для каждого из пучков: $E_1^{ss}(x),\ x\in(\gamma_{i_1}\cup O_i)\cap W_i$ и $E_1^{ss}(x),\ x\in(\gamma_i\cup O_i)\cap W_i$, в отдельности, так как траектории γ_{i-1} и γ_i являются гладкими кривыми, которые имеют разные предельные направления в точке O_i, а указанные пучки инвариантны относительно отображения $D\,g^t$.

Рассмотрим для некоторого $i\in 2:m$ первый пучок. Из его определения следует, что прямая $E_1^{ss}(x)$ лежит в касательном пространстве в точке x к устойчивому многообразию особой точки O_i : $\quad E_1^{ss}(x)\subset T_xW_i^s,\ x\in\gamma_{i-1}\cap W_i$. Плоскость $T_xW_i^s$ в координатах $\bar\xi_i,\bar\zeta_i,\bar\eta_i$ задается уравнением $\bar\eta_i=0$ и является инвариантной плоскостью для системы II.1.17. Таким образом, последнее уравнение в системе II.1.17 можно опустить. В результате получим систему

$$\begin{cases}\bar\xi_i'=\nu_i\bar\xi_i+(\operatorname{grad}X_i(\varphi(t)),(\bar\xi_i,\bar\zeta_i,0))\\ \bar\zeta_i'=\lambda_i\bar\zeta_i+(\operatorname{grad}Y_i(\varphi(t)),(\bar\xi_i,\bar\zeta_i,0))\end{cases}. \qquad \textbf{(II.1.18)}$$

Функции X_i,Y_i равны нулю в начале координат вместе со своими частными производными первого порядка, кроме того, они непрерывно дифференцируемы. Решение $\varphi(t)$ задает траекторию γ_{i-1}, имеющую особую точку O_i своим ω-предельным множеством.
Поэтому $||\varphi(t)||\to 0$ при $t\to+\infty$. Отсюда следует, что $||\operatorname{grad}X_i(\varphi(t))||\le M_1||\varphi(t)||$ и $||\operatorname{grad}Y_i(\varphi(t))||\le M_1||\varphi(t)||$, где M_1 — некоторая постоянная.

Докажем, что существует постоянная M_2 такая, что для решения $\varphi(t)$ системы II.1.5, параметризующего траекторию γ_{i-1}, выполняется оценка $||\varphi(t)||<M_2e^{\lambda_it},\ t\ge 0$. Решение $\varphi(t)$ лежит на устойчивом многообразии точки покоя O_i. Поэтому последнее уравнение в системе II.1.5 можно опустить. Тогда вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(t)=\Phi(t)\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Q(\varphi(\tau))\,d\tau,$$

где $\Phi(t)=\operatorname{diag}(e^{\nu_it},e^{\lambda_it})$, а $Q(\xi_i,\zeta_i)$ — вектор-функция с компонентами $X_i(\xi_i,\zeta_i,0),Y_i(\xi_i,\zeta_i,0)$. Поскольку функции $X_i,Y_i\in\mathbb{C}^{r-2}(W_i)$, $r\ge 4$, и равны нулю в начале координат вместе со своими частными производными первого порядка, существует постоянная $M_3>0$ такая, что $||Q(\varphi(\tau))||\le M_3||\varphi(\tau)||$. Решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения может быть получено как предел пикаровских приближений:

$$\varphi_0(t)=\Phi(t)\varphi(t_0)$$

$$\varphi_{m+1}(t)=\Phi(t)\varphi_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Q(\varphi_m(\tau))\,d\tau,$$

где $t_0 = 0$ для первой компоненты вектора φ_{m+1} и равно $+\infty$ для второй компоненты [21, стр. 5]. Учитывая вид матрицы Φ и оценку для вектора Q, по индукции нетрудно доказать, что последовательные приближения φ_m корректно определены при $t \geq 0$ и допускают оценку

$$M_4 e^{\lambda_i t} \leq ||\varphi_m(t)|| \leq M_5 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где M_4, M_5 — некоторые постоянные. Переходя к пределу по m, получим для решения φ аналогичную оценку

$$M_4 E^{\lambda_i t} \leq ||\varphi(t)|| \leq M_5 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0. \tag{II.1.19}$$

В точке O_i прямая $E_1^{ss}(O_i)$ совпадает с осью $\bar{\xi}_i$. Пусть $\alpha(x),\ x \in \gamma_{i-1} \cap W_1$, — угол между прямой $E_1^{ss}(x)$ и осью $\bar{\xi}_i$. Липшецевость пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_{i-1} \cap W_i$, означает, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет локально условию Липшица по x на множестве $(\gamma_{i-1} \cup O_i) \cap W_i$. В точках траектории γ_{i-1} липшецевость пучка не вызывает сомнений, поскольку $E_1^{ss}(y) = Dg^t(x_i)E_1^{ss}(x)$, если $y = g^t(x_i)$, а дифференциал $Dg^t(x_i)$ — непрерывное дифференцируемое по t отображение.

Для проверки выполнения локального условия Липшица в точке O_i достаточно доказать, что существует постоянная $L > 0$ такая, что $|\alpha(t)| \leq L||\varphi(t)||,\ t \geq 0$.

Пусть $w(t)$ является решением системы II.1.18, порождающим пучок $E_1^{ss}(x)$ над траекторией γ_{i-1}. Это означает, что $< w(t) >= E_1^{ss}(\varphi(t)),\ t \geq 0$. Из определения пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_{i-1} \cap W_i$, следует, что в качестве решения $w(t)$ можно взять любое решение, имеющее на бесконечности характеристический показатель ν_i. Рассматривая треугольник, образованный векторами $\frac{w(t)}{||w(t)||}$ и $(1, 0)$, получим $2 \sin \frac{\alpha(t)}{2} = ||\frac{w(t)}{||w(t)||} - (1, 0)||$. Далее рассуждения аналогичны доказательству леммы II.1.2.

Решение $w(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(t) = w^0(t) - \int_t^{\infty} \Phi(t, \tau) B(\tau) w(\tau)\, d\tau, \tag{II.1.20}$$

в котором $w^0(t) = (e^{\nu_i t}, 0)$, матрица $\Phi(t, \tau) = \mathrm{diag}(e^{\nu_i(t-\tau)}, e^{\lambda_i(t-\tau)})$ является матрицей Коши для автономной части системы II.1.18, а матрица $B(\tau)$ имеет своими строчками векторы $\mathrm{grad}\, X_i(\varphi(t))$, $\mathrm{grad}\, Y_i(\varphi(t))$.

Рассмотрим приближения по Пикару

$$w^k(t) = w^0(t) - \int_t^{\infty} \Phi(t, \tau) B(\tau) w^{(k-1)}(\tau)\, d\tau.$$

Учитывая, что $\nu_i < \lambda_i < 0$ и $||B(t)|| \leq M_1 M_2 e^{\lambda_i \tau},\ \tau \geq 0$, по индукции легко доказать сходимость несобственных интегралов в пикаровских приближениях и оценки для компонент вектора $w^k(t) = (w_1^k(t), w_2^k(t))$:

$$|w_1^k(t)| \leq e^{\nu_i t}(1 + M_6 e^{\lambda_i t}), \quad t \geq 0,$$

$$|w_1^k(t)| \geq e^{\nu_i t}(1 - M_6 e^{\lambda_i t}), \quad t \geq \ln \frac{M_6}{\lambda_i},$$

$$|w_2^k(t)| \leq M_7 e^{\nu_i t} e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0,$$

в которых постоянные M_6, M_7 не зависят от k.

Пикаровский процесс сходится на $[0, \infty)$ к решению $w(t)$ [1, стр. 167], поэтому имеем оценки

$$|\frac{w_1(t)}{||w(t)||} - 1| \leq 2M_6 e^{\lambda_i t},$$

$$|\frac{w_2(t)}{||w(t)||}| \leq M_7 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq \ln \frac{M_6}{\lambda_i}.$$

Отсюда получим

$$2 \sin \frac{\alpha(t)}{2} = ||\frac{w(t)}{||w(t)||} - (1,0)|| \leq$$

$$\leq \sqrt{M_7^2 + 4M_6^2} e^{\lambda_i t} \leq \frac{\sqrt{M_7^2 + 4M_6^2}}{M_3} ||\varphi(t)||, \quad t \geq \frac{\ln M_6}{\lambda_i}.$$

Таким образом, существует постоянная L такая, что $|\alpha(t)| < L||\varphi(t)||$ при $t \geq 0$, что завершает проверку условия Липшица для пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in (\gamma_{i-1} \cup O_i) \cap W_i$.

Из оценок для компонент $w_1(t), w_2(t)$ решения $w(t)$ следует, что существуют постоянные M_8, M_9 такие, что

$$M_8 e^{\nu_i t} \leq ||w(t)|| \leq e^{\nu_i t}, \quad t \geq 0.$$

Далее аналогично доказательству леммы II.1.3 устанавливается
справедливость неравенства II.1.2.

Теперь рассмотрим для некоторого $i \in 2 : m,\ i \neq l_j,\ j \in 1 : k$, второй пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in (\gamma_i \cup O_i) \cap W_i$. По его определению имеем $E_1^{ss}(x) = Dg^t(y_i)E_1^{ss}(y_i)$, где y_i — точка выхода траектории γ_i из окрестности W_i, а прямая $E_1^{ss}(y_i)$ трансверсальна плоскости $P(y_i)$. Обозначим через $\psi(t)$ решение системы II.1.5, параметризующее траекторию γ_i, $\quad \psi(t) = g^t(y_i),\ t \leq 0$. Пусть вектор v_0 порождает прямую $E_1^{ss}(y_i)$, то есть $E_1^{ss}(y_i) =< v_0 >$.

Рассмотрим систему в вариациях для решения $\psi(t)$, заменив в ней t на $-t$:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_i' = -\nu_i \bar{\xi}_i + (\operatorname{grad} X_i(\psi(-t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \\ \bar{\zeta}_i' = -\lambda_i \bar{\zeta}_i + (\operatorname{grad} Y_i(\psi(-t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \\ \bar{\eta}_i' = -\mu_i \bar{\eta}_i + (\operatorname{grad} Z_i(\psi(-t)), (\bar{\xi}_i, \bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_i)) \end{cases} . \qquad \textbf{(II.1.21)}$$

Решение $v(t)$ этой системы с начальными данными $0, v_0$ порождает пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_i$, то есть $E_1^{ss}(\psi(-t)) =< v(t) >,\ t \geq 0$. По определению этого пучка вектор $v_0 = (\bar{\xi}_i^0, \bar{\zeta}_i^0, \bar{\eta}_i^0)$ имеет ненулевую первую компоненту $\bar{\xi}_i^0 \neq 0$, так как он трансверсален плоскости $\bar{\xi}_i = 0$.

Обозначим $\beta(t)$ — угол между прямой $E_1^{ss}(g^{-t}(y_i)) =< v(t) >$ и осью $\bar{\xi}_i$. Тогда $2\sin\frac{\beta(t)}{2} = ||\frac{v(t)}{||v(t)||} - (1,0,0)||$. Липшецевость пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_i$, в точке O_i означает, что $|\beta(t)| < L_2||\psi(-t)||,\ t \geq 0$, где L_2 — некоторая постоянная. Как и предыдущем случае нетрудно получить оценки $N_1 e^{-\mu_i t} \leq ||\psi(-t)|| \leq N_2 e^{-\mu_i t},\ t \geq 0$, где N_1, N_2 — некоторые постоянные.

Из того, что функции X_i, Y_i, Z_i дважды непрерывно дифференцируемы и равны нулю в начале координат вместе со своими частными производными первого порядка, получим представление системы II.1.21 в виде

$$\begin{cases} \bar{\xi}_i' = -\nu_i \bar{\xi}_i + \tilde{B}_{11}(t)\bar{\xi}_i + \tilde{B}_{12}(t)\bar{\zeta}_i + \tilde{B}_{13}(t)\bar{\eta}_i \\ \bar{\zeta}_i' = -\lambda_i \bar{\zeta}_i + \tilde{B}_{21}(t)\bar{\xi}_i + \tilde{B}_{22}(t)\bar{\zeta}_i + \tilde{B}_{23}(t)\bar{\eta}_i \\ \bar{\eta}_i' = -\mu_i \bar{\eta}_i + \tilde{B}_{31}(t)\bar{\xi}_i + \tilde{B}_{32}(t)\bar{\zeta}_i + \tilde{B}_{33}(t)\bar{\eta}_i \end{cases}, \tag{II.1.22}$$

где матрица $\tilde{B} \in \mathbb{C}([0\infty))$ и имеет оценку $||\tilde{B}(t)|| \leq N_3 e^{-\mu_i t},\ t \geq 0$.

Используя пикаров процесс для решения $v(t)$ с компонентами $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$, можно, как и ранее, получить

$$v_1(t) = \bar{\xi}_i^0 e^{-\nu_i t} + r_1(t), \quad v_2(t) = \bar{\zeta}_i^0 e^{-\lambda_i t} + r_2(t),$$

$$v_3(t) = \bar{\eta}_i^0 e^{-\mu_i t} + r_3(t),$$

где функции $r_i(t),\ i \in 1:3$, допускают на $[0,\infty)$ оценку $|r_i(t)| \leq \leq N_4 e^{-(\nu_i+\mu_i)t}$. По условию $\mu_i > 0$ и $\nu_i < \lambda_i < 0$, поэтому $||v(t)|| = = e^{-\nu_i t}\bar{\xi}_i^0[1 + r_u(t)]$, причем функция $r_u(t)$ такова: $|r_u(t)| \leq N_5 e^{-\mu_i t}$. Из всех полученных неравенств следует, что

$$2\sin\frac{\beta(t)}{2} = ||\frac{v(t)}{||v(t)||} - (1,0,0)|| \leq N_6 e^{-\mu_i t}, \quad t \geq 0.$$

Учитывая $||\psi(-t)|| \geq N_1 e^{-\mu_i t}$, легко получить неравенство

$$|\beta(t)| \leq L_2||\psi(-t)||, \quad t \geq 0,$$

где L_2 — некоторая постоянная. Таким образом, липшецевость пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in (\gamma_i \cup O_i) \cap W_i$, доказана.

Доказательство неравенства II.1.2 для этого пучка аналогично подобному доказательству в предыдущих случаях. Оно по существу использует лишь экспоненциальные оценки для нормы порождающего пучок решения $v(t)$, которые легко получить из оценок его компонент. Именно, существуют постоянные N_7, N_8 такие, что

$$N_7 e^{-\nu_i t} \leq ||v(t)|| \leq N_8 e^{-\nu_i t}, \quad t \geq 0.$$

Лемма II.1.4 доказана. ■

Определим пучок $E_1^{ss}(x)$ на всем гетероклиническом цикле Γ. Прямые $E_1^{ss}(x)$ однозначно определены для точек x, лежащих на предельных множествах из цикла Γ, и для точек, лежащих на полутраекториях $\gamma_i \cap W_{i+1},\ i \in 1:m$, и на полутраектории $\gamma_m \cap W_1$. Пучок $E_1^{ss}(x),\ x \in \gamma_i \cap W_i$, однозначно определяется выбором прямой $E_1^{ss}(y_i)$, трансверсальной плоскости $P(y_i)$, где y_i — точка выхода траектории γ_i из окрестности $W_i, i \in 1:m$.

Возьмем произвольно $i \in 1:m$. По построению прямая $E_1^{ss}(x_i)$ не лежит в плоскости $P(x_i)$. В противном случае предельное положение прямой $E_1^{ss}(g^t(x_i))$ при $t \to +\infty$ не могло бы совпадать с осью $\bar{\xi}_i$ в силу инвариантности пучка плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma$, и того, что на предельных множествах плоскость $P(x)$ задается уравнением $\bar{\xi}_i = 0$.

Определим прямую $E_1^{ss}(y_i)$ следующим образом $E_1^{ss}(y_i) = D\,g^t(x_i)E_1^{ss}(x_i)$, где число $t:\ y_i = g^t(x_i)$. В силу инвариантности пучка плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma$, так определенная прямая $E_1^{ss}(y_i)$ трансверсальна плоскости $P(y_i)$. Осталось определить пучок $E_1^{ss}(x)$ на множестве $\Gamma' = \Gamma \setminus \bigcup(W_i \cap \Gamma),\ i \in 1:m$, так, чтобы он был инвариантен относительно отображения $Dg^t(x),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma$. Этим требованием пучок $E_1^{ss}(x)$ определяется однозначно. Именно, для точки $y \in \Gamma'$ существует единственный номер $i \in 1:m$ и число t такие, что $y = g^t(x_i)$. Определим $E_1^{ss}(y) = Dg^t(x_i)E_1^{ss}(x_i)$. Так определенный пучок будет Dg^t инвариантным и, кроме того, будет совпадать на множестве $\bigcup(W_i \cap \Gamma), i \in 1:m$, с ранее определенным пучком $E_1^{ss}(x)$. Следовательно, для него будут выполняться неравенства II.1.2. Прямая $E_1^{ss}(x)$ трансверсальна плоскости $P(x),\ x \in \Gamma$. Таким образом, справедливо разложение II.1.1. Построенный пучок локально удовлетворял условию Липшица на множестве $\bigcup(W_i \cap \Gamma), i \in 1:m$. Поскольку оставшаяся часть Γ' цикла Γ состоит из дуг траекторий $\gamma_i,\ i \in 1:m$, которые отделены от предельных множеств, и пучок $E_1^{ss}(x)$ определен на каждой дуге с помощью дифференцируемого отображения Dg^t, то локальное условие Липшица будет выполняться для пучка $E_1^{ss}(x)$ и на множестве Γ'.

Возвратимся теперь ко второму слагаемому в разложении II.1.1, то есть к пучку плоскостей $E_1^v(x),\ x \in \Gamma$. По своему определению он непрерывен на цикле Γ и инвариантен относительно отображения $Dg^t,\ t \in \mathbb{R}$.

Лемма II.1.5. Пучок плоскостей $E_1^v(x),\ x \in \Gamma$, удовлетворяет локальному условию Липшица.

Доказательство. Обозначим через $N(x),\ x \in \Gamma$, нормаль к плоскости $E_1^v(x)$. По определению локальная липшецевость пучка $E_1^v(x),\ x \in \Gamma$, означает локальную липшецевость пучка $N(x),\ x \in \Gamma$. То есть для любой точки $x \in \Gamma$ найдется ее окрестность $U(x)$ и постоянная L такие, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in U(x)$ угол $\alpha(x_1, x_2)$ между прямыми $N(x_1)$ и $N(x_2)$ имеет оценку $\alpha(x_1, x_2) \le L||x_1 - x_2||$.

Для любой точки $x \in \Gamma$, которая не лежит ни на одном из предельных множеств, найдется ее окрестность $U(x)$ такая, что множество $U(x) \cap \Gamma$ является дугой одной траектории из цикла Γ, т.е. существует число $\delta > 0$ такое, что $U(x) \cap\ \Gamma = \{y \in \mathbb{R}^3:\ y = g^t(x),\ |t| < \delta\}$. При этом число δ сколь угодно мало, если окрестность $U(x)$ достаточно мала. Пучок плоскостей $E_1^v(y),\ y \in U(x) \cap \Gamma$, для таких точек x состоит из плоскостей $Dg^t(x)E_1^v(x),\ |t| < \delta$. В силу предположения о гладкости системы 1 отображение $D\,g^t(x)$ непрерывно дифференцируемо по t. Поэтому существует постоянная K такая, что $\alpha(D\,g^{t_1}(x)E_1^v(x), D\,g^{t_2}(x)E_1^v(x)) \le K|t_1 - t_2|$, если $|t_i| < \delta,\ i = 1, 2$. Окрестность $U(x)$ не содержит состояний раповесия, поэтому существует число R такое, что для любых двух точек $x_1 = g^{t_1}(x)$ и $x_2 = g^{t_2}(x)$ выполняется неравенство

$||x_1 - x_2|| \geq R|t_1 - t_2|$. Отсюда получим, что $a(E_1^v(x_1), E_1^v(x_2)) \leq \frac{K}{R}||x_1 - x_2||$, если $x_1, x_2 \in U(x)$. Таким образом, выполнение локального условия Липшица проверено на множестве $\Gamma \setminus (\cup\alpha(\gamma_i)),\ i \in 1:m$.

Перейдем к проверке локального условия Липшица на множестве $\cup\alpha(\gamma_i),\ i \in 1:m$. Поскольку предельные множества $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1:m$, отделены друг от друга, достаточно доказать локальную липшецевость на каждом из них.

Рассмотрим множество $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1:m$. Проверку условия Липшица можно провести в координатах ξ_i, ζ_i, η_i, введенных в окрестности W_i, так как переход к ним осуществляется гладким преобразованием исходных координат. В координатах ξ_i, ζ_i, η_i для точек $x_1, x_2 \in \Gamma \cap W_i$ таких, что $x_1 \in \gamma_{i-1} \cup \alpha(\gamma_i),\ x_2 \in \gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)$ имеем $2d(x_1, x_2) \geq d(x_1, \alpha(\gamma_i)) + d(x_2, \alpha(g_i))$, где d — расстояние в этой системе координат. Для точки $y \in \alpha(\gamma_i)$ нормаль $N(y)$ к плоскости $P(y)$ совпадает с осью ξ_1, $N(y) = \langle(1,0,0)\rangle$. Очевидно, что угол $\alpha(N(x_1), N(x_2)) \leq \alpha(N(x_1), \langle(1,0,0)\rangle) + \alpha(N(x_2), \langle(1,0,0)\rangle)$.

Из сказанного следует, что проверку локального условия Липшица можно проводить для каждого из пучков $N(x),\ x \in (\gamma_{i-1} \cup \alpha(\gamma_i)) \cap W_i$, и $N(x),\ x \in (\gamma_i \cup \alpha(g_i)) \cap W_i$, в отдельности.

Рассмотрим случай $i = l_j,\ j \in 1:k$. Поскольку доказательство для всех $j \in 1:k$ однотипно, то проведем его для $l_1 = 1$. Локальная липшецевость пучка $N(x),\ x \in (\gamma_1 \cup \alpha(\gamma_1)) \cap W_1$, не вызывает сомнений, так как прямая $N(x)$ — нормаль к плоскости $E_1^v(x) = P(x)$, а плоскость $P(x)$ по определению является касательной плоскостью в точке x к неустойчивому многообразию W_1^u. Последнее является $\mathbb{C}^r,\ r \geq 4$, гладким многообразием, поэтому рассматриваемый пучок не только локально липшецевый но и гладкий.

Для второго пучка локальная липшецевость доказывается с помощью небольшой модификации рассуждений, приведенных в лемме II.1.2 при доказательстве этого свойства пучка $E_1^{ss}(x),\ x \in (\gamma_m \cup \alpha(\gamma_1)) \cap W_1$. Как и там решение $\psi(t) = (\xi_1(t), \zeta_1(t), \eta_1(t))$ системы II.1.4 параметризует траекторию γ_m.

Рассмотрим систему, сопряженную к системе II.1.8, которая в координатах $\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\eta}_1$ имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1' = -\nu_1 \tilde{\xi}_1 + D_{11}(t)\tilde{\xi}_1 + D_{12}(t)\tilde{\zeta}_1 + D_{13}(t)\tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\zeta}_1' = D_{21}(t)\tilde{\xi}_1 + D_{22}(t)\tilde{\zeta}_1 + D_{23}(t)\tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_1' = -\mu_1 \tilde{\eta}_1 + D_{31}(t)\tilde{\xi}_1 + D_{32}(t)\tilde{\zeta}_1 + D_{33}(t)\tilde{\eta}_1 \end{cases}. \qquad \textbf{(II.1.23)}$$

Как и для системы II.1.8 доказывается, что норма матрицы D допускает оценку $||D(t)|| \leq L_1 e^{\nu_1 t},\ t \geq 0$, где L_1 — некоторое число. Пусть $p(t)$ — решение системы II.1.23 такое, что вектор $p(0)$ ортогонален плоскости $P(\psi(0)) = E_1^v(\psi(0))$. Тогда, в силу свойств решений сопряженных систем, вектор $p(t)$ будет ортогонален плоскости $E_1^v(\psi(t))$ при всех $t \geq 0$. Другими словами решение $p(t)$ порождает пучок $N(\psi(t)),\ t \geq 0 : N(\psi(t)) = \langle p(t)\rangle,\ t \geq 0$. Очевидно, что для угла $\alpha(N(\psi(t)), \langle(1,0,0)\rangle)$ между прямой $N(\psi(t))$ и осью $\tilde{\xi}_1$ верно равенство

$$2\sin\frac{\alpha(N(\psi(t)), \langle(1,0,0)\rangle)}{2} = ||\frac{p(t)}{||p(t)||} - (1,0,0)||.$$

Так как главная часть системы II.1.23 совпадает с главной частью системы II.1.13, а матрица $D(t)$ допускает экспоненциальную оценку, то, повторяя рассуждения при выводе оценки $||\frac{w(t)}{||w(t)||}-(1,0,0)||$, где $w(t)$ — решение системы II.1.13, получим

$$||\frac{p(t)}{||p(t)||}-(1,0,0)||\leq L_2e^{\nu_1 t},$$

где L_2 — некоторая константа. Учитывая, что $d(\psi(t),P_1)=\xi_1(t)$, $t\geq 0$, и справедлива оценка $|\xi_1(t)|\geq K^0e^{\nu_1 t}$, $t\geq 0$, полученная в доказательстве леммы II.1.2, имеем

$$\alpha(N(\psi(t)),\langle(1,0,0)\rangle)<L_3d(\psi(t),P_1).$$

То есть рассматриваемый пучок локально удовлетворяет условию Липшица.

Пусть теперь $i\in 1:m,\ i\neq l_j,\ j\in 1:k$.

Оценим угол $\alpha(N(\varphi(t)),\langle(1,0,0)\rangle)$ между нормалью к плоскости $E_1^v(\varphi(t))$ и осью $\bar{\xi}_1$, где $\varphi(t)$ — решение, параметризующее траекторию $\gamma_{i-1}\cap W_i$.

Рассмотрим линейную систему, сопряженную к системе в вариациях II.1.17 для решения $\varphi(t)$. Она имеет вид

$$\begin{cases}\bar{\xi}_i'=-\nu_i\bar{\xi}_i+E_{11}(t)\bar{\xi}_i+E_{12}(t)\bar{\zeta}_i+E_{13}(t)\bar{\eta}_1\\ \bar{\zeta}_i'=-\lambda_i\bar{\zeta}_i+E_{21}(t)\bar{\xi}_i+E_{22}(t)\bar{\zeta}_i+E_{23}(t)\bar{\eta}_i\ .\\ \bar{\eta}_i'=-\mu\bar{\eta}_i+E_{31}(t)\bar{\xi}_1+E_{32}(t)\bar{\zeta}_i+E_{33}(t)\bar{\eta}_i\end{cases}\qquad \textbf{(II.1.24)}$$

В доказательстве леммы II.1.4 была получена оценка II.1.19:

$$M_4e^{\lambda_i t}\leq||\varphi(t)||\leq M_5e^{\lambda_i t},\quad t\geq 0.$$

Компоненты матрицы $E(t)$ имеют множителем компоненты вектора $\varphi(t)$, поэтому верно неравенство $||E(t)||\leq L_4e^{\lambda_i t}$, где L_4 — некоторая постоянная.

Пусть $q(t)$ — решение системы II.1.24 такое, что вектор $q(0)$ ортогонален плоскости $P(\varphi(0))$. Тогда, как и в случае $i=1$, пучок $N(\varphi(t))$, $t\geq 0$, порождается решением $q(t):\ N(\varphi(t))=\langle q(t)\rangle$ и доказательство его липшецевости сводится к оценке нормы $||\frac{q(t)}{||q(t)||}-(1,0,0)||$. На основании указанной оценки $||E(t)||$ аналогично процедуре в лемме II.1.4 для решения системы II.1.21 получим

$$||\frac{q(t)}{||q(t)}-(1,0,0)||\leq L_4e^{\lambda_i t},\quad t\geq 0,$$

из чего следует липшецевость пучка $N(x)$, $x\in(\gamma_{i-1}\cup O_i)\cap W_i$.

Для доказательства липшецевости пучка $E_1^v(x)$, $x\in(\gamma_i\cup O_i)\cap W_i$, рассмотрим решение $\psi(t)$, параметризующее траекторию γ_i, и систему, сопряженную системе в вариациях для решения $\psi(t)$. После замены в ней t на $-t$ получим систему

$$\begin{cases}\bar{\xi}_i'=\nu_i\bar{\xi}_i+G_{11}(t)\bar{\xi}_i+G_{12}(t)\bar{\zeta}_i+G_{13}(t)\bar{\eta}_i\\ \bar{\zeta}_i'=\lambda_i\bar{\zeta}_i+G_{21}(t)\bar{\xi}_i+G_{22}(t)\bar{\zeta}_i+G_{23}(t)\bar{\eta}_i\ ,\\ \bar{\eta}_i'=\mu_i\bar{\eta}_i+G_{31}(t)\bar{\xi}_i+G_{32}(t)\bar{\zeta}_i+G_{33}(t)\bar{\eta}_i\end{cases}\qquad \textbf{(II.1.25)}$$

в которой матрица $G(t)$ допускает оценку $||G(t)|| \leq L_5 e^{-\mu_i t}$, $t \geq 0$, с некоторой постоянной L_5, так как все компоненты матрицы G содержат множителем компоненты вектора $\psi(-t)$, а норма этого вектора была оценена в доказательстве леммы II.1.4:

$$N_1 e^{-\mu_i t} \leq ||\psi(-t)|| \leq N_2 e^{-\mu_i t}, \quad t \geq 0.$$

Пусть $r(t)$ — решение системы II.1.25, имеющее наименьший характеристический показатель на бесконечности равный ν_i. $r(t)$ можно получить как решение интегрального уравнения

$$r(t) = e^{\nu_i t}(1,0,0) - \int_t^{\infty} \Phi(t-\tau)G(\tau)r(\tau)\,d\tau,$$

где $\Phi(t-\tau) = \mathrm{diag}(e^{\nu_i(t-\tau)}, e^{\lambda_i(t-\tau)}, e^{\mu_i(t-\tau)})$ [52,стр. 166]. Отсюда следует, что предельное при $t \to \infty$ направление вектора $r(t)$ ортогонально плоскости $E_1^v(O_i)$. В силу свойств решений сопряженных линейных систем, того, что пучок $E_1^v(\psi(-t))$ инвариантен для системы, сопряженной к II.1.25, и того, что пучок $E_1^v(x)$ непрерывен в точке O_i, получим, что вектор $r(t)$ ортогонален плоскости $E_1^v(\psi(-t))$ при $t \geq 0$, то есть $N(\psi(-t)) = \langle r(t) \rangle$.

Таким образом, доказательство липшецевости пучка $N(\psi(-t))$ сводится к оценке нормы $||\frac{r(t)}{||r(t)||} - (1,0,0)||$ при $t \geq 0$. Используя оценку нормы матрицы $G(t)$ при $t \geq 0$, по аналогии с доказательством оценки для решения системы II.1.18 получим

$$||\frac{r(t)}{||r(t)||} - (1,0,0)|| \leq L_6 e^{-\mu_i t}, \quad t \geq 0,$$

где L_6 — некоторая постоянная. Учитывая, что

$$2 \sin \frac{\alpha(N(\psi(-t)), \langle (1,0,0) \rangle)}{2} = ||\frac{r(t)}{||r(t)||} - (1,0,0)||$$

и что $d(\psi(-t), O_i) \geq N_1 e^{-\mu_i t}$, получим липшецевость пучка $N(x)$, $x \in (\gamma_i \cup O_i) \cap W_i$. Лемма II.1.5 доказана. ■

Этим завершается доказательство теоремы II.1.1. ■

§2 Построение сильно устойчивого расслоения над окрестностью гетероклинического цикла для возмущенной системы

Гетероклинический цикл Γ типа Лоренца не является локально грубым инвариантным множеством системы 1. Он может быть разрушен сколь угодно малым $\mathbb{C}^1$ возмущением системы 1. Однако, гетероклинический цикл Γ лоренцева типа, удовлетворяющий условиям I, II, III введения, порождает над некоторой своей окрестностью V пучок прямых, по направлению которых дифференциал отображения сдвига по траекториям сжимает с наибольшей скоростью и этот пучок не исчезает при $\mathbb{C}^1$ малых возмущениях системы 1. Более точно, цель этого параграфа доказать следующее утверждение.

Теорема II.2.1. Пусть равноразмерностный гетероклинический цикл Γ типа Лоренца системы 1 удовлетворяет условиям I, II, III введения. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0,\ C > 0,\ \ \lambda^i < 0,\ \Lambda^i < 0,\ i \in 1 : m$, окрестность $V(\Gamma)$ цикла Γ, окрестности $V_i \subset V$ предельных множеств $\alpha(\gamma_i),\ \ i \in 1 : m$, такие что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует непрерывное, инвариантное относительно отображения Dg^t_ε, разложение:

$$\mathbb{R}^3 = E^{ss}_\varepsilon(x) \oplus E^v_\varepsilon(x), \quad x \in V(\Gamma), \tag{3}$$

в котором $E^{ss}_\varepsilon(x)$ — прямая, а $E^v_\varepsilon(x)$ — плоскость, такое, что выполняются оценки
:

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp{(\lambda^i t)}||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_\varepsilon(x), \quad x, g^t_\varepsilon(x) \in V_i; \tag{4}$$

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp{(\Lambda^i t)}||v||, \quad t \le 0, \quad v \in E^{v}_\varepsilon(x), \quad x, g^t_\varepsilon(x) \in V_i. \tag{5}$$

При этом пучок прямых $E^{ss}_\varepsilon(x),\ x \in V$, локально удовлетворяет условию Липшица. $\triangle$

Для доказательства теоремы понадобятся некоторые дополнительные построения. Во-первых, продолжим построенное в предыдущем параграфе разложение

$$\mathbb{R}^3 = E^{ss}_1(x) \oplus E^v_1(x), \quad x \in \Gamma,$$

с гетероклинического цикла Γ на некоторую его окрестность $\widetilde{W} \subset W$ с сохранением условия Липшица для слагаемых. Заметим, что поскольку цикл Γ является компактом, то из выполнения локального условия Липшица следует выполнение глобального условия Липшица. Локальное условие легче проверять, поэтому оно и используется. Построение продолжения оформим в виде леммы.

Лемма II.2.1. Существует окрестность $\widetilde{W} \subset W$ гетероклинического цикла Γ и два пучка: пучок прямых $\widetilde{E}^{ss}_1(x),\ x \in \widetilde{W}$, и пучок плоскостей $\widetilde{E}^v_1(x),\ x \in \widetilde{W}$, над ней такие, что они локально удовлетворяют условию Липшица на $\widetilde{W}$, совпадают на Γ с пучками $E^{ss}_1(x),\ E^v_1(x),\ x \in \Gamma$, и такие, что справедливо разложение:

$$\mathbb{R}^3 = \widetilde{E}^{ss}_1(x) \oplus \widetilde{E}^v_1(x), \quad x \in \widetilde{W}. \tag{II.2.1}$$

Доказательство. Осуществим продолжение сначала в окрестностях W_i предельных множеств цикла Γ. Для этого используем координаты $\xi_i, \zeta_i, \eta_i,\ i \in 1:m$. Рассмотрим случай $i = l_j,\ j \in 1:k$. Поскольку продолжение однотипно для всех $l_j,\ j \in 1:k$, проведем его подробно для $l_1 = 1$. Осуществим продолжение пучков на устойчивое W_1^s и неустойчивое W_1^u многообразия замкнутой траектории P_1. Пересечение многообразия W_1^s с плоскостью $\Pi_c = \{(\xi_1, \zeta_1, \eta_1) \in W_1 :\ \zeta_1 = c\}$ является прямой $(\xi_1, c, 0)$, на которой лежат точки пересечения цикла Γ с плоскостью Π_c. Очевидно, их можно занумеровать в порядке убывания координаты ξ_1. Полученная последовательность ξ_1^n сходится к точке $O_c = P_1 \cap \Pi_c$. Рассмотрим две соседние точки ξ_1^k и ξ_1^{k+1} и продолжим линейно пучки E_1^{ss} и E_1^v, заданные на концах отрезка $[\xi_1^k, \xi_1^{k+1}]$, на весь отрезок. Проделав описанное построение для всех $c \in [0, \omega]$, получим продолжение пучков $E_1^{ss},\ E_1^v$ на множество $W_1^s \cap W_1$. Из построения следует, что полученные продолжения удовлетворяют условию Липшица с той же постоянной L.

Аналогичным образом продолжим пучки E_1^{ss} и E_1^v на множество $W_1^u \cap W_1$ и полученные продолжения будем обозначать $\widetilde{E}_1^{ss}$ и $\widetilde{E}_1^v$ соответственно.

Продолжение пучков на плоскость Π_c осуществим в полярных координатах r, φ, в которых луч $\varphi = 0$ совпадает с положительной полуосью ξ_1, а луч $\varphi = \pi/2$ — с положительной полуосью η_1. Положим для $\varphi \in [0, \pi/2]$ $\quad \widetilde{E}_1^v(r, \varphi) = \sin\varphi \widetilde{E}_1^v(r, 0) + (1 - \sin\varphi)\widetilde{E}_1^v(r, \pi/2)$. В остальных четвертях плоскости Π_c построим продолжение $\widetilde{E}_1^v$ так, чтобы оно было симметрично относительно осей. Учитывая, что $||\widetilde{E}_1^v(r, 0) - \widetilde{E}_1^v(r, \pi/2)|| \le L\sqrt{2}r$, где L — постоянная Липшица для пучков E_1^{ss} и E_1^v на цикле Γ, нетрудно проверить, что построенное продолжение удовлетворяет условию Липшица.

Аналогичным способом продолжим пучок E_1^{ss} на плоскость Π_c. Проделав описанное построение для всех $c \in [0, \omega]$, получим искомое продолжение пучков $\widetilde{E}_1^{ss},\ \widetilde{E}_1^v$ на окрестность W_1.

Для номеров $i \in 2:m,\ i \neq l_j,\ j \in 2:k$, продолжение пучков $E_1^{ss},\ E_1^v$ на окрестности W_i почти полностью повторяет описанный процесс. Сначала продолжим пучок E_1^{ss} на координатные плоскости $\eta_i = 0$ и $\zeta_i = 0$, положив для $\eta_i \ge 0$ и $\zeta_i \ge 0$ $\widetilde{E}_1^{ss}(\xi_i, \zeta_i, 0) = E_1^{ss}(0, \zeta_i, 0)$ и $\widetilde{E}_1^{ss}(\xi_i, 0, \eta_i) = E_1^{ss}(0, 0, \eta_i)$. Аналогично продолжим пучок E_1^v на координатные плоскости $\eta_i = 0$ и $\zeta_i = 0$. Во всей окрестности W_i определим продолжение $\widetilde{E}_1^{ss}$ так, чтобы была симметрия относительно координатных плоскостей, а в первом квадранте положим

$$\widetilde{E}_1^{ss}(\xi_i, r, \varphi) = \sin\varphi \widetilde{E}_1^{ss}(\xi_i, r, 0) + (1 - \sin\varphi)\widetilde{E}_1^{ss}(\xi_i, r, \pi/2),$$

где r, φ — полярные координаты в плоскости (ζ_i, η_i). Аналогично определим продолжение пучка $\widetilde{E}_1^v$.

Теперь определим продолжение пучков $E_1^{ss},\ E_1^v$ на траекторные окрестности Q_i дуг траекторий $\gamma_i,\ i \in 1:m$. Они составляют оставшуюся часть окрестности цикла Γ. Рассмотрим $i \in 1:m$ и, выпрямляя дуги траекторий при помощи диффеоморфизма, представим множество Q_i в следующем виде $Q_i = [0, 3] \times B_\rho$, где B_ρ — шар радиуса ρ. Пучок $\widetilde{E}_1^v$ задан на донышках $\{0\} \times B_\rho$ и $\{3\} \times B_\rho$ и на оси $Q_i :\quad [0, 3] \times \{0\}$. На множестве $[0, 1] \times B_\rho$ положим

$$\widetilde{E}_1^v(t, x) = (1 - t)\widetilde{E}_1^v(0, x) + t\widetilde{E}_1^v(t, 0),$$

на $[1,2]\times B_\rho$
$$\widetilde{E}_1^v(t,x)=\widetilde{E}_1^v(t,0),$$
а на $[2,3]\times B_\rho$
$$\widetilde{E}_1^v(t,x)=(3-t)\widetilde{E}_1^v(t,0)+(t-2)\widetilde{E}_1^v(t,3).$$
Поскольку на донышках и оси цилиндра пучок $\widetilde{E}_1^v$ удовлетворял условию Липшица, то легко проверить, что и продолжение его на множество Q_i удовлетворяет условию Липшица. Аналогично продолжим на Q_i пучок $\widetilde{E}_1^{ss}$. Так как прямая $E_1^{ss}(x)$ и плоскость $E_1^v(x)$ для $x\in\Gamma$ трансверсальны, то уменьшая, если надо, окрестность $V(\Gamma)$ цикла Γ, получим, что прямая $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$ и плоскость $\widetilde{E}_1^v(x)$ трансверсальны для $x\in V(\Gamma)$. Лемма II.2.1 доказана. ■

Построенное в лемме разложение может не быть инвариантным относительно $Dg^t(x)$ во всей окрестности $V(\Gamma)$ и быть инвариантным лишь на самом цикле Γ.

Для точки $x\in V(\Gamma)$ в касательном пространстве T_x выберем координаты ξ,ζ,η так, чтобы для $x\in\Gamma\cap W_i$ они совпадали с координатами $\bar\xi_i,\bar\zeta_i,\bar\eta_i$, индуцированными системой координат ξ_i,ζ_i,η_i, заданной в окрестности W_i, $i\in 1:m$. Кроме того, при всех $x\in V(\Gamma)$ вектор $(\xi,0,0)$ лежит в пространстве $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$, а вектор $(0,\zeta,\eta)$ — в пространстве $\widetilde{E}_1^v(x)$.

Для сокращения записи далее вектор $(\xi,0,0)$ будем обозначать через ξ, а вектор $(0,\zeta,\eta)$ через θ.

Пусть отображение $Dg_\varepsilon^{-t}(x)$ в выбранных координатах задается матрицей
$$R_\varepsilon(t,x)=\begin{pmatrix} A_\varepsilon(t,x) & B_\varepsilon(t,x)\\ C_\varepsilon(t,x) & D_\varepsilon(t,x)\end{pmatrix}, \qquad \textbf{(II.2.2)}$$
где g_ε^{-t} — отображение сдвига по траекториям возмущенной системы 2 на время $-t$. Нижний индекс ε будем опускать, если рассматривается отображение сдвига по траекториям невозмущенной системы 1. По лемме II.2.1 координаты $\bar\xi,\bar\zeta,\bar\eta$ можно выбрать так, что матрица II.2.2 локально удовлетворяет условию Липшица по t и x. Поскольку замыкание окрестности $V(\Gamma)$ цикла Γ компактно, то уменьшая, если нужно, окрестность $V(\Gamma)$, можно считать, что матрица II.2.2 и слагаемые в разложении II.2.1 удовлетворяют глобальному условию Липшица на $V(\Gamma)$.

Поскольку $\widetilde{E}_1^{ss}(x)=E_1^{ss}(x)$ и $\widetilde{E}_1^v(x)=E_1^v(x)$ для $x\in\Gamma$, то оценки II.1.2, II.1.3 для дифференциала Dg^{-t} в терминах матрицы II.2.2 примут вид:
$$\begin{gathered}||A_0^{-1}(t,x)||<\overline{C}\exp(\bar\lambda^i t),\quad ||D_0(t,x)||<\overline{C}\exp(-\bar\Lambda^i t),\\ t\ge 0,\quad x,g^\tau(x)\in W_i\cap\Gamma,\quad \tau\in[0,t],\ i\in 1:m.\end{gathered} \qquad \textbf{(II.2.3)}$$
Кроме того, $C_0(t,x)=0,\quad B_0(t,x)=0,\ x\in\Gamma$.

Поскольку слой $\widetilde{E}_1^{ss}$ одномерен, то блок A_ε является числом. Однако для единообразия обозначений будем писать $||A_0^{-1}(t,x)||$ вместо $|A_0^{-1}(t,x)|$.

В дальнейшем придется уменьшать окрестности предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i\in 1:m$, и окрестность цикла Γ, поэтому, чтобы регулировать их размер, выберем их стандартным образом. Пусть окрестность $V_i(\delta)$ предельного множества $\alpha(\gamma_i)$ ограничена поверхностями без контакта $\Pi_i, \Pi^i \subset W_i, i \in 1:m$. В координатах ξ_i, ζ_i, η_i, введенных в W_i, при $i \in 2:m,\ i \neq l_j,\ j \in 1:k$, они имеют вид:

$$\Pi_i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i:\ |\xi_i| \leq \delta, \quad |\zeta_i| \leq \delta, \quad |\eta_i| = \delta\},$$

$$\Pi^i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i : |\xi_i| = \delta, \quad |\zeta_i| \leq \delta, \quad |\eta_i| \leq \delta\}.$$

Для $i = l_j,\ j \in 1:k$,

$$\Pi_i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i : |\xi_i| \leq \delta, \quad \zeta_i \in [0, \omega], \quad |\eta_i| = \delta\},$$

$$\Pi^i = \{(\xi_i, \zeta_i, \eta_i) \in W_i : |\xi_i| = \delta, \quad \zeta_i \in [0, \omega], \quad |\eta_i| \leq \delta\}.$$

Из вида систем II.1.4 и II.1.5 следует, что при достаточно малом числе δ это действительно поверхности без контакта.

Число $\bar{\delta}$ будем считать столь малым, чтобы траектория $\gamma_i \in \Gamma$ пересекалась только с $V_i(\bar{\delta})$ и $V_k(\bar{\delta})$, где $k = (i+1) \bmod m, i \in 1:m$. Пусть x_i — точка входа траектории γ_{i-1} в окрестность $V_k(\bar{\delta}),\ k = i \bmod m$, а y_i — точка выхода траектории γ_i из окрестности $V_i(\bar{\delta}),\ i \in 1:m$.

Рассмотрим для $i \in 1:m$ дугу $\tilde{\gamma}_i$ траектории γ_i, соединяющую точки y_i и $x_k,\ k = (i+1) \bmod m$. Выберем число $\tau > 0$ так, чтобы $g_0^{\tau}(\tilde{\gamma}_i) \subset V_k(\bar{\delta}),\ k = (i+1) \bmod m$, и $g_0^{-\tau}(\tilde{\gamma}_i) \subset V_i(\bar{\delta}),\ i \in 1:m$. При таком выборе числа τ для произвольной точки $x \in \Gamma$ только одна из трех точек $x, g_0^{\tau}(x), g_0^{2\tau}(x)$ может лежать вне множества $\{\bigcup V_i(\bar{\delta}), i \in 1:m\}$.

Будем считать число ε_0 столь малым, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ поверхности $\Pi_i, \Pi^i,\ i \in 1:m$, будут поверхностями без контакта для возмущенной системы 2. Рассмотрим множество $Q_i(\rho)$, являющееся траекторной окрестностью дуги $\tilde{\gamma}_i$ траектории γ_i, которая соединяет точку $x_i \in \Pi_i$ выхода траектории γ_i из окрестности $V_i(\delta)$ с точкой $y_i \in \Pi^{i+1}$ входа траектории γ_i в окрестность $V_{i+1}(\delta),\ i \in 1:m$. Для построения множества $Q_i(\rho)$ рассмотрим на поверхности Π_i замкнутый круг $B_i(\rho)$ радиуса ρ с центром в точке $x_i,\ i \in 1:m$. Через $S_i(\rho)$ обозначим ограничивающую его окружность. В качестве трубки траекторий $Q_i(\rho)$ возьмем объединение всех дуг траекторий возмущенной системы 2, начинающихся на $B_i(\rho)$ и кончающихся на поверхности $\Pi^{i+1}, i \in 1:m$. Ясно, что по числу δ можно выбрать числа ρ_1 и ε_1 так, что при $\rho < \rho_1$ и $\varepsilon < \varepsilon_1$ множество $V(\delta, \rho) = \{\bigcup (V_i(\delta) \cup Q_i(\rho)), i \in 1:m\}$ будет окрестностью цикла Γ. Числа $\delta, \rho_1, \varepsilon_1$ будем считать столь малыми, что $V(\delta, \rho)$ при $\rho < \rho_1,\ \varepsilon < \varepsilon_1$ содержится в окрестности $\widetilde{W}$ гетероклинического цикла Γ, в которой справедливо разложение II.2.1.

Построим, как это было сделано выше, по числу $\bar{\delta}$ окрестность $V(\bar{\delta}, \bar{\rho})$ для невозмущенной системы 1, то есть при построении множеств $Q_i(\bar{\rho}), i \in 1:m$, будем использовать дуги траекторий невозмущенной системы. Зафиксируем эту окрестность. Будем обозначать ее через $\overline{V}(\Gamma)$, а окрестности $V_i(\bar{\delta})$ через $\overline{V}_i$. Все дальнейшие построения будут проводиться в окрестности $\overline{V}(\Gamma)$, поэтому, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что числа $\delta, \rho, \varepsilon$, которые будут встречаться далее, выбираются так, что окрестность $V(\delta, \rho)$, построенная по возмущенной системе 2, содержится в

$\overline{V}(\Gamma)$. Кроме того, из непрерывности отображения g_ε^τ числа $\delta, \rho, \varepsilon$ можно считать столь малыми, что только одна из трех точек $x,\ g_\varepsilon^\tau(x),\ g_\varepsilon^{2\tau}(x)$ может лежать вне множества $\{\cup\overline{V}_i, i \in 1:m\}$, если все они лежат в окрестности $V(\delta,\rho)$ цикла Γ.

Рассмотрим натуральное число l. Для точки $x \in V(\delta,\rho)$ обозначим через $r_i(x)$ число точек из набора $g_\varepsilon^{-k\tau}(x), k \in 0:l$, которые лежат во множестве $\overline{V}_i$.

Лемма II.2.2. Существует число $K > 0$ такое, что для любого числа $l \in N, l \geq 2$, найдутся числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для любой точки $x \in V(\delta,\rho)$ найдется номер $i \in 1:m$ такой, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &||A_\varepsilon^{-1}(l\tau,x)|| < K\exp\left[\tau(\bar{\lambda}^i r_i(x) + \bar{\lambda}^{i-1}r_{i-1}(x))\right] \\ &||D_\varepsilon(l\tau,x)|| < K\exp\left[\tau(-\bar{\Lambda}^i r_i(x) - \bar{\Lambda}^{i-1}r_{i-1}(x))\right]. \end{aligned} \qquad \textbf{(II.2.4)}$$

Доказательство. Выберем числа δ_0, ε_0 так, чтобы при $\delta < \delta_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для $x \in V_i(\delta)$ точки $g_\varepsilon^{-k\tau}(x),\ k \in 0:l$, лежали в $\overline{V}_i$. Заметим, что если $x \in Q_i(\rho)$, то либо $g_\varepsilon^{-\tau}(x) \in Q_i(\rho)$, либо $g_\varepsilon^{-\tau}(x) \in V_{i-1}(\delta)$. Из сказанного следует, что при таком выборе чисел δ_0, ε_0 для $x \in V_i(\delta)\quad r_i(x) = l,\ r_k(x) = 0,\ k \neq i$, а для точек $x \in Q_i(\rho)$ только два числа $r_i(x)$ и $r_{i-1}(x)$ могут быть отличны от нуля. Кроме того, так как только одна из трех точек $x,\ g_\varepsilon^{-\tau}(x),\ g_\varepsilon^{-2\tau}(x)$ может лежать вне множества $\{\cup\overline{V}_i,\ i \in 1:m,\}$, то $r_i(x) + r_{i-1}(x) \geq l-1$.

Рассмотрим случай когда $\varepsilon = 0$ а точка $x \in \Gamma$. Тогда матрица $R_0(l\tau,x)$ диагональна, поэтому

$$A_0^{-1}(l\tau,x) =$$

$$= A_0^{-1}(r_{i-1}(x)\tau, g_0^{-\tau q}(x)) \cdot A_0^{-1}(p\tau, g_0^{-\tau r_i(x)}(x)) \cdot A_0^{-1}(r_i(x)\tau, x),$$

где $p = l - r_{i-1}(x) - r_i(x),\ q = l - r_{i-1}(x)$, а номер $i \in 1:m$ таков, что $r_k(x) = 0$, если $k \neq i,\ k \neq i-1$. В силу непрерывности отображения $Dg_\varepsilon^{-\tau}$ и компактности замыкания окрестности $\overline{V}(\Gamma)$ найдется число $M > 0$ такое, что $||Dg_\varepsilon^{k\tau}(x)|| \leq M$ при $k = \pm1, \pm2$, для $x \in \overline{V}(\Gamma),\ \varepsilon < \varepsilon_0$. Используя оценки II.2.3, и то, что число $p \leq 1$, получим

$$||A_0^{-1}(l\tau,x)|| \leq \overline{C}\exp(\bar{\lambda}^{i-1}r_{i-1}(x)\tau)M\overline{C}\exp(\bar{\lambda}^i r_i(x)\tau).$$

Аналогично получим

$$||D_0(l\tau,x)|| < \overline{C}\exp(-\bar{\Lambda}^{i-1}r_{i-1}(x)\tau)M\overline{C}\exp(-\bar{\Lambda}^i r_i(x)\tau).$$

Таким образом, неравенства II.2.4 доказаны для $x \in \Gamma$ и $\varepsilon = 0$ с постоянной $K_1 = \overline{C}^2 M$.

В силу непрерывности матрицы $R_\varepsilon(l\tau,x)$ для любой точки $x \in \Gamma$ найдется ее окрестность $O(x)$ и число $\varepsilon(x) > 0$ такие, что полученные неравенства будут выполняться для $A_\varepsilon^{-1}(l\tau,y)$ и $D_\varepsilon(l\tau,y)$, если $y \in O(x)$ и $\varepsilon < \varepsilon(x)$. Кроме того, уменьшая, если надо, окрестность $O(x)$ и число $\varepsilon(x)$, можно добиться того, что числа $r_k(x)$ и $r_k(y)$ будут отличаться не более чем на единицу, $k = i-1, i$. Выбранные так окрестности $O(x)$ покрывают компакт Γ. Пусть $\{O(x_j),\ j \in 1:n\}$ его конечное покрытие.

Выберем числа δ_0, ρ_0 так, чтобы $V(\delta,\rho) \subset \cup O(x_j), j \in 1:n$, при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0$. Тогда для любой точки $x \in V(\delta,\rho)$ существует $j \in 1:n$ такое, что будут выполняться неравенства II.2.4, в которых вместо чисел $r_{i-1}(x)$ и $r_i(x)$ стоят числа $r_{i-1}(x_j)$ и $r_i(x_j)$ с постоянной $K_1 = C^2 M$. Поскольку числа $r_k(x)$ и $r_k(x_j)$ отличаются не более чем на единицу, получим, что неравенства II.2.4 будут выполняться, если взять число K так, что $K > K_1 \exp[(\bar\lambda^i + \bar\lambda^{i-1})\tau]$ и $K > K_1 \exp[(-\bar\Lambda^i - \bar\Lambda^{i-1})\tau],\ i \in 1:m$. Лемма II.2.2 доказана. ■

Лемма II.2.3. Существует число $K_1 > 0$ такое, что для любого натурального числа $l \geq 2$ найдутся числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для любой пары точек $x_1, x_2 \in V(\delta,\rho)$ таких, что $|r_k(x_1) - r_k(x_2)| \leq 1, k \in 1:m$, выполняется неравенство

$$d(x_1,x_2) \leq K_1 \exp\left[\tau(M^i r_i(x) + M^{i-1} r_{i-1}(x))\right] d(y_1,y_2),$$

где $y_j = g_\varepsilon^{-\tau l}(x_j),\ j = 1,2$.

Доказательство. Пусть числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ таковы, что $V(\delta_0,\rho_0) \subset \overline{V}(\Gamma)$. Оценим $||Dg_\varepsilon^{-\tau r_{i-1}(x_j)}(y)||,\ y \in \overline{V}_{i-1}, j = 1,2$. По выбору числа M^{i-1} : $M^{i-1} > \mu_{i-1} > 0$ из вида систем II.1.4, II.1.5 следует, что существует постоянная L_{i-1} такая, что

$$||Dg_\varepsilon^{-\tau r_{i-1}(x_1)}(y)|| \geq L_{i-1} \exp\left(-M^{i-1}\tau r_{i-1}(x_1)\right)$$

для y таких, что точки $y, g_\varepsilon^{-\tau}(y), \ldots, g_\varepsilon^{-\tau r_{i-1}(x)}(y)$ лежат в окрестности $\overline{V}_{i-1}$. Поэтому в случае $r_{i-1}(x_1) = r_{i-1}(x_2) > 0$, применяя теорему о среднем, имеем

$$d(y_1,y_2) \geq L_{i-1} \exp\left(-M^{i-1} r_{i-1}(x_1)\tau\right) d(z_1,z_2),$$

где $z_j = g_\varepsilon^{-r_{i-1}(x_1)\tau}(y_j),\ j = 1,2$.

Теорема о среднем применялась в окрестности $\overline{V}_{i-1}$ в координатах $\xi_{i-1}, \zeta_{i-1}, \eta_{i-1}$, в которых система имеет вид II.1.4 или II.1.5. Поскольку переход к этим координатам осуществлялся гладким преобразованием, то существует посточнная R такая, что полученная оценка верна и в исходных координатах с заменой постоянной L_{i-1} на RL_{i-1}.

В случае, когда $|r_{i-1}(x_1) - r_{i-1}(x_2)| = 1$, в полученном неравенстве следует взять постоянную $L_{i-1}\exp(-M^{i-1}\tau)$ вместо L_{i-1}.

Выберем число M так, чтобы $||Dg_\varepsilon^{-\tau}(z)|| > M$ и $||Dg_\varepsilon^{-2\tau}(z)|| > M,\quad z \in \overline{V}(\Gamma)$, что возможно в силу непрерывности и невыроденности отображения $Dg_\varepsilon^{-\tau}$. Отсюда $d(z_1,z_2) \geq M d(u_1,u_2)$, где $u_i = g_\varepsilon^{-\tau s}(z_i),\ s = l - r_{i-1}(x_1) - r_i(x_1)$.

В случае $r_i(x_1) = r_i(x_2) > 0$ имеем

$$d(u_1,u_2) \geq L_i \exp\left(-M^i \tau r_i(x_1)\right) d(x_1,x_2),$$

поскольку $x_i = g_\varepsilon^{-\tau r_i(x_1)}(u_i)$.

Если $|r_i(x_1) - r_i(x_2)| = 1$, в полученном неравенстве следует взять постоянную $L_i \exp(-M^i\tau)$ вместо L_i. Собирая все полученные оценки, имеем

$$d(y_1, y_2) \geq L_{i-1}L_iM \exp[(-M^i - M^{i-1})\tau]\cdot$$

$$\cdot \exp[(-M^{i-1}r_{i-1}(x_1) - M^ir_i(x_1))\tau]d(x_1, x_2).$$

Очевидно, что в случае, когда одно из чисел $r_{i-1}(x_1)$ или $r_i(x_1)$ равно нулю, полученное неравенство остается в силе. Взяв $K_1 \geq (L_{i-1}L_iM)^{-1} \exp[(M^i+M^{i-1})\tau]$, $i \in 1 : m$, получим утверждение леммы для точки x_1. Аналогично доказывается неравенство для точки x_2. Лемма II.2.3 доказана. ■

Замечание. В окрестностях $\overline{V}_i, i \in 1 : m$, имеются две системы координат. Исходная, в которой система имеет вид 1, и система координат ξ_i, ζ_i, η_i, $i \in 1 : m$, в которой система имеет вид II.1.4, II.1.5. Переход от одной к другой осуществляется гладким диффеоморфизмом, поэтому расстояния $d_i(x_1, x_2)$ и $d(x_1, x_2)$ между точками $x_1, x_2 \in \overline{V}_i$ в этих двух системах координат связаны неравенствами

$$I_1d_i(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2) \leq I_2d_i(x_1, x_2).$$

Из сказанного следует, что если число $K_1 > I_1I_2R^2(L_{i-1}L_iM)^{-1}$, $i \in 1 : m$, то неравенство, полученное в лемме, будет справедливо для любой системы координат. ■

Для окрестности $V(\delta, \rho)$ цикла Γ и $l \in N, l \geq 2$, построим ее покрытие множествами $O_j, j \in 1 : n$, такими, что для $x_1, x_2 \in Q_j$ $\quad |r_k(x_1) - r_k(x_2)| \leq 1, k \in 1 : m$. Пусть число δ_0 столь мало, что $g_\varepsilon^{-l\tau}V_i(\delta) \subset \overline{V}_i$, $i \in 1 : m$, если $\delta < \delta_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. По построению множеств $Q_i(\rho), i \in 1 : m$, для точки $x \in Q_i(\rho)$ ее образы при итерации отображения $g_\varepsilon^{-\tau}$ попадают в окрестность $V_i(\delta)$ прежде, чем покинуть окрестность $\overline{V}_i$. Поэтому для $x \in V_i(\delta) \cup \{Q_i(\rho) \cap \overline{V}_i\}$ число $r_i(x) = l, i \in 1 : m$.

Рассмотрим множества $O_i^1 = g_\varepsilon^\tau(Q_i(\rho) \cap \overline{V}_i) \setminus \overline{V}_i$, и $O_i^k = g_\varepsilon^{k\tau}O_i^1$, $i \in 1 : m, k \in Z$. Из построения множества O_i^k следует, что $r_i(x) = l - k$ для $x \in O_i^k$, $l \geq k \geq 1$. Множество $Q_i(\rho)$ является трубкой траекторий возмущенной системы, поэтому для точки $x \in Q_i(\rho)$ ее образы $g_\varepsilon^{k\tau}(x)$, $k \geq 0$, попадут при возрастании k в окрестность $V_{i+1}(\delta)$ прежде, чем покинуть множество $\overline{V}_{i+1}$. По выбору числа δ_0 для точек $x \in V_{i+1}(\delta)$ $\quad r_{i+1}(x) = l$. По выбору числа τ $\quad O_i^2 \subset \overline{V}_{i+1}$, поэтому $O_i^k \subset \overline{V}_{i+1}$, $k \in 2 : l$. Из сказанного следует, что $|r_{i+1}(x_1) - r_{i+1}(x_2)| \leq 1$, если $x_1, x_2 \in O_i^k$, $k \in -l : l$.

Если числа ε_0, ρ_0 достаточно малы, то существует натуральное число $l_i > 0$ такое, что $O_i^{l_i} \subset V_{i+1}(\delta)$ и натуральное число m_i такое, что $O_i^{-m_i-1} \subset V_{i-1}(\delta)$. Будем считать, что l_i, m_i наименьшие такие числа. Для точек $x \in O_i^k$, $k \in l : l_i$, $\quad r_{i+1}(x) = l$. Очевидно, что множества O_i^k, $k \in -m_i : l_i, i \in 1 : m$, вместе с окрестностями $V_i(\delta)$ покрывают окрестность $V(\delta, \rho)$ цикла Γ. По построению они удовлетворяют условию $|r_k(x_1) - r_k(x_2)| \leq 1$, $k \in 1 : m$, если точки x_1, x_2 принадлежат одному элементу этого покрытия. Кроме того, для элемента покрытия O_i^k множество $g_\varepsilon^{l\tau}O_i^k$ либо совпадает с элементом покрытия O_i^{k+l}, либо содержится в окрестности $V_{i+1}(\delta)$.

Отсюда следует, что если точки y_1, y_2 лежат в одном элементе покрытия, то для точек $x_j = g_\varepsilon^{-\tau}(y_j),\ j = 1, 2$, выполнено условие леммы II.2.3: $|r_k(x_1) - r_k(x_2)| \le 1,\ k \in 1:m$. Обозначим элементы этого покрытия через $O_j,\ j \in 1:n$.

Непосредственным следствием двух предыдущих лемм является следующее утверждение.

Лемма II.2.4. Для любого числа $\omega > 0$ существуют числа $l \in N,\ \varepsilon_0, \rho_0, \delta_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для любой точки $x \in V(\delta, \rho)$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &||D_\varepsilon(l\tau, x)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x)|| \le \omega, \\ &||B_\varepsilon(l\tau, x)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x)|| \le \omega, \\ &||B_\varepsilon(l\tau, x)|| < \omega, \\ &||C_\varepsilon(l\tau, x)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x)|| \le \omega. \end{aligned} \qquad \textbf{(II.2.5)}$$

Кроме того, существует покрытие $O_j, j \in 1:n$, окрестности $V(\delta, \rho)$ такое, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in O_j$, выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &d(x_1, x_2)||D_\varepsilon(l\tau, x_k)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)|| \le \omega d(y_1, y_2), \\ &d(x_1, x_2)||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)|| \le \omega d(y_1, y_2), \quad ||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)|| \le \omega, \end{aligned} \qquad \textbf{(II.2.6)}$$

где $y_k = g_\varepsilon^{-l\tau}(x_k),\ k = 1, 2$.

Доказательство. Возьмем число $l \in N$ и выберем числа $\delta_0, \rho_0,\ \varepsilon_0$ так, чтобы были верны заключения лемм II.2.3, II.2.2. Тогда для любой пары точек $x_1, x_2 \in O_j$ найдется номер $i \in 1:m$ такой, что

$$||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)||\,||D_\varepsilon(l\tau, x_k)||d(x_1, x_2) \le$$

$$\le K^2 K_1 \exp\left[\tau((\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i + M^i) r_i(x_k) + (\bar\lambda^{i-1} - \bar\Lambda^{i-1} + M^{i-1}) r_{i-1}(x_k))\right]$$

$$\cdot d(y_1, y_2),$$

$$||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)||\,||D_\varepsilon(l\tau, y)|| \le$$

$$\le K^2 \exp\left[\tau((\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i) r_i(x_k) + (\bar\lambda^{i-1} - \bar\Lambda^{i-1}) r_{i-1}(x_k))\right], \quad k = 1, 2.$$

Так как матрицы $B_\varepsilon(t, x),\ C_\varepsilon(t, x)$ непрерывны и равны нулю, если $\varepsilon = 0$ и $x \in \Gamma$, то числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ можно считать столь малыми, что $||C_\varepsilon(l\tau, y)|| < 1,\ ||B_\varepsilon(l\tau, y)|| < 1$, если $y \in V(\delta, \rho)$ и $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$. Поэтому справедливы оценки:

$$||B_\varepsilon(l\tau, y)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)|| \le K \exp\left[\tau(\bar\lambda^i r_i(x) + \bar\lambda^{i-1} r_{i-1}(x))\right],$$

$$||C_\varepsilon(l\tau, y)||\,||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)|| \le K \exp\left[\tau(\bar\lambda^i r_i(x) + \bar\lambda^{i-1} r_{i-1}(x))\right],$$

$$d(x_1, x_2)||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)|| \le$$

$$\le K K_1 \exp\left[\tau((\bar\lambda^i + M^i) r_i(x_k) + (\bar\lambda^{i-1} + M^{i-1}) r_{i-1}(x_k))\right] d(y_1, y_2),$$

$$||A_\varepsilon^{-1}(l\tau, x_k)|| \le K \exp\left[\tau(\bar\lambda^i r_i(x_k) + \bar\lambda^{i-1} r_{i-1}(x_k))\right],$$

где $y_k = g_\varepsilon^{-l\tau} x_k,\ k = 1, 2$, а y — произвольная точка из O_j.

По выбору чисел $\lambda^i, M^i, \Lambda^i,\ i \in 1:m$, выполняются неравенства:

$$\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i + M^i < 0, \quad \bar\lambda^i - \bar\Lambda^i < 0, \quad \bar\lambda^i + M^i < 0, \quad i \in 1:m.$$

Поэтому число s можно выбрать так, что

$$20K^2 K_1 \exp\left[(\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i + M^i)s\tau\right] < \omega, \quad 20K^2 \exp[(\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i)s\tau] < \omega,$$

$$K \exp(\bar\lambda^i s\tau) < \omega, \quad KK_1 \exp\left[(\bar\lambda^i + M^i)s\tau\right] < \omega, \quad i \in 1:m.$$

Пусть число $l > 2(s+1)$. Тогда выполняются оценки II.2.5 и II.2.6. Лемма II.2.4 даказана. ■

С этого момента зафиксируем число $\omega : \omega < 1/6$.

По этому числу ω выберем числа $l, \delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ на основании леммы II.2.4.

Все дальнейшие построения будут проводиться для $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$.

Рассмотрим пучок $\mathfrak{L}$ над окрестностью $V(\delta, \rho), \delta < \delta_0, \rho < \rho_0$, гетероклинического цикла Γ, слой которого $\mathfrak{L}(x)$ состоит из всех прямых, трансверсальных плоскости $\widetilde{E}_1^v(x)$. Каждая такая прямая $e(x)$ является графиком линейного отображения $P(x)$: $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$
$\to \widetilde{E}_1^v(x)$, с которым далее ее отождествим. Поскольку $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$ одномерно, то линейное отображение $P(x)$ задается вектором $p(x)$. Именно : $P(x)v = p(x)v,\ v \in \widetilde{E}_1^{ss}(x)$. Тогда прямая $e(x)$ натянута на вектор $(1, p(x))$: $e(x) =< (1, p(x)) >$.

Пусть L есть пространство непрерывных секущих пучка $\mathfrak{L}$, то есть множество непрерывных отображений $P : V(\delta, \rho) \to \mathfrak{L}$ таких, что $P(x)$ есть линейное отображение из $\widetilde{E}_1^{ss}(x)$ в $\widetilde{E}_1^v(x)$.

Введем в пространстве L норму

$$|P| = \max ||P(x)||, \quad x \in V(\delta, \rho),$$

где $||P(x)||$ — операторная норма линейного отображения $P(x)$. Так как $V(\delta, \rho)$ компактное множество, то в этой норме L есть банахово пространство.

На поверхности Π_i выхода траекторий из окрестности $V_i(\delta)$ определим функцию $\alpha_i(y), i \in 1:m$, такую что $|\alpha_i(y)| \le 1,\ \alpha_i(y) = 1$, если $y \in B_i(\rho),\ \alpha_i(y) = 0$, если y вне $B_i(2\rho)$ и $\alpha_i(y)$ — линейная функция от $||y||$, если y лежит в кольце $B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$.

Для $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$ определим точку $z(y)$ как точку пересечения отрезка, соединяющего y с центром круга $B_i(\rho)$, с границей этого круга $S_i(\rho)$.

Рассмотрим подмножество L_0 банахова пространства L, состоящее из всех секущих $P \in L$, обладающих следующим свойством

$$P(y) = \begin{cases} 0, \quad y \in \Pi_i \setminus B_i(2\rho), \\ \alpha_i(y)P(z(y)), \quad y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho), i \in 1:m. \end{cases} \qquad \mathbf{(A)}$$

Множество L_0 не пусто, так как нулевая секущая принадлежит ему. Из его определения следует, что оно является замкнутым линейным подпространством пространства L.

Определим отображение $H_\varepsilon : L_0 \to L_0$. Для $x \in V(\delta,\rho)$ таких, что точка $g_\varepsilon^{l\tau}(x) = y \in V(\delta,\rho)$ положим

$$H_\varepsilon P(x) = [C_\varepsilon(y)A_\varepsilon^{-1}(y) + D_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]\cdot$$

$$\cdot[E + B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]^{-1}, \qquad \textbf{(II.2.8)}$$

где для краткости использованы обозначения : $A_\varepsilon(y) = A_\varepsilon(l\tau, y)$, $B_\varepsilon(y) = B_\varepsilon(l\tau, y),\ C_\varepsilon(y) = C_\varepsilon(l\tau, y),\ D_\varepsilon(y) = D_\varepsilon(l\tau, y)$.

Обозначим $H_\varepsilon p(x)$ — вектор, задающий отображение $H_\varepsilon P(x)$. Тогда он выражается через вектор $p(y)$ по формуле II.2.8 с заменой $P(y)$ на $p(y)$.

Отображение H_ε имеет простой геометрический смысл. Оно является преобразованием графиков линейных отображений $P(x)$ под действием отображения $Dg_\varepsilon^{-l\tau}$ [48]. Именно, сопоставим секущей $P(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, пучок прямых $e(x)$ таких, что $e(x) =< (1, p(x)) >$. Тогда $Dg_\varepsilon^{-l\tau} e(y) =< Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)(1, p(y)) >$, где вектор, порождающий прямую в правой части, имеет вид:

$$Dg_\varepsilon^{-l\tau}(1, p(y)) = (A_\varepsilon(y) + B_\varepsilon(y)p(y), C_\varepsilon(y) + D_\varepsilon(y)p(y)).$$

Так как при $\varepsilon = 0$ и $y \in \Gamma$ $B_0(y) = 0$, а матрица $R_0(l\tau, y)$ отображения $Dg_0^{l\tau}(y)$ диагональная и неособая, то число $A_\varepsilon(y) \neq 0$ и $A_\varepsilon(y) + B_\varepsilon(y)p(y) \neq 0$ при достаточно малых $\varepsilon_0,\ \delta_0,\ \rho_0$ и норме $||p(x)|| < 1$. Учитывая сказанное, получим

$$< Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)(1, p(y)) >=< (1, H_\varepsilon p(y)) > .$$

Таким образом, прямая, являющаяся графиком отображения $H_\varepsilon P(x)$, совпадает с образом графика отображения $P(y)$ под действием дифференциала $Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)$, и формула II.2.8 примет вид:

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < (1, p(y)) >, \quad y = g_\varepsilon^{l\tau}(x). \qquad \textbf{(II.2.9)}$$

Исходя из этого определения, проверим, что

$$H_\varepsilon(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2)(x) = \alpha H_\varepsilon p_1(x) + (1-\alpha)H_\varepsilon p_2(x).$$

Действительно,

$$Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < (1, \alpha p_1(y) + (1-\alpha)p_2(y)) >=$$

$$=< Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)(1, \alpha p_1(y) + (1-\alpha)p_2(y)) >=$$

$$=< \alpha(1, H_\varepsilon p_1(y)) + (1-\alpha)(1, H_\varepsilon p_2(y)) >=$$

$$=< (1, \alpha H_\varepsilon p_1(y) + (1-\alpha)H_\varepsilon p_2(y)) > .$$

Доопределим секущую $H_\varepsilon P(x)$ или, что то же самое, пучок прямых $<(1, H_\varepsilon p(x))>$ на оставшейся части окрестности $V(\delta,\rho)$, то есть на множестве $U(\delta,\rho) = V(\delta,\rho) \setminus \{g_\varepsilon^{-l\tau} V(\delta,\rho) \cap V(\delta,\rho)\}$. Для точки $x \in U(\delta,\rho)$ существуют числа $t \in [0, l\tau]$, $i \in 1:m$ и точка $y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho)$ такие, что $x = g_\varepsilon^{-t}(y)$. По y определим точку $z(y) \in S_i(\rho)$, как это было сделано выше перед условием А. Для краткости опустим аргумент y. Пусть точка $v = g_\varepsilon^{-t}(z)$. Она лежит в том множестве, где отображение H_ε уже определено формулой II.2.8. Таким образом, определена прямая $<(1, H_\varepsilon p(v))>$. Перенесем эту прямую в точку z при помощи отображения $Dg_\varepsilon^t(v)$, то есть рассмотрим прямую $Dg_\varepsilon^t(v) <(1, H_\varepsilon p(v))>$. Используя матрицу $R_\varepsilon(-t, v)$ отображения $Dg_\varepsilon^t(v)$, представим ее в стандартном виде $<(1, H_\varepsilon^t p(z))>$, где

$$H_\varepsilon^t p(z) = [C_\varepsilon(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v) + D_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)]\cdot$$

$$\cdot[E + B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)]^{-1}. \qquad \textbf{(II.2.10)}$$

В точке y рассмотрим вектор $\alpha_i(y)(1, H_\varepsilon^t p(z)) + (1-\alpha_i(y))(1,0)$.

Определим в точке x секущую $H_\varepsilon P(x)$ и вектор $H_\varepsilon p(x)$, ее задающий, так, что

$$Dg_\varepsilon^{-t}(y) < \alpha_i(y)(1, H_\varepsilon^t p(z)) + (1-\alpha_i(y))(1,0) >=< (1, H_\varepsilon p(x)) > . \qquad \textbf{(II.2.11)}$$

Преобразуем формулу II.2.11 для отображения $H_\varepsilon p$.

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >=$$

$$=< \alpha_i(y) Dg_\varepsilon^{-t}(y)(1, H_\varepsilon^t p(z)) + Dg_\varepsilon^{-t}(y)(1-\alpha_i(y))(1,0) > .$$

Используя матрицу $R_\varepsilon(t,y)$ отображения $Dg_\varepsilon^{-t}(y)$, имеем

$$Dg_\varepsilon^{-t}(y)(1,0) = (A_\varepsilon(t,y), C_\varepsilon(t,y)),$$

$$Dg_\varepsilon^{-t}(y)(1, H_\varepsilon^t p(z)) =$$

$$= (A_\varepsilon(t,y) + B_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z), C_\varepsilon(t,y) + D_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)).$$

Отсюда

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >=$$

$$=< (1, [C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y) + \alpha_i(y)D_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y)]\cdot$$

$$\cdot[E + \alpha_i(y)B_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y)]^{-1}) > . \qquad \textbf{(II.2.12)}$$

Формулы II.2.10 и II.2.12 дают аналитическое выражение отображения $H_\varepsilon P(x)$ для $x \in U(\delta,\rho)$.

Проверим, что определенная выше секущая $H_\varepsilon P$ удовлетворяет условию А. Для этого в формуле II.2.11 положим $t = 0$ или, что то же самое, $x = y$. Тогда из II.2.10 в этом случае получим $H_\varepsilon^t p(z) = H_\varepsilon p(z)$, так как $v = z$, $C_\varepsilon(0,v) = 0 = B_\varepsilon(0,v)$, а $A_\varepsilon^{-1}(0,v) = 1$ и $D_\varepsilon(0,v) = E$. Отсюда, применяя II.2.11, имеем

$$(1, H_\varepsilon p(x)) = (1, \alpha_i(y)H_\varepsilon p(z)),$$

что согласуется с условием A.

Проверим, что формулы II.2.9 и II.2.11 дают один и тот же результат при тех $x \in V(\delta,\rho)$, при которых они обе применимы, то есть на общей части границ множеств $U(\delta,\rho)$ и $W(\delta,\rho) = V(\delta,\rho) \cap g_\varepsilon^{-l\tau} V(\delta,\rho)$. Для таких точек x существует $i \in 1:m$ такое, что либо найдется точка $y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho): \quad x = g_\varepsilon^{-l\tau}(y)$, либо найдутся точка $y \in S_i(\rho)$ и число $t \in [0, l\tau]: \quad x = g_\varepsilon^{-t}(y)$.

Рассмотрим первую возможность: $x = g_\varepsilon^{-l\tau}(y),\ y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho)$. Если $y \in \Pi_i \setminus B_i(2\rho)$, то $\alpha_i(y) = 0$, и по II.2.11 имеем

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < (1,0) >,$$

что согласуется с II.2.9, так как в этом случае $p(y) = 0$. Если $y = g_\varepsilon^{l\tau}(x) \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$, по II.2.11 имеем

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >=$$
$$= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < \alpha_i(y)(1, H_\varepsilon^{l\tau} p(z(y))) + (1 - \alpha_i(y))(1,0) > .$$

По определению $H_\varepsilon^{l\tau} p(z)$

$$< (1, H_\varepsilon^{l\tau} p(z)) >= Dg_\varepsilon^{l\tau}(v) < (1, H_\varepsilon p(v)) >,\ v = g_\varepsilon^{-l\tau}(z).$$

По формуле II.2.9, которая применима к точке $v \in W(\delta,\rho)$,

$$< (1, H_\varepsilon p(v)) >= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(v) < (1, p(z)) > .$$

Таким образом, $(1, H_\varepsilon^{l\tau} p(z)) = (1, p(z))$ и

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < \alpha_i(y)(1, p(z(y))) + (1 - \alpha_i(y))(1,0) > .$$

По условию A

$$\alpha_i(y)(1, p(z(y))) + (1 - \alpha_i(y))(1,0) = (1, p(y)),$$

то есть $< (1, H_\varepsilon p(x)) >= Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y) < (1, p(y)) >$, что согласуется с формулой II.2.9.

Рассмотрим вторую возможность $x = g_\varepsilon^{-t}(y), \quad y \in S_i(\rho),\ t \in [0, l\tau]$, или, другими словами, $z(y) = y, v = x$. Учитывая, что $\alpha_i(y) = 1$, по II.2.11 получим

$$< (1, H_\varepsilon p(x)) >= Dg_\varepsilon^{-t}(y) < (1, H_\varepsilon^t p(y)) > .$$

По определению $H_\varepsilon^t p(y)$ имеем

$$< (1, H_\varepsilon^t p(y)) >= Dg_\varepsilon^t(v) < (1, H_\varepsilon p(v)) > .$$

Следовательно, прямая $< (1, H_\varepsilon p(x)) >=< (1, H_\varepsilon p(v)) >$, что и требовалось получить, так как $x = v$.

Из определения II.2.8 секущей $H_\varepsilon P$ на множестве $W(\delta,\rho)$ следует ее непрерывность, поскольку точка $g_\varepsilon^{l\tau}(x) = y$ непрерывно зависит от x. На множестве $U(\delta,\rho)$ секущая $H_\varepsilon P$ определяется формулами II.2.10 и II.2.12. Точка v, фигурирующая в II.2.10, непрерывно зависит от x, поэтому вектор $H^t_\varepsilon p(z(x))$ непрерывно зависит от точки x. В формуле II.2.12, определяющей значение секущей $H_\varepsilon p(x)$, функция $\alpha_i(y)$ и матрицы $A_\varepsilon(t,y),\ B_\varepsilon(t,y),\ C_\varepsilon(t,y),\ D_\varepsilon(t,y)$ непрерывны, а точка y непрерывно зависит от x. Поэтому секущая $H_\varepsilon p(x)$ непрерывна на множестве $U(\delta,\rho)$.

Таким образом, при $\delta<\delta_0,\ \rho<\rho_0,\ \varepsilon<\varepsilon_0$ отображение H_ε, определенное формулами II.2.10, II.2.11, II.2.12, переводит пространство L_0 в себя.

Докажем, что оно переводит шар этого пространства в себя и сжимает в нем.

Лемма II.2.5. Для любого числа $\Delta>0:\ 4\Delta<\omega^{-1}$, существуют числа $\delta_0,\ \rho_0,\ \varepsilon_0$ такие, что при $\delta<\delta_0,\ \rho<\rho_0,\ \varepsilon<\varepsilon_0$ и $|P|,|P_1|,|P_2|<\Delta$ для $x\in W(\delta,\rho)$ выполняются неравенства

$$||H_\varepsilon P(x)||\le\frac{\Delta}{2},\quad ||H_\varepsilon P_1(x)-H_\varepsilon P_2(x)||\le|P_1-P_2|/2.$$

Доказательство. Для $x\in W(\delta,\rho)$ значение секущей $H_\varepsilon P(x)$ задается формулой II.2.8. Поэтому

$$||H_\varepsilon P(x)||\le||C_\varepsilon(y)||\,||A_\varepsilon^{-1}(y)||+$$

$$+||D_\varepsilon(y)||\Delta||A_\varepsilon^{-1}(y)||\,||\,[E+B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]^{-1}\,||,$$

где $y=g_\varepsilon^{l\tau}(x)$. Оценим последний сомножитель.

$$||B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)||\le||B_\varepsilon(y)||\Delta||A_\varepsilon^{-1}(y)||.$$

Из оценок II.2.5 и неравенства $\omega<1/6$ получим

$$||B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)||<\omega\Delta<1/4.$$

Поэтому существует

$$[E+B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]^{-1}=E+\sum_{k=1}^{\infty}[B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]^k(-1)^k.$$

Отсюда получим

$$||\,[E+B_\varepsilon(y)P(y)A_\varepsilon^{-1}(y)]^{-1}\,||\le4/3.$$

При $\varepsilon=0$ и $x\in\Gamma\quad C_0(y)=0$. Поэтому числа $\delta_0,\ \rho_0,\ \varepsilon_0$ можно выбрать столь малыми, что $||C_\varepsilon(y)||<\Delta$, если $\varepsilon<\varepsilon_0$ и $x\in W(\delta,\rho),\ \delta<\delta_0,\ \rho<\rho_0$. При таком выборе чисел $\delta_0,\rho_0,\varepsilon_0$

$$||H_\varepsilon P(x)||\le(\Delta\omega+\Delta\omega)4/3\le\Delta/2,$$

так как $\omega<1/6$. Пусть теперь $|P_1|,|P_2|<\Delta$. Тогда

$$||H_\varepsilon P_1(x)-H_\varepsilon P_2(x)||\le||C_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}+D_\varepsilon P_1A_\varepsilon^{-1}||\cdot$$

$$\cdot||[E+B_\varepsilon P_1A_\varepsilon^{-1}]^{-1}-[E+B_\varepsilon P_2A_\varepsilon^{-1}]^{-1}||+$$

$$+||D_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1} - D_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}||\,||[E + B_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}]^{-1}||,$$

где аргумент $y = g_\varepsilon^{l\tau}(x)$ в правой части неравенства для краткости опущен. По оценкам II.2.5 имеем

$$||C_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} + D_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1}|| \le (\omega + \Delta\omega),$$

$$||B_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1} - B_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}|| \le \omega |P_1 - P_2|,$$

$$||D_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1} - D_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}|| \le \omega |P_1 - P_2|.$$

Поскольку

$$[E + B_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1}]^{-1} - [E + B_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}]^{-1} =$$

$$= [E + B_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}]^{-1}[(E + B_\varepsilon P_2 A_\varepsilon^{-1}) - (E + B_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1})][E + B_\varepsilon P_1 A_\varepsilon^{-1}]^{-1},$$

то окончательно получим

$$||H_\varepsilon P_1(x) - H_\varepsilon P_2(x)|| \le [\omega(\omega + \Delta\omega)(4/3)^2 + \omega 4/3]|P_1 - P_2| \le$$

$$\le |P_1 - P_2|\frac{28}{81} < |P_1 - P_2|/2,$$

так как $\omega < 1/6$ и $\Delta\omega < 1/4$. Лемма II.2.5 доказана. ■

Перейдем к оценке $||H_\varepsilon P(x)||$ и $||H_\varepsilon P_1(x) - H_\varepsilon P_2(x)||$ для $x \in U(\delta, \rho)$.

Лемма II.2.6. Для любого $\Delta > 0,\ 4\Delta < \omega^{-1}$, существуют числа $\delta_0,\ \rho_0,\ \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ и $|P|,\ |P_1|,\ |P_2| \le \Delta$ для точек $x \in U(\delta, \rho)$ выполняются неравенства

$$||H_\varepsilon P(x)|| \le \frac{2}{3}\Delta, \quad ||H_\varepsilon P_1(x) - H_\varepsilon P_2(x)|| \le |P_1 - P_2|/2.$$

Доказательство. При доказательстве леммы вместо линейных отображений $P(x)$ будем пользоваться представляющими их векторами $p(x)$. Преобразуем формулы II.2.10 и II.2.12, определяющие значение вектора $H_\varepsilon p(x)$ для $x \in U(\delta, \rho)$. Представим $H_\varepsilon p(x)$ в виде суммы двух слагаемых

$$H_\varepsilon p(x) = H_\varepsilon p_1(x)\alpha_i(y) + H_\varepsilon p_2(x)(1 - \alpha_i(y)),$$

где $x = g_\varepsilon^{-t}(y)$ и $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho),\ i \in 1:m$, а

$$H_\varepsilon p_1(x) = [E + B_\varepsilon(t, y)\alpha_i(y) H_\varepsilon^t p(z) A_\varepsilon^{-1}(t, y)]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [C_\varepsilon(t, y) A_\varepsilon^{-1}(t, y) + D_\varepsilon(t, y) H_\varepsilon^t p(z) A_\varepsilon^{-1}(t, y)],$$

$$H_\varepsilon p_2(x) = C_\varepsilon(t, y) A_\varepsilon^{-1}(t, y)[E + B_\varepsilon(t, y)\alpha_i(y) H_\varepsilon^t p(z) A_\varepsilon^{-1}(t, y)]^{-1}.$$

По формуле II.2.10 имеем

$$H_\varepsilon^t p(z)[E + B_\varepsilon(-t, v) H_\varepsilon p(v) A_\varepsilon^{-1}(-t, v)] =$$

$$= C_\varepsilon(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v) + D_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v).$$

Преобразуем $H_\varepsilon p_1(x)$.

$$H_\varepsilon p_1(x)[E + B_\varepsilon(t,y)\alpha_i(y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y)]\cdot$$

$$\cdot[E + B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)] = C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y)+$$

$$+C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y)B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)+$$

$$+D_\varepsilon(t,y)D_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(t,y) =$$

$$= H_\varepsilon p(v) + Q_1(t,y,v,\varepsilon)H_\varepsilon p(v) + J(t,y,\varepsilon),$$

где

$$Q_1(t,y,v,\varepsilon) = C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y)B_\varepsilon(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)+$$

$$+[D_\varepsilon(t,y)D_\varepsilon(-t,v) - E] + [A_\varepsilon^{-1}(t,y)A_\varepsilon^{-1}(-t,v) - 1]E+$$

$$+[D_\varepsilon(t,y)D_\varepsilon(-t,v) - E][A_\varepsilon^{-1}(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(t,y) - 1],$$

$$J(t,y,\varepsilon) = C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y).$$

Блок $A_\varepsilon(t,x)$ матрицы $R_\varepsilon(t,x)$ отображения $Dg_\varepsilon^{-t}(x)$ тривиален, то есть $A_\varepsilon(t,x)$ — число. Поэтому в формулах этот сомножитель можно переставлять с другими. Точки v, y определяются по точке x, поэтому на самом деле матрица Q_1 и вектор J зависят только от t, ε и x. При $\varepsilon = 0$ и $x \in \Gamma$ векторы $C_\varepsilon(t,x)$, $B_\varepsilon(t,x)$ нулевые, поэтому нормы векторов $C_\varepsilon(t,y)$, $B_\varepsilon(-t,v)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0, \rho \to 0$ равномерно по $t \in [0, l\tau]$ и $y, v \in U(\delta,\rho), \delta < \delta_0$.

По определению точек y, z, v : $z = g_\varepsilon^t(v),\ y = g_\varepsilon^t(x)$, и $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho),\ z \in B_i(\rho)$. Поэтому при $\rho \to 0$ точки $v(x),\ y(x),\ z(x)$ стремятся к циклу Γ. При $\varepsilon = 0$ и $w \in \Gamma$ матрицы $R_0(t,w)$ и $R_0(-t, g_0^t(w))$ взаимно обратные, как матрицы отображений $Dg_0^{-t}(w)$ и $Dg_0^t(g_0^t(w))$. Кроме того, они блочно диагональны с блоками $A_0(t,w)$, $D_0(t,w)$ и $A_0(-t, g_0^t(w))$, $D_0(-t, g_0^t(w))$. Поэтому число $A_\varepsilon^{-1}(-t,v)A_\varepsilon^{-1}(t,y) - 1$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0,\ \rho \to 0$, при этом стремление равномерно по $t \in [0, l\tau],\ v, y \in U(\delta,\rho), \delta < \delta_0$. Аналогичное утверждение верно и для нормы матрицы $D_\varepsilon(t,y)D_\varepsilon(-t,v) - E$. Из сказанного следует, что $||Q_1(t,y,v,\varepsilon)||$ и $||J(t,y,\varepsilon)||$ при $\rho \to 0, \varepsilon \to 0$ стремятся к нулю равномерно по $t \in [0, l\tau]$ и $v, y \in U(\delta,\rho)$, $\delta < \delta_0$.

Аналогично получим

$$H_\varepsilon p_2(x)[E + B_\varepsilon(t,y)\alpha_i(y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y)] = J(t,y,\varepsilon).$$

Перейдем теперь к оценке нормы $||H_\varepsilon^t p(z)||$. Поскольку матрицы $R_\varepsilon(-t,x)$ и $R_\varepsilon(t,x)$ непрерывны на $[0, l\tau] \times U(\delta,\rho)$ и невырождены, то существует постоянная K_1 такая, что $||R_\varepsilon(-t,x)||$, $||R_\varepsilon^{-1}(-t,x)||$, $||R_\varepsilon(t,x)||$, $||R_\varepsilon^{-1}(t,x)|| < K_1$ при $x \in U(\delta,\rho),\ t \in [0, l\tau]$. Будем считать, что числа ρ_0, ε_0

столь малы, что $||B_\varepsilon(t,y)||$, $||B_\varepsilon(-t,v)||$, $||C_\varepsilon(-t,v)|| < (4K_1\varDelta)^{-1}$. Тогда по формуле II.2.10 имеем

$$||H_\varepsilon^t p(z)|| \le \frac{4}{3}[\,||C_\varepsilon(-t,v)||\,||A_\varepsilon^{-1}(-t,v)||+$$

$$+||D_\varepsilon(-t,v)||\,||H_\varepsilon p(v)||\,||A_\varepsilon^{-1}(-t,v)||\,] \le K_2\varDelta.$$

Убавим ε_0, ρ_0 так, чтобы $||B_\varepsilon(t,y)||,\ ||B_\varepsilon(-t,v)|| < (4K_2K_1\varDelta)^{-1}$. Поскольку

$$||B_\varepsilon(t,y)||\,||H_\varepsilon^t p(z)||\,||A_\varepsilon^{-1}(t,y)|| < 1/4,$$

то

$$||\,[E+B_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y)]^{-1}\,|| < 4/3.$$

Аналогично получим

$$||\,[E+B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)]^{-1}|| < 4/3.$$

На основе этих оценок имеем

$$||H_\varepsilon p_1(x)|| \le \frac{16}{9}[\,||H_\varepsilon p(v)|| + ||Q_1(t,y,v,\varepsilon)||\,||H_\varepsilon p(v)|| + ||J(t,y,\varepsilon)||\,] \le$$

$$\le \frac{16}{9}[\varDelta/2 + ||Q_1(t,y,v,\varepsilon)||\varDelta/2 + ||J(t,y,\varepsilon)||\,].$$

Выберем числа ρ_0, ε_0 так, чтобы $||Q_1(t,y,v,\varepsilon)|| < \frac{1}{12}, ||J(t,y,\varepsilon)|| < \frac{\varDelta}{64}$ при $\rho < \rho_0, \varepsilon < \varepsilon_0,\ t \in [0, l\tau],\ v, y \in U(\delta,\rho), \delta < \delta_0$. Тогда получим

$$||H_\varepsilon p_1(x)|| < 2\varDelta/3.$$

Для слагаемого $H_\varepsilon p_2(x)$ имеем

$$||H_\varepsilon p_2(x)|| \le 4/3||J(t,y,\varepsilon)|| \le 1/48\varDelta.$$

Отсюда и вида разложения $H_\varepsilon p(x)$ следует первое неравенство в утверждении леммы.

Пусть $P, Q \in L_0$. Оценим $||H_\varepsilon p(x) - H_\varepsilon q(x)||$ для $x \in U(\delta,\rho)$, $x = g_\varepsilon^t(y)$, $y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho)$, где $p(x), q(x)$ векторы, задающие отображения $P(x), Q(x)$.

Рассмотрим сначала простой случай $y \in \Pi_i \setminus B_i(2\rho)$, то есть когда $\alpha_i(y) = 0$. Из определения отображения H_ε следует, что тогда значения $H_\varepsilon p(x)$ и $H_\varepsilon q(x)$ совпадают и $||H_\varepsilon p(x) - H_\varepsilon q(x)|| = 0$.

Пусть теперь $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$.

$$H_\varepsilon p(x) - H_\varepsilon q(x) = \alpha_i(y)(H_\varepsilon p_1(x) - H_\varepsilon q_1(x)) +$$

$$+(1-\alpha_i(y))(H_\varepsilon p_2(x) - H_\varepsilon q_2(x)).$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. По определению $H_\varepsilon p_1$

$$H_\varepsilon p_1(x)[E + B_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)\alpha_i(y)A_\varepsilon^{-1}(t,y)]\cdot$$

$$\cdot[E + B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v)] =$$

$$= H_\varepsilon p(v) + Q_1(t,y,v,\varepsilon)H_\varepsilon p(v) + J(t,y,\varepsilon).$$

Выделяя в левой части член $H_\varepsilon p_1(x)$ и обозначая сумму остальных членов через $H_\varepsilon p_1(x)T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon p(v))$, получим

$$H_\varepsilon p_1(x) + H_\varepsilon p_1(x)T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon p(v)) =$$

$$= H_\varepsilon p(v) + Q_1(t,y,v,\varepsilon)H_\varepsilon p(v) + J(t,y,\varepsilon).$$

Здесь

$$T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon p(v)) =$$

$$= B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v) + B_\varepsilon(t,y)\alpha_i(y)H_\varepsilon^t p(z)A_\varepsilon^{-1}(t,y) +$$

$$+ B_\varepsilon(t,y)H_\varepsilon^t p(z)\alpha_i(y)A_\varepsilon^{-1}(t,y)B_\varepsilon(-t,v)H_\varepsilon p(v)A_\varepsilon^{-1}(-t,v),$$

а $H_\varepsilon^t p(z)$ выражается по II.2.10 через $H_\varepsilon p(v)$. Все слагаемые, входящие в T, содержат множителем либо $B_\varepsilon(t,y)$ либо $B_\varepsilon(-t,v)$, остальные сомножители ограничены при $t \in [0,l\tau]$, $y,z,v \in U(\delta,\rho)$ и $||H_\varepsilon p(v)|| \le \Delta$. Поскольку при $\varepsilon \to 0, \rho \to 0$ норма $||B_\varepsilon(t,x)||$ стремится к нулю равномерно по $t \in [0,l\tau],\ x \in U(\delta,\rho)$, то и норма $||T||$ при $\varepsilon \to 0, \rho \to 0$ стремится к нулю равномерно по $t \in [0,l\tau],\ y,z,v \in U(\delta,\rho)$ когда $p(v):\ ||H_\varepsilon p(v)|| \le \Delta$.

Кроме того, учитывая вид II.2.10, нетрудно проверить, что функция $T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon p(v))$ удовлетворяет условию Липшица по последней переменной с постоянной $L(\rho_0,\varepsilon_0)$, которая из-за наличия множителей $B_\varepsilon(t,y)$ или $B_\varepsilon(-t,v)$ может быть сделана сколь угодно малой, если числа ρ_0, ε_0 достаточно малы.

Аналогичное представление можно получить и для $H_\varepsilon q_1(x)$.

Вычитая, получим

$$H_\varepsilon p_1(x) - H_\varepsilon q_1(x) + H_\varepsilon p_1(x)T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon p(v)) -$$

$$- H_\varepsilon q_1(x)T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon q(v)) = (H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v))(E + Q_1(t,y,v,\varepsilon)).$$

В левой части добавим и вычтем $H_\varepsilon p_1(x)T(\ldots,H_\varepsilon q(v))$. Получим

$$||H_\varepsilon p_1(x) - H_\varepsilon q_1(x)|| - ||H_\varepsilon p_1(x)||\,||T(\ldots,H_\varepsilon p(v)) - T(\ldots,H_\varepsilon q(v))|| -$$

$$- ||H_\varepsilon p_1(x) - H_\varepsilon q_1(x)||\,||T(\ldots,H_\varepsilon q(v))|| \le$$

$$\le ||H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v)||\,||E + Q_1(t,y,v,\varepsilon)||.$$

Используя условие Липшица для функции T, получим

$$||H_\varepsilon p_1(x) - H_\varepsilon q_1(x)|| \le K(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon q(z))||H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v)||,$$

где
$$K(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon q(z)) = \frac{1+||Q_1(t,y,v,\varepsilon)||+L(\rho_0,\varepsilon_0)||H_\varepsilon p_1(x)||}{1-||T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon q(z))||}.$$
Точка v лежит во множестве $W(\delta,\rho)$, поэтому для оценки нормы $||H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v)||$ применима лемма II.2.5, в конце доказательства которой было получено неравенство
$$||H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v)|| \le |p-q|\frac{28}{81}.$$
Как было показано, при $\rho_0 \to 0, \varepsilon_0 \to 0$ функции $||Q_1(t,y,v,\varepsilon)||,\ L(\rho_0,\varepsilon_0), ||T(t,y,z,v,\varepsilon,H_\varepsilon q(z))||$ стремятся к нулю равномерно по $t \in [0,l\tau],\quad v,y,z \in U(\delta,\rho)$, когда $\delta < \delta_0, \rho < \rho_0$ и $||H_\varepsilon q(z)|| \le \Delta$. Учитывая, что $||H_\varepsilon p_1(x)|| \le \Delta$, получим, что тогда функция K стремится к 1 равномерно по остальным переменным. Отсюда следует, что $||H_\varepsilon p(v) - H_\varepsilon q(v)|| < |p-q|/2$, если числа ε_0, ρ_0 достаточно малы. Лемма II.2.6 доказана. ■

Как следствие лемм II.2.5 и II.2.6 получим, что для любого числа $\Delta > 0,\ 4\Delta < \omega^{-1}$, существуют числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что отображение H_ε, определенное на пространстве L_0, переводит шар радиуса Δ в себя и сжимает в нем:
$$|H_\varepsilon P| \le \Delta, \quad |H_\varepsilon P_1 - H_\varepsilon P_2| \le |P_1 - P_2|/2,$$
$$P, P_1, P_2 \in L_0, \quad |P|, |P_1|, |P_2| \le \Delta.$$
Пространство L_0 полное, поэтому отображение H_ε имеет в шаре радиуса Δ единственную неподвижную точку, которую будем обозначать P^*. Секущая P^* зависит от выбора окрестности $V(\delta,\rho)$ и числа ε, то есть от чисел $\delta, \rho, \varepsilon$. Она определяет пучок прямых $e^*(x),\ x \in V(\delta,\rho), e^*(x) =< (1, p^*(x)) >$, такой, что прямая $e^*(x)$ является графиком отображения $P^*(x) : \widetilde{E}_1^{ss}(x) \to \widetilde{E}_1^{v}(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$.

Рассмотрим произвольное число $\Delta > 0,\ \Delta < (4\omega)^{-1}$, и выберем по нему $\varepsilon_0, \delta_0, \rho_0$ так, чтобы были верны заключения лемм II.2.5 и II.2.6. Из определения II.2.10 отображения H_ε следует, что при $\delta < \delta_0, \rho < \rho_0, \varepsilon < \varepsilon_0$ для точек $x \in W(\delta,\rho)$ имеем $Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)e^*(y) = e^*(x)$, где $x = g_\varepsilon^{-l\tau}(y)$. Оставшаяся часть $U(\delta,\rho)$ окрестности $V(\delta,\rho)$ цикла Γ состоит из таких точек x, что $g_\varepsilon^{l\tau}(x)$ лежит вне окрестности $V(\delta,\rho)$. Таким образом, пучок $e^*(x), x \in V(\delta,\rho)$, инвариантен относительно отображения $Dg_\varepsilon^{-l\tau}$ при $\delta < \delta_0, \rho < \rho_0, \varepsilon < \varepsilon_0$ в смысле данного во введении определения инвариантности пучка над неинвариантной окрестностью $V(\delta,\rho)$.

Лемма II.2.7. Пучок прямых $e^*(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, инвариантен относительно отображения Dg_ε^t при всех $t \in \mathbb{R}$, то есть $e^*(x) = Dg_\varepsilon^t(y)e^*(y)$, если $x = g_\varepsilon^t(y)$ и точки $x, y \in V(\delta,\rho)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для малых по модулю t. Рассмотрим сначала случай $t \le 0$. Пусть пучок $\tilde{e}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, определяется для $x \in V(\delta,\rho) \cap g_\varepsilon^t V(\delta,\rho) = W(t,\delta,\rho)$ равенством $\tilde{e}(x) = Dg_\varepsilon^t(y)e^*(y)$, где

$y = g_\varepsilon^{-t}(x)$. На оставшейся части $U(t,\delta,\rho) = V(\delta,\rho) \setminus W(t,\delta,\rho)$ доопределим пучок $\tilde e(x)$ по инвариантности. Именно, для точек $x \in U(t,\delta,\rho)$ существует номер $i \in 1:m$, число s, $0 \le s \le |t|$, и точка $y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho)$ такие, что $x = g_\varepsilon^{-s}(y)$. Положим $\tilde e(x) = Dg_\varepsilon^{-s}(y) < (1,0) >= Dg_\varepsilon^{-s}(y)e^*(y)$. Ясно, что так определенный пучок $\tilde e(x)$ непрерывен на $V(\delta,\rho)$.

Пусть $\widetilde P(x) : \widetilde E_1^{ss}(x) \to \widetilde E_1^{v}(x)$ линейное отображение, графиком которого является прямая $\tilde e(x)$, а $\tilde p(x)$ — вектор такой, что $\tilde e(x) =< (1, \tilde p(x)) >$. Из построения секущей $\widetilde P$ следует, что $\widetilde P$ удовлетворяет условию А, то есть $\widetilde P \in L_0$. Так как $\tilde e(x) = Dg_\varepsilon^t(y)e^*(y)$, $y = g_\varepsilon^{-t}(x)$ для $x \in W(t,\delta,\rho)$ и $\tilde e(x) = Dg_\varepsilon^{-s}(y)e^*(y)$, $x = g_\varepsilon^{-s}(y)$ для $x \in U(t,\delta,\rho)$ и $0 \le s \le |t|$, кроме того, $e^*(x) =< (1, p^*(x)) >$, где $||p^*(x)|| \le 2\Delta/3$ при $x \in V(\delta,\rho)$, то при достаточно малом $|t|$ построенная секущая $\widetilde P$ лежит в шаре радиуса Δ. В таком шаре пространства L_0 имеется единственная неподвижная точка P^* отображения H_ε. Применим отображение H_ε к секущей $\widetilde P$ или, что то же самое, отображение $Dg_\varepsilon^{-l\tau}$ к пучку прямых $\tilde e(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$. Для точек $x \in U(t,\delta,\rho)$ имеем

$$Dg_\varepsilon^{-l\tau}(x)\tilde e(x) = Dg_\varepsilon^{-l\tau}(x)Dg_\varepsilon^{-s}(y)e^*(y) =$$

$$= Dg_\varepsilon^{-s}(g_\varepsilon^{-l\tau}(y))Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)e^*(y) =$$

$$= Dg_\varepsilon^{-s}(g_\varepsilon^{-l\tau}(y))e^*(g_\varepsilon^{-l\tau}(y)) = \tilde e(g_\varepsilon^{-s-l\tau}(y)) = \tilde e(g_\varepsilon^{-l\tau}(x)).$$

Для точек $x \in W(t,\delta,\rho)$ имеем

$$Dg_\varepsilon^{-l\tau}(x)\tilde e(x) = Dg_\varepsilon^{-l\tau}(x)Dg_\varepsilon^{t}(y)e^*(y) =$$

$$= Dg_\varepsilon^{t}(g_\varepsilon^{-l\tau}(y))Dg_\varepsilon^{-l\tau}(y)e^*(y) =$$

$$= Dg_\varepsilon^{t}(g_\varepsilon^{-l\tau}(y))e^*(g_\varepsilon^{-l\tau}(y)) = \tilde e(g_\varepsilon^{t-l\tau}(y)) = \tilde e(g_\varepsilon^{-l\tau}(x)).$$

Таким образом, $Dg_\varepsilon^{-l\tau}(x)\tilde e(x) = \tilde e(g_\varepsilon^{-l\tau}(x))$ при всех $x \in V(\delta,\rho)$. Для $x \in U(t,\delta,\rho)$ по определению $\tilde e$ имеем $\tilde e(x) = e^*(x)$. В терминах отображения H_ε выше сказанное означает, что $H_\varepsilon \widetilde P = \widetilde P$. Кроме того, $|\widetilde P| < \Delta$. В силу единственности неподвижной точки отображения H_ε в шаре радиуса Δ получим, что $\widetilde P = P^*$ или, что пучок прямых $e^*(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$, инвариантен относительно отображения Dg_ε^t.

Рассмотрим теперь случай $t > 0$ при условии, что t достаточно мало. Как было доказано выше, $Dg_\varepsilon^{-t}(g_\varepsilon^t(x))e^*(g_\varepsilon^t(x)) = e^*(x)$. Тогда

$$Dg_\varepsilon^t(x)e^*(x) = Dg_\varepsilon^t(x)Dg_\varepsilon^{-t}(g_\varepsilon^t(x))e^*(g_\varepsilon^t(x)) = e^*(g_\varepsilon^t(x)).$$

Лемма II.2.7 доказана. ■

Положим $E_\varepsilon^{ss}(x) = e^*(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$. Тогда, резюмируя доказанное, получим следующее утверждение:

Для любого числа Δ найдутся $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0, \rho < \rho_0, \varepsilon < \varepsilon_0$ для точек $x \in V(\delta,\rho)$ справедливо разложение

$\mathbb{R}^3 = E^{ss}_\varepsilon(x) \oplus \widetilde{E}_1(x)$, в котором первое слагаемое инвариантно относительно отображения Dg^t_ε и $|p^*| < \Delta$, где $E^{ss}_\varepsilon(x) =< (1, p^*(x) >$.

Лемма II.2.8. Существуют числа $\delta_0, \varepsilon_0, \rho_0, C, \lambda^i, i \in 1 : m$, такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для пучка E^{ss}_ε справедливы оценки II.1.5:

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\lambda^i t)||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_\varepsilon(x),\ x, g^t_\varepsilon(x) \in W_i.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}_0$, которое получается из L_0 сужением секущих P на цикл Γ с нормой $|P| = \max ||P(x)||, x \in \Gamma$. При $\varepsilon = 0$ это полное линейное пространство, которое переводится в себя отображением H_0. Так как при $\varepsilon = 0$ цикл Γ — инвариантное множество, то все оценки, полученные для H_ε, остаются в силе для отображения $H_0|_{\widetilde{L}_0}$. Поэтому оно имеет в шаре радиуса Δ единственную неподвижную точку. Из единственности следует, что она совпадает с сужением секущей P^* на цикл Γ. У отображения $H_0|_{\widetilde{L}_0}$ нулевая секущая — неподвижная точка. Отсюда следует, что $p^*(y) = 0$.

Таким образом, пучок $E^{ss}_0(x),\ x \in \Gamma$, совпадает с пучком $E^{ss}_1(x),\ \ x \in \Gamma$, построенным в предыдущею параграфе. Для последнего пучка и отображения Dg^t_0 была получена оценка II.1.2:

$$||Dg^t_0(x)v|| \le \overline{C}\exp(\bar{\lambda}^i t)||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_1(x), \quad x, g^t_0(x) \in W_i,$$

где $i \in 1 : m$. На числа $\bar{\lambda}^i$ наложены следующие ограничения I.1.0: $-\mu_i(\varepsilon) > \bar{\lambda}^i > -M^i,\ i \in 2 : m, \quad \bar{\lambda}^1 > \nu_1(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}^i + M^i - \bar{\Lambda}^i < 0,\ i \in 2 : m$. Выберем числа $\lambda^i,\ i \in 1 : m$, так, чтобы $0 > \lambda^i > \bar{\lambda}^i$ и для λ^i выполнялись те же ограничения. Тогда существуют столь малые $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для отображения Dg^t_ε и пучка $E^{ss}_\varepsilon(x),\ x \in V(\delta, \rho)$, будет верна оценка:

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\lambda^i t)||v||, \quad t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_\varepsilon(x), \quad x, g^t_\varepsilon(x) \in V_i(\delta),$$

$i \in 1 : m$.

Действительно, возьмем $C = \overline{C} + 1$ и выберем число T столь большим, чтобы

$$C\exp(\frac{\lambda^i - \bar{\lambda}^i}{2})T < 1.$$

В силу II.1.2 и непрерывности отображения $Dg^t_\varepsilon(x)$ по $\varepsilon,\ x$ и t можно выбрать $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ так, чтобы при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для $i \in 1 : m \quad V_i(\delta) \subset W_i$ и

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\frac{\lambda^i + \bar{\lambda}^i}{2}t)||v||,$$

$$T \ge t \ge 0, \quad v \in E^{ss}_\varepsilon(x), \quad x, g^t_\varepsilon(x) \in V_i(\delta).$$

Пусть теперь $t = kT + \tau > 0$. Тогда, применяя k раз последнюю оценку, получим для $i \in 1 : m$

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C^{k+1}\exp(\frac{\lambda^i + \bar{\lambda}^i}{2}t)||v|| \le$$

$$\leq C\exp(\lambda^i t)||v||\,[C\exp((\frac{\bar{\lambda}^i-\lambda^i}{2})T)]^k \leq C\exp(\lambda^i t)||v||,$$

$$x, g_\varepsilon^t(x) \in V_i(\delta).$$

Лемма II.2.8 доказана. ■

Таким образом, оценка 4 из теоремы II.2.1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству локальной липшецевости пучка $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$.

Из определения отображения H_ε следует, что, если секущая $P \in L_0$ удовлетворяет условию Липшица на $V(\delta,\rho)$, то и секущая $H_\varepsilon P$ будет удовлетворять условию Липшица. Однако, постоянная Липшица может возрасти, поэтому будем следить за тем как меняются локально постоянные Липшица при отображении H_ε.

Напомним, что натуральное число l, числа $\varepsilon_0,\delta_0,\rho_0$ выбраны по числу $\omega < 1/6$ по лемме II.2.4, то есть выполняются неравенства II.2.5 и II.2.6. Кроме того, числа δ_0,ρ_0 выбраны так, что окрестность $V(\delta,\rho)$ цикла Γ лежит в $\overline{V}(\Gamma)$, если $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0$.

Пусть секущая $P \in L_0$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $U \subset V(\delta,\rho)$, то есть соответствующий векторный пучок $p(x),\ x \in U$, удовлетворяет условию Липшица. Будем писать в этом случае $P \in \mathrm{Lip}(U),\ p \in \mathrm{Lip}(U)$, а через $L(P,U)$ и $L(p,U)$ обозначать их постоянные Липшица. Аналогичные обозначения будем использовать для матриц и функций.

Пусть $O_j, j \in 1:n$, покрытие окрестности $V(\delta,\rho)$ цикла Γ множествами O_j из леммы II.2.4, в которых действуют оценки II.2.6.

Определение. Будем говорить, что секущая $P \in L_0$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $U \subset V(\delta,\rho)$ с постоянной L относительно покрытия $O_j,\ j \in 1:n$, и использовать в этом случае обозначения $P \in \mathrm{Liploc}(U,O_j),\quad L(P,U) = L$, если P удовлетворяет условию Липшица на каждом из множеств $U \cap O_j,\ j \in 1:n$, с постоянной Липшица L.

Аналогичное понятие и обозначения введем для матриц и функций.

Лемма II.2.9. Для любого числа $M > L(R_\varepsilon(l\tau,x),\overline{V}(\Gamma))$ существуют числа $\delta_0,\rho_0,\varepsilon_0$ и Δ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для любого множества $U \subset V(\delta,\rho)$ и любой секущей $P \in L_0$ такой, что $|P| < \Delta$ и $P \in \mathrm{Liploc}(U,O_j),\ L(P,U) < M$, секущая $H_\varepsilon P \in \mathrm{Liploc}(g_\varepsilon^{-l\tau}U, g_\varepsilon^{-l\tau}O_j)$ и $L(H_\varepsilon P, g_\varepsilon^{-l\tau}U) < \omega M$.

Доказательство. Матрица $R_\varepsilon(l\tau,x) \in \mathrm{Lip}(\overline{V}(\Gamma))$. Пусть числа Δ и ε таковы, что $\Delta L(R_\varepsilon,\overline{V}(\Gamma)) < M/6$ и $\Delta\omega < 1/4,\ \Delta < 1$, при $\varepsilon < \varepsilon_0$. По леммам II.2.5, II.2.6 выберем $\delta_0,\rho_0,\varepsilon_0$ столь малыми, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ отображение H_ε переводит шар радиуса Δ в пространстве L_0 в себя и сжимает в нем.

Рассмотрим множество $g_\varepsilon^{-l\tau}U_j,\ j \in 1:n$, и пару точек $x_1,x_2 \in g_\varepsilon^{-l\tau}U_j,\ x_k = g_\varepsilon^{-l\tau}(y_k),\ k = 1,2$. По определению II.2.8 отображения H_ε имеем

$$H_\varepsilon P(x_1) - H_\varepsilon P(x_2) =$$

$$[C_1A_1^{-1} + D_1P_1A_1^{-1}][(E + B_1P_1A_1^{-1})^{-1} - (E + B_2P_2A_2^{-1})^{-1}]+$$

$$+[C_1A_1^{-1}+D_1P_1A_1^{-1}-C_2A_2^{-1}-D_2P_2A_2^{-1}](E+B_2P_2A_2^{-1})^{-1}=\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2,$$

где $A_i=A_\varepsilon(y_i),\ B_i=B_\varepsilon(y_i),\ C_i=C_\varepsilon(y_i),\ D_i=D_\varepsilon(y_i), i=1,2$. Поскольку $\Delta\omega<1/4$ и $||B_iA_i^{-1}||\le\omega$ по II.2.5, то

$$||(E+B_iP_iA_i^{-1})^{-1}||\le\sum_{k=0}^{\infty}||B_iP_iA_i^{-1}||^k\le 4/3,\quad i=1,2.$$

Оценим члены $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, используя оценки II.2.5, II.2.6.

$$||\mathcal{S}_1||\le[\,||C_1||\,||A_1^{-1}||+||D_1||\,||P_1||\,||A_1^{-1}||\,]\cdot$$

$$\cdot||(E+B_1P_1A_1^{-1})^{-1}||\,||B_2P_2A_2^{-1}-B_1P_1A_1^{-1}||\,||(E+B_2P_2A_2^{-1})^{-1}||\le$$

$$\le(\omega+\Delta\omega)(\frac{4}{3})^2||B_2P_2A_1^{-1}-B_1P_1A_1^{-1}||.$$

Оценим

$$||B_2P_2A_2^{-1}-B_1P_1A_1^{-1}||\le||B_2-B_1||\,||P_2||\,||A_2^{-1}||+$$

$$+||B_1||\,||P_1-P_2||\,||A_2^{-1}||+||B_1||\,||P_1||\,||A_2^{-1}||\,||A_1-A_2||\,||A_1^{-1}||.$$

Учитывая, что блоки матрицы $R_\varepsilon(l\tau,y)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $L(R_\varepsilon)<M$ и что $\Delta L(R_\varepsilon)<M/6,\ \omega<1/6,\ \Delta\omega<1/4,\ \Delta<1$, получим

$$||\mathcal{S}_1||\le(\frac{1}{6}+\frac{1}{4})(\frac{16}{9})[\frac{M}{6}||y_1-y_2||\,||A_2^{-1}||+\frac{M}{6}||y_1-y_2||\,||A_2^{-1}||+$$

$$+\frac{M}{36}||y_1-y_2||\,||A_1^{-1}||\,].$$

По неравенствам II.2.6 $||y_1-y_2||\,||A_i^{-1}||\le\frac{\omega}{20}||x_1-x_2||, i=1,2$. Поэтому

$$||\mathcal{S}_1||\le\frac{\omega M}{2}||x_1-x_2||.$$

$$||\mathcal{S}_2||\le\frac{4}{3}[\,||C_1||\,||A_1^{-1}||\,||A_1-A_2||\,||A_2^{-1}||+||C_1-C_2||\,||A_2^{-1}||+$$

$$+||D_1||\,||P_1-P_2||\,||A_1^{-1}||+||D_1||\,||P_2||\,||A_1^{-1}||\,||A_2-A_1||\,||A_2^{-1}||+$$

$$+||D_1-D_2||\,||P_2||\,||A_2^{-1}||\,]\le$$

$$\le\frac{4}{3}[M||y_1-y_2||\omega||A_2^{-1}||+M||y_1-y_2||\,||A_2^{-1}||+$$

$$+M||y_1-y_2||\,||D_1||\,||A_1^{-1}||+\omega M||y_1-y_2||\,||A_2^{-1}||+M||y_1-y_2||\,||A_2^{-1}||\,]\le$$

$$\le M||x_1-x_2||\frac{4}{3}\omega\frac{5}{20}\le M\omega||x_1-x_2||.$$

Таким образом,
$$||H_\varepsilon P(x_1) - H_\varepsilon P(x_2)|| \le \omega M ||x_1 - x_2||.$$
Лемма II.2.9 доказана. ■

Из леммы II.2.9 в частности следует

Следствие.

Секущая $H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(g_\varepsilon^{-l\tau} V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P, g_\varepsilon^{-l\tau} V_i(\delta)) < \omega M$, если $P \in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $|P| < \varDelta$, $L(P, V_i(\delta)) < M$ при $\delta < \delta_0$, $\rho < \rho_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. ■

На множестве $U(\delta,\rho) = V(\delta,\rho) \setminus \{g_\varepsilon^{-l\tau} V(\delta,\rho) \cap V(\delta,\rho)\}$ секущая $H_\varepsilon P$ определяется формулой II.2.12. Разобьем множество $U(\delta,\rho)$ на части.
$$U(\delta,\rho) = \bigcup U_i(\delta,\rho), i \in 1:m,$$
$$U_i(\delta,\rho) = \{x \in V_i(\delta) : x = g_\varepsilon^{-t}(y),\ t \in [0, l\tau],\ y \in \Pi_i \setminus B_i(\rho)\}.$$
Рассмотрим множество $U_i(\delta, 2\rho))$. В формуле II.2.12 $\alpha_i(y) = 0$ для $x \in U_i(\delta, 2\rho)$, поэтому $H_\varepsilon p(x) = C_\varepsilon(t,y) A_\varepsilon^{-1}(t,y)$. Вектор $C_\varepsilon(t,y) A_\varepsilon^{-1}(t,y) \in \mathrm{Lip}([-l\tau, l\tau] \times V_i(\delta)), i \in 1:m$. Пусть число M больше его постоянной Липшица на каждом из этих множеств. Таким образом, имеем
$$H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(U_i(\delta,\rho)), \quad L(H_\varepsilon P, U_i(\delta,\rho)) < M, \quad i \in 1:m.$$

Перейдем к оценке постоянной Липшица секущей $H_\varepsilon P$ на множествах $T_i(\delta,\rho)$, являющихся замыканиями множеств $U_i(\delta,2\rho) \setminus U_i(\delta,\rho)$, $i \in 1:m$. Для этого введем в $T_i(\delta,\rho)$ специальную систему координат, выпрямив траектории системы. На поверхности $\Pi_i, i \in 1:m$, введем координаты ξ_i, ζ_i, индуцированные координатами ξ_i, ζ_i, η_i из окрестности $\overline{V}_i$. Для краткости будем обозначать точку (ξ_i, ζ_i) через y. Для точки $x \in T_i(\delta,\rho)$ существует единственное число $t \in [0, l\tau]$ и точка $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$ такие, что $x = g_\varepsilon^{-t}(y)$. Таким образом, t, y — это координаты во множестве $T_i(\delta,\rho)$. Из определения этой новой системы координат следует, что переход от старых координат x_1, x_2, x_3 к координатам t, y осуществляется диффеоморфизмом Φ, который выпрямляет траектории системы 2.

Пусть $d_1(x_1,x_2) = \sqrt{d^2(y_1,y_2) + |t_1 - t_2|^2}$, где $\Phi(x_i) = (t_i, y_i)$, а d — евклидова метрика в старой системе координат.

Значение секущей $H_\varepsilon P(x)$ в точке $x \in T_i(\delta,\rho)$ определяется по формуле II.2.12 через ее значение в точке $v \in g_\varepsilon^{-l\tau} Q_i(\rho)$. Точка v строится по точке x следующим образом. Пусть $x = (t,y)$. По точке $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$ определим точку $z \in S_i(\rho)$ как точку пересечения луча, проходящего через центр окружности $S_i(\rho)$ и точку y, с окружностью $S_i(\rho)$. По z строим точку $v = g_\varepsilon^{-t}(z)$.

Лемма II.2.10. Существует постоянная K такая, что для точек $x_1, x_2 \in T_i(\delta,\rho), i \in 1:m$, выполнены неравенства
$$Kd(x_1,x_2) \ge d(v_1,v_2), \quad Kd(x_1,x_2) \ge d(y_1,y_2),$$

$$Kd(x_1, x_2) \geq |t_1 - t_2|.$$

Доказательство. Поскольку Φ — диффеоморфизм, а $T_i(\delta, \rho)$ — компакт, то существует постоянная C_1 такая, что $d_1(x_1, x_2) \leq C_1 d(x_1, x_2)$. Так как $d_1(x_1, x_2) \geq d(y_1, y_2)$, то $C_1 d(x_1, x_2) \geq d(y_1, y_2)$. Аналогично, $C_1 d(x_1, x_2) \geq |t_1 - t_2|$. Из способа построения точек z_1, z_2 по y_1, y_2 следует, что $d(y_1, y_2) \geq d(z_1, z_2)$, поэтому $C_1 d(x_1, x_2) \geq d(z_1, z_2)$. Но $v_i = g_\varepsilon^{-t_i}(z_i), i = 1, 2$, тогда

$$d_1(v_1, v_2) = \sqrt{d^2(z_1, z_2) + |t_1 - t_2|^2} \leq \sqrt{2} C_1 d(x_1, x_2).$$

Лемма II.2.10 доказана. ■

Замечание. Из доказанной леммы следует, что

$$|\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)| \leq Kd(x_1, x_2)/\rho,$$

если $y_j \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho),\ x_j = g_\varepsilon^{-t_j}(y_j),\ t_j \in [0, l\tau],\ j = 1, 2, i \in 1 : m$.

Действительно, из определения функции α_i следует, что

$$|\alpha_i(y_1) - \alpha_i(y_2)| \leq d(y_1, y_2)/\rho,$$

и по лемме $d(y_1, y_2) \leq Kd(x_1, x_2)$. ■

Разобьем множество $T_i(\delta, \rho)$ на части. Рассмотрим множества $O_i^k = g_\varepsilon^{\tau k} O_i^1$, где $O_i^1 = g_\varepsilon^\tau(Q_i(\rho) \cap \overline{V}_i) \setminus \overline{V}_i, \quad -m_i < k < l_i,\ i \in 1 : m$. По построению $\{\cup O_i^k, k = -1, \ldots, -m_i\} \supset Q_i(\rho)$, поэтому множества $g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k, k = -m_i + l, \ldots, -m_i$, покрывают множество $g_\varepsilon^{-l\tau} Q_i(\rho) \cap V_i(\delta)$. Пусть T_i^k множество тех точек $x \in T_i(\delta, \rho)$, что точка v, построенная по x как это описано перед леммой II.2.10, лежит во множестве $g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k$. Тогда $\{\cup T_i^k, k = -m_i + l, \ldots, -m_i\} \supset T_i(\delta, \rho), i \in 1 : m$.

Цель дальнейших построений состоит в выделении в пространстве L_0 выпуклого замкнутого множества $D(\varepsilon, \rho)$, содержащего неподвижную точку P^* преобразования H_ε, элементы которого удовлетворяют локально условию Липшица.

Для этого зафиксируем число $\Delta > 0,\ \Delta < (4\omega)^{-1}$, где $\omega < 1/6$, выберем по ω числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ так, чтобы выполнялись заключения леммы II.2.6. Тогда при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ отображение H_ε сжимает в шаре радиуса Δ пространства L_0 к неподвижной точке P^*. Зафиксируем число $\delta < \delta_0$.

Матрица $R_\varepsilon(t, x)$ непрерывна на множествах $[-l\tau, l\tau] \times T_i(\delta, \rho), \quad \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0,\ i \in 1 : m$. Поэтому найдется постоянная $K_1 > 1$ такая, что $||A_\varepsilon^{-1}(t, x)||, ||D_\varepsilon(t, x)|| < K_1$ на этих множествах.

При $\varepsilon = 0$ и $x \in \Gamma \quad B_\varepsilon(t, x), C_\varepsilon(t, x) = 0$, поэтому из вида II.2.8 отображения H_ε имеем $P^*(x) = 0$ при $x \in \Gamma$ и $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что для любого $\rho : 0 < \rho < \rho_0$ можно выбрать число $\varepsilon_0(\rho) < \varepsilon_0$ так, что при $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho), \quad ||P^*(x)|| \leq \rho/(3K_1^2)$, если $x \in \Gamma_i = \Gamma \cap V_i(\delta) \cap g_\varepsilon^{-l\tau} Q_i(\rho)$. Кроме того, $||B_\varepsilon(t, x)||, ||C_\varepsilon(t, x)|| < \rho/(6K_1^2)$ при $t \in [-l\tau, l\tau],\ x \in \Gamma_i, i \in 1 : m$.

Рассмотрим в шаре радиуса Δ пространства L_0 подмножество $D_1(\varepsilon,\rho)$, состоящее из тех секущих P, для которых $||P^*(x)-P(x)|| \le \rho/(3K_1^2)$. Из определения числа $\varepsilon_0(\rho)$ следует, что при $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ $D_1(\varepsilon,\rho)$ — непустое замкнутое и выпуклое подмножество пространства L_0, содержащее точку P^*. Для $P \in D_1(\varepsilon,\rho),\ \varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$, $||P(x)|| \le 2\rho/(3K_1^2)$, при $x \in \Gamma_i, i \in 1:m$. Поскольку P^* — неподвижная точка отображения H_ε и оно сжимает, то $H_\varepsilon D_1(\varepsilon,\rho) \subset D_1(\varepsilon,\rho)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$.

Пусть число M выбрано так, как это было сделано выше, то есть $M > L(C_\varepsilon(t,y), A_\varepsilon^{-1}(t,y)),\ t \in [-l\tau, l\tau],\ y \in V_i(\delta), i \in 1:m$. Тогда справедлива

Лемма II.2.11. Существует число $r > 0$ такое, что для любого $\rho < \rho_0$ и $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ из того, что секущая $H_\varepsilon P \in D_1(\varepsilon,\rho),\ H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k)$ и $L(H_\varepsilon P, g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k) < M,\ k = -1,\dots,-m_i,\ i \in 1:m$, следует, что секущая $H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(T_i^k)$ и $L(H_\varepsilon P, T_i^k) < Mr,\ k = -1,\dots,-m_i,\ i \in 1:m$.

Доказательство. Матрица $R_\varepsilon(t,x) \in \mathrm{Lip}([-l\tau, l\tau] \times U_i(\delta,\rho)),\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0(\rho_0)$. Пусть L ее постоянная Липшица на этих множествах.

Рассмотрим числа $i,k : i \in 1:m,\ k \in -1:-m_i$. Для точек $x \in T_i^k$ значения вектора $H_\varepsilon p(x)$, задающего линейное отображение $H_\varepsilon P(x)$, определяется по формуле II.2.12. Пусть точки $x_j = (t_j, y_j) \in T_i^k,\ j = 1,2$. Тогда

$$H_\varepsilon p(x_1) - H_\varepsilon p(x_2) = [C(1)A^{-1}(1) + \alpha_i(1)D(1)H^1p(1)A^{-1}(1)]\cdot$$
$$\cdot[E + \alpha_i(1)B(1)H^1p(1)A^{-1}(1)]^{-1} -$$
$$-[C(2)A^{-1}(2) + \alpha_i(2)D(2)H^2p(2)A^{-1}(2)]\cdot$$
$$\cdot[E + \alpha_i(2)B(2)H^2p(2)A^{-1}(2)]^{-1},$$

где через $A^{-1}(j),\ B(j),\ C(j),\ D(j)$ обозначены значения матриц $A_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon$ в точке $(t_j, y_j),\ j = 1,2$, а через $H^jp(j)$ — значение секущей $H_\varepsilon^t p(z)$, которое вычисляется по формуле II.2.10 при $t = t_j,\ z = g_\varepsilon^{-t_j}(y_j),\ j = 1,2$.

Представим правую часть равенства в виде двух слагаемых:
$H_\varepsilon p(x_1) - H_\varepsilon p(x_2) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = [C(1)A^{-1}(1) + \alpha_i(1)D(1)H^1p(1)A^{-1}(1)]\cdot$$
$$\cdot[E + \alpha_i(1)B(1)H^1p(1)A^{-1}(1)]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[\alpha_i(2)B(2)H^2p(2)A^{-1}(2) - \alpha_i(1)B(1)H^1p(1)A^{-1}(1)]\cdot$$
$$\cdot[E + \alpha_i(2)B(2)H^2p(2)A^{-1}(2)]^{-1},$$
$$I_2 = [(C(1)A^{-1}(1) - C(2)A^{-1}(2)) + (\alpha_i(1)D(1)H^1p(1)A^{-1}(1) -$$
$$-\alpha_i(2)D(2)H^2p(2)A^{-1}(2))]\,[E + \alpha_i(2)B(2)H^2p(2)A^{-1}(2)]^{-1}.$$

Будем оценивать слагаемые I_1, I_2 в отдельности, предварительно оценив некоторые общие члены. По формуле II.2.10 имеем

$$H^jp(j) = H_\varepsilon^{t_j}p(z_j) = [C(-j)A^{-1}(-j) + D(-j)Hp(-j)A^{-1}(-j)]\cdot$$

$$\cdot[E + B(-j)Hp(-j)A^{-1}(-j)]^{-1},$$

где через $A^{-1}(-j), B(-j), C(-j), D(-j)$ обозначены значения матриц $A_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon$ в точке $(-t_j, v_j)$, $j = 1, 2$, а через $Hp(-j)$ значение секущей $H_\varepsilon p(v_j)$.

Оценим $||C_\varepsilon(-t_j, v_j)||$. По построению $v_j = g_\varepsilon^{-t_j}(z_j) \in g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k$. Точка $z_j \in S_i(\rho)$, поэтому $d(z_j, x_i) = \rho$, где $x_i \in \Gamma_i$ — точка выхода траектории γ_i из окрестности $V_i(\delta)$. Пусть число $K_2 \geq \max ||Dg_\varepsilon^{-t}(y)||$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $t \in [0, l\tau]$, $y \in B_i(\rho)$, тогда $d(v_j, g_\varepsilon^{-t_j}(x_i)) \leq \leq K_2\rho$. Точка $g_\varepsilon^{-t_j}(x_i) \in \Gamma_i$, вектор $C_\varepsilon(-t, v) \in \mathrm{Lip}(U(\delta, \rho))$ и $L(C_\varepsilon(-t, v)) \leq L$, $||C_\varepsilon(-t, x)|| \leq \rho/(6K_1^2)$ при $x \in \Gamma_i$, $t \in [0, l\tau]$, $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$. Поэтому

$$||C_\varepsilon(-t_j, v_j)|| \leq ||C_\varepsilon(-t_j, g_\varepsilon^{-t_j}(x_i)|| + LK_2\rho \leq \rho(1/(6K_1^2) + LK_2) = K_3\rho,$$

$j = 1, 2$. Аналогично доказывается оценка

$$||B_\varepsilon(-t_j, v_j))|| \leq K_3\rho, \quad j = 1, 2, \quad t \in [0, l\tau], \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\rho).$$

Для оценки $||H_\varepsilon p(v_j)||$ заметим, что по условию леммы

$$||H_\varepsilon p(g_\varepsilon^{-t_j}(x_i))|| < 2\rho/(3K_1^2), \quad L(H_\varepsilon P, g_\varepsilon^{-l\tau} O_i^k) < M,$$

поэтому

$$||H_\varepsilon p(v_j)|| \leq 2\rho/(3K_1^2) + \rho K_2 M = K_4\rho.$$

Поскольку секущая $H_\varepsilon P \in D_1(\varepsilon, \rho)$, то $||H_\varepsilon p(v_j)|| \leq \rho/(3K_1^2)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ по определению $D_1(\varepsilon, \rho)$.

$$||B(-j)Hp(-j)A^{-1}(-j)|| \leq K_3\rho K_4\rho K_1 = K_5\rho^2, \quad j = 1, 2.$$

Можно считать, что $K_5\rho^2 < 1$ при $\rho < \rho_0$. Тогда

$$||\,[E + B(-j)Hp(-j)A^{-1}(-j)]^{-1}|| \leq (1 - K_5\rho^2)^{-1} < 4/3, \quad j = 1, 2,$$

если $K_5\rho < 1/4$.

Из приведенных оценок следует, что

$$||H_\varepsilon^{t_j} p(z_j)|| = ||H^j p(j)|| \leq [K_3\rho K_1 + K_1^2 K_4\rho]4/3 = K_6\rho,\ j = 1, 2.$$

Рассуждениями, дословно повторяющими приведенные выше, доказываются неравенства:

$$||C(j)||, ||B(j)|| \leq K_7\rho, \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\rho),\ j = 1, 2,$$

$$||\,[B(j)H^j p(j)A^{-1}(j)]^{-1}|| \leq K_8\rho^2, \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\rho),\ j = 1, 2,$$

$$||\,[E + \alpha_i(j)B(j)H^j p(j)A^{-1}(j)]^{-1}|| \leq 4/3, \quad j = 1, 2,$$

в которых постоянные K_7, K_8 не зависят от ρ и ε.

Оценим теперь

$$||H^1p(1) - H^2p(2)|| = ||H_\varepsilon^{t_1}p(z_1) - H_\varepsilon^{t_2}p(z_2)||.$$

По формуле II.2.10 имеем

$$H^1p(1) - H^2p(2) = [C(-1)A^{-1}(-1) + D(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)]\cdot$$

$$\cdot[E + B(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)]^{-1} - [C(-2)A^{-1}(-2)+$$

$$+D(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2)]\,[E + B(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2)]^{-1} = I_3 + I_4,$$

где

$$I_3 = [C(-1)A^{-1}(-1) + D(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)]\cdot$$

$$\cdot[E + B(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)]^{-1}\cdot$$

$$\cdot[B(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2) - B(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)]\cdot$$

$$\cdot[E + B(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2)]^{-1},$$

$$I_4 = [C(-1)A^{-1}(-1) - C(-2)A^{-1}(-2)]+$$

$$+[D(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1) - D(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2)].$$

Оценим $||I_3||$. Произведение первых двух сомножителей, входящих в I_3, уже оценивалось. Оно совпадает с $H^1p(1)$ и его норма меньше $K_6\rho$. Поэтому

$$||I_3|| \le K_6\rho||B(-2)Hp(-2)A^{-1}(-2) - B(-1)Hp(-1)A^{-1}(-1)||4/3 \le$$

$$\le K_6\rho L(B)(d(v_1, v_2) + |t_1 - t_2|)||Hp(-2)||\,||A^{-1}(-2)||+$$

$$+||B(-1)||L(H_\varepsilon p)d(v_1, v_2)||A^{-1}(-2)||+$$

$$+||B(-1)||\,||Hp(-1)||L(A^{-1})(d(v_1, v_2) + |t_1 - t_2|),$$

где $L(B), L(A^{-1})$ — постоянные Липшица на множестве $[-l\tau, l\tau] \times \{g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^k\}$, $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$, для $B_\varepsilon(t, x), A_\varepsilon^{-1}(t, x)$. По выбору числа L имеем $L(B) < L$, $L(A^{-1}) < L$, так как $g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^k \subset U(\delta, \rho)$. Аналогичные оценки для постоянных Липшица матриц $C_\varepsilon(t, x), D_\varepsilon(t, x)$ на том же множестве будут использованы ниже.

Постоянная Липшица $L(H_\varepsilon p) = L(H_\varepsilon P, g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^K) < M$ по условию леммы. Поэтому имеем

$$||I_3|| \le K_6\rho[LK_1K_4\rho L(d(v_1, v_2) + |t_1 - t_2|)+$$

$$+K_3\rho Md(v_1, v_2)K_1 + K_3\rho K_4\rho L(d(v_1, v_2) + |t_1 - t_2|)].$$

Учитывая, что $d(x_1, x_2)K \ge d(v_1, v_2)$, $\quad d(x_1, x_2)K \ge |t_1 - t_2|$, окончательно получим

$$||I_3|| \le \rho K_8 d(x_1, x_2).$$

Оценим $||I_4||$. Так как $L(C_\varepsilon(t,y)A_\varepsilon^{-1}(t,y),\{[-l\tau,l\tau]\times V_i(\delta)\}) < M$, то

$$||I_4|| \le M(d(v_1,v_2)+|t_1-t_2|)+$$

$$+L(D)(d(v_1,v_2)+|t_1-t_2|)||Hp(-1)||\,||A^{-1}(-1)||+$$

$$+||D(-2)||L(H_\varepsilon p)d(v_1,v_2)||A^{-1}(-1)||+$$

$$+||D(-2)||\,||Hp(-2)||L(A^{-1})(d(v_1,v_2)+|t_1-t_2|)\le$$

$$\le 2MKd(x_1,x_2)+L2Kd(x_1,x_2)K_4\rho K_1+K_1^2K_4\rho L2Kd(x_1,x_2)=$$

$$=d(x_1,x_2)(2KM+\rho K_9).$$

Таким образом, получим

$$||H^1p(1)-H^2p(2)||\le(2KM+\rho(K_8+K_9))d(x_1,x_2).$$

Перейдем теперь к оценке $||I_1||$ и $||I_2||$.

$$||I_1||\le(\frac{4}{3})^2[\,||C(1)||\,||A^{-1}(1)||+|\alpha_i(1)|\,||D(1)||\,||H^1p(1)||\,||A^{-1}(1)||\,]\cdot$$

$$\cdot||\alpha_i(2)B(2)H^2p(2)A^{-1}(2)-\alpha_i(1)B(1)H^1p(1)A^{-1}(1)||\le$$

$$\le(\frac{4}{3})^2(K_7\rho K_1+K_1^2K_6\rho)\,[\,|\alpha_i(2)-\alpha_i(1)|\,||B(2)||\,||H^2p(2)||\,||A^{-1}(2)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,L(B)(d(y_1,y_2)+|t_1-t_2|)||H^2p(2)||\,||A^{-1}(2)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,||B(1)||\,||H^1p(1)-H^2p(2)||\,||A^{-1}(2)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,||B(1)||\,||H^1p(1)||\,L(A^{-1})(d(y_1,y_2)+|t_1-t_2|)].$$

Учитывая, что $|\alpha_i(y)|\le 1$, $|\alpha_i(y_1)-\alpha_i(y_2)|<Kd(x_1,x_2)/\rho$, и $||H^1p(1)-H^2p(2)||\le(2KM+\rho(K_8+K_9))d(x_1,x_2)$, получим

$$||I_1||\le(4/3)^2(K_2\rho K_1+K_1^2K_6\rho)[(K/\rho)K_3\rho K_6\rho K_1+L2KK_6\rho K_1+$$

$$+K_7\rho(2KM+\rho(K_8+K_9))K_1+K_3\rho K_6\rho L2K]d(x_1,x_2)=K_{10}\rho d(x_1,x_2).$$

Для слагаемого I_2 имеем

$$||I_2||\le 4/3[\,||C(1)A^{-1}(1)-C(2)A^{-1}(2)||+$$

$$+||\alpha_i(1)D(1)H^1p(1)A^{-1}(1)-\alpha_i(2)D(2)H^2p(2)A^{-1}(2)||\,]\le$$

$$\le\frac{4}{3}[\,L(CA^{-1})\,(d(y_1,y_2)+|t_1-t_2|)+$$

$$+|\alpha_i(1)-\alpha_i(2)|\,||D(1)||\,||H^1p(1)||\,||A^{-1}(1)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,L(D)\,(d(y_1,y_2)+|t_1-t_2|)\,||H^2p(2)||\,||A^{-1}(2)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,||D(1)||\,||H^1p(1)-H^2p(2)||\,||A^{-1}(2)||+$$

$$+|\alpha_i(1)|\,||D(1)||\,||H^1p(1)||\,L(A^{-1})\,(d(y_1,y_2)+|t_1-t_2|)]\le$$

$$\le\frac{4}{3}[2MK+(K/\rho)K_1^2K_6\rho+L2KK_6\rho K_1+K_1^2(2KM+\rho(K_8+K_9))+$$

$$+K_1K_6\rho L2K]\,d(x_1,x_2)=[\frac{8}{3}MK+KK_1^2K_6]\,d(x_1,x_2)+K_{11}\rho d(x_1,x_2).$$

Таким образом, имеем

$$||H_\varepsilon p(x_1)-H_\varepsilon p(x_2)||\le||I_1||+||I_2||\le$$

$$\le[\frac{8}{3}MK+KK_1^2K_6+K_{11}\rho+K_{10}\rho]\,d(x_1,x_2).$$

Числа $M,K,K_i,i\in 1:11$, не зависят от ρ и $\varepsilon<\varepsilon_0(\rho)$. Число $M>0$, поэтому можно выбрать $r>1$, не зависящее от $\rho,\ \varepsilon<\varepsilon_0(\rho)$, такое что

$$||H_\varepsilon p(x_1)-H_\varepsilon p(x_2)||\le rMd(x_1,x_2).$$

Все оценки проводились для $x_j\in T_i^k,\ j=1,2,\ i\in 1:m,\ k\in -1:(-m_i)$. Ясно, что постоянную r можно выбрать одной для всех множеств T_i^k. Лемма II.2.11 доказана. ■

Лемма II.2.12. Пусть секущая $P\in D_1(\varepsilon,\rho),\ \varepsilon<\varepsilon_0(\rho)$, такова, что $P\in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(P,V_i(\delta))\le rM,\ i\in 1:m$. Кроме того, пусть $P\in \mathrm{Lip}(O_i^{-k}),\quad L(P,O_i^{-k})\le M,\ i\in 1:m,k\in(m_i-l):m_i$. Тогда секущая $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P,V_i(\delta))\le rM,\ i\in 1:m$.

Доказательство. Возьмем $i\in 1:m$. По следствию из леммы II.2.8 $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(g_\varepsilon^{-l\tau}V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P,g_\varepsilon^{-l\tau}V_i(\delta))\le rM\omega<M$. Кроме того, $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^{-k}),\quad L(H_\varepsilon P,g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^{-}$ $M\omega<M,\ k\in(m_i-l):m_i$.

Множество $\{\bigcup g_\varepsilon^{-l\tau}O_i^{-k},\ k\in(m_i-l):m_i\}\supset g_\varepsilon^{-l\tau}Q_i(\rho)\cap V_i(\delta)$, поэтому $\{\cup T_i^{-k},\ k\in(m_i-l):m_i\}\supset T_i(\delta,\rho)$. По лемме II.2.10 секущая $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(T_i^{-k})$ и $L(H_\varepsilon P,T_i^{-k})<rM,\ k\in(m_i-l):m_i$.

На множестве $U_i(\delta,2\rho)$ значение секущей $H_\varepsilon P$ не зависит по определению от выбора секущей P и $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(U_i(\delta,2\rho))$, $L(H_\varepsilon P,U_i(\delta,2\rho))<M<rM$.

Окрестность $V_i(\delta)$ представляется в виде объединения

$$V_i(\delta)=\{g_\varepsilon^{-l\tau}V_i(\delta)\cap V_i(\delta)\}\cup\{g_\varepsilon^{-l\tau}Q_i(\rho)\cap V_i(\delta)\}\cup T_i(\delta,\rho)\cup U_i(\delta,2\rho).$$

Каждое из множеств в этом объединении покрыто множествами, на которых секущая $H_\varepsilon P$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной меньше rM. Для $i\ge 2$ окрестность $V_i(\delta)$ — выпуклое множество, поэтому из сказанного выше следует, что $H_\varepsilon P\in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P,V_i(\delta))<rM$.

Окрестность $V_1(\delta)$ является полноторием. Для любых двух точек $x_1, x_2 \in V_1(\delta)$ отрезок $[x_1, x_2]$, их соединяющий, либо лежит в $V_1(\delta)$, либо представляется в виде объединения $[x_1, x_2] = [x_1, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup [y_2, x_2]$, в котором $[x_1, y_1], [y_2, x_2] \subset V_i(\delta)$, а $[y_1, y_2] \overline{\subset} V_i(\delta)$, и точки $y_1, y_2 \in g_\varepsilon^{-l\tau} V_1(\delta) \cap V_i(\delta)$. Поскольку $H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P, V_i(\delta)) \le rM$, то отсюда следует, что в обоих случаях $||H_\varepsilon P(x_1) - H_\varepsilon P(x_2)|| \le rMd(x_1, x_2)$. Лемма II.2.12 доказана. ■

Сузим замкнутое выпуклое подмножество $D_1(\varepsilon, \rho)$ пространства L_0. Для этого выберем число $s \in N$ так, чтобы $\omega^s r < 1$. Это возможно, так как $\omega < 1/6$. Рассмотрим множества $O(i, k, p) = g_\varepsilon^{l\tau(s-p)} O_i^{-k},\ p \in 0 : s+1,\ k \in (m_i - l) : m_i,\ i \in 1 : m$.

Определим множество $D(\varepsilon, \rho)$. Пусть $D(\varepsilon, \rho) \subset D_1(\varepsilon, \rho)$ состоит из секущих P, для которых выполняются два условия:

1. $P \in \mathrm{Liploc}(V(\delta, \rho), O_j)$ и $L(P, V(\delta, \rho)) \le rM$, где $\{O_j,\ j \in 1 : n\}$ — покрытие окрестности $V(\delta, \rho)$ цикла Γ, введенное в лемме II.2.4.

2. Для множества $O(i, k, p)$ и секущей P $P \in \mathrm{Lip}(O(i, k, p))$ и $L(P, O(i, k, p)) \le rM\omega^p$.

Ясно, что $D(\varepsilon, \rho)$ является замкнутым выпуклым подмножеством пространства L_0. Оно непусто, так как нулевая секущая ему принадлежит.

Лемма II.2.13. Существуют числа $\rho_1, \varepsilon_1,\ \varepsilon_1 < \varepsilon_0(\rho_1)$ такие, что $H_\varepsilon D(\varepsilon, \rho) \subset D(\varepsilon, \rho)$, если $\rho < \rho_1,\ \varepsilon < \varepsilon_1$.

Доказательство. Поскольку при $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ отображение H_ε переводит множество $D_1(\varepsilon, \rho)$ в себя, то достаточно проверить, что секущая $H_\varepsilon P$ удовлетворяет условиям 1, 2, если им удовлетворяет секущая P.

Покрытие $\{O_j,\ j \in 1 : n\}$ состоит из множеств двух видов: окрестностей $V_i(\delta),\ i \in 1 : m$, и множеств $O_i^k, i \in 1 : m,\ k \in -m_i : l_i$.

Проверим выполнение условий 1, 2 для элементов покрытия второго вида.

Множества O_i^k были определены следующим образом:

$$O_i^1 = g_\varepsilon^\tau (Q_i(\rho) \cap \overline{V}_i) \setminus \overline{V}_i \subset Q_i(\rho), \quad O_i^k = g_\varepsilon^{\tau k} O_i^1.$$

Из определения следует, что траектория возмущенной системы 2, проходящая через точку множества O_i^k, пересекает с убыванием времени круг $B_i(\rho)$, а с возрастанием времени — поверхность Π^{i+1} входа траекторий в окрестность $V_{i+1}(\delta)$. При $\varepsilon = 0$ траектория γ_i, проходящая через центр круга $B_i(\rho)$, входит в окрестность $V_{i+1}(\delta)$ и не покидает ее с ростом времени. Из непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров следует, что существуют столь малые числа ρ_1 и ε_1, что при $\rho < \rho_1,\ \varepsilon < \varepsilon_1$ траектории возмущенной системы 2, начинающиеся при $t = 0$ на $B_i(\rho)$, при $t \in [0, sl\tau]$ не покидают множества $Q_i(\rho) \cup V_{i+1}(\delta),\ i \in 1 : m$. Можно считать, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_0(\rho_1)$. Выше сказанное в терминах множеств $O(i, k, p)$ означает, что множество $g_\varepsilon^{l\tau} O(i, k, p) = O(i, k, p-1)$ либо совпадает с множеством $O_i^{l(s-p+1)-k}$ из покрытия $\{O_j, j \in 1 : n\}$, либо лежит в окрестности $V_{i+1}(\delta)$. Первый случай реализуется, если $-m_i \le l(s-p+1) - k \le l_i$, второй, если $l_i < l(s-p+1) - k \le ls - m_i < ls$. В каждом из этих случаев секущая $P \in \mathrm{Lip}(g_\varepsilon^{l\tau} O(i, k, p))$ и $L(P, g_\varepsilon^{l\tau} O(i, k, p)) \le rM\omega^{p-1}$, поскольку

P удовлетворяет требованиям 1, 2. Таким образом, к множеству $O(i,k,p-1)$ и секущей P применима лемма II.2.9, из которой следует, что $H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(O(i,k,p))$ и $L(H_\varepsilon P, O(i,k,p)) \le \omega L(P, O(i,k,p-1)) \le rM\omega^p$, то есть условие 2 выполняется для секущей $H_\varepsilon P$. Так как число $\omega < 1/6$, то из этого следует выполнение условия 1 для $H_\varepsilon P$ на элементах O_i^k покрытия $\{O_j, j \in 1:n\}$.

Осталось проверить выполнение условия 1 для секущей $H_\varepsilon P$ в окрестностях $V_i(\delta), i \in 1:m$. Поскольку число s таково, что $r\omega^s < 1$, то $L(P, O(i,k,p)) \le M$ для $p = s,\ k \in (m_i - l) : m_i,\ i \in 1:m$, по условию 2 для P. По определению $O(i,k,s) = O_i^{-k},\ k \in (m_i - l) : m_i$. Секущая P удовлетворяет условию 1, поэтому $P \in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(P, V_i(\delta)) \le rM,\ i \in 1:m$. Таким образом, выполнены все условия леммы II.2.12, из которой следует, что $H_\varepsilon P \in \mathrm{Lip}(V_i(\delta))$ и $L(H_\varepsilon P, V_i(\delta)) \le rM,\ i \in 1:m$. Иными словами секущая $H_\varepsilon P$ удовлетворяет условию 1. Лемма II.2.13 доказана. ■

Зафиксируем числа $\rho, \varepsilon,\ \rho < \rho_1,\ \varepsilon < \varepsilon_1$. Подмножество $D_1(\varepsilon,\rho)$ непусто выпукло и замкнуто. По доказанной лемме $H_\varepsilon D(\varepsilon,\rho) \subset D(\varepsilon,\rho) \subset D_1(\varepsilon,\rho)$. На множестве $D_1(\varepsilon,\rho)$ отображение H_ε сжимает, поэтому оно сжимает и на множестве $D(\varepsilon,\rho)$. Поэтому во множестве $D(\varepsilon,\rho)$ лежит неподвижная точка отображения H_ε. В силу единственности неподвижной точки P^* отображения H_ε во множестве $D_1(\varepsilon,\rho)$ секущая P^* лежит в $D(\varepsilon,\rho)$. Таким образом, P^* удовлетворяет условию Липшица на элементах O_j покрытия $\{O_j, j \in 1:n\}$ окрестности $V(\delta,\rho)$ цикла Г. Пучок прямых $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, являющихся графиками отображений $P^*(x) :\ \widetilde{E}_1^{ss}(x) \to \widetilde{E}_1^{v}(x)$, является первым слагаемым разложения 3 из теоремы II.2.1, поэтому доказано утверждение этой теоремы о локальной липшецевости пучка $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$.

Для завершения доказательства теоремы II.2.1 осталось построить второе инвариантное слагаемое $E_\varepsilon^v(x)$ в разложении 3. Его построение во многом повторяет построение пучка $E_\varepsilon^{ss}(x)$.

Заметим, что, уменьшая, если нужно, числа ρ, δ, прямую $E_\varepsilon^{ss}(x)$ можно считать трансверсальной плоскости $\widetilde{E}_1^v(x)$ для $x \in V(\delta,\rho)$, то есть справедливо разложение

$$\mathbb{R}^3 = E_\varepsilon^{ss}(x) \oplus \widetilde{E}_1^v(x), \quad x \in V(\delta,\rho). \qquad \textbf{(II.2.13)}$$

Так как пучок $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, локально удовлетворяет условию Липшица, то на любом компакте он будет глобально удовлетворять условию Липшица. Можно считать (за счет уменьшения ρ,δ), что пучок $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, липшецев. Для координат в касательном пространстве $T_x,\ x \in V(\delta,\rho)$, индуцированных разложеним II.2.13, сохраним старые обозначения. Поскольку $E_\varepsilon^{ss}(x)$ — инвариантный пучок, то отображение $Dg_\varepsilon^t(x)$ в этих координатах задается матрицей

$$\mathcal{R}_\varepsilon(t,x) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\varepsilon(t,x) & \mathcal{B}_\varepsilon(t,x) \\ 0 & \mathcal{D}_\varepsilon(t,x) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(II.2.14)}$$

Поскольку $E_0^{ss}(x) = E_1^{ss}(x),\ \widetilde{E}_1^v(x) = E_1^v(x),\ x \in \Gamma$, то, воспользовавшись оценками II.1.2, II.1.3 из теоремы II.1.1 для $D\,g_\varepsilon^t$, Получим следующие неравенства для компонент матрицы $\mathcal{R}_\varepsilon(t,x)$:

$$
\begin{aligned}
&||\mathcal{A}_0(t,x)|| < \overline{C}\exp(\bar\lambda^i t), \quad ||\mathcal{D}_0^{-1}(t,x)|| < \overline{C}\exp(-\bar\Lambda^i t),\\
&t \geq 0, \quad x, g_0^\tau(x) \in W_i \cap \Gamma, \quad \tau \in [0,t], \quad i \in 1:m;\\
&\mathcal{B}_0(t,x) = 0, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{II.2.15}
$$

Модифицируем окрестность $V(\delta,\rho)$ цикла Γ, сохранив старое обозначение. Окрестности $V_i(\delta,\rho),\ i \in 1:m$, число τ и дуги $\bar\gamma_i$ траекторий $\gamma_i,\ i \in 1:m$, оставим без изменения. Траекторную окрестность $Q_i(\rho)$ дуги $\bar\gamma_i$ построим следующим образом. Выберем на поверхности Π^{i+1} (входа траекторий системы 2, в которой $\varepsilon < \varepsilon_0$, в окрестность $V_{i+1}(\delta)$) круг $B_{i+1}(\rho)$ с центром в точке y_{i+1} радиуса ρ, где y_{i+1} — точка входа траектории γ_i в $V_{i+1}(\delta),\ i \in 1:m$. Пусть $Q_i(\rho)$ является объединением дуг траекторий системы 2, начинающихся на поверхности Π_i и кончающихся в круге $B_{i+1}(\rho)$. Числа ρ_1, ε_1 выберем по δ так, что при $\rho < \rho_1,\ \varepsilon < \varepsilon_1$ множество $V(\delta,\rho) = \{\bigcup V_i(\delta) \cup Q_i(\rho),\ i \in 1:m\}$ является окрестностью цикла Γ. Как и ранее все построения будем проводить в окрестности $\overline{V}(\Gamma) = V(\bar\delta,\bar\rho)$, построенной описанным выше способом для невозмущенной системы 1, то есть при $\varepsilon = 0$. При этом числа $\bar\delta,\bar\rho$ будем считать столь малыми, что в окрестности $\overline{V}(\Gamma)$ справедливо разложение II.2.13 и действуют оценки II.2.15.

Для натурального числа l определим число $r_i(x)$ как число точек из набора $g_\varepsilon^{k\tau}(x),\ k \in 0:l$, лежащих в $\overline{V}_i,\ i \in 1:m$. Поскольку при $x \in \Gamma$ и $\varepsilon = 0$ выполнено $\mathcal{A}_0(t,x) = \mathcal{A}_0^{-1}(-t,x)$ и $\mathcal{D}_0^{-1}(t,x) = \mathcal{D}_0(-t,x)$, то, повторяя доказательство леммы II.2.2, получим:

Лемма II.2.14. Существует число $K > 0$ такое, что для любого $l \in N,\ l \geq 2$, найдутся $\delta_0 < \bar\delta,\ \rho_0 < \bar\rho,\ \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для произвольной точки $x \in V(\delta,\rho)$ найдется номер $i \in 1:m$ такой, что выполняются неравенства

$$||\mathcal{A}_\varepsilon(l\tau,x)|| \leq K\exp[\tau(\bar\lambda^i r_i(x) + \bar\lambda^{i+1} r_{i+1}(x))],$$

$$||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau,x)|| \leq K\exp[\tau(-\bar\Lambda^i r_i(x) + \bar\Lambda^{i+1} r_{i+1}(x))].$$

Используя неравенство $-\bar\Lambda^i + \bar\lambda^i < 0$ и то, что $\mathcal{B}_0(t,x) = 0$ при $x \in \Gamma$, докажем аналог леммы II.2.4.

Лемма II.2.15. Существует число $l \in N,\ l \geq 2$, и числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для точки $x \in V(\delta,\rho)$ справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
&||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau,x)||\,||A_\varepsilon(l\tau,x)|| \leq 1/6,\\
&||\mathcal{B}_\varepsilon(l\tau,x)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau,x)|| \leq 1/6.
\end{aligned} \tag{II.2.16}
$$

Доказательство. Так как $r_i(x) + r_{i+1}(x) \geq l - 1$, то первое неравенство следует из оценок леммы II.2.13 и того, что $\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i < 0$. Действительно, пусть $l \geq 2(s+1)$, а число s таково, что $K^2\exp[s\tau(\bar\lambda^i - \bar\Lambda^i)] < 1/6$. Тогда имеем

$$||\mathcal{A}_\varepsilon(l\tau,x)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau,x)|| \leq$$

$$\leq K^2 \exp[\tau(\bar{\lambda}^i - \bar{\Lambda}^i) r_i(x) + \tau(\bar{\lambda}^{i+1} - \bar{\Lambda}^{i+1}) r_{i+1}(x)] < 1/6,$$

поскольку одно из чисел $r_i(x), r_{i+1}(x)$ больше s.

Зафиксируем число $l > 2(s+1)$ и будем считать числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ столь малыми, что $||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, x)||\,||\mathcal{B}_\varepsilon(l\tau, x)|| < 1/6$ при $\varepsilon < \varepsilon_0,\ \delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0$ и $x \in V(\delta, \rho)$. Это возможно, так как матрицы $\mathcal{B}_\varepsilon(l\tau, x),\ \ \mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, x)$ непрерывны и $\mathcal{B}_0(l\tau, x) = 0$, если $x \in \Gamma$. Лемма II.2.15 доказана. ■

Рассмотрим пучок $\mathfrak{L}$ над $V(\delta, \rho),\ \delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0$. Его слой $\mathfrak{L}(x)$ состоит из плоскостей, трансверсальных прямой $E_\varepsilon^{ss}(x)$. Такие плоскости будем отождествлять с графиком линейного отображения $\mathcal{P}(x) : \widetilde{E}_1^v(x) \to E_\varepsilon^{ss}(x)$. Пусть $p(x)$ — двумерный вектор, задающий отображение $\mathcal{P} : \mathcal{P}(x)v = p(x)v$. Как и раньше определим норму в пространстве непрерывных секущих этого пучка:

$$|\mathcal{P}| = \max ||\mathcal{P}(x)||, \quad x \in V(\delta, \rho).$$

В результате получим банахово пространство. Определим функции $\alpha_i(y)$ на поверхности Π^i так же как это было сделано для поверхности входа Π_i: $\alpha_i \in \mathbb{C}(\Pi^i), \quad |\alpha_i(y)| \leq 1; \quad \alpha_i(y) = 1, y \in B_i(\rho); \quad \alpha_i(y) = 0$, если y лежит вне $B_i(2\rho)$, а на кольце $B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho)$ функция α_i — линейная функция от $||y||, \quad i \in 1 : m$. Точку $z(y) \in S_i(\rho)$ определим как точку пересечения радиуса круга $B_i(2\rho)$, на котором лежит точка y, с окружностью $S_i(\rho)$.

Рассмотрим подмножество $\mathfrak{L}_0$ банахова пространства непрерывных секущих пучка $\mathfrak{L}$, состоящее из всех секущих $\mathcal{P}$, обладающих свойством:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(y) = 0, \quad y \in \Pi^i \setminus B_i(2\rho), \\ &p(y) = \alpha_i(y) p(z), \quad y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho), \quad i \in 1 : m. \end{aligned} \qquad \textbf{(B)}$$

Из определения следует, что $\mathfrak{L}_0$ с нормой $|\cdot|$ является банаховым пространством.

Определим отображение $\mathcal{H}_\varepsilon : \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{L}_0$.

Для точек $x \in V(\delta, \rho)$ таких, что $g_\varepsilon^{l\tau}(x) = y \in V(\delta, \rho)$, положим

$$\mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{P}(x) = \mathcal{B}_\varepsilon(l\tau, y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, y) + \mathcal{A}_\varepsilon(l\tau, y)\mathcal{P}(y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, y). \qquad \textbf{(II.2.17)}$$

Вектор, задающий секущую $\mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{P}$, обозначим $\mathcal{H}_\varepsilon p$. Тогда значение вектора $\mathcal{H}_\varepsilon p(x)$ определяется по значению вектора $p(y)$ по той же формуле.

Доопределим секущую $\mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{P}$ на множестве $U(\delta, \rho) = V(\delta, \rho) \setminus W(\delta, \rho)$, где $W(\delta, \rho) = g_\varepsilon^{l\tau} V(\delta, \rho) \cap V(\delta, \rho)$. Для $x \in U(\delta, \rho)$ найдутся единственные числа $i \in 1 : m,\ t \in [0, l\tau]$ и точка $y \in \Pi^i \setminus B_i(\rho)$ такие, что $x = g_\varepsilon^t(y)$. По y построим точку $z(y) \in S_i(\rho)$ и точку $v = g_\varepsilon^t(z(y))$. Последняя лежит в том же множестве, где действует формула II.2.17, то есть определено значение $\mathcal{H}_\varepsilon p(v)$. Положим

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t p(z) = \mathcal{B}_\varepsilon(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t, v) + \mathcal{A}_\varepsilon(-t, v)\mathcal{H}_\varepsilon p(v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t, v). \qquad \textbf{(II.2.18)}$$

Наконец, определим

$$\mathcal{H}_\varepsilon p(x) = \mathcal{B}_\varepsilon(t, y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y) + \alpha_i(y)\mathcal{A}_\varepsilon(t, y)\mathcal{H}_\varepsilon^t p(z)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y). \qquad \textbf{(II.2.19)}$$

Формулы II.2.17 – II.2.19 имеют тот же геометрический смысл, что и формулы II.2.8, II.2.10, II.2.12 для отображения H_ε. Так же как и для отображения H_ε проверяется, что секущая $\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}$ удовлетворяет условию **B** и формулы II.2.17, II.2.19 дают один и тот же результат для тех точек x, для которых они обе применимы. Из определения $\mathcal{H}_\varepsilon$ следует, что секущая $\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}$ непрерывна, если непрерывна секущая $\mathcal{P}$.

Таким образом, отображение $\mathcal{H}_\varepsilon$ корректно определено и переводит пространство $\mathfrak{L}_0$ в себя.

Докажем, что оно переводит некоторый шар этого пространства в себя и сжимает в нем.

Лемма II.2.16. Существуют числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для $x \in W(\delta, \rho)$ выполнено

$$||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}(x)|| \le 1/4, \quad ||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_2(x)|| \le |\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2|/6,$$

если $|\mathcal{P}|, |\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2| \le 1/2$.

Доказательство. Пусть $x = g_\varepsilon^{-l\tau}y$. Тогда, в силу II.2.16, II.2.17, имеем

$$||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}(x)|| \le ||\mathcal{B}_\varepsilon(l\tau, y)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)||+$$

$$+||\mathcal{A}_\varepsilon(l\tau, y)||\,||\mathcal{P}(y)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)|| \le 1/6 + ||\mathcal{P}(y)|| \cdot 1/6 \le 1/4,$$

$$||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_2(x)|| \le$$

$$\le ||\mathcal{A}_\varepsilon(l\tau, y)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(l\tau, y)||\,||\mathcal{P}_1(y) - \mathcal{P}_2(y)|| \le |\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2|/6.$$

Лемма II.2.16 доказана. ■

Перейдем к оценке $||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}(x)||$ и $||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_2(x)||$ для $x \in U(\delta, \rho)$.

Лемма II.2.17. Существуют числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ для $x \in U(\delta, \rho)$ выполнено

$$||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}(x)|| \le 1/2, \quad ||\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}_2(x)|| \le |\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2|/2,$$

если $|\mathcal{P}|, |\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2| \le 1/2$.

Доказательство. Объединяя формулы II.2.18, II.2.19, имеем

$$\mathcal{H}_\varepsilon p(x) =$$

$$= \mathcal{B}_\varepsilon(t, y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y) + \alpha_i(y)\mathcal{A}_\varepsilon(t, y)B_\varepsilon(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y)+$$

$$+\alpha_i(y)\mathcal{A}_\varepsilon(t, y)\mathcal{A}_\varepsilon(-t, v)\mathcal{H}_\varepsilon p(v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y).$$

Пусть $y \in \Pi^i \setminus B_i(2\rho)$. В этом случае $\alpha_i(y) = 0$ и $\mathcal{H}_\varepsilon p(x) = \mathcal{B}_\varepsilon(t, y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y)$. Поэтому $\mathcal{H}_\varepsilon p_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon p_2(x) = 0$ и остается проверить первое неравенство. Векторы $\mathcal{B}_\varepsilon(t, y)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon(t, y)\mathcal{B}_\varepsilon(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t, v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t, y)$ непрерывны на множестве $t \in [-l\tau, l\tau],\ \ y, v \in$

$\overline{V}(\Gamma)$. Кроме того, при $x \in \Gamma \quad \mathcal{B}_0(t,x) = 0$, поэтому существуют столь малые числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0, \varepsilon < \varepsilon_0$ нормы этих векторов не превосходят $1/12$. Таким образом, $||\mathcal{H}_\varepsilon p(x)|| \le 1/12 < 1/2$.

В случае $y \in B_i(2\rho) \setminus B_i(\rho),\ i \in 1:m$, имеем

$$||\mathcal{H}_\varepsilon p_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon p_2(x)|| \le$$

$$\le ||\mathcal{A}_\varepsilon(t,y)\mathcal{A}_\varepsilon(-t,v)||\,||\mathcal{H}_\varepsilon p_1(v) - \mathcal{H}_\varepsilon p_2(v)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y)||.$$

При $\rho \to 0,\ \varepsilon \to 0$ матрица $\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y) \to E$, число $\mathcal{A}_\varepsilon(t,y)\mathcal{A}_\varepsilon(-t,v) \to 1$, поскольку точка y стремится к точке v. Это стремление равномерно по $t \in [-l\tau, l\tau], \quad y, v \in g_\varepsilon^{l\tau} Q_i(\rho) \cap V_i(\delta),\ \varepsilon < \varepsilon_1, \delta < \bar{\delta},\ i \in 1:m$. Поэтому существуют числа ρ_0, ε_0 такие, что при $\delta < \bar{\delta},\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$

$$||\mathcal{A}_\varepsilon(t,y)\mathcal{A}_\varepsilon(-t,v)|| < 7/6, \quad ||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y)|| < 7/6,$$

$$t \in [-l\tau, l\tau], \quad y, v \in g_\varepsilon^{l\tau} Q_i(\rho) \cap V_i(\delta), \quad i \in 1:m.$$

При таких $\delta, \rho, \varepsilon$, учитывая оценку из предыдущей леммы, получим

$$||\mathcal{H}_\varepsilon p_1(x) - \mathcal{H}_\varepsilon p_2(x)|| \le \frac{49}{36}|p_1 - p_2|/6 < |p_1 - p_2|/2.$$

Осталось оценить $||\mathcal{H}_\varepsilon p(x)||$. В рассматриваемом случае

$$||\mathcal{H}_\varepsilon p(x)|| \le ||\mathcal{B}_\varepsilon(t,y)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y)|| +$$

$$+|\alpha_i(y)|\,||\mathcal{A}_\varepsilon(t,y)\mathcal{B}_\varepsilon(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y)|| +$$

$$+|\alpha_i(y)|||\mathcal{A}_\varepsilon(t,y)\mathcal{A}_\varepsilon(-t,v)||\,||\mathcal{H}_\varepsilon p(v)||\,||\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(-t,v)\mathcal{D}_\varepsilon^{-1}(t,y)||.$$

Используя полученные ранее оценки, имеем

$$||\mathcal{H}_\varepsilon p(x)|| \le \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{49}{36}||\mathcal{H}_\varepsilon p(v)|| \le \frac{1}{6} + \frac{49}{36}||p(v)||/4 \le 1/2.$$

Лемма II.2.17 доказана. ■

Из лемм II.2.16, II.2.17 следует, что существуют числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ такие, что при $\delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ отображение $\mathcal{H}_\varepsilon$ переводит шар радиуса $1/2$ пространства $\mathfrak{L}_0$ в себя и сжимает в нем. Поэтому отображение $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет в этом шаре единственную неподвижную точку $\mathcal{P}^*$.

Зафиксируем числа $\delta, \rho, \varepsilon$ так, чтобы для них были верны заключения лемм II.2.16, II.2.17. Рассмотрим пучок плоскостей над окрестностью $V(\delta,\rho):\ E_\varepsilon^v(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, такой, что плоскость $E_\varepsilon^v(x)$ является графиком линейного отображения $\mathcal{P}^*(x) : \widetilde{E}_1^v(x) \to E_\varepsilon^{ss}(x)$. Из определения отображения $\mathcal{H}_\varepsilon$ следует, что пучок E_ε^v инвариантен относительно отображения $Dg_\varepsilon^{l\tau}$. Аналогично доказательству инвариантности пучка прямых $e^*(x),\ x \in V(\delta,\rho)$ относительно отображения Dg_ε^t, приведенному в лемме II.2.7, получим, что пучок плоскостей $E^v_\varepsilon(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$, инвариантен относительно отображения Dg^t_ε при всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма II.2.18. Существуют числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0, C, \Lambda^i, i \in 1:m$, такие, что при $\delta < \delta_0$, $\rho < \rho_o$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ для пучка E^v_ε справедлива оценка 5 введения:

$$||Dg^t_\varepsilon(x)v|| \le C\exp(\Lambda^i t)||v||, \quad t \le 0, \quad v \in E^v_\varepsilon(x), \quad x, g^t_\varepsilon(x) \in W_i,$$

при $i \in 1:m$. При этом для чисел Λ^i, $i \in 2:m$, выполняются ограничения II.1.0.

Доказательство. В основном оно повторяет доказательство леммы II.2.8, поэтому опустим некоторые детали. Рассмотрим пространство $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$, которое получается из пространства $\mathfrak{L}_0$ сужением секущих $\mathcal{P}$ на цикл Γ, с нормой $|\mathcal{P}| = \max||\mathcal{P}(x)||$, $x \in \Gamma$. Это полное линейное пространство. Отображение $\mathcal{H}_0|_{\widetilde{\mathfrak{L}}_0}$ переводит $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$ в $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$, поскольку Γ — инвариантное множество при $\varepsilon = 0$. Все оценки, полученные для $\mathcal{H}_\varepsilon$, остаются в силе для отображения $\mathcal{H}_0|_{\widetilde{\mathfrak{L}}_0}$. Поэтому оно имеет в шаре радиуса 1/2 единственную неподвижную точку. Из единственности следует, что она совпадает с сужением секущей $\mathcal{P}^*$ на Γ. Отображение $\mathcal{H}_0\mathcal{P}$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_0\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}_\varepsilon(l\tau, y)\mathcal{P}(y)\mathcal{D}^{-1}_\varepsilon(l\tau, y),$$

где $y = g^{-l\tau}_\varepsilon(x)$. Очевидно, что нулевая секущая — его неподвижная точка. Следовательно, $\mathcal{P}^*|_\Gamma = 0$ при $\varepsilon = 0$.

Таким образом, пучок $E^v_0(x)$, $x \in \Gamma$, совпадает с пучком $E^v_1(x)$, $x \in \Gamma$, для которого в предыдущем параграфе была получена оценка II.1.3:

$$||Dg^t_0(x)v|| \le \bar{C}\exp(\bar{\Lambda}^i t)||v||, \quad t \le 0, \quad v \in E^v_1(x), \quad x, g^t_0(x) \in W_i,$$

для $i \in 1:m$. На числа $\bar{\Lambda}^i$ были наложены ограничения II.1.0: $\lambda_i(\varepsilon) > \bar{\Lambda}^i > -\mu_i(\varepsilon)$, $i \in 2:m$, и $\lambda^i + M^i - \bar{\Lambda}^i < 0$, $i \in 2:m$. Ясно, что можно выбрать числа $\Lambda^i > \bar{\Lambda}^i$, $i \in 2:m$, для которых будут выполняться те же ограничения II.1.0, что и для чисел $\bar{\Lambda}^i$. Взяв число $C = \overline{C} + 1$, и рассуждая как при доказательстве леммы II.2.8, нетрудно найти требуемые числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$. Лемма II.2.18 доказана. ■

Из способа построения пучка $E^v_\varepsilon(x)$, $x \in V(\delta,\rho)$, следует, что плоскость $E^v_\varepsilon(x)$ трансверсальна прямой $E^{ss}_\varepsilon(x)$ для $x \in V(\delta,\rho)$. Поэтому имеет место разложение 3:

$$\mathbb{R}^3 = E^{ss}_\varepsilon(x) \oplus E^v_\varepsilon(x), \quad x \in V(\delta,\rho),$$

что завершает доказательство теоремы II.2.1.

В заключение параграфа отметим, что при сделанных предположениях пучок E^v_ε, $x \in V(\delta,\rho)$, может не удовлетворять локальному условию Липшица.

§3 Построение сильно устойчивой ламинации в окрестности гетероклинического цикла

Построенное в предыдущем параграфе расслоение $E^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$, локально липшецево и одномерно, поэтому его можно проинтегрировать, что и будет сделано здесь. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема II.3.1. Пусть равноразмерностный гетероклинический цикл Γ типа Лоренца системы 1 удовлетворяет условиям I, II, III введения. Тогда существуют окрестность V цикла Γ и число $h > 0$ такие, что при $\varepsilon < h$ окрестность V представляется в виде объединения $\mathbb{C}^1$-гладких кривых $W^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V$. Это семейство инвариантно относительно отображения $g^{\tau}_{\varepsilon},\ \tau \in \mathbb{R}$, то есть $g^{\tau}_{\varepsilon} W^{ss}_{\varepsilon}(x) \cap V \subset W^{ss}_{\varepsilon}(g^{\tau}_{\varepsilon}(x)),\ x \in V,\ \tau \in \mathbb{R}$. Пучок касательных к кривым $W^{ss}_{\varepsilon}(x)$ совпадает с пучком $E^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V$. Любая точка $x \in V$ лежит на кривой $W^{ss}_{\varepsilon}(x)$. Если точка $y \in W^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V$, то $W^{ss}_{\varepsilon}(x) = W^{ss}_{\varepsilon}(y)$. Кроме того, существуют числа $\lambda > 0,\ K > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что для любых двух точек $z, y \in W^{ss}_{\varepsilon}(x) \cap B_{\sigma}(x),\ x \in V$, выполняется неравенство

$$d(g^t_{\varepsilon}(z), g^t_{\varepsilon}(y)) \leq K \exp(-\lambda t) d(z,y),$$

если точки $g^{\tau}_{\varepsilon}(y), g^{\tau}_{\varepsilon}(z) \in V$ при $\tau \in [0,t]$.

Таким образом, семейство кривых $W^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V$, образует $\mathbb{C}^1$- ламинацию на V [3, стр 32], инвариантную относительно отображения $g^t_{\varepsilon},\ \varepsilon < h,\ t \in \mathbb{R}$. При этом отбражение g^t_{ε} локально сжимает вдоль слоев этой ламинации. $\triangle$

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм, которым предпошлем некоторые дополнительные построения.

Во-первых, в качестве окрестности V будем рассматривать окрестность $V(\delta,\rho),\ \delta < \delta_0,\ \rho < \rho_0$, а число h будем считать меньшим, чем ε_0, при этом числа $\delta_0, \rho_0, \varepsilon_0$ выбраны так, что верны заключения теоремы II.2.1.

Лемма II.3.1. Существует семейство $W^{ss}_{\varepsilon}(x),\ x \in V$, гладких кривых таких, что касательная прямая $T_y W^{ss}_{\varepsilon}(x)$ к кривой $W^{ss}_{\varepsilon}(x)$ в точке y совпадает с прямой $E^{ss}_{\varepsilon}(y)$.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $(1, p^*(x))$. По построению секущей P^* для $x \in V \quad < (1, p^*(x)) >= E^{ss}_{\varepsilon}(x)$. Покроем окрестность V открытыми множествами $O_j,\ j \in 1:n$, над которыми пучок $E^{ss}_{\varepsilon}(x)$ тривиален. В каждом из множеств O_j векторное поле $v_j(x) = (1, p^*(x))$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v_j(x), \quad x \in O_j, \quad j \in 1:n. \qquad \textbf{(II.3.1)}$$

Так как вектор $v_j(x)$ удовлетворяет условию Липшица для системы II.3.1, любая задача Коши имеет единственное максимально продолженное решение. Обозначим через $\varphi_j(t, x_0)$ максимально продолженное решение, параметризующее траекторию точки x_0,
$\varphi_j(0, x_0) = x_0$; через $I(x_0)$ его максимальный промежуток существования и через $W^j_{\varepsilon}(x_0)$ — траекторию точки x_0.

По построению для $y \in W_\varepsilon^j(x) \subset O_j,\ j \in 1:n$, имеем $T_y W_\varepsilon^j(x) = E_\varepsilon^{ss}(y)$. Лемма II.3.1 доказана. ■

Лемма II.3.2. Семейство кривых $W_\varepsilon^j(x),\ x \in O_j,\ j \in 1:n$, инвариантно относительно отображения $g_\varepsilon^t,\ t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Множество O_j не является инвариантным, поэтому надо доказать, что $g_\varepsilon^t W_\varepsilon^j(x_0) \cap O_j \subset W_\varepsilon^j(g_\varepsilon^t(x_0))$ для $x_0 \in O_j$. Из инвариантности пучка $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$, относительно отображения Dg_ε^t следует, что кривая $g_\varepsilon^t W_\varepsilon^j(x_0) \cap O_j$ имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с прямой из пучка $E_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$. Этим же свойством обладает кривая $W_\varepsilon^j(g_\varepsilon^j(x_0))$, которая параметризована решением $\varphi_j(\tau, g_\varepsilon^t(x_0))$.

Пусть $\psi : I(x_0) \to O_j$ какая-либо гладкая параметризация кривой $g_\varepsilon^t W_\varepsilon^j(x_0)$, например, $g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau, x_0)),\ \tau \in I(x_0)$. Тогда касательный вектор к кривой $g_\varepsilon^t W_\varepsilon^j(x_0)$ в точке τ имеет вид: $Dg_\varepsilon^t v_j(\varphi_j(\tau, x_0)) = (a(\tau), b(\tau))$. Поскольку $< (a(\tau), b(\tau)) >= E_\varepsilon^{ss}(\varphi_j(\tau, x_0))$, то первая координата $a(\tau) \neq 0$. Репараметризуем кривую $g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau, x_0))$ следующим образом. Рассмотрим функцию $\tau(s)$ такую, что $\tau(0) = 0,\ \tau'(s) = a^{-1}(\tau(s))$. Тогда касательный вектор к кривой $g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0))$ имеет вид $(1, b(\tau(s))a^{-1}(\tau(s)))$. Так как он порождает то же самое пространство, что и вектор $(1, p^*(g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0)))$, получим, что

$$g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0))'_s = v_j(g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0))).$$

Таким образом, вектор-функция $g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0))$ является решением системы II.3.1 и удовлетворяет тем же начальным данным, что и решение $\varphi_j(s, g_\varepsilon^t(x_0))$. Следовательно,

$$g_\varepsilon^t(\varphi_j(\tau(s), x_0)) = \varphi_j(s, g_\varepsilon^t(x_0)),$$

что и требовалось получить. Лемма II.3.2 доказана. ■

Определим теперь кривую $W_\varepsilon^{ss}(x_0)$ как максимальную по включению гладкую кривую, которая в некоторой окрестности каждой своей точки y совпадает с $W_\varepsilon^j(y)$ для некоторого $j \in 1:n$ и которая содержит точку x_0.

Лемма II.3.3. Семейство гладких кривых $W_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$, инвариантно относительно отображений $g_\varepsilon^t,\ t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Ясно, что существует число $\sigma > 0$ такое, что для любой точки $x \in V$ найдется номер $j \in 1:n$, что шар $B_\sigma(x)$ лежит в O_j. Из этого следует, что найдется $T > 0$ такое, что для любого $x \in V$ имеется номер $j \in 1:n$, что точка $g_\varepsilon^t(x) \in O_j,\ t \in [0, T]$. Поэтому из леммы II.3.2 получим, что семейство кривых $W_\varepsilon^{ss}(x_0)$ инвариантно относительно отображений $g_\varepsilon^t,\ t \in [0, T]$. Из этого, в свою очередь, следует инвариантность семейства $W_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$, для всех t. Лемма II.3.3 доказана. ■

У систем II.3.1 отсутствуют особые точки. Поэтому семейство $W_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$, локально выпрямляемо, как семейство, локально совпадающее с множеством траекторий одной из систем II.3.1. При этом выпрямляющий гомеоморфизм липшецев.

По построению семейства $W^{ss}_\varepsilon(x),\ x\in V$, пучок касательных прямых к нему совпадает с пучком $E^{ss}_\varepsilon(x),\ x\in V$.

В силу единственности решения задачи Коши для системы II.3.1 и определения кривой $W^{ss}_\varepsilon(x)$, для точки $y\in W^{ss}_\varepsilon(x)$ кривая $W^{ss}_\varepsilon(y)$ совпадает с кривой $W^{ss}_\varepsilon(x)$.

Для завершения доказательства теоремы II.3.1 осталось проверить свойство сжатия вдоль кривых $W^{ss}_\varepsilon(x),\ x\in V$.

Лемма II.3.4. Существуют числа ρ, h и $\lambda>0$ такие, что при $\varepsilon<h$ для точки $x\in V(\delta,\rho)$ и числа $t>0$ таких, что точка $g^s_\varepsilon(x)\in V(\delta,\rho)$ при $s\in[0,t]$, выполняется неравенство:

$$||Dg^t_\varepsilon(x)\xi||\le \exp(-\lambda t)||\xi||,\quad \xi\in E^{ss}_\varepsilon(x).$$

Доказательство. В §1 окрестность $V(\delta,\rho)$ цикла Γ и число τ выбирались так, что для точки $x\in V(\delta,\rho)$ только одна из трех точек $x, g^\tau_\varepsilon(x), g^{2\tau}_\varepsilon(x)$ может лежать вне множества $\{\cup W_i,\ i\in 1:m\}$. Выберем число R так, чтобы для $x\in V(\delta,\rho)$ $||Dg^{2\tau}_\varepsilon(x)||<R$ при $\varepsilon\le\varepsilon_0$. Выберем числа $\lambda>0$ и $\delta>0$ так, чтобы $0>-\lambda-\delta>\lambda^i,\ i\in 1:m$. Пусть число T таково, что $RC\exp(-\delta T)\exp(2\lambda\tau)<1$. При $\varepsilon=0$ образ точки $x\in\Gamma$ при отображении $g^t_\varepsilon,\ t\ge 0$, попадает в одно из множеств $W_i,\ i\in 1:m$, и остается там. Из непрерывности отображения g^t_ε следует, что по числу T можно найти столь малые числа ρ и h, что если точка $x\in Q_i(\rho),\ i\in 1:m$, и лежит вне множества $\{\cup W_i,\ i\in 1:m\}$, то при $\varepsilon<h$ и $s\in[0,T]$ точка $g^{\tau+s}_\varepsilon(x)$ лежит в одном из множеств W_i.

Рассмотрим теперь произвольную точку $x\in V(\delta,\rho)$. Из построения окрестности $V(\delta,\rho)$ следует, что траектория точки x может покинуть окрестность $V(\delta,\rho)$ при возрастании t только через поверхность выхода Π_i одного из множеств $V_i(\delta)\subset W_i,\ i\in 1:m$. Пусть число t таково, что точка $g^s_\varepsilon(x)\in V(\delta,\rho),\ s\in[0,t]$. Тогда найдется дробление $0=\beta_0\le\alpha_1<\beta_1<\dots<\beta_l\le\alpha_{l+1}=t$ сегмента $[0,t]$ такое, что при $s\in(\beta_i,\alpha_{i+1})$ точка $g^s_\varepsilon(x)\in W_{k_i},\ i\in 0:l$; при $s\in[\alpha_i,\beta_i]$ точка $g^s_\varepsilon(x)\in Q_{k_i}(\rho),\ i\in 1:l$.

Из способа построения окрестности $V(\delta,\rho)$ следует, что $\alpha_{i+1}-\beta_i\ge T,\ \beta_i-\alpha_i<2\tau,\ i\in 1:l$. Используя оценку 4, имеем

$$||Dg^t_\varepsilon(x)\xi||\le\prod_{i\in 1:l}||Dg^{(\beta_i-\alpha_i)}_\varepsilon(g^{\alpha_i}_\varepsilon(x))||\cdot\prod_{i\in 0:l}||Dg^{(\alpha_{i+1}-\beta_i)}_\varepsilon(g^{\beta_i}_\varepsilon(x))||\le$$

$$\le R^l e^{2\lambda\tau l}\exp[-\lambda\sum_{i\in 1:l}(\beta_i-\alpha_i)]\cdot(Ce^{-\delta T})^l\exp[\sum_{i\in 0:l}(\alpha_{k_i}+\delta)(\alpha_{i+1}-\beta_i)]\,||\xi||$$

$$\le\exp(-\lambda t)||\xi||.$$

Лемма II.3.4 доказана. ■

Обозначим $M=\max_{x\in\overline{V(\delta,\rho)}}||v(x)||,\quad \mathbf{m}=\min_{x\in\overline{V(\delta,\rho)}}||v(x)||$. Из вида вектора $v(x)$ следует, что $\mathbf{m}>0$. Пусть число σ таково, что $||v(y)-v(z)||<\mathbf{m}/4$, если $d(y,z)<\sigma$.

Лемма II.3.5. Для точки $x\in V(\delta,\rho)$ и точек $y,z\in W^{ss}_\varepsilon(x)\cap B_\sigma(x)$ таких, что $g^s_\varepsilon(y), g^s_\varepsilon(z)\in V(\delta,\rho)$ при $s\in[0,t]$, выполняется неравенство

$$d(g^t_\varepsilon(y),g^t_\varepsilon(z))\le\frac{5M}{3\mathbf{m}}d(y,z)\exp(-\lambda t).$$

Доказательство. Предположим, что число σ столь мало, что замыкание любого шара радиуса σ лежит целиком в одном из множеств покрытия O_j, $j \in 1:n$, и опустим в доказательстве индекс j.

Пусть числа $\tau_1 < \tau_2$ таковы, что $y = \varphi(\tau_1, x), \quad z = \varphi(\tau_2, x)$. Тогда

$$z - y = \int_{\tau_1}^{\tau_2} v(\varphi(s,x))\,ds,$$

следовательно

$$d(y,z) = ||\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(\varphi(s,x))\,ds|| \geq -||\int_{\tau_1}^{\tau_2} (v(\varphi(s,x)) - v(x))\,ds|| +$$

$$+||v(x)||\,|\tau_1 - \tau_2| \geq \mathbf{m}(1 - 1/4)|\tau_1 - \tau_2| = 3\mathbf{m}|\tau_1 - \tau_2|/4.$$

С другой стороны

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} ||v(\varphi(s,x))||\,ds \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} (||v(\varphi(s,x)) - v(x)|| + ||v(x)||)\,ds \leq$$

$$\leq \frac{5}{4} M |\tau_1 - \tau_2|.$$

Таким образом, получим

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} ||v(\varphi(s,x))||\,ds \leq \frac{5M}{3\mathbf{m}} d(y,z),$$

$$d(g_\varepsilon^t(y), g_\varepsilon^t(z)) = ||\int_{\tau_1}^{\tau_2} Dg_\varepsilon^t(\varphi(s,x)) v(\varphi(s,x))\,ds|| \leq$$

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} ||Dg_\varepsilon^t(\varphi(s,x))||\,||v(\varphi(s,x))||\,ds \leq e^{-\lambda t} \int_{\tau_1}^{\tau_2} ||v(\varphi(s,x))||\,ds \leq$$

$$\leq \frac{5M}{3\mathbf{m}} e^{-\lambda t} d(y,z).$$

Лемма II.3.5 а с ней и теорема II.3.1 доказаны. ■

Обозначим через $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ компоненту пересечения $W_\varepsilon^{ss}(x) \cap B_\delta(x)$, содержащую точку x. Пусть как и в доказательстве леммы II.3.3 число σ таково, что для $x \in V$ найдется номер j такой, что шар $B_\sigma(x)$ лежит в O_j.

Известно, [11] что решение покидает любой компакт, когда аргумент приближается к концу максимального промежутка задания. Поэтому, если расстояние от точки x до границы окрестности V больше δ и $\delta < \sigma$, то множество $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ является гладким вложенным диском радиуса δ, то есть $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ есть образ при отображении $\varphi(t,x)$ сегмента $[\alpha, \beta]$, при этом точки $\varphi(\alpha, x)$ и $\varphi(\beta, x)$ лежат на границе шара $B_\delta(x)$.

Таким образом, уменьшив окрестность цикла Γ, можно гарантировать существование при $\varepsilon < \varepsilon_0$ липшецева семейства гладко вложенных дисков $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ радиуса δ таких, что $g_\varepsilon^t W_\varepsilon^{ss}(x,\delta) \subset W_\varepsilon^{ss}(g_\varepsilon^t(x),\delta_1)$, где $\delta_1 < \delta K \exp(-\lambda t)$, если $g_\varepsilon^s(x) \in V,\ s \in [0,t]$. Сохраним далее за этой уменьшенной окрестностью старое обозначение V.

Допустим, что дуга $\widetilde{\gamma}$ некоторой траектории, отличной от точки покоя, системы 2 содержится в V. Пусть интервал $(\alpha,\beta) \ni 0$ таков, что $\widetilde{\gamma} = \{x :\ x = g_\varepsilon^t(x_0),\ t \in (\alpha,\beta)\} \subset V$. Определим множество

$$W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta) = \cup W_\varepsilon^{ss}(x,\delta), \quad x = g_\varepsilon^t(x_0), \quad t \in (\alpha,\beta). \qquad \textbf{(II.3.2)}$$

В силу инвариантности семейства кривых $W_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in V$, множество II.3.2, которое далее будем называть сильно устойчивым многообразием дуги $\widetilde{\gamma}$, содержит множество:

$$\widetilde{W}_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta) = \cup g_\varepsilon^t(W_\varepsilon^{ss}(x_0,\delta)), \quad t \in (\alpha,\beta). \qquad \textbf{(II.3.3)}$$

Поскольку $W_\varepsilon^{ss}(x_0,\delta)$ — гладкая кривая, а g_ε^t — дифференцируемое отображение, множество $\widetilde{W}_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)$ является гладкой поверхностью. Очевидно, что оно является окрестностью любой точки $x \in \widetilde{\gamma}$ в сильно устойчивом многообразии $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)$. Из этого следует, что $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)$ является гладким двумерным многообразием, касательное пространство к которому в точке x_0 натянуто на прямую $E_\varepsilon^{ss}(x_0)$ и вектор $X(x_0)$. Так как пучок прямых $E_\varepsilon^{ss}(x_0),\ x_0 \in V$, липшецев, то касательный пучок к многообразию $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma},\delta)$ липшецев.

Пусть S — гладкая поверхность, трансверсальная к траекториям системы 2, в которой $\varepsilon < h$ и которая лежит в окрестности V. Рассмотрим дугу $\widetilde{\gamma}_\alpha = \{y \in V :\ y = g_\varepsilon^t(x),\ |t| < \alpha\}$ траектории точки $x \in S$. Пусть $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ — компонента связности множества $S \cap W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}_\alpha,\delta)$, содержащая точку x. Поскольку $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}_\alpha,\delta)$ — гладкая поверхность, трансверсальная при $\varepsilon < h$ к гладкой поверхности S, то $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ — гладкая кривая. В общем случае она зависит от выбора α. Однако, для компактной трансверсали S и числа α_0 такого, что $g_\varepsilon^t S \cap S = \emptyset$ при $0 < t \le 2\alpha_0,\ \varepsilon < h$ найдется число $\delta(\alpha_0) > 0$ такое, что для любой точки $x \in S\ \ W_\varepsilon^{ss}(g_\varepsilon^t(x),\delta) \cap S = \emptyset$, если $\alpha_0 < |t| < 2\alpha_0,\ \delta < \delta(\alpha_0)$ и $\varepsilon < h$. Следовательно, кривая $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in S$, определенная по дуге $\widetilde{\gamma}_\alpha$, не зависит от α, если $\delta < \delta(\alpha_0),\ \alpha_0 < \alpha < 2\alpha_0$ и $\varepsilon < h$. Геометрически выбор чисел α_0 и $\delta(\alpha_0)$ означает, что для $y \in W_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in S$ и $\delta < \delta(\alpha_0)$ дуга $\widetilde{\gamma}_\alpha = \{z \in V :\ z = g_\varepsilon^t(y),\ |t| < \alpha\}$ траектории точки y пересечет трансверсаль S только в одной точке, если $\alpha_0 < \alpha < 2\alpha_0$ и $\varepsilon < h$.

Везде далее при рассмотрении кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$, построенных по какой – либо трансверсали S, будем считать, что выбор чисел α и δ подчинен описанным выше ограничениям.

Кривую $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ будем называть сильно устойчивым многообразием точки x размера δ на трансверсали S.

Пусть Δ — гладкая кривая ($\Delta \subset S$), трансверсальная к поверхности $W_\varepsilon^{ss}(\widetilde{\gamma}_\alpha,\delta)$ в точке x. Из локальной выпрямляемости семейства кривых $W_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V$, следует, что множество $\{w_\varepsilon^{ss}(y,\delta),\ y \in \Delta\}$ является окрестностью точки x на поверхности S.

Пусть S^1 и S^2 две трансверсали к траекториям системы 2 такие, что определено отображение $H :\ S^1 \to S^2$ по траекториям системы: $H(x) = g_\varepsilon^{t(x)}(x),\ x \in S^1$.

Лемма II. 3.6. Существуют числа $T > 0,\ \delta_0 > 0$ такие, что если $t(x) > T,\ x \in S^1$, то отображение H сжимает с коэффициентом $1/2$ на сильно устойчивых многообразиях $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\ x \in S$, размера $2\delta < \delta_0$, построенных по трансверсали S^1.

Доказательство. Из определения кривых $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta)$ следует, что если $y \in w^{ss}_\varepsilon(x,\delta)$, то $w^{ss}_\varepsilon(x,2\delta) \supset w^{ss}_\varepsilon(y,\delta)$. Поэтому достаточно оценить $d(H(x),H(y))$ через $d(x,y)$ в случае, когда $y \in w^{ss}_\varepsilon(x,2\delta)$.

Итак, пусть $x \in S^1$ и $y \in w^{ss}_\varepsilon(x,\delta)$. Последнее включение означает, что $y \in W^{ss}_\varepsilon(g_\varepsilon^{\tau(x,y)}(x),\delta)$, где $|\tau(x,y)| < \alpha,\ \alpha_0 < \alpha < 2\alpha_0$. Обозначим аналогичную функцию для сильно устойчивых многообразий, построенных по трансверсали S^2, через $s(x,y)$. Далее для краткости опустим аргументы x,y в функциях τ и s.

Поскольку трансверсали S^1, S^2 и кривые $W^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\ x \in S^1, S^2$, не касаются траекторий, то найдутся числа δ_0, C_1, C_2 такие, что $d(x,y) \geq C_1 d(g_\varepsilon^\tau(x),y)$ и $d(H(x),H(y)) \leq C_2 d(g^s_\varepsilon(H(x)),H(y))$, если $2\delta < \delta_0$. Очевидно, что $t(y) = t(x) + s - \tau$, поэтому

$$d(H(x),H(y)) \leq$$

$$\leq C_2 d(g^s_\varepsilon(H(x)),H(y)) = C_2 d(g_\varepsilon^{t(x)+s}(x), g_\varepsilon^{t(x)+s-\tau}(y)) \leq$$

$$\leq KC_2 e^{-\lambda(t(x)+s-\tau)} d(g^\tau_\varepsilon(x),y) \leq KC_1C_2 e^{-\lambda(t(x)+s-\tau)} d(x,y),$$

где K и λ постоянные гиперболичночти из теоремы II.3.1. По определению кривой $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\quad |s|,|\tau| < 2\alpha_0$. Поэтому, если число T таково, что $KC_1C_2e^{-\lambda(T-4\alpha_0)} < 1/2$, то $d(H(x),H(y)) < 1/2 d(x,y)$. Лемма II.3.6 доказана. ■

§4 Хаотическое инвариантное множество, порожденное гетероклиническим циклом типа Лоренца

Цель этого параграфа доказать существование хаотического инвариантного множества, лежащего в произвольной окрестности гетероклинического цикла типа Лоренца, удовлетворяющего условиям I, II, III.

Итак, пусть система 1 имеет равноразмерностный гетероклинический цикл $\Gamma = \bigcup_{i\in 1:m}(\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i))$, который удовлетворяет условиям I, II, III. Размерности устойчивых многообразий предельных множеств $\alpha(\gamma_i), i \in 1:m$, равны двум и $\alpha(\gamma_1) = \omega(\gamma_m)$. Предельные множества $\alpha(\gamma_{l_j}), j \in 1:k, k \geq 1$, являются седловыми замкнутыми траекториями и $1 = l_1 < l_2 < \cdots < l_k,\ k \geq 1$. Пусть окрестность V цикла Γ такова, что для точек $x \in V$ определены сильно устойчивые многообразия $W^{ss}_{\varepsilon}(x,\delta)$. В этом параграфе расматривается только невозмущенная система 1, поэтому индекс ε далее будем опускать.

Рассмотим трансверсали $S(j)$ к траекториям системы 1, лежащие в окрестностях $W_{l_j}, j \in 1:k$, предельных множеств $\alpha(\gamma_{l_j})$. В координатах $\xi_{l_j},\ \zeta_{l_j},\ \eta_{l_j}$, в которых система 1 в окрестности W_{l_j} имеет вид II.1.4 и которые для краткости будем обозначать ξ_j, ζ_j, η_j, трансверсаль $S(j)$ задается следующим образом

$$S(j) = \{(\xi_j, \zeta_j, \eta_j) \in W_{l_j}:\ \zeta_j = 0, |\xi_j| < \Delta, |\eta_j| < \Delta\}, \quad j \in 1:k. \qquad \mathbf{(II.4.1)}$$

Пусть $\widetilde{V}$ — произвольная окрестность гетероклинического цикла Γ. Ясно, что найдутся числа $\delta', \rho' > 0$ такие, что стандартная окрестность цикла Γ $V(\delta', \rho')$ содержится в окрестности $\widetilde{V} \cap V$. Из способа построения окрестности $V(\delta', \rho')$ следует, что траектория точки $x \in S(1)$, которая не покидает окрестности $V(\delta', \rho')$ и не является асимптотической к предельным множествам цикла Γ, обязана пересекать трансверсаль $S(1)$ как при возрастании t так и при убывании t.

Таким образом, инвариантное множество системы 1, состоящее из траекторий не асимптотических к предельным множествам из цикла Γ и лежащее в окрестности $V(\delta', \rho')$, порождает инвариантное множество отображения F первого возвращения по траекториям системы 1 $F : S(1) \to S(1)$. Очевидно, что каждое инвариантное множество отображения F порождает инвариантное множество системы 1.

Для изучения инвариантных множеств отображения F представим его в виде композиции нескольких отображений. Для этого разобьем гетероклинический цикл Γ на k простых гетероклинических контуров типа Лоренца

$$\Gamma = \cup_{j=1\ldots k}\Gamma_j.$$

В этом разбиении гетероклинический контур Γ_j состоит из траекторий $\gamma_i, i \in l_j : (l_{j+1} - 1)$, входящих в цикл Γ, и их предельных множеств. Первое и последнее предельные множества в контуре Γ_j являются замкнутыми траекториями P_{l_j} и $P_{l_{j+1}}, j \in 1:k-1$. В контуре Γ_k первым предельным множеством является траектория P_{l_k}, а последним траектория $P_1 = \omega(\gamma_m)$. При $k = 1$ гетероклинический цикл Γ является простым и совпадает во введенных обозначениях с Γ_1. Каждый из гетероклинических контуров $\Gamma_j, j \in 1:k$, удовлетворяет условиям I, II, III, поскольку цикл Γ удовлетворял этим условиям. Поэтому для контура $\Gamma_j, j \in 1:k$, справедливы все результаты

§2 главы I. В частности для $j \in 1:k$ существует гладкая локально инвариантная поверхность Q_j, $Q_j \supset \{\Gamma_j \setminus (P_j \cup P_{j+1})\}$, которая пересекает трансверсали $S(j)$ и $S(j+1), j \in 1:k-1$, по гладким кривым $s_j = S(j) \cap Q_j$, $\quad s^{j+1} = S(j+1) \cap Q_j$. Гладкая поверхность Q_k пересекает трансверсали $S(k)$ и $S(1)$ по кривым s_k и s^1. В координатах ξ_j, η_j на трансверсалях $S(j), j \in 1:k$, эти кривые имеют вид

$$s_j = \{(\xi_j, \eta_j) \in S(j) : \ \xi_j = 0, |\eta_i - \eta_j^0| < \varepsilon_j\},$$

где $y_j = (0, 0, \eta_j^0)$ — точка пересечения траектории γ_{l_j} с плоскостью $\zeta_j = 0$, и

$$s^j = \{(\xi_j, \eta_j) \in S(j) : \xi_j = f_j(\eta_j) + \xi_j^0, |\eta_j| < \varepsilon^j\},$$

где $x_j = (\xi_j^0, 0, 0)$ — точка пересечения траектории $\gamma_{l_j - 1}$ с плоскостью $\zeta_j = 0$.

Параметризуем кривую s^j параметром η_j, а кривую s_j параметром $\bar{\eta}_j = \eta_j - \eta_j^0, j \in 1:k$. Из теоремы I.2.3 следует, что определено отображение h_j по траекториям системы 1 одной из кривых s_j^+, s_j^- в кривую s_+^{j+1}, где через s_j^+, s_j^- и s_+^{j+1} обозначены части кривых s_j и s^{j+1}, отвечающие положительным, отрицательным значениям параметра $\bar{\eta}_j$ и положительным значениям параметра η_{j+1} соответственно. Для определенности будем рассматривать первый случай, когда s_j^+ отображается в s_+^{j+1}. В координатах $\bar{\eta}_j$, η_{j+1} отображение $h_j, j \in 1:k$, имеет вид

$$\eta_{j+1} = h_j(\bar{\eta}_j) = C_j \bar{\eta}_j^{E_j} + q_j(\bar{\eta}_j^{E_j}), \tag{II.4.2}$$

где $0 < E_j \leq 1, C_j > 0$, а функция $q_j(t)$ является бесконечно малой при $t \to 0$. Везде в этом параграфе будем считать, что индекс $j+1$ берется по mod k, то есть вместо индекса $k+1$ следует читать индекс 1. Если реализуется второй случай, то везде далее вместо кривой s_j^+ следует рассматривать кривую s_j^-, а в формуле II.4.2 заменить $\bar{\eta}_j$ на $|\bar{\eta}_j|$. Число $E_j = 1$, если $l_j + 1 = l_{j+1}$, то есть в гетероклиническом цикле Γ между замкнутыми траекториями P_{l_j} и $P_{l_{j+1}}$ нет точек покоя. Поскольку в цикле Γ среди предельных множеств есть точки покоя, то хотя бы одно из чисел $E_j, j \in 1:k$, строго меньше единицы. Будем считать, что числа ε_j и $\varepsilon^{j+1}, j \in 1:k$, таковы, что отображение h_j является отображением **на**.

Зафиксируем какое - либо число $\alpha_0 > 0$ такое, что $g^t S(j) \cap S(j) = \emptyset$ при $|t| < 2\alpha_0$, $j \in 1:k$. Выберем по нему число $\delta(\alpha_0)$ так, как это было сделано в конце предыдущего параграфа. Тогда для $\delta < \delta(\alpha_0)$ и $j \in 1:k$ определены сильно устойчивые кривые $w^{ss}(x, \delta)$, $x \in S(j)$, на трансверсалях $S(j)$ размера δ.

Рассмотрим точку $x \in s_j^+$, $j \in 1:k$. Как в §3 через $t_j(x)$ обозначим такое число, что $g^{t_j(x)} x = h_j(x) \in S(j+1)$. Уменьшая, если надо, окрестность гетероклинического цикла Γ, можно считать, что $t_j(x) > T + 2\alpha_0$, $x \in s_j^+$, $j \in 1:k$, где число T определено в лемме II.3.6. В этом случае отображение $g^{t_j(x)+\tau}$, $|\tau| < 2\alpha_0$, сжимает вдоль $W^{ss}(x)$, $x \in s_j^+$, $j \in 1:k$.

Рассмотрим множества

$$D_j = \{\cup_{x \in s_j^+} w^{ss}(x, \delta)\} \subset S(j), \quad D^j = \{\cup_{x \in s_+^j} w^{ss}(x, \delta)\} \subset S(j),$$

$j \in 1 : k$.

Лемма II.4.1.

Существует такое число δ_0, что при $\delta < \delta_0$ на множестве D_j определено отображение H_j по траекториям системы 1 во множество $D^{j+1}, \ j \in 1 : k$. При этом отображение H_j сжимает с коэффициентом $1/2$ вдоль кривых $w^{ss}(x, \delta), \ x \in s_j^+$, размера $\delta < \delta_0$, построенных по трансверсали $S(j), \ j \in 1 : k$.

Доказательство следует из леммы II.3.6 и способа определения множеств $D_j, \ D^j$, если взять число δ столь малым, что $t_j(x) > T, \ x \in D_j$. ■

Рис. 2

Опишем подробнее вид множеств $D_j, \ D^j$. (См. рис.2) Из определения следует, что это области на трансверсали $S(j)$.

Граница области D_j состоит из четырех гладких кривых $w^{ss}(y_j, \delta), \ w^{ss}(z_j, \delta), \ g_j^+, \ g_j^-$, где $w^{ss}(y_j, \delta)$ и $w^{ss}(z_j, \delta)$ являются сильно устойчивыми кривыми размера δ на трансверсали $S(j)$ граничных точек $y_j = (0, 0, \eta_j^0)$ и $z_j = (0, 0, \eta_j^0 + \varepsilon_j)$ кривой s_j^+, а кривые $g_j^+, \ g_j^-$ образованы граничными точками одномерных кривых $w^{ss}(x, \delta), \ x \in s_j^+$. При этом кривая g_j^+ расположена в области $\xi_j > 0$, а кривая g_j^- — в области $\xi_j < 0$.

Граница области D^j состоит из четырех гладких кривых $w^{ss}(x_j, \delta), \ w^{ss}(u_j, \delta), \ r_j^+, \ r_j^-$. Где $w^{ss}(x_j, \delta)$ и $w^{ss}(u_j, \delta)$ являются сильно устойчивыми кривыми размера δ на трансверсали $S(j)$ граничных точек $x_j = (\xi_j^0, 0, 0)$ и $u_j = (\xi_j^0, 0, \varepsilon^j)$ кривой s_+^j, а кривые $r_j^+, \ r_j^-$ образованы граничными точками кривых $w^{ss}(x, \delta), \ x \in s_+^j$. При этом точки кривой r_j^+ имеют координату ξ больше, чем ξ_j^0, а точки кривой r_j^- меньше ξ_j^0. Точки x_j и y_j лежат на траекториях γ_{j-1} и γ_j соответственно.

Кривая $w^{ss}(x_j, \delta)$ содержится в устойчивом многообразии $W_{l_j}^s$, а кривая $w^{ss}(y_j, \delta)$ в устойчивом многообразии $W_{l_j+1}^s$.

Введем в областях D_j, D^j отображения pr_j, pr^j. Отображение $pr_j : D_j \to s_j^+$ является проекцией вдоль сильно устойчивых кривых на поверхности $S(j)$ размера δ. Для точки $y \in w^{ss}(x, \delta)$, $pr_j(y) = x$. Из определения области D_j следует, что проекция pr_j корректно определена. Аналогично определяется проекция $pr^j : D^j \to s_+^j$.

Из определения отображений pr_j, pr^j, $j \in 1 : k$, следует, что для $y \in D_j$

$$H_j \cdot pr_j(y) = pr^{j+1} \cdot H_j(y). \qquad \textbf{(II.4.3)}$$

Кроме того, если точка $y \in w^{ss}(x, \delta) \subset D_j$, то $H_j pr_j(y) = h_j(x)$.

Определим теперь отображение G_j некоторого подмножества области D^j в область D_j по траекториям системы 1, не выходящим из окрестности $V_{l_j}(\delta')$ замкнутой траектории P_{l_j}. Обозначим через T_j отображение Пуанкаре секущей $S(j)$ в себя, построенное для замкнутой траектории P_{l_j}. Точка $(0,0) \in S(j)$ является седловой неподвижной точкой отображения T_j. Кривая s^j трансверсальна к устойчивому многообразию $\{(\xi, \eta) : \eta = 0\} \subset S(j)$ отображения T_j. По λ - лемме [20] для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $m(j)$, что для $m > m(j)$ в образе $T_j^m s^j$ кривой s^j при отображении T_j^m содержится гладкий диск Q, содержащий точку $T_j^m x_j$, который $\varepsilon - \mathbb{C}^1$ близок к кривой s_j. Отсюда следует, что при достаточно малом ε и, следовательно, достаточно большом числе $m(j)$ множество $T_j^m D^j$ при $m > m(j)$ будет пересекать каждую из кривых $w^{ss}(x, \delta)$, $x \in s_j^+$. Другими словами $pr_j T_j^m D^j \supset s_j^+$ при $m > m(j)$.

Будем считать, что число δ, определяющее кривые $w^{ss}(x, \delta)$, столь мало, что D^j содержится в фундаментальной области отображения T_j, $j \in 1 : k$. Это, в частности, означает, что $T_j^l D^j \cap T_j^m D^j = \emptyset$ при $l \neq m$, $j \in 1 : k$. Тогда множества $\Sigma_j^l = T_j^l D^j \cap D_j$ не пересекаются при $l > m(j)$, $j \in 1 : k$. Область Σ_j^l — криволинейный прямоугольник, правая вертикальная граница которого лежит на устойчивом многообразии $W_{l_j+1}^s$. Обозначим $\Delta_l^j = T_j^{-l} \Sigma_j^l \subset D^j$, $l > m(j)$, $j \in 1 : k$. Ясно, что множества Σ_j^l, Δ_l^j — области и $T_j^l \Delta_l^j = \Sigma_j^l$. Область Δ_l^j — прямоугольник, правая вертикальная граница которого содержится в $W_{l_j+1}^s$. Траектория точки $x \in \Delta_l^j$ делает l оборотов, не выходя из окрестности V_{l_j} замкнутой траектории P_{l_j}, до пересечения с D_j, $j \in 1 : k$.

Определим отображение G_j по траекториям системы 1 на множестве $\Delta^j = \{\cup \Delta_l^j, \ l > m(j)\} \subset D^j$, положив $G_j(x) = T_j^l(x)$, если $x \in \Delta_l^j$. На каждом из множеств Δ_l^j, $l > m(j)$, отображение G_j является диффеоморфизмом. Поскольку семейство кривых $w^{ss}(x, \delta)$, $x \in V_{l_j}$, липшецево по x, то отображения $pr_j : D_j \to s_j^+$ и $pr^j : D^j \to s_+^j$ — липшецевы. Отсюда следует, что композиции $pr_j G_j$ и $pr_j G_j pr^j$ будут удовлетворять условию Липшица. В силу определения отображения G_j и инвариантности семейства кривых $w^{ss}(x, \delta)$

$$pr_j G_j(y) = pr_j G_j pr^j(y), \quad y \in \Delta^j. \qquad \textbf{(II.4.4)}$$

Рис. 3

Обозначим $\delta_l^j = pr^j \Delta_l^j,\ l > m(j),\ j \in 1:k$. Из определения множества Δ_l^j следует, что δ_l^j — интервал, который вместе со своим замыканием лежит в $s_+^j,\ l > m(j)$, и правая граница которого лежит на устойчивом многообразии $W_{l_j+1}^s$, следующего за замкнутой траекторией P_{l_j} предельного множества в гетероклиническом цикле Г. См. рис. 3.

Лемма II.4.2.

Существуют числа $l(j) > m(j),\ j \in 1 : k,\quad \gamma > 1$ такие, что отображение G_j сжимает вдоль сильно устойчивых кривых $w^{ss}(x, \delta)$ размера δ, построенных по трансверсали $S(j),\ j \in 1 : k$, а отображение $pr_j G_j$ растягивает на δ_l^j при $l > l(j)$:

$$d(G_j(y), G_j(z)) < d(y, z)/2, \quad y, z \in w^{ss}(x, \delta), \quad x \in s_+^j,$$

$$d(pr_j G_j(x_1), pr_j G_j(x_2)) > 2\gamma^{l-l(j)} d(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \delta_l^j, \quad j \in 1 : k.$$

Доказательство. На каждом из множеств Δ_l^j отображение G_j является отображением по траекториям трансверсали $S(j)$ в себя, при этом время возвращения точки $x \in \Delta_l^j$ на трансверсаль $S(j)$ неограниченно возрастает с ростом l. Можно считать число $l(j)$ столь большим, что оно больше числа T из леммы II.3.6. Тогда по этой лемме будет выполняться первое неравенство при $l > l(j)$.

Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим пару точек $x_1,\ x_2 \in \delta_l^j,\quad x_i = (\xi_j^i, \eta_j^i),\ i = 1, 2,$ где ξ_j, η_j — координаты на трансверсали $S(j)$. Множество $\delta_l^j,\ l > m(j),\ j \in 1 : k$, лежит на кривой

$$s_+^j = \{(\xi_j, \eta_j) :\ \xi_j = f_j(\eta_j) + \xi_j^0,\ |\eta_j| < \varepsilon^j\}.$$

Функция f_j — дифференцируемая, поэтому найдется число α_j такое, что $||x_1 - x_2||\alpha_j \le |\eta_j^1 - \eta_j^2|$ для любых $x_1, x_2 \in s_+^j$. Точка $(0,0)$ — неподвижная седловая точка диффеоморфизма T_j, при этом ее устойчивое многообразие совпадает с осью ξ_j, а неустойчивое с осью η_j. Отображение G_j совпадает на множестве δ_l^j с отображением T_j^l. Пусть $G_j(x_i) = (\xi_j^i(l), \eta_j^i(l))$. Известно [20], что найдутся постоянные $C_j > 0,\ \gamma > 1$ такие, что

$$|\eta_j^1(l) - \eta_j^2(l)| \ge C_j\gamma^l|\eta_j^1 - \eta_j^2|, \quad j \in 1:k. \tag{II.4.5}$$

Кривая s_+^j трансверсальна устойчивому многообразию точки $(0,0)$. По λ - лемме [20] образ ее компактного куска δ_l^j при отображении T_j^l сколь угодно $\mathbb{C}^1$ близок к неустойчивому многообразию точки $(0,0)$, если число l достаточно велико. Поэтому, в силу липшецевости семейства кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in D_j$, найдется постоянная β_j такая, что

$$d(pr_jG_j(x_1), pr_jG_j(x_2)) \ge \beta_j||G_j(x_1) - G_j(x_2)||$$

при $x_1, x_2 \in \delta_l^j$, если число l достаточно велико.

Собирая все оценки, получим

$$d(pr_jG_j(x_1), pr_jG_j(x_2)) \ge C_j\alpha_j\beta_j\gamma^l||x_1 - x_2||,$$

если l достаточно велико. Выберем число $l(j) > m(j)$ так, чтобы $C_j\alpha_j\beta_j\gamma^{l(j)} > 2$. Тогда при $l > l(j)$ имеем требуемую оценку. Лемма II.4.2 доказана. ■

Следствие.

$$\operatorname{diam}\delta_l^j < K/2\gamma^{l-l(j)}, \quad l > l(j),$$

где K — постоянная такая, что $\operatorname{diam} D_j < K$. ■

Увеличивая, если надо, числа $l(j)$, можно считать, что $K = 1$.

Рассмотрим множества

$$\sigma_j^l = h_j^{-1}\delta_l^{j+1}, \quad \Delta_l^{j+1} = (pr^{j+1})^{-1}\delta_l^{j+1}, \quad D_j^l = pr_j^{-1}\sigma_j^l,$$

$l > l(j+1),\ j \in 1:k$. Ясно, что $\sigma_j^l \subset s_j^+, \quad \Delta_l^{j+1} \subset D^{j+1}, \quad D_j^l \subset D_j$. Кроме того, поскольку δ_l^{j+1} — интервал, содержащийся с замыканием в s_+^{j+1}, а h_j — взаимно однозначное и непрерывное отображение s_j^+ на s_{j+1}^+, то σ_j^l —интервал, содержащийся с замыканием внутри интервала s_j^+. При этом одна из его границ лежит на $W^s_{l_{j+1}+1}$. См. рис. 4.

Рис.4

Из формулы II.4.2 следует, что отображение h_j растягивает, если в гетероклиническом цикле Γ между замкнутыми траекториями P_{l_j} и $P_{l_{j+1}}$ есть хоть одна точка покоя, а число ε_j достаточно мало. В противном случае оно может оказаться сжимающим. Однако, и в том и в другом случае из следствия к лемме II.4.2 получим, что

$$\operatorname{diam} \sigma_j^l < \overline{K} \gamma^{l(j)-l}, \quad l > l(j), \quad j \in 1:k,$$

где $\overline{K}$ не зависит от l и j. Увеличивая при необходимости числа $l(j)$, можно считать, что $\overline{K} = 1$.

Лемма II.4.3.

На множестве D_j^l при $l > l(j+1)$, $j \in 1:k$, определено отображение $G_{j+1} \cdot H_j$ по траекториям системы 1, при этом

$$G_{j+1} \cdot H_j \, D_j^l \subset \Sigma_{j+1}^l \subset D_{j+1}, \quad pr_{j+1} G_{j+1} \cdot H_j \, D_j^l = s_{j+1}^+.$$

Доказательство. Отображение H_j определено на множестве $D_j \supset D_j^l$. Поэтому для доказательства первой части леммы достаточно проверить, что множество $H_j D_j^l$ содержится в области определения отображения G_{j+1}. Это следует из инвариантности семейства кривых $w^{ss}(x, \delta)$, $x \in V(\delta', \rho')$, и определения отображений pr_j и pr^{j+1}. Действительно, $pr^{j+1} H_j D_j^l = H_j pr_j D_j^l = H_j \sigma_j^l = h_j \sigma_j^l = \delta_l^{j+1}$. Таким образом, $H_j D_j^l \subset (pr^{j+1})^{-1} \delta_l^{j+1} = \Delta_l^{j+1}$. По определению множества Δ_l^{j+1} отображение G_{j+1}

задано на нем и $G_{j+1}\Delta_l^{j+1} = \Sigma_{j+1}^l$, при этом множество Σ_{j+1}^l пересекает каждую из кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_{j+1}^+$. Тогда $pr_{j+1}G_{j+1}H_j\Sigma_j^l = s_{j+1}^+$. Лемма II.4.3 доказана. ■

Замечание. Поскольку каждое из отображений H_j и G_{j+1} с коэффициентом $1/2$ сжимают вдоль сильно устойчивых кривых $w^{ss}(x,\delta)$, построенных по трансверсалям $S(j)$ и $S(j+1)$ соответственно, и отображение H_j переводит семейство $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_j^+$, в семейство $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_+^{j+1}$. Следовательно, образ кривой $w^{ss}(x,\delta)$, $x \in s_j^+$, при отображении H_j содержится вместе со своим замыканием в кривой $w^{ss}(y,\delta),\ y = H_j(x) \in s_+^{j+1}$. Композиция $G_{j+1}\cdot H_j$ будет сжимать вдоль кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_j^+$, с коэффициентом $1/2$. Кроме того, из определения отображения G_{j+1} следует, что образ кривой $w^{ss}(y,\delta),\ y \in \sigma_j^l$, содержится в кривой $w^{ss}(G_{j+1}H_j(x),\delta)$ вместе со своим замыканием. Поэтому замыкание кривой $G_{j+1}\,H_j\,w^{ss}(y,\delta),\ y \in \sigma_j^l$, лежит в кривой $w^{ss}(G_{j+1}H_j(y),\delta)$. ■

В силу инвариантности семейства кривых $w^{ss}(x,\delta)$, $x \in V(\delta',\rho')$, на множестве σ_j^l имеем

$$pr_{j+1}G_{j+1}H_j = pr_{j+1}G_{j+1}pr^{j+1}H_j = pr_{j+1}G_{j+1}H_jpr_j = pr_{j+1}G_{j+1}h_j,$$

$l > l(j+1),\ j \in 1:k$.

Положим $f_j = pr_{j+1}G_{j+1}h_j$. По лемме II.4.3 f_j гомеоморфно отображает каждое из множеств σ_j^l на кривую s_{j+1}^+. При этом f_j удовлетворяет условию Липшица. Из формул II.4.2 и леммы II.4.2 следует, что f_j растягивающее отображение с коэффициентом растяжения $2\gamma^{l-l(j+1)}$, если число ε_j достаточно мало.

Обозначим через F_j отображение $G_{j+1}\cdot H_j$ по траекториям системы 1. Оно определено на множестве $\{\bigcup_{l>l(j+1)} D_j^l\} \subset S(j)$ и переводит его во множество $D_{j+1} \subset S(j+1)$. При этом

$$pr_{j+1}F_j(x) = f_j\,pr_j(x), \quad x \in \{\bigcup_{l>l(j+1)} D_j^l\}, \quad j \in 1:k.$$

По замечанию к лемме II.4.3 отображение F_j сжимает с коэффициентом $1/2$ вдоль кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_j^+$. Таким образом, чтобы описать область задания отображения $F = F_k \cdot F_{k-1} \cdot \ldots \cdot F_1$ по траекториям системы 1 трансверсали $S(1)$ в себя, достаточно описать область задания отображения $f = f_k \cdot \ldots \cdot f_1$ кривой s_1^+ в себя. Для этого рассмотрим произвольный набор $e = (e_1,\ldots,e_k)$, в котором e_i натуральные числа и $e_i > l(i+1),\ i \in 1:k$. Множество таких наборов обозначим через E.

Лемма II.4.4.

Для любого набора $e \in E$ найдется интервал σ_e такой, что отображение f определено на σ_e и является гомеоморфизмом: $f(\sigma_e) = s_1^+,\ \bar\sigma_e \subset \sigma_1^{e_1}$ и для $x \in \sigma_e$ точка $f_s \cdot f_{s-1} \cdot \ldots \cdot f_1(x) \in \sigma_{s+1}^{e_s+1},\ s \in 1:k-1$. При этом $\operatorname{diam}\sigma_e < \gamma^{|e|}$, где $|e| = \Sigma_{i=1}^k(e_i - l(i))$, и отображение f растягивает на σ_e с коэффициентом $\gamma^{|e|}$.

Доказательство. Определим множества $\sigma_k = \sigma_k^{e_k}, \ldots, \sigma_s = f_s^{-1}(f_s\sigma_s^{e_s} \cap \sigma_{s+1}),\ s \in 1 : k$, и положим $\sigma_e = \sigma_1$. Определение корректно, так как на множестве $\sigma_s^{e_s},\ e_s > l(s)$, отображение f_s взаимно однозначно и $f_s\sigma_s^{e_s} = s_{s+1}^+$.

Докажем по индукции, что σ_s — интервал и $\overline{\sigma}_s \subset \sigma_s^{e_s}$. Для $s = k$, то есть для множества $\sigma_k^{e_k}$, это следовало из леммы II.4.3. Пусть σ_{s+1} — интервал и $\overline{\sigma}_{s+1} \subset \sigma_{s+1}^{e_{s+1}}$. Так как $f_s\sigma_s^{e_s} = s_{s+1}^+ \supset \sigma_{s+1}$ и на кривой s_s^+ отображение f_s — гомеоморфизм, то множество $f_s^{-1}(f_s\sigma_s^{e_s} \cap \sigma_{s+1}) = \sigma_s$ является интервалом и $\overline{\sigma}_s = f_s^{-1}\overline{\sigma}_{s+1} \subset f_s^{-1}\sigma_{s+1}^{e_{s+1}} \subset \sigma_s^{e_s}$. Кроме того, из определения σ_s получим, что $f_s \cdot \ldots \cdot f_1\sigma_e = \sigma_{s+1}$. В частности, $f_{k-1} \cdot \ldots \cdot f_1\sigma_e = \sigma_k = \sigma_k^{e_k}$. Поэтому $f\sigma_e = s_1^+$ и f — гомеоморфизм на σ_e. Требуемая оценка для $\operatorname{diam}\sigma_e$ следует из того, что отображения f_j растягивают и коэффициент растяжения на множестве $\sigma_s^{e_s}$ больше, чем $\gamma^{e_s - l(s)}$. Из этого же следует и последнее утверждение леммы. Лемма II.4.4 доказана. ■

Пусть целочисленный вектор $e \in E$. Рассмотрим множество $D_e = pr_1^{-1}\sigma_e$.

Лемма II.4.5

Отображение F определено на каждом из множеств $D_e,\ e \in E$. Для множества $\Sigma_e = F(D_e)$ его проекция $pr_1\Sigma_e$ совпадает с s_1^+. Кроме того, отображение F сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x.\delta),\ x \in \sigma_e$, с коэффициентом 2^{-k}.

Доказательство. Отображение F определяется как композиция отображений $F_j :\ D_j^l \to \Sigma_j^l,\ l > l(j)$. Каждое из множеств D_j^l имеет вид $pr_j^{-1}\sigma_j^l$. Поэтому для того, чтобы в точке x было определено отображение, необходимо и достаточно, чтобы точка $pr_s(F_s \cdot \ldots \cdot F_1(x)) \in \sigma_s^l$ при некотором $l > l(s),\ s \in 1 : k$. Поскольку $pr_{s+1}F_s(x) = f_s pr_s(x),\ s \in 1 : k$, то это означает, что отображение F определено для тех точек x, для которых $pr_1(x) \in \sigma_e,\ e \in E$.

Таким образом, F определено на множестве D_e. Так как $f\sigma_e = s_1^+,\ e \in E$, то $pr_1 F D_e = s_1^+$. Отображения F_j сжимают с коэффициентом 2^{-1} вдоль сильно устойчивых кривых $w^{ss}(x, \delta)$. Поэтому F сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x, \delta),\ x \in \sigma_e$, с коэффициентом 2^{-k}. Лемма II.4.5 доказана. ■

Замечание 1. Траектория системы 1, проходящая через точку из множества $D_e,\ e = (e_1, \ldots, e_k) \in E$, прежде чем пересечь при возрастании t множество D_1 делает e_1 оборотов, не выходя из окрестности V_{e_2} замкнутой траектории P_{e_2}, потом попадает в окрестность V_{e_3} замкнутой траектории P_{e_3} и делает в ней e_2 оборотов перед тем, как попасть в окрестность V_{e_4} следующей замкнутой траектории и так далее, пока она не попадет в окрестность V_{e_1} траектории P_{e_1}, в которой, сделав e_k оборотов, пересечет множество D_1. ■

Замечание 2. По замечанию к лемме II.4.3 каждое из отображений F_i переводит кривую $w^{ss}(x, \delta)$ вместе с замыканием в кривую $w^{ss}(F_i(x), \delta)$. Поэтому для отображения F выполнено аналогичное свойство $\overline{F\, w^{ss}(x, \delta)} \subset w^{ss}(F(x), \delta),\ x \in \sigma_e,\ e \in E$. ■

Рассмотрим множество $D = \{\cup D_e,\ e \in E\} \subset D_1$. Из лемм II.4.4, II.4.5 следует, что отображение F задано на D, $FD \subset D_1$ и в точках $x \in D_1 \setminus D$ отображение F не определено. Опишем максимальное инвариантное множество отображения $F|_D$. Для этого рассмотрим пространство Ω, состоящее из бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$, каждый член которых лежит в E, $\omega_s \in E$, $s \in Z$.

Введем стандартным образом метрику ρ на Ω, положив для $u, v \in \Omega$

$$\rho(u,v) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \frac{||v_s - u_s||}{2^{|s|}(1 + ||v_s - u_s||)},$$

где $||v_s - u_s||$ — евклидова норма вектора $v_s - u_s \in \mathbb{R}^k$. Нетрудно проверить, что ρ действительно метрика, пространство Ω в ней вполне несвязно и не содержит изолированных точек. Эти утверждения доказываются так же как и в случае, когда множество E конечно [60]. Отличие от обычно рассматриваемых последовательностей с конечным числом символов состоит в том, что пространство Ω некомпактно.

Лемма II.4.6.

Для любой последовательности $\omega \in \Omega$, $\omega = \{\omega_s\}$, существует единственная точка $\psi(\omega) \in \sigma = \{\cup \sigma_e,\ e \in E\}$ такая, что $f^s(\psi(\omega)) \in \sigma_{\omega_s}$, $s \in N$.

Доказательство. Для $\omega = \{\omega_s\} \in \Omega$ определим множества $R_m = \{x \in \sigma_{\omega_0} : f^s(x) \in \sigma_{\omega_s},\ s \in 0:m\}$, $m \in N$. Докажем по индукции, что R_m — интервал, $\overline{R}_m \subset R_{m-1}$ и $f^{m+1} R_m = s_1^+$. База индукции содержится в лемме II.4.4. Пусть множество R_m обладает нужными свойствами, тогда $R_{m+1} = f^{-(m+1)}(f^{m+1} R_m \cap \sigma_{\omega_{m+1}})$. По индукционному предположению $f^{m+1} R_m = s_1^+$, а по лемме II.4.4 $\sigma_{\omega_{m+1}}$ — интервал и $\overline{\sigma}_{\omega_{m+1}} \subset s_1^+$. Поэтому множество R_{m+1} — интервал и $\overline{R}_{m+1} \subset R_m$.

$$f^{m+2} R_{m+1} = f^{m+2} f^{-(m+1)}(f^{m+1} R_m \cap \sigma_{\omega_{m+1}}) =$$

$$= f(f^{m+1} R_m \cap \sigma_{\omega_{m+1}}) = f\sigma_{\omega_{m+1}} = s_1^+.$$

Таким образом, определена последовательность вложенных сегментов $R_0 \supset \overline{R}_1 \supset R_1 \cdots \supset \overline{R}_m \supset R_m \supset \ldots$. Кроме того, $\operatorname{diam} R_m \to 0$, $m \to +\infty$, поскольку f — растяжение на σ_e, $e \in E$. Из этого следует, что множество $\cap_{m \geq 0} \overline{R}_m$ состоит из одной точки $\psi(\omega)$. Так как $\overline{R}_{m+1} \subset R_m$, то точка $\psi(\omega) \in R_m$, $m \in N$. Лемма II.4.6 доказана. ■

Замечание. Поскольку отображение f растягивает с коэффициентом $\gamma^{|\omega_s|}$ на множестве σ_{ω_s}, то $\operatorname{diam} R_m < K\gamma^{\Sigma_{s \in 0:m}|\omega_s|}$.

Кроме того, так как $f\sigma_e \supset s_1^+$ для всех $e \in E$, то для любой последовательности $\omega \in \Omega$ найдется набор точек $\{y_s\}$, $s \in Z$, такой что $y_0 = \psi(\omega)$, $f(y_s) = y_{s+1}$, $y_s \in \sigma_{\omega_s}$, $s \in Z$. ■

Определенное в лемме II.4.6 отображение $\psi : \Omega \to s_1^+$ не является взаимно однозначным. Образы точек $u, v \in \Omega$ таких, что $u_s = v_s$, $s \geq 0$, совпадают. Рассмотрим пространство Ω^+, состоящее из бесконечных в одну сторону последовательностей

$\omega^+ = \{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$, таких что $\omega_s \in E,\ s \in N$. На пространстве Ω^+ введем метрику ρ^+, положив для $u^+, v^+ \in \Omega^+$

$$\rho^+(u^+, v^+) = \Sigma_{s=0}^{\infty} \frac{||v_s - u_s||}{2^s(1 + ||v_s - u_s||)}.$$

Ясно, что лемма II.4.6 остается справедливой, если вместо последовательностей ω из пространства Ω рассматривать последовательности ω^+ из Ω^+. Определяемое леммой II.4.6 отображение из Ω^+ в s_1^+ будем обозначать ψ^+.

Обозначим через I^+ множество $\{x \in s_1^+ :\ x = \psi^+(\omega^+),\ \omega^+ \in \Omega^+\}$. Из леммы II.4.6 следует, что I^+ положительно инвариантное множество отображения f.

Введем отображение σ^+ в пространстве Ω^+, положив для $\omega^+ = \{\omega_s\}_0^{\infty}, \quad \sigma^+\omega^+ = w$, где $w = \{w_s\}_0^{\infty}$, и $w_s = \omega_{s+1},\ s \in N$. Аналогичное отображение сдвига в пространстве Ω будем обозначать через $\sigma :\ \sigma\{\omega_s,\ s \in Z\} = \{w_s,\ s \in Z\}$ и $w_s = \omega_{s+1},\ s \in Z$.

Лемма II.4.7.

Отображения $f|_{I^+}$ и σ^+ топологически сопряжены при помощи отображения ψ^+.

Доказательство. Равенство $f\psi^+(\omega^+) = \psi^+\sigma^+(\omega^+)$ для $\omega^+ \in \Omega^+$ следует из леммы II.4.6 и определения σ^+. Из доказательства леммы II.4.6 следует взаимная однозначность отображения ψ^+, так как для разных последовательностей $u^+, v^+ \in \Omega^+$ точки $f^s(\psi^+(u^+))$ и $f^s(\psi^+(v^+))$ лежат в двух непересекающихся множествах σ_{u_s} и σ_{v_s} при некотором s. Докажем непрерывность отображения ψ^+. Пусть $\omega^+ \in \Omega^+$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть число m таково, что $\operatorname{diam} R_m < \varepsilon$, где R_m — множество, определенное в доказательстве леммы II.4.6 по последовательности ω^+. Множество R_m определяется по отрезку $\{\omega_s\}_{s \in 0:m}$ последовательности ω^+. Все последовательности $u^+ \in \Omega^+$ такие, что $u_s = \omega_s,\ s \in 0 : m$, переводятся отображением ψ^+ в R_m. Поэтому $d(\psi(u^+), \psi(\omega^+)) < \varepsilon$. Такие последовательности определяются в метрике ρ^+ неравенством $\rho^+(\omega^+, u^+) < 1/2^m$. Итак, если $\rho^+(\omega^+, u^+) < 1/2^m$, то $d(\psi^+(u^+), \psi^+(\omega^+)) < \varepsilon$. Непрервыность ψ^+ доказана.

Докажем непрерывность обратного отображения. Пусть $x = \psi^+(\omega^+) \in I^+$. Тогда точка x определяется как $\cap R_m,\ m \in N$, где R_m — интервал, построенный по ω^+, при этом x — внутреняя точка каждого интервала R_m. Как было замечено выше, $\psi^+(u^+) \in R_m$ тогда и только тогда, когда $\rho^+(u^+, \omega^+) < 1/2^m$. Таким образом, по числу ε можно выбрать окрестность R_m точки x такую, что для $y \in R_m \quad \rho^+((\psi^+)^{-1}(y), \omega^+) < 1/2^m < \varepsilon$. Лемма II.4.7 доказана. ■

Перейдем теперь к описанию инвариантного множества отображения $F|_D$.

Лемма II.4.8.

Для любой последовательности $\omega \in \Omega,\ \omega = \{\omega_s,\ s \in Z\}$, существует единственная точка $y = \Psi(\omega) \in D$ такая, что $F^s(y) \in D_{\omega_s},\ s \in Z$.

Доказательство. Поскольку $pr_1 \cdot F = f \cdot pr_1$ на множестве $\Sigma_e,\ e \in E$, то $pr_1(y) = \psi^+(\omega^+) = x$, если искомая точка y существует, где через ω^+ обозначена часть последовательности ω с неотрицательными номерами. По замечанию к лемме II.4.6 найдется единственная последовательность $\{x_s,\ s \in Z\}$ такая, что $x_0 = x,\ x_s \in \sigma_{\omega_s}$

и $f(x_s) = x_{s+1},\ s \in Z$. Рассмотрим сильно устойчивые кривые размера δ точек x_s на трансверсали $S(1)$. Это гладкие кривые $l_s = w^{ss}(x_s, \delta) \subset \Sigma_{\omega_s}$. Поскольку $f(x_s) = x_{s+1}$ и $pr_1 \cdot F(x) = f \cdot pr_1(x)$, имеем $pr_1 \cdot F\, l_s = x_{s+1}$. Это означает, что отображение F переводит кривую l_s в кривую $l_{s+1},\ s \in Z$. Отображение F является композицией отображений $F_j,\ j \in 1:k$, каждое из которых по замечанию к лемме II.4.3 переводит кривую $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_j^+$, в кривую $w^{ss}(F_j(x),\delta)$ вместе со своим замыканием и сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_j^+$, с коэффициентом $1/2$. Поэтому F сжимает вдоль кривых $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_1^+$, с коэффициентом $1/2$ и замыкание кривой Fl_s лежит внутри кривой $l_{s+1},\ s \in Z,\ \overline{F\, l_s} \subset l_{s+1}$.

Рассмотрим множество $P_m = \{y \in l_0 : F^{-s}y \in l_{\omega_{-s}},\ s \in -m:0\}$. Докажем по индукции, что P_m является дугой кривой l_0, замыкание P_{m+1} лежит внутри P_m $\quad \overline{P}_{m+1} \subset P_m,\ F^{-m}P_m = l_{-m}$ и $\operatorname{diam} P_m \le K/2^m$, где число K не зависит от m. База индукции следует из того, что отображение F, по замечанию 2 к лемме II.4.5, сжимает с коэффициентом $1/2$ на дуге l_{-1} и $\overline{F\, l_{-1}} \subset l_0$. Ясно, что $P_{m+1} = P_m \cap F^{m+1} l_{-m-1}$. Поскольку $\overline{F\, l_{-m-1}} \subset l_{-m}$, по замечанию 2 к лемме II.4.5, и $F\, l_{-m-1}$ дуга кривой l_{-m}, а $F^m\, l_{-m} = P_m$, то

$$\overline{P}_{m+1} = F^m(l_{-m} \cap \overline{F\, l_{-m-1}}) \subset F^m l_{-m} = P_m.$$

Остальные свойства множества P_{m+1} следуют из того, что F — гомеоморфизм, сжимающий на кривых $l_s,\ s \in Z$, с коэффициентом $1/2$.

Таким образом, на l_0 задана последовательность вложенных дуг $l_0 = P_0 \supset \overline{P}_1 \supset P_1 \supset \cdots \supset \overline{P}_m \supset P_m \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} P_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из этого следует, что множество $\{\cap P_m,\ m \ge 0\}$ состоит из одной точки, которую обозначим через $\Psi(\omega)$. Из определения множеств P_m следует, что $F^s(\Psi(\omega)) \in l_s = w^{ss}(x_s,\delta) \subset D_{\omega_s},\ s \le 0$. Из определения точки x_0 следует, что $F^s(\Psi(\omega)) \in w^{ss}(x_s,\delta) \subset \Sigma_{\omega_s},\ s \ge 0$. То есть $F^s(\Psi(\omega)) \in \Sigma,\ s \in Z$, где $\Sigma = \{\cup \Sigma_e,\ e \in E\} \subset D_1$. Лемма II.4.8 доказана. ■

Определим множество $I = \{y \in D_1 :\ F^s(y) \in D,\ s \in Z\}$. Из доказанной леммы следует, что $I \ne \emptyset$. Очевидно, что I инвариантное множество для отображения F. Поскольку D состоит из непересекающихся множеств $D_e,\ e \in E$, то каждой точке $y \in I$ однозначно соответствует последовательность $\omega \in \Omega$, которую обозначим $\Psi^{-1}(y) = \{\omega_s,\ s \in Z\}$, где ω_s тот индекс из E, для которого $F^s(y) \in D_{\omega_s}$. Ясно, что Ψ^{-1} — обратное к Ψ отображение.

Лемма II.4.9.

Отображение $\Psi :\ \Omega \to I$ является гомеоморфизмом, который топологически сопрягает отображения $F|_I$ и σ.

Доказательство. Из определения отображений Ψ и σ следует, что $F\,\Psi = \Psi\,\sigma$. Докажем непрерывность отображений Ψ и Ψ^{-1}. Рассмотрим произвольную точку $\omega \in \Omega,\ \omega = \{\omega_s,\ s \in Z\}$, и пусть $x = \Psi(\omega)$. По лемме II.4.8 $F^s(x) \in D_{\omega_s},\ s \in Z$, или $F^s(x) \in \Sigma_{\omega_{s+1}},\ s \in Z$, где $\Sigma_{\omega_{s+1}} = F\, D_{\omega_s}$. Образуем множества

$$\Sigma^m =$$

$$= \{y \in I: \ F^s(y) \in D_{\omega_s}, \ m \geq s \geq 0, \quad F^s(y) \in \Sigma_{\omega_{s+1}}, \ -m-1 \leq s < 0\}.$$

Из определения Σ^m следует, что $pr_1 F^s(y) \in \sigma_{\omega_s}, \ s \in 0:m$. Поэтому $pr_1 \Sigma^m \subset R_m = \{z \in s_1^+: \ f^s(z) \in \sigma_{\omega_s}, \ s \in 0:m\}$. По замечанию к лемме II.4.6 $\operatorname{diam} R_m < K\gamma^{\Sigma_{s \in 0:m}|\omega_s|}$. Таким образом, $\operatorname{diam} pr_1 \Sigma^m < K\gamma^{\Sigma_{s \in 0:m}|\omega_s|}$, где K не зависит от выбора ω и $0 < \gamma < 1$.

Рассмотрим произвольную точку $z \in s_1^+$ и кривую $w^{ss}(z, \delta)$. Так как для $y \in \Sigma^m$ точка $F^{-m-1}(y) \in \Sigma_{\omega_{-m}}$ и отображение F сжимает вдоль сильно устойчивых многообразий $w^{ss}(z, \delta), \ z \in s_1^+$, с коэффициентом 2^{-k}, то $\operatorname{diam}(w^{ss}(z, \delta) \cap \Sigma^m) < \delta/2^{km}$. Семейство сильно устойчивых кривых $w^{ss}(x, \delta)$, построенных по трансверсали $S(1)$, состоит из гладких кривых, которые вместе со своими касательными липшецевым образом зависят от точки x, и трансверсально пересекают кривую s_1^+. Поэтому $\operatorname{diam} \Sigma^m \to 0$ при $m \to \infty$. Из этого, в частности, следует, что для любой окрестности W точки $x = \Psi(\omega)$ найдется число $m \in N$ такое, что $W \supset \Sigma^m$. По определению множества Σ^m множество $\Psi^{-1}\Sigma^m$ состоит из тех и только тех последовательностей $w \in \Omega$, для которых $w_s = \omega_s, \ |s| \leq m$. Метрика ρ на Ω была введена так, что это множество является окрестностью точки ω. Таким образом, для любой окрестности W точки x нашлась окрестность $\Psi^{-1}\Sigma^m$ точки ω такая, что $\Psi(\Psi^{-1}\Sigma^m) \subset W$, что доказывает непрерывность отображения Ψ.

Для доказательства непрерывности обратного отображения Ψ^{-1} достаточно заметить, что Σ^m как пересечение открытых множеств $\Sigma^m = \{\cap F^{-s} D_{\omega_s}, \ s \in -m-1:m\}$ является открытым множеством. Кроме того, множества $\Psi^{-1}\Sigma^m, \ m > 0$, образуют фундаментальную систему окрестностей точки ω. Лемма II.4.9 доказана. ■

Для отображения сдвига σ на пространстве Ω' бесконечных в обе стороны последовательностей из конечного числа символов, то есть в случае, когда множество E конечно, хорошо известны [60, p.430] следующие свойства:

1. В Ω' плотны периодические траектории.
2. Существует полутраектория сдвига σ всюду плотная в Ω'.
3. Имеется свойство разделения траекторий, то есть существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой последовательности $\omega \in \Omega'$ и любой ее окрестности P найдется последовательность $w \in P$ и число n такое, что $\rho(\sigma^n \omega, \sigma^n w) > \varepsilon$.

Доказательство свойств 1 и 3 отображения сдвига σ дословно переносится на случай, когда пространство Ω состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей, члены которых принадлежат бесконечному множеству E. Для доказательства свойства 2 требуется небольшая модификация.

Лемма II.4.10.

Сдвиг σ на пространстве $\Omega = \{\ldots \omega_{-s} \ldots \omega_0 \ldots \omega_s \ldots, \ \omega_i \in E\}$ с метрикой ρ имеет всюду плотную траекторию.

Доказательство. Множество E в рассматриваемом случае состоит из векторов $e = (e_1, \ldots, e_k)$ с целочисленными координатами e_i, при этом $e_i \geq l(i)$, где натуральные числа $l(i), \ i \in 1:k$, были определены при доказательстве леммы II.4.2. Для натуральных чисел $n, m, \ m > l(j), j \in 1:k$, рассмотрим множество $Q_{n,m}$, состоящее из наборов длины $n+1$ векторов $\omega_s \in E$ таких, что их компоненты меньше m.

$$Q_{n,m} = \{\omega_0, \ldots, \omega_n, \quad \omega_s = (\omega_1^s, \ldots, \omega_k^s),\ l(k) < \omega_k^s < m,\ s \in 0:n\}.$$

Ясно, что это конечное множество, точнее оно состоит из $(\prod_{j=1}^k (m - l(j)))^{n+1}$ элементов. Упорядочим наборы из множества $Q_{n,m}$ в порядке обратном лексикографическому и составим из них один набор, выписав их один за другим в указанном порядке. Полученный набор элементов из множества E будем обозначать $P_{n,m}$. Пусть число $m_0 > l(j),\ j \in 1:k$. Рассмотрим последовательность $\omega_0 = \{\omega_s,\ s \in Z\}$, у которой $\omega_s^0 = (e_{m_0}, \ldots, e_{m_0})$ при $s < 0$, а последовательность $\omega_0^+ = \{\omega_s,\ s \geq 0\}$ получается выписыванием одного за другим следующих наборов $P_{n,m}$:

$$\omega_0^+ = P_{1,m_0+1}, P_{1,m_o+2}, P_{2,m_0+2}, \ldots, P_{1,m_o+k}, \ldots P_{k,m_o+k}, \ldots.$$

Из построения последовательности ω_0 ясно, что какой бы блок $B = (\omega_{-n}, \omega_{-n+1}, \ldots, \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ ни взять ($\omega_s \in E,\ s \in -n:n,$) он встретится на некотором месте в последовательности ω_0^+, поскольку он содержится в $Q_{2n,e}$, где $e = \max_{|i| \leq n} |\omega_i|$. Поэтому найдется такое натуральное r, что последовательность $\sigma^{-r}\omega_0$ имеет члены $\omega_0^s = \omega_s$ при $|s| \leq n$.

Таким образом, для произвольной последовательности $\omega = (\ldots, \omega_{-m}, \ldots, \omega_0, \ldots, \omega_m, \ldots) \in \Omega$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число r такое, что $\rho(\omega, \sigma^{-r}\omega_0) < \varepsilon$. Лемма II.4.10 доказана. ■

Итак, отображение σ на пространстве Ω обладает свойствами 1, 2, 3 и, следовательно, является хаотическим. Сдвиг σ на пространстве Ω топологически сопряжен отображению F на I. В случае некомпактного фазового пространства, каковым и является множество I, свойство 3 в определении хаотического инвариантного множества может не сохраняться при топологическом сопряжении. Однако, в рассматриваемом случае справедливо утверждение

Теорема II.4.1.

Отображение F хаотично на I.

Доказательство. Поскольку свойства 1, 2 из определения хаотичности сохраняются при топологическом сопряжении, то отображение $F|_I$ ими обладает. Остается доказать лишь свойство 3 для отображения $F|_I$. Из того, что семейство $w^{ss}(x,\delta),\ x \in s_1^+$, состоит из гладких кривых и оно липшецево по x, следует, что найдется постоянная K такая, что $d(pr_1\, x, pr_1\, y) < Kd(x,y)$ для $x, y \in I$. Рассмотрим множества $\sigma_e,\ e \in E$. Это непересекающиеся интервалы, лежащие на кривой s_1^+. Ясно, что существует число δ_1 такое, что для любого интервала $\sigma_{e_1},\ e_1 \in E$, найдется интервал $\sigma_{e_2},\ e_2 \in E$, такой, что $d(\sigma_{e_1}, \sigma_{e_2}) = \min d(x,y),\ x \in \sigma_{e_1},\ y \in \sigma_{e_2}$, больше δ_1. Пусть x произвольная точка из I и $\omega \in \Omega,\ \omega = \{\omega_s,\ s \in Z\}$, такие, что $\Psi(\omega) = x$. Из непрерывности отображения Ψ следует, что для любой окрестности V точки x найдется число n такое, что для последовательности $w \in \Omega$ точка $\Psi(w) \in V$, если $w_s = \omega_s$ при $|s| \leq n$. Выберем такую последовательность w так, чтобы $d(\sigma_{\omega_{n+1}}, \sigma_{w_{n+1}}) > \delta_1$. Тогда для точки $y = \Psi(w) \in V$ имеем

$$d(F^{n+1}(x), F^{n+1}(y)) > \frac{1}{K} d(pr_1\, F^{n+1}(x), pr_1\, F^{n+1}(y)) >$$

$$> \frac{1}{K} d(\sigma_{\omega_{n+1}}, \sigma_{w_{n+1}}) > \frac{\delta_1}{K},$$

поскольку по определению отображения Ψ точка $pr_1\, F^{n+1}(x) \in \sigma_{\omega_{n+1}}$, а точка $pr_1\, F^{n+1}(y) \in \sigma_{w_{n+1}}$. Число δ_1/K не зависит от выбора точки x и окрестности V. Теорема II.4.1 доказана. ■

Рассмотрим множество J, состоящее из траекторий системы 1, которые пересекают трансверсаль $S(1)$ в точках множества $I \subset D_1$. Трансверсаль $S(1)$ была выбрана так, что $J \subset \widetilde{V}$, где $\widetilde{V}$ — окрестность гетероклинического цикла Г, для которой производились все построения этого параграфа.

Теорема II.4.2.

Для любой окрестности $\widetilde{V}$ гетероклинического цикла Г существует хаотическое инвариантное множество $J \subset \widetilde{V}$ системы 1, которое состоит из траекторий, лежащих в $\widetilde{V}$ и не являющихся асимптотическими к предельным множествам из цикла Г.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность $\widetilde{V}$ гетероклинического цикла Г, впишем в нее стандартную окрестность $V(\delta', \rho')$ и проделаем все построения, описанные в этом параграфе. В результате получим инвариантное множество $J \subset \widetilde{V}$, траектории из которого не асимптотичны к предельным множествам цикла Г. Остается доказать, что так построенное множество J — хаотично. Определение хаотичности множества состоит из трех требований к системе 1. Первое из них — плотность множества замкнутых траекторий во множестве J, второе — существование всюду плотной в J полутраектории. Эти два свойства являются прямым следствием теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и теоремы II.4.1. Остается доказать чувствительную зависимость решений на множестве J от начальных данных. Для случая дискретной динамической системы свойство 3 следует из свойств 1, 2 [47]. Приводимое ниже доказательство в основных чертах повторяет доказательство для дискретного случая.

Докажем сначала, что существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любой точки $x \in J$ найдется замкнутая траектория $\gamma \subset J$ такая, что $d(x, \gamma) > \delta_0$, где $d(x, \gamma) = \min d(x, y)$, $y \in \gamma$. Действительно, выберем две различные замкнутые траектории $\gamma_1, \gamma_2 \subset J$. Пусть расстояние $d(\gamma_1, \gamma_2) = 2\delta_0$. По неравенству треугольника имеем $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$ для любых точек $y \in \gamma_1$, $z \in \gamma_2$. Поэтому $2\delta_0 \leq d(x, \gamma_1) + d(x, \gamma_2)$ и либо γ_1 либо γ_2 — искомая замкнутая траектория.

Проверим определение чувствительной зависимости решений от начальных данных, взяв $\varepsilon < \delta_0/4$. Выберем произвольную точку $x \in J$ и произвольную ее окрестность U. В открытом множестве $U \cap B_\varepsilon(x)$, в силу плотности в J замкнутых траекторий, должна лежать точка $p \in J$, через которую проходит замкнутая траектория γ. Пусть число ω — ее период. Обозначим через γ_1 замкнутую траекторию из множества J такую, что $d(x, \gamma_1) > \delta_0$, и рассмотрим столь малую ее окрестность V, что множество $g^\tau V$ лежит в ε - окрестности траектории γ_1, если $|\tau| < \omega$. Так как во множестве J есть всюду плотная траектория, то найдется точка $y \in U \cap B_\varepsilon(x)$ и число $s > 0$ такие, что $g^s(y) \in V$. Обозначим $j = [s/\omega] + 1 \in N$, $\tau = j\omega - s$, $0 \leq \tau \leq \omega$, где $[s/\omega]$ — целая часть числа s/ω. Поскольку $g^{\omega j}(y) = g^{\tau}(g^{s}(y))$, точка $g^{s}(y) \in V$ и $|\tau| < \omega$, то точка $g^{\omega j}(y)$ лежит в ε - окрестности траектории γ_1. Учитывая, что $g^{\omega j}(p) = p$, из неравенства треугольника имеем

$$d(x, g^{\omega j}(y)) \leq d(p, x) + d(g^{\omega j}(p), g^{\omega j}(y)).$$

По выбору траектории $\gamma_1 \quad d(x, \gamma_1) > 4\varepsilon$, точка $g^{\omega j}(y)$ лежит в ε - окрестности траектории γ_1, поэтому $d(x, g^{\omega j}(y)) > 3\varepsilon$. По выбору точки $p \quad d(p, x) < \varepsilon$. Учитывая это, получим $d(g^{\omega j}(p), g^{\omega j}(y)) > 2\varepsilon$. Применим еще раз неравенство треугольника

$$2\varepsilon < d(p, g^{\omega j}(y)) \leq d(p, g^{\omega j}(x)) + d(g^{\omega j}(x), g^{\omega j}(y)).$$

Получаем, что либо $d(g^{\omega j}(p), g^{\omega j}(y)) > \varepsilon$, либо $d(g^{\omega j}(x), g^{\omega j}(y)) > \varepsilon$. Таким образом, либо траектория точки p, либо траектория точки y через время ωj отойдет от траектории точки x на расстояние большее, чем ε. Теорема II.4.2 доказана. ■

Рассмотрим замыкание множества $\overline{J}$. Ясно, что $\overline{J}$ — инвариантное компактное множество системы 1, обладающее свойствами 1, 2 из определения хаотического инвариантного множества. Чувствительная зависимость решений от начальных данных на множестве $\overline{J}$ следует из неравенства треугольника и того, что этим свойством обладало множество J. Таким образом, в любой окрестности гетероклинического цикла Γ лежит компактное инвариантное хаотическое множество.

Исследуем структуру множества $\overline{J} \setminus J$. Рассмотрим множество J_1, состоящее из точек, лежащих во множестве $(\overline{J} \setminus J) \cap W^u_{l_1}$, но не лежащих на устойчивых многообразиях предельных множеств из цикла Γ.

Теорема II.4.3.

Траектории инвариантного множества J_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами пространства Ω^+, состоящего из бесконечных в одну сторону символических последовательностей $\omega = \{\omega_i,\ \omega_i \in E,\ i \in N\}$.

Доказательство. Каждая траектория множества J_1 пересекает кривую s_1^+, поскольку каждая траектория множества J пересекает прямоугольник D_1 и $D_1 \cap W^u_{l_1} = s_1^+$. Кривая s_1^+ лежит в фундаментальной области отображения T, то есть $T\, s_1^+ \cap s_1^+ = \emptyset$, где T — отображение первого возвращения по траекториям системы 1, не покидающим окрестность замкнутой траектории P_{l_1} трансверсали $S(1)$. Поэтому каждая траектория из множества J_1 имеет лишь одну точку пересечения с кривой s_1^+. Таким образом, достаточно установить взаимно однозначное соответствие между точками множества $J_1 \cap s_1^+$ и точками пространства Ω^+.

Пусть $x \in J_1$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n \in N}$, $x_n \in J \cap D_1$, такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. По определению множества $J \quad x_n \in I$, где I — инвариантное множество отображения $F : D_1 \to D_1$. Точки $y_n = pr_1\, x_n$ лежат в инвариантном множестве I^+ отображения $f : s_1^+ \to s_1^+$. Каждой точке $y_n \in I^+$ соответствует символическая последовательность $(\psi^+)^{-1}(y_n) = \omega^n = \{\omega_i^n,\ i \in N\} \subset \Omega^+$. Из непрерывности отображения pr_1 следует, что $y_n \to x$ при $n \to \infty$. Докажем, что последовательность ω^n сходится в Ω^+. Из определения отображения ψ^+ следует, что точки $f^i(y_n) \in \sigma_1^{e_1^n(i)}$, если $\omega_i^n = (e_1^n(i), \ldots, e_k^n(i))$, $i, n \in N$. Зафиксируем какое-либо $i \in N$. Так как точка x не лежит на $W_{l_1+1}^s$, то точка $f^i(y)$ не совпадает с y_1^0 — правым концом кривой s_1^+. Интервалы σ_1^j с ростом j попадают в сколь угодно малую окрестность точки y_1^0, поэтому последовательность $\{e_1^n(i),\ n \in N\}$, ограничена. Аналогично доказывается, что последовательности $\{e_j^n(i),\ n \in N\}$, $j \in 2:k$, ограничены, если точка x не лежит на $W_{l_j+1}^u$, $j \in 2:k$. Таким образом, последовательность векторов ω_i^n лежит в компактном множестве. Частичные пределы последовательности ω_i^n не могут быть различны, так как множества σ_e, $e \in E$, отделены друг от друга. Из того, что $\omega_i^{n_j} \to \omega_i$ при $j \to \infty$, следует, что точки $y_{n_j} \in \sigma_{\omega_i}$ при достаточно больших j. С другой стороны $y_{n_j} \to x$, $j \to \infty$. Поскольку точка x может лежать лишь в одном из множеств σ_{ω_i}, все частичные пределы последовательности ω_i^n равны. Это означает, что компоненты ω_i^n стабилизируются с ростом n, то есть для любого $i \in N$ существует $n(i)$ такое, что $\omega_i^n = \omega_i^0$ при $n > n(i)$. Сопоставим точке x последовательность $\omega^0 = \{\omega_i^0,\ i \in N\}$: $\omega^0 = h(x)$. Ясно, что последовательность ω^0 зависит только от точки x, а не от выбора последовательности $x_n \to x$. Докажем, что $h(x) \neq h(y)$, если $x \neq y$. Итак, пусть $x, y \in J_1$ и $\omega^0 = h(x)$, $v^0 = h(y)$. Выберем натуральное m так, чтобы $d(x,y) > 3\gamma^m K$, где постоянные $\gamma < 1, K$ были определены в лемме II.4.2. Выберем две последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ точек из $J \cap D_1$ такие, что $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Пусть $h(x_n) = \omega_n = \{\omega_i^n\}_{i \in N}$, $\quad h(y_n) = v_n = \{v_i^n\}_{i \in N}$. По доказанному выше существует число $n(m)$ такое, что при $n > n(m)$ $\quad \omega_i^n = \omega_i^0$ и $v_i^n = v_i^0$, $i \in 0:m$. Будем считать, что число $n(m)$ столь велико, что при $n > n(m)$ $\quad d(x, x_n) \leq \gamma^m K$ и $d(y, y_n) \leq \gamma^m K$. По неравенству треугольника имеем

$$3\gamma^m K \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y).$$

То есть $d(x_n, y_n) > \gamma^m K$ при $n > n(m)$. Поскольку $\omega_j^n = \omega_i^0$, $v_j^n = v_j^0$, $j \in 0:m$, то последнее неравенство возможно только, если существует номер $j \in 0:m$ такой, что $\omega_j^0 \neq v_j^0$. В противном случае, как показано в лемме II.4.6, $d(x_n, y_n) < K\gamma^m$. Итак, отображение h взаимно однозначно.

Докажем, что h отображение **на**. Рассмотрим символическую последовательность $\omega = \{\omega^i\}_{i \in N}$, $\omega^i = (e_1^i, \ldots, e_k^i)$ такую, что $e_k^i \to \infty$, $i \to \infty$. Построим по ней неограниченные в обе стороны последовательности $\omega(n)$, $n \in N$, $\omega(n) = \{\omega^i(n)\}$, $i \in Z$, $\omega^i(n) = \omega^i$, $i \in N$. Для $i < 0$ определим вектор $\omega^i(n) = (e_1^i(n), \ldots, e_k^i(n))$ следующим образом

$$e_j^i(n) = l(j) + 1,\ j \neq k,\ n \in N, \quad e_k^i(n) = n.$$

Ясно, что при $n > l(k)$ $\quad \omega(n) \in \Omega$, поэтому определены точки $x_n = \Psi(\omega(n)) \in J$. Отображение Ψ было определено так, что точка $y = \Psi(\omega)$ лежит во множестве Σ_{j+1}^s, если в последовательности $\omega = \{\omega^i\}$, $i \in Z$, для вектора $\omega^0 = (e_1, \ldots, e_k)$ $\quad e_j = s$, при этом число $j+1$ берется по $\operatorname{mod} k$. Отсюда следует, что точка $x_n \in \Sigma_1^n$, $n > l(k)$. Множество $\Sigma_1^n \subset D_1$ было образом при отображении T^n множества $\Delta_1^n \subset D^1$, где T — отображение Пуанкаре трансверсали $S(1)$ в себя по траекториям системы 1 не выходящим из окрестности V_{l_1} замкнутой траектории P_{l_1}. Таким образом, $x_n \in T^n D^1$, $n > l(k)$.

Докажем, что последовательность x_n сходится к точке, лежащей на кривой $\overline{s_1^+}$. По замечанию к лемме II.4.6 образы при отображении ψ последовательностей $\omega(n)$ совпадают, так как $\omega^i(n) = \omega^i,\ i \in N$. Поэтому $\psi(\omega(n)) = x \in s_1^+$. Иными словами, точки $x_n \in w^{ss}(x, \delta)$. Кривая $w^{ss}(x, \delta) \subset D_1$ гладкая и трансверсальна кривой s_1^+.

Отображение T в координатах ξ_1, η_1 на $S(1)$ имеет начало координат седловой неподвижной точкой, при этом множество $\{(\xi_1, \eta_1) :\ \xi_1 = 0\}$ является ее неустойчивым многообразием. Поэтому существует число $0 < \mu < 1$ такое, что если $T^n(\xi_1, \eta_1) = (\xi_1^n, \eta_1^n)$, то $|\xi_1^n| < \mu^n |\xi_1|$. Пусть K такое число, что $|\xi_1| < K$, если точка $(\xi_1, \eta_1) \in D^1$. В силу ограниченности D^1 такое K существует. Тогда имеем для точек $(\xi_1^n, \eta_1^n) = x_n = T^n y_n,\ y_n \in D^1,\ \ |\xi_1^n| < \mu^n K$. Итак, первая координата точек x_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $x_n \to \psi(\omega(n)) = x \in s_1^+$. Теорема II.4.3 доказана. ■

Следствие 1.

Утверждение аналогичное теореме II.4.3 справедливо для инвариантного множества J_j, состоящего из траекторий множества $(\overline{J} \setminus J) \cap W^u_{l_j},\ j \in 2 : k$, не лежащих на устойчивых многообразиях предельных множеств цикла Γ.

Доказательство. Изменим нумерацию траекторий из цикла Γ, считая, что в новой нумерации первой траекторией является замкнутая траектория P_{l_j}. Все результаты этой и предыдущей глав останутся справедливыми и множество J не изменится. Произойдет лишь циклическая перестановка индексов в символических последовательностях, описывающих инвариантное множество J. Именно, траектория, соответствующая последовательности $\{\omega^i,\ \omega^i \in E,\ i \in Z\}$, $\omega^i = (e_1^i, \ldots, e_k^i)$, будет в новой нумерации предельных множеств соответствовать последовательности $\{\tilde{\omega}^i,\ i \in Z\}$, $\tilde{\omega}^i =$
$= (e^i_{l_j}, \ldots, e_{l_k}, e_{l_1}, \ldots, e^i_{l_{j-1}})$. ■

Следствие 2.

Гетероклинический цикл Γ входит во множество $\overline{J}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала траекторию γ_1. Она пересекает кривую s_1 в граничной точке y_1^0 кривой s_1^+. К точке y_1^0 сгущаются интервалы $\sigma_e \subset s_1^+$, каждый из которых, как показано в теореме, содержит точки множества $\overline{J} \cap D_1$. В силу замкнутости $\overline{J}$, $\gamma_1 \subset \overline{J}$. Отсюда следует, что $\omega(\gamma_1) \subset \overline{J}$. Рассмотрим траекторию γ_2. Пусть $\{\gamma^i\}_{i \in N}$ — последовательность траекторий, лежащих на $W^u_{l_1}$ таких, что последовательность $\{z_i^1\}_{i \in N}$, $z_i^1 = s_1^+ \cap \gamma^i$, сходится к точке y_1^0. Тогда последовательность z_i^2 точек пересечения траекторий γ^i с произвольной трансверсалью, лежащей в $W^u_{l_1}$, к траектории γ_2 будет сходиться к точке, лежещей на траектории γ_2. Поэтому $\gamma_2 \subset \overline{J}$ и $\omega(\gamma_2) \subset \overline{J}$. Двигаясь вдоль цикла Γ последовательно докажем, что $\gamma_j \subset \overline{J},\ \omega(\gamma_j) \subset \overline{J},\ j \in l_1 : l_2 - 1$.

Аналогичные рассуждения применимы к остальным частям цикла Γ, которые заключены между двумя соседними замкнутыми траекториями $P_{lj},\ P_{l_{j+1}} \subset \Gamma$. ■

Замечание.

Как видно из доказательства теоремы II.4.3, определенное в ней отображение h :

$J_1 \to \Omega^+$ — непрерывно.

§5 Возмущение хаотического инвариантного множества, порожденного гетероклиническим циклом типа Лоренца

Цель этого параграфа доказать, что хаотическое инвариантное множество системы 1 сохраняется при $\mathbb{C}^1$ - малых возмущениях системы. Кроме того, в терминах символической динамики будут описаны возможные бифуркации этого инвариантного множества.

Итак, рассмотрим $\mathbb{C}^1$ - малое возмущение системы 1:

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad ||Y||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon, \quad r \geq 4. \qquad \textbf{(2)}$$

Относительно невозмущенной системы 1:

$$\dot{x} = X(x), \quad X \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^3), \quad r \geq 4,$$

как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что она имеет равноразмерностный гетероклинический цикл $\Gamma = \bigcup_{i\in 1:m}(\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i))$ типа Лоренца, который удовлетворяет условиям I, II, III. Предельные множества $\alpha(\gamma_{l_j}),\ j \in 1:k$, являются седловыми замкнутыми траекториями.

Теорема II.5.1. Пусть система 1 удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для любой окрестности цикла Γ $V(\Gamma)$ найдется число ε_0 такое, что система 2 при $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет хаотическое инвариантное множество, лежащее в $V(\Gamma)$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

Предельные множества $\alpha(\gamma_i),\ i \in 1:m$, являются грубыми, следовательно, при малых $\mathbb{C}^1$ - возмущениях системы 1 они сохраняются. Будем обозначать эти предельные множества через $O_i(\varepsilon),\ P_j(\varepsilon)$, а их устойчивые и неустойчивые многообразия через $W_i^s(\varepsilon),\ W_i^u(\varepsilon)$. Замкнутые траетории $P_{l_j},\ j \in 1:k$, разбивают гетероклинический цикл Γ на k простых гетероклинических контуров

$$\Gamma_j = \bigcup_{i\in l_j:l_{j+1}-1} (\gamma_i \cup \alpha(\gamma_i)) \cup P_{l_{j+1}}, \quad j \in 1:k,$$

типа Лоренца, удовлетворяющих условию III. По теореме 1.4.1 для любой окрестности гетероклинического контура $\Gamma_j,\ j \in 1:k$, найдется число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ возмущенная система 2 имеет в ней гетероклинический контур $\Gamma'_j = \{\bigcup(\gamma'_i \cup \alpha(\gamma'_i)),\ i \in l'_J : l'_{j+1}-1\}$, при этом $\alpha(\gamma'_{l'_j}) = P_{l_j}(\varepsilon)$.

Рассмотрим произвольную окрестность $V(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ и впишем в нее стандартную окрестность $V(\delta,\rho)$. Числа δ, ρ, h будем считать столь малыми, что для системы 2, в которой $\varepsilon < h$, и окрестности $V(\delta,\rho)$ справедлива теорема II.3.1, то есть окрестность $V(\delta,\rho)$ представляется в виде объединения сильно устойчивых многообразий $W_\varepsilon^{ss}(x),\ x \in V(\delta,\rho)$. Число h будем считать столь малым, что при $\varepsilon < h$ все гетероклинические контуры $\Gamma'_j,\ j \in 1:k$, лежат в $V(\delta,\rho)$.

Проведем построения, аналогичные построениям предыдущего параграфа для невозмущенной системы. При достаточно малом числе h площадки $S(i), \ i \in 1:k$, трансверсальны к траекториям возмущенной системы. Обозначим через F_ε отображение первого возвращения по траекториям системы 2, не покидающим окрестность $V(\delta,\rho), \quad F_\varepsilon : S(1) \to S(1)$. Инвариантное множество отображения F_ε порождает инвариантное множество системы 2, состоящее из траекторий, не покидающих окрестность $V(\Gamma)$. Окрестность $V(\delta,\rho)$ строилась по возмущенной системе так, что траектория точки $x \in S(1)$, не покидающая окрестность $V(\delta,\rho)$ и не являющаяся асимптотической к предельным множествам, лежащим в $V(\delta,\rho)$, обязана пересекать $S(1)$ как при возрастании так и при убывании t, если числа δ, ρ достаточно малы. Поэтому инвариантное множество системы 2, лежащее в $V(\delta,\rho)$ и состоящее из траекторий не асимптотических к предельным множествам, порождает инвариантное множество отображения F_ε.

Выберем на трансверсали $S(i)$ координаты $\xi_i(\varepsilon), \eta_i(\varepsilon)$ так, чтобы гладкая кривая $W^s_{l_i}(\varepsilon) \cap S(i)$ задавалась уравнением $\eta_i(\varepsilon) = 0$, а кривая $W^u_{l_i}(\varepsilon) \cap S(i)$ — уравнением $\xi_i(\varepsilon) = 0$, при этом точки пересечения траектории γ'_{l_i} с $S(i)$ имели бы положительную вторую координату. Это возможно, так как многообразие $W^u_{l_i}(\varepsilon)$ ориентируемо. По замечанию к теореме I.4.1 при достаточно малом ε последняя траектория из гетероклинического контура Γ'_{i-1} пересекает трансверсаль $S(i)$ в точке $x_i(\varepsilon) = (\xi^0_i(\varepsilon), \mu_i(\varepsilon))$. При этом $x_i(\varepsilon) \to x_i = \gamma_{l_{i-1}} \cap S(i)$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $y_i(\varepsilon) = (0, \eta^0_i(\varepsilon))$ точку пересечения траектории γ'_{l_i} с $S(i)$. Из теоремы I.4.1 следует, что $y_i(\varepsilon) \to y_i = \gamma_{l_i} \cap S(i)$ при $\varepsilon \to 0$.

Как и в случае невозмущенной системы, представим отображение F_ε в виде композиции $F_\varepsilon = F_k(\varepsilon) \cdot \ldots \cdot F_1(\varepsilon)$, где $F_i(\varepsilon)$ — отображение некоторого подмножества трансверсали $S(i)$ в трансверсаль $S(i+1)$ по траекториям системы 2, не покидающим окрестность $V(\delta,\rho)$. Каждое из отображений $F_i(\varepsilon)$ в свою очередь представим в виде $F_i(\varepsilon) = G_{i+1}(\varepsilon) \cdot H_i(\varepsilon)$, где $H_i(\varepsilon)$ — отображение по траекториям возмущенной системы некоторого множества $D_i(\varepsilon) \subset S(i)$ во множество $D^{i+1}(\varepsilon) \subset S(i+1)$, а $G_{i+1}(\varepsilon)$ — отображение по траекториям возмущенной системы, не покидающим окрестность замкнутой траектории $P_{l_{i+1}}(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ эти отображения совпадают с ранее введенными отображениями $H_i(0) = H_i$, $G_{i+1}(0) = G_{i+1}$.

Опишем подробнее области задания и свойства введенных отображений. Для гетероклинических контуров $\Gamma'_i, \ i \in 1:k$, справедливы результаты §2 главы I. В частности, существуют неустойчивые поверхности $Q(\Gamma'_i)$ контуров Γ'_i, трансверсально пересекающих площадки $S(i), \ S(i+1), \ i \in 1:k$. Пусть

$$s_i(\varepsilon) = S(i) \cap Q(\Gamma'_i), \quad s^{i+1}(\varepsilon) = S(i+1) \cap Q(\Gamma'_i), \ i \in 1:k.$$

Параметризуем кривые $s_i(\varepsilon), \ s^{i+1}(\varepsilon)$ параметрами $\bar{\eta}_i = \eta_i(\varepsilon) - \eta^0_i(\varepsilon)$ и $\eta_{i+1}(\varepsilon)$ соответственно. Обозначим через $s^+_i(\varepsilon) \quad (s^-_i(\varepsilon))$ часть кривой $s_i(\varepsilon)$, соответствующую положительным (отрицательным) значениям параметра $\bar{\eta}_i$, а через $s^{i+1}_+(\varepsilon)$ обозначим часть кривой $s^{i+1}(\varepsilon)$, соответствующую положительным значениям параметра $\eta_{i+1}(\varepsilon)$. Гетероклинический контур Γ'_i делит свою неустойчивую поверхность на две компоненты связности. Одна из них состоит из траекторий, проходящих через точки кривой $s_i^+(\varepsilon)$, вторая — из траекторий, проходящих через точки кривой $s_i^-(\varepsilon)$. В §2 было доказано, что определено отображение $h_i(\varepsilon)$ по траекториям системы 2 одной из кривых $s_i^+(\varepsilon),\ s_i^-(\varepsilon)$ в кривую $s_+^{i+1}(\varepsilon)$. Из замечания к теореме I.4.1 следует, что точка $x_i(\varepsilon)$ имеет неотрицательную вторую координату $\mu_i(\varepsilon) \geq 0$, при этом, если $\mu_i(\varepsilon) > 0$, то в контур Γ_i' входит хотя бы одно состояние равновесия. Для определенности будем рассматривать случай, когда $s_i^+(\varepsilon)$ отображается в $s_+^{i+1}(\varepsilon)$. Тогда отображение $h_i(\varepsilon)$ имеет вид

$$\eta_{i+1}(\varepsilon) = h_i(\varepsilon)(\bar{\eta}_i) = C_i\bar{\eta}_i^{E_i} + q_i(\varepsilon, \bar{\eta}_i^{E_i}) + \mu_i(\varepsilon), \tag{II.5.1}$$

где $\mu_i(\varepsilon) \geq 0,\ 0 < E_i \leq 1,\ C_i > 0$, а функция $q_i(t,\varepsilon)$ является бесконечно малой при $t \to 0$ равномерно по $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Когда кривая $s_i^-(\varepsilon)$ отображается в кривую $s_+^{i+1}(\varepsilon)$ в приведенной формуле следует поставить $|\bar{\eta}_i|$ вместо $\bar{\eta}_i$, а везде далее рассматривать кривую $s_i^-(\varepsilon)$ вместо $s_i^+(\varepsilon)$. Как и ранее считаем, что все индексы берутся по модулю k. Из замечания к теореме I.4.1 следует, что при $\mu_i(\varepsilon) \neq 0$ число E_i строго меньше единицы.

Найдем число δ так, чтобы были определены устойчивые кривые $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in S(i)$, на трансверсалях $S(i)$ размера δ для возмущенной системы 2 и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Возможность такого выбора обсуждалась в конце §3 главы II.

Определим множества

$$D_i^+(\varepsilon) = \{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in s_i^+(\varepsilon)\} \subset S(i),$$
$$D_+^i(\varepsilon) = \{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in s_+^i(\varepsilon)\}, \quad i \in 1:k.$$

Множества $D_i(\varepsilon)$ и $D^i(\varepsilon)$ определяются аналогично с использованием кривых $s_i(\varepsilon)$ и $s^i(\varepsilon)$ вместо $s_i^+(\varepsilon)$ и $s_+^i(\varepsilon)$.

Лемма II.5.1. Существуют числа δ_0, ε_0 такие, что при $\delta < \delta_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ на множестве $D_i^+(\varepsilon)$ определено отображение $H_i(\varepsilon)$ по траекториям системы 2, не выходящим из окрестности $V(\delta,\rho)$, во множество $D_+^{i+1}(\varepsilon),\ i \in 1:k$, и оно сжимает с коэффициентом $1/2$ вдоль кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in s_i^+(\varepsilon),\ i \in 1:k$.

Доказательство полностью повторяет рассуждения леммы II.4.1 для невозмущенной системы. Ограничение $\varepsilon < \varepsilon_0$ нужно только для того, чтобы траектории возмущенной системы не покинули окрестность $V(\delta,\rho)$ до пересечения с трансверсалью $S(i+1)$. ■

Определим отображения $pr_i(\varepsilon),\ pr^i(\varepsilon)$ как проекции вдоль сильно устойчивых кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ на поверхности $S(i)$ на кривые s_i и s^i соответственно. Из определения множеств $D_i(\varepsilon),\ D^i(\varepsilon)$ следует, что $pr_i(\varepsilon)D_i(\varepsilon) = s_i, \quad pr^i(\varepsilon)D^i(\varepsilon) = s^i$ и для точки $y \in D_i(\varepsilon)$ выполнено

$$H_i(\varepsilon)\,pr_i(\varepsilon)(y) = pr^{i+1}(\varepsilon)\,H_i(\varepsilon)(y) = h_i(\varepsilon)(x),$$

где $x \in s_i^+(\varepsilon),\ y \in w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$. См. рис. 5.

Рис.5

Как следует из замечания к теореме I.4.1, когда контур Γ_i' содержит состояние равновесия, только через одну из кривых s_i^+, s_i^- проходят траектории системы 2, не покидающие $V(\delta, \rho)$.
Это возможно, если $\mu_i(\varepsilon) \neq 0$. В этом случае отображение $h_i(\varepsilon)$ определено лишь на одной из кривых $s_i^+(\varepsilon)$, $s_i^-(\varepsilon)$. У нас $h_i(\varepsilon)$ определено на кривой $s_i^+(\varepsilon)$. Отсюда следует, что для достаточно малой окрестности O точки $y_i(\varepsilon)$ только через точки множества $O \cap \overline{D_i^+(\varepsilon)}$ могут проходить траектории системы 2, не покидающие окрестность $V(\delta, \rho)$. Исключение возникает при $\mu_i(\varepsilon) = 0$, когда контур Γ_i' не содержит состояний равновесия. В этом случае контур Γ_i' состоит из замкнутых траекторий $P_i(\varepsilon)$, $P_{i+1}(\varepsilon)$ и траектории g_i, по которой трансверсально пересекаются многообразия $W_i^u(\varepsilon)$ и $W_{i+1}^s(\varepsilon)$. Тогда отображение $h_i(\varepsilon)$ можно определить на кривой $s_i(\varepsilon)$, а отображение $H_i(\varepsilon)$ — на множестве $D_i(\varepsilon)$. Однако, траектории, пересекающие множество $D_i(\varepsilon) \setminus \overline{D_i^+(\varepsilon)}$, пересекут секущую $S(i+1)$ в точках, имеющих отрицательную координату $\eta_i(\varepsilon)$ и, в силу ориентируемости устойчивого многообразия $W_{i+1}^s(\varepsilon)$, они покинут окрестность $V(\delta, \rho)$ с ростом t. Поэтому во всех случаях траектории системы 2, не покидающие окрестность $V(\delta, \rho)$ и пересекающие трансверсаль $S(i)$ в достаточно малой окрестности O точки $y_i(\varepsilon)$, могут проходить только через точки множества $O \cap \overline{D_i^+(\varepsilon)}$.

Определим отображение $G_i(\varepsilon)$ некоторого подмножества области $D^i(\varepsilon) \subset S(i)$, состоящего из точек, через которые проходят траектории системы 2, пересекающие при возрастании t область $D_i(\varepsilon) \subset S(i)$, не выходя из окрестности V_{l_i} замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$. Пусть $T_i(\varepsilon)$ — отображение Пуанкаре трансверсали $S(i)$ в себя по траекториям системы 2, построенное для замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$. Точка $(0,0)$ — его неподвижная седловая точка. Будем считать, что области $D_i(\varepsilon)$ и $D^i(\varepsilon)$ столь малы, что $T_i(\varepsilon)D_i(\varepsilon) \cap D_i(\varepsilon) = \emptyset$ и $T_i(\varepsilon)D^i(\varepsilon) \cap D^i(\varepsilon) = \emptyset$.

Кривая s^i трансверсальна к устойчивому многообразию W_i^s в точке $x_i = \gamma_{l_i-1} \cap S(i)$. Кривую $s^i(\varepsilon)$ можно рассматривать как $\mathbb{C}^1$ - близкий диск к кривой s^i. Кроме того, многообразие $W_i^s(\varepsilon)$ $\mathbb{C}^1$ - близко на компактных кусках к многообразию W_i^s. Многообразие W_i^s трансверсально пересекает кривую s^i, поэтому по теореме 2.1 из работы [23] кривая $s^i(\varepsilon)$ трансверсально пересекает многообразие $W_i^s(\varepsilon)$. Из λ - леммы следует, что найдется натуральное число $m_i(\varepsilon)$ такое, что кривая $T_i(\varepsilon)s^i(\varepsilon)$ пересекает каждую из кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$, $x \in s_i^+$, при $m \geq m_i(\varepsilon)$. Множество $D_i^+(\varepsilon)$ представляет собой криволинейный четырехугольник, граница которого состоит из четырех гладких кривых $w_\varepsilon^{ss}(y_i,\delta)$, $w_\varepsilon^{ss}(z_i,\delta)$, g_i^+, g_i^-, где y_i, z_i — граничные точки кривой $s_i^+(\varepsilon)$, кривые g_i^+, g_i^- расположены в областях $\xi_i(\varepsilon) > 0$ и $\xi_i(\varepsilon) < 0$ соответственно. Изменим множество $D_i(\varepsilon)$, заменив кривую g_i^+ на гладкую кривую, лежащую между кривой $T_i^{m_i(\varepsilon)-1}(\varepsilon)s^i(\varepsilon)$ и ее образом при отображении $T_i(\varepsilon)$. Из сказанного выше следует, что четыре новых кривых ограничивают новый меньший четырехугольник, который будем обозначать по-старому $D_i(\varepsilon)$. По построению $D_i(\varepsilon) \quad T_i^m(\varepsilon)D^i(\varepsilon) \cap D_i(\varepsilon) = \emptyset$ при $m < m_0(\varepsilon)$.

Точка $x_i(\varepsilon)$ кривой $s_+^i(\varepsilon) \subset s^i(\varepsilon)$ сколь угодно близка к точке $x_i \in W_i^s$, если число ε_0 достаточно мало и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Поэтому найдутся числа ε_0, $n_i(\varepsilon) > m_i(\varepsilon) + 1$ такие, что множество $\Sigma_i^m = T_i^m(\varepsilon)D_+^i(\varepsilon) \cap D_i^+(\varepsilon) \neq \emptyset$, если $m_i(\varepsilon) \leq m \leq n_i(\varepsilon)$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$, и $\Sigma_i^m(\varepsilon) = \emptyset$ при $m \notin m_0(\varepsilon) : n_0(\varepsilon)$. Если $x_i(\varepsilon) \in W_i^s(\varepsilon)$, множество $\Sigma_i^m(\varepsilon) \neq \emptyset$ при всех $m \geq m_i(\varepsilon)$, поэтому положим $n_i(\varepsilon) = \infty$. По выбору множества $D_+^i(\varepsilon)$ множества $\Sigma_i^m(\varepsilon)$ не пересекаются. Обозначим через $\Delta_i^m = T_i^{-m}(\varepsilon)\Sigma_i^m(\varepsilon)$ для $n_i(\varepsilon) \geq m \geq m_i(\varepsilon)$. Траектория точки, лежащей в Δ_m^i делает m оборотов вокруг $P_i(\varepsilon)$ до того, как пересечь множество $D_i(\varepsilon)$. (см. рис.6)

Рис. 6

Заметим, что через точки $x \in D^i(\varepsilon)$, не лежащие во множестве $\Delta^i(\varepsilon) = \bigcup_{m=m_i(\varepsilon)}^{n_i(\varepsilon)} \Delta_m^i$, проходят траектории, покидающие окрестность $V(\delta,\rho)$ либо при возрастании, либо при убывании t.

Определим отображение $G_i(\varepsilon) : \varDelta_i(\varepsilon) \to D_i(\varepsilon)$, положив для $x \in \varDelta^i_m(\varepsilon) \quad G_i(\varepsilon)(x) = T_i^m(\varepsilon)(x),\ m_i(\varepsilon) \le m \le n_i(\varepsilon)$. На каждом из множеств $\varDelta^i_m(\varepsilon)$ отображение $G_i(\varepsilon)$ — диффеоморфизм.

Семейство кривых $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\ x \in S(i),\ i \in 1:k$, инвариантно и липшецево по x. Поэтому отображения $pr_i(\varepsilon) : D_i(\varepsilon) \to s_1$ и $pr^i(\varepsilon) : D^i(\varepsilon) \to s^i$ липшецевы и

$$pr_i(\varepsilon)G_i(\varepsilon)(y) = pr_i(\varepsilon)G_i(\varepsilon)pr^i(\varepsilon)(y), \quad y \in \varDelta^i(\varepsilon).$$

Пусть $\delta^i_m(\varepsilon) = pr^i(\varepsilon)\varDelta^i_m(\varepsilon),\ i \in 1:k,\ m_i(\varepsilon) \le m \le n_i(\varepsilon)$. Ясно, что $\delta^i_m(\varepsilon)$ — интервал, лежащий вместе со своим замыканием в $s^i_+(\varepsilon)$. Если точка $x_i(\varepsilon)$ лежит в устойчивом многообразии $W^s_{l_i+1}(\varepsilon)$, или ее образы $T_i^m(\varepsilon)(x_i(\varepsilon))$ не принадлежат множеству $D_i^+(\varepsilon)$, то каждое из множеств $\Sigma_i^m,\ m \in m_i(\varepsilon) : n_i(\varepsilon)$, пересекает все устойчивые кривые $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\ x \in s_i^+$. В этом случае правая граница интервалов δ^i_m и прямоугольников $\varDelta^i_m,\ m \in m_i(\varepsilon) : n_i(\varepsilon)$, лежит на $W^s_{i+1}(\varepsilon)$. Когда $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \in D_i^+(\varepsilon)$, прямоугольник $\Sigma_i^{n_i(\varepsilon)}$ пересекает не все устойчивые кривые $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta),\ x \in s_i^+$, и правая граница последнего интервала $\delta^i_{n_i(\varepsilon)}$ не лежит на $W^s_{i+1}(\varepsilon)$.

Лемма II.5.2. Существуют числа $\varepsilon_0 > 0,\ \gamma > 1$ такие, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ отображение $G_i(\varepsilon)$ сжимает на множестве $\varDelta^i(\varepsilon)$ вдоль сильно устойчивых кривых $w^{ss}_\varepsilon(x,\delta)$ размера δ, построенных по трансверсали $S(i),\ i \in 1:k$, а отображение $pr_i(\varepsilon)\cdot G_i(\varepsilon)$ растягивает на множестве $pr_i(\varepsilon)\varDelta^i(\varepsilon)$:

$$d(G_i(\varepsilon)(y), G_i(\varepsilon)(z)) < d(y,z)/2, \quad y,z \in w^{ss}_\varepsilon(x,\delta), \quad x \in s^i_+,$$

$$d(pr_i(\varepsilon)G_i(\varepsilon)(x_1), pr_i(\varepsilon)G_i(\varepsilon)(x_2)) > 2\gamma^{m-m_i(\varepsilon)}d(x_1,x_2),$$

$$x_1,x_2 \in \delta^i_m(\varepsilon), \quad i \in 1:k.$$

Доказательство. Так как точка $x_i(\varepsilon)$ сколь угодно близка к точке x_i, если число ε_0 достаточно мало и $\varepsilon < \varepsilon_0$, то число $n_i(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Выбор числа $m_i(\varepsilon)$ подчинен лишь одному условию $m_i(\varepsilon) + 1 < n_i(\varepsilon)$, поэтому можно считать $m_i(\varepsilon)$ сколь угодно большим, если число ε_0 достаточно мало и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Дальнейший ход рассуждений полностью повторяет доказательство леммы II.4.2 с заменой числа $l(i)$ на $m_i(\varepsilon)$. Лемма II.5.2 доказана. ■

Следствие. Число ε_0 можно считать столь малым, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\operatorname{diam}\delta^i_m(\varepsilon) < \gamma^{-(m-m_i(\varepsilon))}, \quad m_i(\varepsilon) \le m \le n_i(\varepsilon),\ i \in 1:k.$$

■

Рассмотрим множества

$$d_i^m(\varepsilon) = h_i^{-1}(\varepsilon)\delta^{i+1}_m(\varepsilon), \quad D_i^m(\varepsilon) = pr_i^{-1}d_i^m,$$

$m_i(\varepsilon) \le m \le n_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$.

Рис. 7

В обозначениях на рисунке 7 опущен параметр ε. Поскольку $\delta_m^{i+1}(\varepsilon)$ — интервал и $\overline{\delta_m^{i+1}(\varepsilon)} \subset s_+^{i+1}(\varepsilon)$, $m \in m_i(\varepsilon) : n_i(\varepsilon)$, а $h_i(\varepsilon)$ взаимно однозначно и непрерывно, то $d_i^m(\varepsilon)$ — интервал и $\overline{d_i^m(\varepsilon)} \subset s_i^+(\varepsilon)$. Одна из границ интервала $d_i^m(\varepsilon)$ лежит на $W^s_{l_{i+1}+1}(\varepsilon)$,
$m_i(\varepsilon) \leq m < n_i(\varepsilon)$. Из следствия к лемме II.5.2 и вида II.5.1 отображения $h_i(\varepsilon)$ имеем $\operatorname{diam} d_i^m < \bar{K}\gamma^{m_i(\varepsilon)-m}$, $\quad m_i(\varepsilon) \leq m \leq n_i(\varepsilon)$. Увеличивая, если нужно, числа $m_i(\varepsilon)$ (что, возможно, приведет к уменьшению числа ε_0), можно считать $\bar{K} = 1$.

Лемма II.5.3. На множествах $D_i^m(\varepsilon)$, $m_{i+1}(\varepsilon) \leq m \leq n_{i+1}(\varepsilon)$, задано отображение $F_i(\varepsilon) = G_{i+1}(\varepsilon) \cdot H_i(\varepsilon)$ по траекториям системы 2. При этом

$$F_i(\varepsilon)D_i^m(\varepsilon) \subset \Sigma_{i+1}^m(\varepsilon) \subset D_{i+1}^+(\varepsilon), \quad m_{i+1}(\varepsilon) \leq m \leq n_{i+1}(\varepsilon),$$

$$pr_{i+1}(\varepsilon)F_i(\varepsilon)D_i^m(\varepsilon) = s_{i+1}^+(\varepsilon), \quad m_{i+1}(\varepsilon) \leq m < n_{i+1}(\varepsilon).$$

Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство леммы II.4.3. ■

Замечание 1. Последнее равенство в утверждении леммы верно и для $m = n_{i+1}(\varepsilon)$, если точка $T_{i+1}^{n_{i+1}(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_{i+1}(\varepsilon)) \notin D_{i+1}^+(\varepsilon)$.

Замечание 2. Для точек $x \in d_i^m(\varepsilon)$ кривая $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ лежит в области задания отображения $F_i(\varepsilon)$. Для таких x выполнено $\overline{F_i(\varepsilon)w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(F_i(\varepsilon)(x),\delta)) \cap D_{i+1}^+(\varepsilon)$.

Доказательство. Образ кривой $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$, $x \in s_i^+(\varepsilon)$, при отображении $H_i(\varepsilon)$ содержится вместе со своим замыканием в кривой $w_\varepsilon^{ss}(y,\delta)$, где $y = H_i(\varepsilon)(x) \in s_+^{i+1}(\varepsilon)$, поскольку $H_i(\varepsilon)$ сжимает вдоль кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$. Из определения отображения $G_{i+1}(\varepsilon)$ следует, что

$$G_{i+1}(\varepsilon)w_\varepsilon^{ss}(y,\delta) \subset w_\varepsilon^{ss}(z,\delta) \cap D_{i+1}^+(\varepsilon),$$

где $z = pr_{i+1}(\varepsilon)G_{i+1}(\varepsilon)y$. Таким образом,

$$\overline{F_i(\varepsilon)w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(z,\delta) = w_\varepsilon^{ss}(F_i(\varepsilon)(x),\delta) \cap D_{i+1}(\varepsilon).$$

Кроме того, отображение $F_i(\varepsilon)$ сжимает вдоль кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$ с коэффициентом $1/2$, так как этим свойством обладали отображения $H_i(\varepsilon)$ и $G_{i+1}(\varepsilon)$. ■

Опишем область задания отображения $F_\varepsilon = F_k(\varepsilon) \cdot F_{k-1}(\varepsilon) \cdot \ldots \cdot F_1(\varepsilon)$. Для этого рассмотрим отображение $f_i(\varepsilon) = pr_{i+1}(\varepsilon) \cdot G_{i+1}(\varepsilon) \cdot h_i(\varepsilon)$, $i \in 1:k$. Поскольку отображения $G_i(\varepsilon), H_i(\varepsilon)$ сохраняют семейства сильно неустойчивых кривых, то

$$pr_{i+1}(\varepsilon)F_i(\varepsilon) = pr_{i+1}(\varepsilon)G_{i+1}(\varepsilon)pr^{i+1}(\varepsilon)H_i(\varepsilon) =$$

$$= pr_{i+1}(\varepsilon)G_{i+1}(\varepsilon)H_i(\varepsilon)pr_i(\varepsilon) = f_i(\varepsilon), \quad i \in 1:k.$$

Так как отображения $F_i(\varepsilon)$ сжимают вдоль кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)$, $x \in s_i^+$, то достаточно описать область задания отображения $f_\varepsilon = f_k(\varepsilon) \cdot \ldots \cdot f_1(\varepsilon)$. Из леммы II.5.3 следует, что $f_i(\varepsilon)$ гомеоморфно отображает каждый из интервалов d_i^m, $m_{i+1}(\varepsilon) \leq m < n_{i+1}(\varepsilon)$, $i \in 1:k$, на кривую $s_{i+1}^+(\varepsilon)$. При этом $f_i(\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица и растягивает с коэффициентом $2\gamma^{m-m_{i+1}(\varepsilon)}$. Для интервала $d_i^{n_{i+1}(\varepsilon)}$ его образ будет совпадать с $s_{i+1}^+(\varepsilon)$, если $T_{i+1}^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \notin D_{i+1}^+(\varepsilon)$, в противном случае $f_i(\varepsilon)d_i^{n_{i+1}(\varepsilon)} = \widetilde{s}_{i+1}^+$ и $\widetilde{s}_{i+1}^+$ содержится в s_{i+1}^+ вместе со своим замыканием.

Определение. Множества $D_i^m(\varepsilon)$ и $\Sigma_i^l(\varepsilon)$ пересекаются правильно, если

$$\overline{d_i^m(\varepsilon)} = pr_i(\varepsilon)\overline{D_i^m(\varepsilon)} \subset pr_i(\varepsilon)\Sigma_i^l(\varepsilon) = f_{i-1}(\varepsilon)d_{i-1}^l(\varepsilon),$$

где вложение строгое.

Введем множество $E(\varepsilon)$, состоящее из наборов $e = (e_1,\ldots,e_k)$, $e_i \in N$, $m_{i+1}(\varepsilon) \leq e_i \leq n_{i+1}(\varepsilon)$, $i \in 1:k$. Если $n_{i+1}(\varepsilon) = \infty$, то считаем, что ограничение сверху на число e_i отсутствует. Кроме того, множества $D_i^{e_i}(\varepsilon)$ и $\Sigma_i^{e_{i-1}}(\varepsilon)$ пересекаются правильно.

Рис.8

Поскольку $f_{i-1}(\varepsilon)d_{i-1}^{l} = s_i^{+} \supset \overline{d_i^m}$, если $l < n_i(\varepsilon)$ и $m_i(\varepsilon) \leq m \leq n_i(\varepsilon)$, то свойство правильного пересечения может нарушаться лишь для пар $D_i^m(\varepsilon)$, $\Sigma_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)$. Условие правильного пересечения выполняется для пары $D_i^{e_i}(\varepsilon)$ и $\Sigma_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)$, если точка $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon))$ не лежит во множестве $D_i^{e_i}(\varepsilon)$. Оно означает, что множества $\Sigma_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)$ и $D_i^{e_i}(\varepsilon)$ пересекаются как показано на рисунке 8.

Поскольку $n_i(\varepsilon) > m_i(\varepsilon) + 1,\ i \in 1:k$, то множество $E(\varepsilon)$ состоит не менее, чем из 2^k наборов.

Лемма II.5.4. Для любого набора $e = (e_1, \ldots, e_k) \in E(\varepsilon)$ найдется интервал d_e такой, что отображение f_ε определено на d_e и является гомеоморфизмом: $f_\varepsilon d_e = s_1^{+}(\varepsilon)$, если $e_k < n_1(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon d_e = \widetilde{s}_1^{+}(\varepsilon)$, если $e_k = n_1(\varepsilon)$, $\overline{d_e} \subset d_1^{e_1}$ и для $x \in d_e$ точка $f_s(\varepsilon) \cdot \ldots \cdot f_1(\varepsilon)(x) \in d_{s+1}^{e_{s+1}},\ s \in 1:k-1$. При этом $\operatorname{diam} d_e < \gamma^k$ и отображение f_ε растягивает на d_e с коэффициентом γ^k.

Доказательство леммы следует из определения множеств d_i^m, $E(\varepsilon)$ и полностью повторяет доказательство леммы II.4.4. Единственное отличие состоит в том, что для невозмущенной системы 1 $pr_i(\varepsilon)\Sigma_i^m = s_i^+ \supset d_i^j$ при $m \geq m_i$ и $j > m_{i+1}$, поскольку n_i равно бесконечности. Поэтому второе условие в определении $E(\varepsilon)$ является излишним при доказательстве леммы в невозмущенном случае. ■

Для $e \in E(\varepsilon)$ рассмотрим множество $D_e(\varepsilon) = pr_1^{-1}(\varepsilon)d_e$. По замечанию 2 к лемме II.5.3 для отображений $F_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$, имеем

$$\overline{F_i(\varepsilon)w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(F_i(\varepsilon)(x),\delta) \cap D_{i+1}^+(\varepsilon) = w_\varepsilon^{ss}(f_i(\varepsilon)(x),\delta),$$

если $x \in d_e,\ e \in E(\varepsilon)$. Но $F_\varepsilon = F_k(\varepsilon)\cdot\ldots\cdot F_1(\varepsilon)$. Отсюда и из леммы II.5.4 следует

Лемма II.5.5. Отображение F_ε определено на каждом из множеств $D_e(\varepsilon),\ e \in E(\varepsilon)$, и для $x \in d_e,\ e \in E(\varepsilon)$ имеем $\overline{F_\varepsilon w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(f_\varepsilon(x),\delta)$. Для множества $\Sigma_e(\varepsilon) = F_\varepsilon D_e(\varepsilon)$ выполнено равенство $pr_1(\varepsilon)\Sigma_e(\varepsilon) = s_1^+$, если $e = (e_1,\ldots,e_k) \in E(\varepsilon)$ и $e_k < n_1(\varepsilon)$ и $pr_1(\varepsilon)\Sigma_e(\varepsilon) = \widetilde{s}_1^+$, если $e_k = n_1(\varepsilon)$. Кроме того, отображение F_ε сжимает вдоль кривых $w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in d_e$, с коэффициентом 2^{-k}. ■

Замечание 1. Траектории возмущенной системы, проходящие через точки множества $D_e,\ e = (e_1,\ldots,e_k) \in E(\varepsilon)$, до пересечения с трансверсалью $S(1)$ делают последовательно $e_1, e_2, \ldots, e_k$ оборотов в окрестностях замкнутых траекторий $P_2(\varepsilon),\ldots,P_k(\varepsilon),P_1(\varepsilon)$ до того как они вновь пересекают трансверсаль $S(1)$.

Замечание 2. Отображение F_ε задано на множестве $D(\varepsilon) = \{\bigcup D_e(\varepsilon),\ e \in E(\varepsilon)\} \subset D_1^+(\varepsilon)$. В общем случае $D(\varepsilon)$ не является максимальным подмножеством D_1^+, на котором задано отображение F_ε. Действительно, в ходе построения множества $D(\varepsilon)$ из рассмотрения исключались неправильные неборы $e = (e_1,\ldots,e_k)$ такие, что $e_{i-1} = n_i(\varepsilon),\ n_i(\varepsilon)$ – конечное число, и пересечение множеств $\Sigma_i^{e_{i-1}}(\varepsilon)$ и $D_i^{e_i}(\varepsilon)$ является неправильным при некотором $i \in 2:k$. Такие наборы e тоже могут порождать интервалы d_e, на которых задано отображение f_ε. Соответствующие этим интервалам множества $D_e(\varepsilon) = pr_1^{-1}(\varepsilon)d_e$ могут входить в область задания F_ε. Неправильные наборы e отсутствуют, если точки $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon))$ не лежат во множестве $D_i^m(\varepsilon),\ i \in 1:k,\ m_{i+1}(\varepsilon) \leq m \leq n_{i+1}(\varepsilon)$. В этом случае множество $D(\varepsilon)$ — максимальное по включение подмножество D_1^+, на котором определено отображение F_ε. Траектории точек множества $D_1^+(\varepsilon) \setminus D(\varepsilon)$ покидают окрестность $V(\delta,\rho)$ гетероклинического контура Γ с ростом t в этом случае. ■

Рассмотрим пространство $\Omega(\varepsilon)$ бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, каждый член которых лежит в $E(\varepsilon)$, $\omega_s \in E(\varepsilon),\ s \in Z$, и для соседних членов $\omega_s = (e_1^s,\ldots,e_k^s)$, $\omega_{s+1} = (e_1^{s+1},\ldots,e_k^{s+1}),\ s \in Z$, множества $D_1^{e_1^{s+1}}(\varepsilon)$ и $\Sigma_1^{e_k^s}(\varepsilon)$ пересекаются правильно. Метрику ρ в пространстве $\Omega(\varepsilon)$ введем так же как для пространства Ω. Заметим, что если $n_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$, — конечны, то пространство $\Omega(\varepsilon)$ компактно в этой метрике.

Введем отображение сдвига σ в пространстве $\Omega(\varepsilon)$. Для $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{\infty} \in \Omega(\varepsilon)$ положим $\sigma\,\omega = v$, где $v = \{v_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$ — последовательность такая, что $v_s = \omega_{s+1},\ s \in Z$. Из определения пространства $\Omega(\varepsilon)$ следует, что σ отображает $\Omega(\varepsilon)$ в себя.

Лемма II.5.6. Для любой последовательности $\omega \in \Omega(\varepsilon),\ \omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$, существует единственная точка $y = \Psi_\varepsilon(\omega) \in D(\varepsilon)$ такая, что $F_\varepsilon^s(y) \in D_{\omega_s}(\varepsilon),\ s \in Z$.

Доказательство. Эта лемма является аналогом лемм II.4.6 и II.4.8, в которых рассматривалась невозмущенная система. Докажем сначала, что существует единственная точка $z = \psi_\varepsilon(\omega) \in d_{\omega_0}$ такая, что $F_\varepsilon^s\, w_\varepsilon^{ss}(z,\delta) \subset D_{\omega_s}(\varepsilon),\ s \in N$.

Для отображений F_ε и $pr_1(\varepsilon)$ имеем $pr_1(\varepsilon)\cdot F_\varepsilon = pr_1(\varepsilon)\cdot F_k(\varepsilon)\cdot\ldots\cdot F_1(\varepsilon)$. Но $pr_{i+1}(\varepsilon)\cdot F_i(\varepsilon) = pr_{i+1}(\varepsilon)\cdot F_i(\varepsilon)\cdot pr_i(\varepsilon) = f_i(\varepsilon)\cdot pr_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$. Поэтому

$$pr_1(\varepsilon)\cdot F_\varepsilon = pr_1(\varepsilon)\cdot F_k(\varepsilon)\cdot pr_k(\varepsilon)\cdot F_{k-1}(\varepsilon)\cdot\ldots F_1(\varepsilon) =$$

$$= f_k(\varepsilon)\cdot pr_k(\varepsilon)\cdot F_{k-1}(\varepsilon)\cdot\ldots F_1(\varepsilon) = \cdots =$$

$$= f_k(\varepsilon)\cdot f_{k-1}(\varepsilon)\cdot\ldots\cdot f_1(\varepsilon)\cdot pr_1(\varepsilon) = f_\varepsilon\cdot pr_1(\varepsilon).$$

Определим множество

$$R_m(\omega) = \{x \in D_{\omega_0}(\varepsilon):\ F_\varepsilon^s(x) \in D_{\omega_s}(\varepsilon),\ s \in 0:m\},\ m \in N.$$

Поскольку $D_{\omega_s}(\varepsilon) = \{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in d_{\omega_s}\}$ и по лемме II.5.5 $\overline{F_\varepsilon w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(f_\varepsilon(x),\delta)$, то $R_m(\omega) = pr_1^{-1}(\varepsilon)r_m$, где $r_m = \{z \in d_{\omega_0}:\ f_\varepsilon^s(z) \in d_{\omega_s},\ s \in 0:m\},\ m \in N$. По аналогии с доказательством леммы II.4.6 нетрудно показать по индукции, что r_m — интервал: $\overline{r_m} \subset r_{m-1},\ f_\varepsilon^{m+1} r_m = s_1^+(\varepsilon)$, если в наборе $\omega_m = (e_1^m,\ldots,e_k^m)$ число $e_k^m \neq n_1(\varepsilon)$, и $f_\varepsilon^{m+1} r_m = \widetilde{s}_1^+$, если $e_k^m = n_1(\varepsilon)$. При этом $\operatorname{diam} r_m < \gamma^{mk}$.

Действительно, $r_m = f_\varepsilon^{-1}(f_\varepsilon\, d_{\omega_0} \cap d_{\omega_1})$. Множество $f_\varepsilon\, d_{\omega_s}$ по лемме II.5.4 совпадает $s_1^+(\varepsilon)$, если $e_k^s < n_1(\varepsilon)$, и совпадает с $\widetilde{s}_1^+(\varepsilon)$, если $n_1(\varepsilon)$ — конечное число и $e_k^s = n_1(\varepsilon)$. В обоих случаях $f_\varepsilon\, d_{\omega_s} \supset \overline{d_{\omega_{s+1}}}$. В первом случае это очевидно, так как $s_1^+(\varepsilon) \supset \overline{d_e},\ e \in E(\varepsilon)$, во втором, по определению $\Omega(\varepsilon)$, множества $D_1^{\omega_{s+1}^1}(\varepsilon)$ и $\Sigma_1^{n_1(\varepsilon)}(\varepsilon)$ пересекаются правильно, то есть $f_k(\varepsilon)\overline{d_k^{\omega_s^k}} \subset d_1^{\omega_{s+1}^1}$. Применяя это для $s = 0$ и замечая, что $f_\varepsilon\, d_{\omega_0} \subset f_k(\varepsilon) d_k^{\omega_0^k}$, $\quad d_1^{\omega_1^1} \supset d_{\omega_1}$ и $f_\varepsilon|_{d_{\omega_0}}$ — гомеоморфизм, получим базу индукции. Индукционный переход осуществляется аналогичным рассуждением. По индукционному предположению $f_\varepsilon^{m+1} r_m$ равно либо $s_1^+(\varepsilon)$, либо $\widetilde{s}_1^+(\varepsilon)$. И в том и другом случае $f_\varepsilon^{m+1} r_m \supset d_{\omega_{m+1}}$. Множество $r_{m+1} = f_\varepsilon^{-(m+1)}(f_\varepsilon^{m+1} r_m \cap d_{\omega_{m+1}})$, поэтому r_{m+1} — интервал и $\overline{r_{m+1}} \subset r_m$. Кроме того,

$$f_\varepsilon^{m+2} r_{m+1} = f_\varepsilon^{m+2}\cdot f_\varepsilon^{-(m+1)}(f_\varepsilon^{m+1} r_m \cap d_{\omega_{m+1}}) =$$

$$= f_\varepsilon(f_\varepsilon^{m+1} r_m \cap d_{\omega_{m+1}}) = f_\varepsilon\, d_{\omega_{m+1}}.$$

Поскольку отображение f_ε является гомеоморфизмом на $d_{\omega_{m+1}}$ и $f_\varepsilon\, d_{\omega_{m+1}} = s_1^+(\varepsilon)$, если $e_k^{m+1} < n_1(\varepsilon)$, и $f_\varepsilon\, d_{\omega_{m+1}} = \widetilde{s}_1^+(\varepsilon)$, если $e_k^{m+1} = n_1(\varepsilon)$, то этими же свойствами обладает отображение f_ε^{m+2} на интервале r_{m+1}.

Итак, имеется последовательность вложенных замкнутых интервалов $\overline{r_1} \supset \overline{r_2} \supset \dots \supset \overline{r_m} \supset \dots$. Так как по лемме II.5.4 f_ε растягивает с коэффициентом γ^k, $\gamma < 1$, и $f_\varepsilon^{m+1} r_m \subset s_1^+(\varepsilon)$, то $\operatorname{diam} r_m < C\gamma^{mk}$, где C — некоторая постоянная. Отсюда следует, что множество $\cap_{m=0}^\infty r_m$ состоит из одной точки $\psi_\varepsilon(\omega)$. По лемме II.5.5 имеем $F_\varepsilon^s\, w_\varepsilon^{ss}(\psi_\varepsilon(\omega),\delta) \subset w_\varepsilon^{ss}(f_\varepsilon^s(\psi_\varepsilon(\omega)),\delta) \subset pr_1^{-1} d_{\omega_s} = D_{\omega_s}(\varepsilon),\ s \in N$.

Для завершения доказательства покажем, что на кривой $w_\varepsilon^{ss}(\psi_\varepsilon(\omega),\delta)$ лежит единственная точка $\Psi_\varepsilon(\omega)$ такая, что $F_\varepsilon^{-s}\Psi_\varepsilon(\omega) \in D_{\omega_{-s}}(\varepsilon),\ s \in N \setminus \{0\}$.

Рассмотрим множество

$$R_{-m}(\omega) = \{x \in D_{\omega_0}(\varepsilon) : \Phi_\varepsilon^{-s}(x) \in D_{\omega_{-s}}(\varepsilon),\ s \in 1:m\}$$

и последовательность $v = \sigma^{-m}\omega \in \Omega(\varepsilon)$. Как было показано выше, множество $R_m(v) = pr_1^{-1}(\varepsilon) r_m(v)$, где $r_m(v)$ — интервал, лежащий в $\sigma_{v_0} = \sigma_{\omega_{-m}}$. Кроме того, $\overline{r_m(v)} \subset r_{m-1}(v)$ и $f_\varepsilon^{m+1} r_m(v) = s_1^+(\varepsilon)$, если в наборе $v_m = \omega_0 = (e_1^0,\dots,e_k^0)$ число $e_k^0 < n_1(\varepsilon)$, и $f_\varepsilon^{m+1} r_m(v) = \widetilde{s}_1^+(\varepsilon)$, если $n_1(\varepsilon)$ — конечное число и $e_k^0 = n_1(\varepsilon)$. Из определения множеств $R_m(v)$ и $R_{-m}(\omega)$ следует, что $R_{-m}(\omega) = F_\varepsilon^m R_m(v)$. Так как $R_m(v) = \{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in r_m(v)\}$, то из леммы II.5.5 следует, что $\overline{F_\varepsilon^s w_\varepsilon^{ss}(x,\delta)} \subset w_\varepsilon^{ss}(f_\varepsilon^s(x),\delta)$, при этом отображение F_ε^s сжимает с коэффициентом 2^{-ks}. Тогда $\operatorname{diam}(w_\varepsilon^{ss}(y,\delta) \cap R_{-m}(\omega)) < \delta/2^{km}$, для $y \in s_1^+(\varepsilon)$. Как было показано выше, $f_\varepsilon\, d_{\omega_s} \supset d_{\omega_{s+1}},\ s \in Z$, и $f_\varepsilon|_{d_{\omega_s}}$ — гомеоморфизм. Поэтому найдется единственный набор точек $\{y_{-s}\},\ s \in N$, такой, что $y_{-s} \in d_{\omega_{-s}},\ f_\varepsilon\, y_{-s-1} = y_{-s}$ и $y_0 = f_\varepsilon\, y_{-1}$. Рассмотрим кривые $w_\varepsilon^{ss}(y_{-s},\delta) = l_{-s}$. По определению последовательности $\{y_{-s}\}$ точка $y_{-m} \in r_m(v)$, поэтому кривая $l_{-m} \subset R_m(v)$.

Отсюда следует, что $F_\varepsilon^s l_{-s} \subset l_0$ и $\operatorname{diam} F_\varepsilon^s l_{-s} < \delta/2^{sk}$. По лемме II.5.5 $\overline{F_\varepsilon l_{-s}} \subset l_{-s+1}$, поэтому $\overline{F_\varepsilon^s l_{-s}} \subset F_\varepsilon^{-s+1} l_{-s+1}$. Таким образом, на кривой l_0 лежит последовательность вложенных замкнутых дуг $l_0 \supset \overline{F_\varepsilon l_{-1}} \supset F_\varepsilon l_{-1} \supset \dots \supset \overline{F_\varepsilon^s l_{-s}} \supset F_\varepsilon^s l_{-s} \supset \dots$, диаметр которых стремится к нулю. Отсюда следует, что множество $\bigcap_{m=0}^\infty F_\varepsilon^m l_{-m}$ состоит из одной точки $\Psi_\varepsilon(\omega)$.

Из способа построения точки $\Psi_\varepsilon(\omega)$ следует, что $F_\varepsilon^s(\Psi_\varepsilon(\omega)) \subset D_{\omega_s},\ s \in Z$. Лемма II.5.6 доказана. ■

Замечание. В ходе доказательства были построены множества $R_m(\omega)$ и $R_{-m}(\omega)$, $m \in N$, такие, что $\Psi_\varepsilon(\omega) \in R_m(\omega) \cap R_{-m}(\omega),\ m \in N$. Эти множества характеризовались следующими свойствами

$$\operatorname{diam} pr_1(\varepsilon)\, R_m(\omega) < C\gamma^{mk}, \quad \gamma < 1,$$

$$\operatorname{diam}(R_{-m}(\omega) \cap w_\varepsilon^{ss}(y,\delta)) < \delta/2^{km}, \quad y \in s_1^+(\varepsilon).$$

Учитывая гладкость кривых $w_\varepsilon^{ss}(y,\delta)$, получим

$$\operatorname{diam}(R_m(\omega) \cap R_{-m}(\omega)) \to 0, \quad m \to \infty.$$

■

Рассмотрим отображение $\Psi_\varepsilon: \ \Omega(\varepsilon) \to D_1(\varepsilon)$, определенное в лемме II.5.6. Пусть $I(\varepsilon) = \Psi_\varepsilon \, \Omega(\varepsilon)$. Из того, что $F_\varepsilon^s(\Psi_\varepsilon(\omega)) \in D_{\omega_s}(\varepsilon) \subset D_1(\varepsilon), \ s \in Z$, следует, что $I(\varepsilon)$ — инвариантное множество отображения $F_\varepsilon|_{D_1}$.

Лемма II.5.7. Отображение $\Psi_\varepsilon: \ \Omega(\varepsilon) \to I(\varepsilon)$ является гомеоморфизмом, топологически сопрягающим отображение сдвига σ на $\Omega(\varepsilon)$ и отображение F_ε на $I(\varepsilon)$.

Доказательство. Сходимость последовательности $\{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$ к последовательности ω в метрике ρ означает, что для любого m существует число $s(m)$ такое, что точки $\Psi_\varepsilon(\omega_s) \in R_m(\omega) \cap R_{-m}(\omega)$ при $s > s(m)$. Множества $R_m(\omega) \cap R_{-m}(\omega)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки $\Psi_\varepsilon(\omega)$, поэтому отображение Ψ_ε непрерывно. Непрерывность обратного отображения, когда пространство $\Omega(\varepsilon)$ компактно, следует из непрерывности Ψ_ε. $\Omega(\varepsilon)$ — компактно, когда все числа $n_i(\varepsilon)$ конечны. В общем случае для точек $y \in I(\varepsilon)$, попадающих во множество $R_m(\omega) \cap R_{-m}(\omega)$, последовательности $v = \Psi_\varepsilon^{-1}(y)$ имеют одинаковые члены с номерами $s: \ |s| \le m, \quad v_s = \omega_s, \ s \in -m : m$, где $v = \{v_s\}_{s \in N}, \ \omega = \{\omega_s\}_{s \in N}$. Из определения метрики ρ следует, что $\rho(v, \omega) < 1/2^{m-1}$ в этом случае. Таким образом, отображение Ψ_ε^{-1} непрерывно.

Кроме того, из определения Ψ_ε следует, что $\Psi_\varepsilon \, \sigma(\omega) = F_\varepsilon \Psi_\varepsilon(\omega)$. Лемма II.5.7 доказана. ■

Как было доказано в лемме II.4.10, отображение σ хаотично. Повторяя рассуждения доказательства теоремы II.4.1 получим, что отображение F_ε хаотично на $I(\varepsilon)$. Рассмотрим множество $J(\varepsilon)$, состоящее из траекторий возмущенной системы 2, пересекающих трансверсаль $S(1)$ в точках множества $I(\varepsilon) \subset D_1^+(\varepsilon)$. Из инвариантности $I(\varepsilon)$ относительно отображения F_ε следует, что $J(\varepsilon)$ — инвариантное множество системы 2. Аналогично доказательству теоремы II.1.2 нетрудно получить, что $J(\varepsilon)$ — хаотично. Кроме того, из построения множества $I(\varepsilon)$ следует, что $\overline{J(\varepsilon)} \subset V(\delta, \rho) \subset V(\Gamma)$. Таким образом, теорема II.5.1 доказана. ■

Ясно, что $\overline{J(\varepsilon)}$ также инвариантное хаотическое множество системы 2.

Рассмотрим множество $W(\Gamma) = \{\bigcup_{i \in 1:m} (V_i(\delta) \cup Q_i')\}$, в котором $V_i(\delta)$ — окрестности предельных множеств цикла Γ из определения стандартной окрестности $V(\delta, \rho)$, а Q_i' — трубки траекторий возмущенной системы 2. Для $i \ne l_j \pm 1, \ j \in 1 : k, \quad Q_i'$ совпадает с трубкой траекторий $Q_i(\rho)$ из определения стандартной окрестности $V(\delta, \rho)$ цикла Γ. Для $i = l_j + 1, \ j \in 1 : k, \quad Q_i'$ состоит из дуг траекторий системы 2 с концами на прямоугольнике $D_j(\varepsilon)$ и границе окрестности $V_{i+1}(\delta)$. Для $i = l_j - 1, \ j \in 1 : k, \quad Q_i'$ состоит из дуг траекторий системы 2 с концами на прямоугольнике $D^i(\varepsilon)$ и границе окрестности $V_{i-1}(\delta)$. Из определения $W(\Gamma)$ следует, что это окрестность гетероклинического цикла $\Gamma, \ \ W(\Gamma) \subset V(\delta, \rho), \ \overline{J(\varepsilon)} \subset W(\Gamma)$.

Исследуем структуру инвариантного множества $J(\varepsilon)$ системы 2.

Построенное множество $J(\varepsilon)$ может не быть локально максимальным в окрестности $W(\Gamma)$ по двум причинам. Во-первых, множество $I(\varepsilon)$ может не быть локально максимальным множеством отображения F_ε. Во-вторых, инвариантное множество $\overline{J(\varepsilon)}$ может быть шире, чем $J(\varepsilon)$, поскольку в него могут войти траектории асимптотические к предельным множествам гетероклинических контуров Γ'_j. Рассмотрим когда может реализоваться каждая из возможностей.

Лемма II.5.8. Пусть $n_i(\varepsilon)$, $i \in 1:k$, — конечное число и для $m \in m_{i+1}(\varepsilon) : n_{i+1}(\varepsilon)$ точка $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \notin D_i^m(\varepsilon)$. Тогда $I(\varepsilon)$ — локально максимальное инвариантное множество отображения F_ε.

Доказательство.

По замечанию 2 к лемме II.5.5 в рассматриваемом случае множество $D(\varepsilon) = \{\bigcup D_e(\varepsilon),\ e \in E(\varepsilon)\} \subset D_1^+(\varepsilon)$ является максимальным по включению подмножеством множества $D_1^+(\varepsilon)$, на котором задано отображение F_ε. Траектории, проходящие через точки множества $D_1(\varepsilon) \setminus \overline{D_1^+(\varepsilon)}$, покидают окрестность $V(\delta, \rho)$, а траектории, проходящие через точки $\overline{D_1^+(\varepsilon)} \setminus D_1^+(\varepsilon)$, являются асимптотическими к точке покоя из контура Γ'_1. Поэтому $D(\varepsilon)$ — максимальное подмножество множества $D_1(\varepsilon)$, на котором задано отображение F_ε.

Рассмотрим точку $x \in D_1^+(\varepsilon)$ такую, что определены все итерации $F_\varepsilon^s(x)$, $s \in Z$. Для нее однозначно определяется последовательность $\omega = \{\omega_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$ такая, что $F_\varepsilon^s(x) \in D_{\omega_s}(\varepsilon) \cap F_\varepsilon D_{\omega_{s-1}}(\varepsilon)$. При выполении условий леммы пересечения множеств $D_i^m(\varepsilon) \cap F_i(\varepsilon) D_{i-1}^n$ — правильные, если $m_{i+1}(\varepsilon) \le m \le n_{i+1}(\varepsilon)$, $m_i(\varepsilon) \le n \le n_i(\varepsilon)$, и пусты в противном случае. Поэтому из определения пространства $\Omega(\varepsilon)$ следует, что в этом случае последовательность ω, построенная выше по точке x, лежит в $\Omega(\varepsilon)$. Поскольку для $\omega \in \Omega(\varepsilon)$ существует единственная точка $\Psi_\varepsilon(\omega)$, лежащая в $D_1^+(\varepsilon)$ и такая, что $F_\varepsilon^s(\Psi_\varepsilon(\omega)) \in D_{\omega_s}(\varepsilon)$, то $x = \Psi_\varepsilon(\omega) \in \Psi_\varepsilon \Omega(\varepsilon) = I(\varepsilon)$. Итак, множество $I(\varepsilon)$ содержит все точки $x \in D_1^+(\varepsilon)$, для которых определены все итерации F_ε^s, $s \in Z$. Лемма II.5.8 доказана. ■

Замечание. При выполнении условий леммы пространство $\Omega(\varepsilon)$ в метрике ρ компактно. Поскольку Ψ_ε — гомеоморфизм, то множество $I(\varepsilon)$ компактно.

Лемма II.5.9. Пусть выполнены условия леммы II.5.8. Тогда инвариантное множество $J(\varepsilon)$ системы 2 замкнуто и локально максимально.

Доказательство. Поскольку для каждой точки $x \in I(\varepsilon)$ точка $F_\varepsilon(x) \in I(\varepsilon)$, то множество $J(\varepsilon)$ можно определить как объединение всех дуг траекторий системы 2, концы которых лежат во множестве $I(\varepsilon)$, а сами дуги не пересекают $S(1)$. Множество $I(\varepsilon)$ не содержит точек, лежащих на траекториях асимптотических к предельным множествам контуров Γ'_j, $j \in 1:k$. В силу компактности $I(\varepsilon)$ отсюда следует, что время движения по траектории из точки $x \in I(\varepsilon)$ в точку $F_\varepsilon(x) \in I(\varepsilon)$ меньше некоторого числа M для всех точек $x \in I(\varepsilon)$. По интегральной непрерывности и компактности $I(\varepsilon)$ множество $J(\varepsilon)$ замкнуто. Оно не содержит предельных множеств контуров Γ'_j, $j \in 1:k$. В противном случае, в силу инвариантности $J(\varepsilon)$ и седлового характера предельных множеств, во множество $J(\varepsilon)$ входили бы траектории контуров Γ'_j, $j \in 1:k$. Это невозможно, потому что траектории, асимптотические к предельным множествам, не могут пересекать трансверсаль $S(1)$ в точках множества $I(\varepsilon)$.

Очевидно, что объединение предельных множеств контуров Γ'_j, $j \in 1:k$, замкнуто. Оно не пересекается с $J(\varepsilon)$. Пусть O — окрестность множества $J(\varepsilon)$, не пересекающаяся с ним. Тогда $J(\varepsilon)$ максимальное инвариантное множество в окрестности $W(\Gamma) \cap O$. Действительно, траектории, не асимптотические к предельным множествам контуров Γ'_j, $j \in 1:k$, и лежащие в окрестности $W(\Gamma)$, пересекают множество $D_1(\varepsilon)$, в силу определения $W(\Gamma)$, бесконечное число раз и, следовательно, лежат в $J(\varepsilon)$. Траектории, асимптотические к предельным множествам, должны покинуть окрестность O по ее определению. Лемма II.5.9 доказана. ■

Из лемм II.5.8, II.5.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема II.5.2. Пусть возмущенная система 2 такова, что $n_i(\varepsilon)$, $i \in 1:k$, — конечное число и для $m \in m_{i+1}(\varepsilon) : n_{i+1}(\varepsilon)$ точка $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \notin D_i^m(\varepsilon)$. Тогда множество $J(\varepsilon)$ — локально максимальное хаотическое компактное инвариантное множество системы 2. При этом $J(\varepsilon)$ — максимальное инвариантное множество, лежащее в $W(\Gamma)$, которое не содержит предельных множеств контуров Γ'_j, $j \in 1:k$, и траекторий, к ним асимптотических.

■

Рассмотрим систему 2, для которой нарушено одно из условий теоремы II.5.2. Пусть при некотором $i \in 1:k \quad n_i(\varepsilon)$ — бесконечно. Это означает, что точка $x_i(\varepsilon) \in W^s_{l_i}(\varepsilon)$. В этом случае пространство $\Omega(\varepsilon)$ в метрике ρ некомпактно. Следовательно, инвариантное множество $J(\varepsilon)$ некомпактно и $\overline{J(\varepsilon)} \neq J(\varepsilon)$. Определим множество $J_i(\varepsilon)$ аналогично множеству J_i для невозмущенной системы. Оно состоит из точек $x \in (\overline{J(\varepsilon)} \setminus J(\varepsilon)) \cap W^u_{l_i}(\varepsilon)$, при этом точки из $J_i(\varepsilon)$ не лежат на устойчивых многообразиях предельных множеств из контуров Γ'_j, $j \in 1:k$.

Лемма II.5.10. Пусть $n_i(\varepsilon) = \infty$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством траекторий из инвариантного множества $J_i(\varepsilon)$ и множеством бесконечных в одну сторону последовательностей $\omega = \{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$, $\omega_s \in E_i(\varepsilon)$, где $E_1(\varepsilon) = E(\varepsilon)$, а $E_i(\varepsilon)$ получается из $E(\varepsilon)$ циклической перестановкой координат векторов $e = (e_1, \ldots, e_k) \in E(\varepsilon)$, при которой i-я координата становится первой.

Доказательство аналогично доказательству теоремы II.4.3 и ее следствия 1 для невозмущенной системы. ■

Лемма II.5.11. Замкнутая траектория $P_{l_i}(\varepsilon)$ содержится в $\overline{J(\varepsilon)}$ тогда и только тогда, когда $n_i(\varepsilon) = \infty$.

Доказательство. Одна часть утверждения является следствием леммы II.5.10, ибо при $n_i(\varepsilon) = \infty$ инвариантное множество $J_i(\varepsilon)$ не пусто. Оно состоит из траекторий, асимптотических к замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$, следовательно, $P_{l_i}(\varepsilon) \subset \overline{J(\varepsilon)}$.

Допустим теперь, что $n_i(\varepsilon)$ — конечное число. Тогда траектория множества $J(\varepsilon)$

может сделать не более, чем $n_i(\varepsilon)$ оборотов, оставаясь в окрестности $V_{l_i}(\delta)$ замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$. Это следует из замечания 1 к лемме II.5.5. Множество таких траекторий отделено от замкнутой траектории $P_{l_i}(\varepsilon)$. Лемма II.5.11 доказана. ■

Определим множество $J^i(\varepsilon)$ как множество точек $x \in (\overline{J(\varepsilon)} \setminus J(\varepsilon)) \cap W^s_{l_{i-1}+1}(\varepsilon)$.

Лемма II.5.12. Пусть $n_i(\varepsilon) = \infty$. Тогда множество $J^i(\varepsilon) \neq \emptyset$.

Доказательство. Будем рассматривать случай $n_2(\varepsilon) = \infty$. Остальные возможности сводятся к этой циклической перенумерацией координат векторов из множества $E(\varepsilon)$. Рассмотрим векторы $e^j = (m_2(\varepsilon)+j, m_3(\varepsilon)+1, \ldots, m_1(\varepsilon)+1)$. В силу того, что $m_i(\varepsilon) + 1 < n_i(\varepsilon)$, $i \in 3 : k$, $i = 1$, и $n_2(\varepsilon) = \infty$, векторы e^j входят в $E(\varepsilon)$. Построим по ним периодические последовательности $\omega^j \in \Omega(\varepsilon)$, $\omega^j = \{\omega^j_s\}^{\infty}_{s=-\infty}$, $\omega^j_s = e^j$, $s \in Z$. Пусть $x^j = \Psi_\varepsilon(\omega^j)$. По построению $x^j \in D_1^{m_2(\varepsilon)+j}(\varepsilon) \cap \Sigma_1^{m_1(\varepsilon)+1}(\varepsilon)$, и через точку x^j проходит замкнутая траектория системы 2, лежащая в $J(\varepsilon)$. Интервал $d_1^{m_2(\varepsilon)+j}(\varepsilon) = pr_1(\varepsilon) D_1^{m_2(\varepsilon)+j}(\varepsilon)$ имеет длину меньше, чем γ^{-j}, где $\gamma > 1$, и концы его стремятся к точке $y_1(\varepsilon)$ при $j \to \infty$. Поэтому, в силу липшецевости отображения $pr_1(\varepsilon)$, $pr_1(\varepsilon)x^j \to y_1(\varepsilon)$ при $j \to \infty$. Поскольку множества $\Sigma_1^m(\varepsilon)$ имеют компактные замыкания, то последовательность $\{x^j\}^{\infty}_{j=0}$ имеет точки прикосновения y. Очевидно, что $pr_1(\varepsilon)y = y_1(\varepsilon)$. Это означает, что точка $y \in W^s_{l_i+1}(\varepsilon)$. Траектория точки y входит во множество $J^2(\varepsilon)$. Лемма II.5.12 доказана. ■

Замечание. Из доказатальства следует, что в условиях леммы множество $J^i(\varepsilon)$ содержит бесконечно много траекторий. (Вместо периодических последовательностей $\omega^j \in \Omega(\varepsilon)$ надо рассматривать последовательности $\{\omega^j\}^{\infty}_{j=1}$ точек $\omega^j = \{\omega^j_s\}^{\infty}_{s=-\infty} \in \Omega(\varepsilon)$ таких, что первые координаты векторов ω^j_0 неограниченно возрастают с ростом j.)

Лемма II.5.13. Пусть $n_{i+1}(\varepsilon) = \infty$. Тогда множество $\overline{J(\varepsilon)}$ содержит множество $\Gamma'_i \setminus \gamma'_{l'_i}$.

Если $n_{i+1}(\varepsilon)$ — конечное число, то $\Gamma'_i \cap \overline{J(\varepsilon)} = \emptyset$.

Доказательство. Можно считать, что $i = 1$. Остальные случаи сводятся к этому перенумерацией предельных множеств невозмущенного контура Γ, при которой замкнутая траектория P_{l_i} становится первой. Это влечет циклическую перестановку координат векторов из множества $E(\varepsilon)$, что не влияет на множество $J(\varepsilon)$.

По определению $\Gamma'_1 = \bigcup(\gamma'_s \cup \alpha(\gamma'_s))$, $s \in 1 : l'_2 - 1$. Предельные множества $\alpha(\gamma'_s)$, $s \in 2 : l'_2 - 1$, являются точками покоя. Если $l'_2 = 2$ и контур Γ'_1 исчерпывается траекторией γ'_1 и ее ω- предельным множеством, то первое утверждение леммы доказано, так как $\omega(\gamma'_1) = P_{l_2}(\varepsilon)$ содержится, по лемме II.5.11, в $\overline{J(\varepsilon)}$. Если $l'_2 > 2$, то по лемме II.5.12 множество $\overline{J(\varepsilon)} \setminus J(\varepsilon)$ содержит траекторию, асимптотическую к следующему предельному множеству в контуре Γ'_1. Это предельное множество является точкой покоя с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями. Отсюда следует, в силу инвариантности множества $\overline{J(\varepsilon)} \setminus J(\varepsilon)$, что одна из неустойчивых сепаратрис этой точки покоя лежит в последнем множестве. Такой сепаратрисой может быть лишь траектория γ_3', поскольку другая сепаратриса покидает окрестность $V(\delta,\rho)$, в которой лежит инвариантное множество $J(\varepsilon)$.

Переходя к следующему предельному множеству контура Γ_1', оказываемся в ситуации, аналогичной рассмотренной выше. Поэтому следующая точка покоя контура Γ_1' и траектория γ_3' лежат во множестве $\overline{J(\varepsilon)}\setminus J(\varepsilon)$. Двигаясь вдоль контура Γ_1', получим, что $\Gamma_1'\setminus\gamma_1'\subset\overline{J(\varepsilon)}\setminus J(\varepsilon)$.

Допустим, что $n_{i+1}(\varepsilon)$ — конечное число. Как и выше можно считать, что $i=1$. Множество $I(\varepsilon)\subset\{\bigcup(\Sigma_1^m\cap D_1^l),\ m\in m_1(\varepsilon):n_1(\varepsilon),\ l\in m_2(\varepsilon):n_2(\varepsilon)\}$ находится на положительном расстоянии от множества $W_2^s(\varepsilon)$, поскольку $n_2(\varepsilon)$ — конечное число. Все траектории множества $J(\varepsilon)$ пересекают площадку $D_1(\varepsilon)$ по точкам, лежащим в $I(\varepsilon)$. Множества $J(\varepsilon)$ и $W_2^s(\varepsilon)$ — инвариантны, поэтому $\overline{J(\varepsilon)}\cap W_2^s(\varepsilon)=\emptyset$. Но $\overline{J(\varepsilon)}$ не может содержать траектории и γ_2', если оно не содержит траекторий, лежащих в $W_2^s(\varepsilon)$. Следовательно, γ_2' не лежит в $\overline{J(\varepsilon)}$. Учитывая, что $W_2^s(\varepsilon)\cap\overline{J(\varepsilon)}=\emptyset$, получим, что $\alpha(\gamma_2')\notin\overline{J(\varepsilon)}$. Множество $\overline{J(\varepsilon)}$ не может содержать траекторий, лежащих в $W_3^s(\varepsilon)$, отличных от γ_2', поскольку они покидают окрестность $V(\delta,\rho)$, в которой лежит множество $\overline{J(\varepsilon)}$. Поэтому, переходя к следующему в контуре Γ_1' предельному множеству, окажемся в уже рассмотренной ситуации, в которой его устойчивое многообразие не пересекается с $\overline{J(\varepsilon)}$. Повторяя процесс, докажем, что ни одна траектория из Γ_1' не лежит в $\overline{J(\varepsilon)}$. Лемма II.5.13 доказана. ■

Лемма II.5.14. Траектория $\gamma_{l_i'}'$ входит во множество $\overline{J(\varepsilon)}\setminus J(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $n_i(\varepsilon)=\infty$ и $n_{i+1}(\varepsilon)=\infty$.

Доказательство. Пусть $n_i(\varepsilon)=n_{i+1}(\varepsilon)=\infty$. Повторим рассуждения леммы II.5.12, построив последовательность замкнутых траекторий g_n таких, что точки $y_n=g_n\cap D_i^+(\varepsilon)$ образуют последовательность, сходящуюся к точке $y_i(\varepsilon)=D_i^+(\varepsilon)\cap\gamma_{l_i'}'$. Как и в предыдущей лемме, можно считать, что $i=1$. Пусть $\omega^j\in\Omega(\varepsilon)$, $\omega^j=\{\omega_s^j\}_{s=-\infty}^{\infty}$ — периодическая последовательность такая, что $\omega_s^j=(m_2(\varepsilon)+j,m_3(\varepsilon)+1,\dots,m_k(\varepsilon)+1,m_1(\varepsilon)+j)$, $s\in Z$. При выполнении условий леммы она лежит в $\Omega(\varepsilon)$. Рассмотрим точки $y_j=\Psi_\varepsilon(\omega^j)$. По построению $y_j\in D_1^{m_2(\varepsilon)+j}\cap\Sigma_1^{m_1(\varepsilon)+j}$. Повторяя рассуждения леммы II.5.12 и используя λ- лемму, получим, что $y_j\to y_1(\varepsilon)$, $j\to\infty$. Следовательно, траектория $\gamma_{l_1'}'\subset\overline{J(\varepsilon)}\setminus J(\varepsilon)$.

Допустим, что либо $n_1(\varepsilon)$, либо $n_2(\varepsilon)$ — конечное число. Тогда множество $I(\varepsilon)\subset\{\bigcup(\Sigma_1^m\cap D_1^l),\ m\in m_1(\varepsilon):n_1(\varepsilon),\ l\in m_2(\varepsilon):n_2(\varepsilon)\}$ находится на положительном расстоянии от точки $y_1(\varepsilon)$. Следовательно, $\overline{J(\varepsilon)}$ не содержит траектории $\gamma_{l_1'}'$. Лемма доказана. ■

В итоге, в случае нарушения конечности чисел $n_i(\varepsilon)$, $i\in 1:k$, получаем теорему

Теорема II.5.3.

Пусть для возмущенной системы 2 найдется $i\in 1:k$ такое, что $n_i(\varepsilon)=\infty$. Тогда множество $J(\varepsilon)$ не является локально максимальным. При этом инвариантное множество $\overline{J(\varepsilon)}\setminus J(\varepsilon)$ содержит замкнутую траекторию $P_{l_i}(\varepsilon)$ и множество $\Gamma_{i-1}'\setminus\gamma_{l_{i-1}'}'$.

Если $n_i(\varepsilon)$ — конечное число, то множество $\overline{J(\varepsilon)}$ не пересекается с множеством $P_{l_i}(\varepsilon) \cap (\Gamma'_{i-1} \setminus \gamma'_{l'_{i-1}})$.

Траектория $\gamma'_{l'_i}$ содержится во множестве $\overline{J(\varepsilon)}$ тогда и только тогда, когда $n_i(\varepsilon) = n_{i+1}(\varepsilon) = \infty$.

(В формулировке теоремы Γ'_i — гетероклинический контур, который получается из контура Γ_i при возмущении, а $\gamma'_{l'_i}$ — первая траектория этого контура.)

■

Замечание. Теорема II.5.3 справедлива вне зависимости от того, нарушается ли второе условие теоремы II.5.2 или нет.

Рассмотрим теперь систему 2, для которой нарушено второе условие теоремы II.5.2. Именно, при некоторых $i, m,\ i \in 1:k,\ m \in m_{i+1}(\varepsilon) : n_{i+1}(\varepsilon)$, точка $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \in D_i^m(\varepsilon)$ или, что то же самое, множества $\Sigma_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)$ и $D_i^m(\varepsilon)$ пересекаются неправильно. Ясно, что это может быть только при конечном $n_i(\varepsilon)$.

Будем уничтожать неправильные пересечения, уменьшая множества $D_i(\varepsilon)$ и $D^{i+1}(\varepsilon)$. Как и ранее, не умаляя общности, можно считать, что $i = 1$. Предположим, что номер $m_0(1)$ таков, что множество $D_1^{m_0(1)}(\varepsilon)$ неправильно пересекается с множеством $T_1^{n_1(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_1(\varepsilon))$ и $m_0(1) < n_2(\varepsilon)$. Вместо множества $D_1(\varepsilon)$ рассмотрим множество $\{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in s_1^0(\varepsilon)\}$, где $s_1^0(\varepsilon) = \{(\xi_1,\eta_1) \in S(1) : \quad \xi_1 = 0, \quad |\eta_1 - \eta_1^0| < \varepsilon_1^0\}$. Число $\varepsilon_1^0 < \varepsilon_1$ таково, что $pr_1(\varepsilon)\, D_1^{m_0(1)}(\varepsilon) \cap s_1^0 = \emptyset$, и $pr_1(\varepsilon)\, D_1^m(\varepsilon) \subset s_1^0, \quad m_0(1) < m \le n_2(\varepsilon)$.

Такое изменение множества $D_1(\varepsilon)$ повлечет уменьшение дуги $s^2(\varepsilon)$, поскольку отображение $h_1(\varepsilon)$ должно переводить дугу $s_1^0(\varepsilon)$ на новую дугу $s_0^2(\varepsilon)$. Положим $s_0^2(\varepsilon) = h_1(\varepsilon)s_1^0(\varepsilon)$ и заменим множество $D^2(\varepsilon)$ на $\{\cup\, w_\varepsilon^{ss}(x,\delta),\ x \in s_0^2(\varepsilon)\}$. При таком изменении множеств $D_1(\varepsilon)$ и $D^2(\varepsilon)$ меняются числа $n_1(\varepsilon)$ и $m_2(\varepsilon)$, причем первое уменьшается на единицу, а второе становится равным $m_0(1) + 1$.

Пусть выполняются неравенства $m_0(1)+1 < n_2(\varepsilon)-1,\ n_1(\varepsilon)-1 > m_1(\varepsilon)+1$. В этом случае удается уничтожить неправильное пересечение, не нарушая условий на числа $m_i(\varepsilon),\ n_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$. При уменьшении множеств $D_1(\varepsilon),\ D^2(\varepsilon)$ новых неправильных пересечений не образуется.

Допустим, что удается уничтожить все неправильные пересечения, не нарушая условия $m_i(\varepsilon) + 1 < n_i(\varepsilon),\ i \in 1:k$. Определим тогда окрестность $W'(\Gamma)$ гетероклинического цикла Γ по уменьшенным множествам $D_i(\varepsilon),\ D^i(\varepsilon),\ i \in 1:k$, так же как определялась окрестность $W(\Gamma)$ по первоначальным множествам $D_i(\varepsilon),\ D^i(\varepsilon),\ i \in 1:k$. Тогда выполняются условия теоремы II.5.2 и, следовательно, справедлива

Теорема II.5.4. Пусть возмущенная система 2 такова, что $n_i(\varepsilon)$, $i \in 1:k$, — конечные числа и для тех $i \in 1:k$ таких, что существует число $m_{i+1}(\varepsilon) \le m_0(i) \le n_{i+1}(\varepsilon)$ такое, что $T_i^{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon)(x_i(\varepsilon)) \in D_i^{m_0(i)}(\varepsilon)$, выполняются неравенства $m_0(i)+1 < n_{i+1}(\varepsilon)-1, \quad n_i(\varepsilon)-$

$1 > m_i(\varepsilon)$. Тогда система 2 имеет в окрестности $W'(\Gamma)$ локально максимальное хаотическое инвариантное множество $J_1(\varepsilon) \subset J(\varepsilon)$. При этом $J_1(\varepsilon)$ — компактное множество и оно является максимальным инвариантным множеством системы 2, лежащим в $W'(\Gamma)$ и не содержащим предельных множеств контуров $\Gamma'_j,\ j \in 1:k$, и траекторий, асимптотических к ним.

■

В заключение параграфа опишем возмущение системы 1, которое приводит к отделению хаотического инвариантного множества $J(\varepsilon)$ от предельных множеств гетероклинических контуров $\Gamma'_j,\ j \in 1:k$.

Будем строить возмущение системы 1 так, чтобы предельные множества гетероклинического цикла Γ оставались неподвижными и не менялись локальные устойчивые и неустойчивые многообразия этих предельных множеств. Для этого рассмотрим точку покоя, предшествующую замкнутой траектории $P_{l_i},\ i \in 1:k$, в цикле Γ. В окрестности $V_{l_i-1}(\delta)$ этой предельной точки в координатах ξ, ζ, η, у которых опущен индекс, система 1 имеет вид

$$\begin{cases} \xi' = \nu\xi + X(\xi,\zeta,\eta) \\ \zeta' = \lambda\zeta + Y(\xi,\zeta,\eta) \\ \eta' = \mu\eta + Z(\xi,\zeta,\eta). \end{cases}$$

В этих координатах неустойчивая сепаратриса γ_{l_i-1}, входящая в цикл Γ, совпадает с положительной полуосью η, а траектория γ_{l_i-2} из цикла Γ входит в точку покоя по направлению, совпадающему с положительной полуосью ζ. Выберем на положительной полуоси η точку M_i и рассмотрим шар B_i с центром в точке M_i, который не содержит начала координат. Зададим в этом шаре неотрицательную функцию $\widetilde{Z}^i(\xi,\zeta,\eta) \in \mathbb{C}^\infty(B_i)$ так, чтобы она была равна нулю вне B_i и равнялась единице в центре шара B_i. Будем считать, что $\widetilde{Z}$ продолжена нулем на все пространство. Рассмотрим следующее возмущение системы 1

$$\dot{x} = X(x) + Y(x), \quad Y(x) = \sum_{i=1}^{k} r_i \widetilde{Z}^i, \tag{2'}$$

где $r_i \geq 0$ — малые параметры. Ясно, что для любого ε_0 можно подобрать число $r_0 > 0$ так, что $||Y(x)||_{\mathbb{C}^1} < \varepsilon_0$, если $r_i < r_0$. Поскольку возмущение $Y(x)$ равно нулю в некоторых окрестностях предельных множеств цикла Γ, то предельные множества остаются неподвижными, а их локальные устойчивые и неустойчивые многообразия не меняются. Глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия предельных множеств получаются из локальных продолжением вдоль траекторий в отрицательном и соответственно положительном направлениях. Из этого следует, что те части глобальных многообразий, через которые проходят траектории, не пересекающие шаров $B_i,\ i \in 1:k$, не меняются при возмущении. В частности, не изменяются множества $S(i) \cap W^s_{l_i+1}$, $S(i) \cap W^s_{l_i}$, $S(i) \cap W^u_{l_i},\ i \in 1:k$. Заведомо изменятся неустойчивые сепаратрисы точек покоя O_{l_i-1}, если $r_i \neq 0,\ i \in 1:k$. Введем вектор $r = (r_1, \ldots, r_k)$.

Теорема II.5.5. Пусть система 1 имеет гетероклинический цикл Г Лоренцева типа, удовлетворяющий условиям I, II, III. Тогда для любой окрестности $\widetilde{V}$ гетероклинического цикла и любого числа r_0 существуют числа $0 < r_i < r_0,\ i \in 1:k$, такие, что система 2' имеет в окрестности $\widetilde{V}$ хаотическое инвариантное локально максимальное компактное множество $J(r)$. При этом существует окрестность гетероклинического цикла такая, что $J(r)$ максимальное по включению инвариантное множество, лежащее в ней такое, что оно не содержит траекторий, асимптотических к предельным множествам, получающимся при возмущении предельных множеств цикла Г.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность $\widetilde{V}$ цикла Г. Проделав все построения §4, получим по теореме II.4.2 хаотическое инвариантное множество J системы 1, лежащее в окрестности $\widetilde{V}$. Оно не обладает свойствами, требуемыми в теореме от множества $J(r)$. В частности, оно не компактно. Будем строить возмущенную систему 2' так, чтобы возмущение множества J обладало требуемыми в теореме свойствами. По теореме II.5.2 для этого достаточно, чтобы $n_i(r),\ i \in 1:k$, были конечными числами и для $m \in m_{i+1}(r) : n_{i+1}(r)$ точка $T_i^{n_i(r)}(r)(x_i(r)) \notin D_i^m(r)$. Для невозмущенной системы $n_i(0) = \infty,\ i \in 1:k$. Будем поочередно выбирать числа r_i, начиная с r_k, потом r_1 и так далее до r_{k-1}, так чтобы в результате для системы 2' удовлетворялись описанные выше условия теоремы II.5.2.

Проследим как меняется точка $x_1(r)$, являющаяся пересечением неустойчивой сепаратрисы седла O_{l_k-1} с трансверсалью $S(1)$, при изменении числа r_k. В силу специфики возмущения, координаты ξ_1, η_1 на площадке $S(1)$ не поменялись. При $r_k = 0$ точка $x_1(0)$ имела координаты $(\xi_1^0, 0)$. В силу того, что возмущение системы 1 производит поворот поля скоростей в положительном направлении в смысле выбранной в пучке плоскостей $P(x),\ x \in \Gamma$, ориентации, вторая координата $\mu_1(r_k)$ точки $x_1(\varepsilon)$ становится положительной при $r_k > 0$. Из того, что компактные куски неустойчивых многообразий непрерывно зависят от $\mathbb{C}^1$ - возмущений, функция $\mu_1(r_k)$ – непрерывна и монотонно возрастает. Таким образом, если число r_k достаточно мало, то число $m_1(r)$ не меняется $m_1(r) = m_1(0)$, а $n_1(r)$ становится конечным числом. При этом оно зависит только от r_k, поэтому далее будем обозначать его $n_1(r_k)$.

Заметим, что $m_2(r) = m_2(0)$ и множества $\Delta_m^2(r),\ m_2(0) \le m$, остались неизменными, так как система не менялась в окрестности V_2. По тем же причинам не менялись множества $\Delta_m^1(r),\ m \ge m_1(0)$. Множества $D_i^m(r)$ определяются по множествам $\Delta_m^2(r)$,
$m_2(0) \le m \le \infty$, поэтому при первом возмущении они остались неизменными.

Будем далее опускать зависимость от возмущений тех объектов, которые не меняются при выбираемом возмущении.

Множества $\delta_m^1 = pr^1\,\Delta_m^1$ являются дугами кривой $s_+^1(r)$ с непересекающимися замыканиями. Поскольку функция $\mu_1(r_k)$ непрерывна и монотонно возрастает, а дуги $\overline{\delta_m^1},\ m \ge m_1$, не заполняют никакой интервал на кривой $s_1^+(r)$, то для любого числа r_0 найдется число $r_k < r_0$ такое, что $pr^1(x_1(r_k))$ не лежит ни на одной из дуг $\delta_m^1,\ m > m_1$. Это означает, что при всех $n \in N$ точка $T_1^n(x_1(r_k))$ не лежит в прямоугольнике D_1^+. Поэтому, какими бы при дальнейших возмущениях ни стали множества $D_1^m(r)$, пересечения $\Sigma_1^l \cap D_1^m(r)$ будут либо пусты, либо правильны.

Таким образом, первым возмущением мы добились того, что условия теоремы

II.5.2 выполняются для $i = 1$. При этом для остальных $i \in 2 : k$ величины $m_i(0)$, $n_i(0)$ не изменились.

Построим возмущение для $i = 2$, выбрав число $r_1 < r_0$ при помощи аналогичных рассуждений. Это возмущение меняет множества D_1^m, $m \geq m_0$, но, в силу выбора первого возмущения, это не влияет на правильность пересечения множеств D_1^m с Σ_1^l при всех $m, l \in N$. Второе возмущение локализовано в шаре B_2, который не пересекается с неустойчивой сепаратрисой седла $O_{l_k - 1}$. Поэтому точка $x_1(r)$ не изменится. По той же причине не изменятся величины $m_i(0)$, $n_i(0)$ для $i = 3 : k$ и $m_1(0)$, $n_1(r)$. Второе возмущение сделает величину $n_2(r)$ конечным числом, а все пересечения Σ_2^l с $D_2^m(r)$, $l, m \in N$, либо пустыми, либо правильными.

Повторив эту процедуру k раз, построим искомое возмущение системы 1. Теорема II.5.5 доказана. ■

Литература

1. Андрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. С.-Петерб. изд. С.Пб. ун-та, 1992, 240 с.
2. Алексеев В.М. Квазислучайные динамические системы I, II, III. Мат сб., 1968, 76, N 1, 72 - 134; 77, N 4, 545 - 601; 1969, 78, N 1, 3 - 50.
3. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В. Динамические системы с гиперболическим поведением. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1991, 66, с. 5 - 247.
4. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1986, 5, с. 5 - 218.
5. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло - узел. Докл. АН СССР, 1974, 219, N 3, 1281 - 1285.
6. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О достижимых переходах от систем Морса - Смейла к системам со многими периодическими движениями. Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1974, 38, N 6, 1248 - 1288.
7. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Докл. АН СССР, 1977, 234, N 2, 336 - 339.
8. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Тр. Моск. мат. об-ва, 1982, 44, 150 - 212.
9. Белицкий Г.Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев. Наукова думка, 1979, 176 с.
10. Беляков Л.А. О бифуркационном множестве в системе с гомоклинической кривой седла. Мат. заметки, 1980, 28, вып. 6, 911 - 922.
11. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л. изд. Ленингр. ун-та, 1981, 232 с.
12. Быков В.В. О бифуркациях динамических систем, близких к системам с сепаратрисным контуром, содержащим седло - фокус. В сб. "Методы качественной теории дифференциальных уравнений". Горький, 1980, 44 - 72.
13. Быков В.В. Бифуркации сепаратрисных контуров и хаос. В сб. "Методы качественной теории и теория бифуркаций", Нижний Новгород, 1991, 42 - 63.
14. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I. Мат. сб., 1972, 88, N 8. 475 - 492.
15. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II. Мат. сб., 1973, 90, N 1, 139 - 156.
16. Дербенева Б.П., Чернышев В.Е. Отображения дисков, порожденные конту-

рами типа Лоренца. Вестн. СПбГУ, 1996, сер. 1, вып. 4 (N 22), с. 105-106.
17. Иванов Б.Ф. К вопросу о существовании замкнутых траекторий в окрестности гомоклинической кривой. Диффер. ур-ния, 1979, 12, N 3, 548 - 550.
18. Неймарк Ю.И. О движениях близких к двоякоасимптотическому движению. ДАН СССР, 1967,172, N 5, 1021 - 1024.
19. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М. Мир, 1975, 302 с.
20. Пилюгин С.Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Ленинград, изд. Лен. ун-та, 1988, 158с.
21. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М. Наука, 1977,
304 с.
22. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. Успехи мат. наук, 1970, 25 вып.1, 113 - 185
23. Хирш М. Дифференцимальная топология. М. Мир, 1979, 279 с.
24. Чернышев В.Е. Структура окрестности гомоклинического контура с седловой точкой покоя. Диффер. ур-ния, 1985, 21, N 9, 1531 - 1536.
25. Чернышев В.Е. Бифуркации инвариантных множеств в окрестности контура траекторий с седловой точкой покоя. Диффер. ур-ния, 1986, 22, N 3, 439 - 445.
26. Чернышев В.Е. Контуры из особых траекторий. Республиканская научная конференция " Дифференциальные уравнения и их приложения", Одесса, тезисы, 1987, с. 131 - 132.
27. Чернышев В.Е. Бифуркации контуров из особых траекторий. Вестн. СПбГУ, 1992, сер. 1, вып. 2, N 8, 52 - 57.
28. Чернышев В.Е. Бифуркации устойчивых контуров из особых траекторий трехмерных автономных систем. Седьмая всесоюзная конференция " Управление в механических системах", Свердловск, тезисы, 1990, с. 110.
29. Чернышев В.Е. Сильно устойчивые расслоения над гомоклиническими контурами. Вестн. СПбГУ, 1994, сер. 1, вып. 4, N 22, 44 - 52.
30. Чернышев В.Е. Сильно устойчивые слоения над контурами Лоренцева типа. Вестн. СПбГУ, 1996, сер. 1, вып. 3, N 15, 46 - 53.
31. Чернышев В.Е. Гетероклинические циклы, порождающие устойчивый хаос. Первая научно - практическая конференция "Дифференциальные уравнения и приложения". С. Петерб., тезисы, 1996, 1226 - 1227.
32. Чернышев В.Е. Возмущение гетероклинических циклов Лоренцева типа. Сб. Нелинейные динамические системы. Из-во СПбГУ, 1997, вып. 1.
33. Чернышев В.Е. Неустойчивые многообразия гетероклинических контуров Лоренцева типа. Вестн. СПбГУ,
1997, сер. 1, вып. 3, N 15, 64-69.
34. Чернышев В.Е. Возмущение гетероклинических циклов, содержащих седло - фокусы. Диффер. ур-ния, 1997, 33, N 5, 712 - 713.
35. Чернышев В.Е. Одномерная динамика, порожденная контурами из особых траекторий. Диффер. ур-ния, 1991, 27, N 8, с.1465.
36. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре - Биркгоффа. Мат. сб., 1967,

74, вып. 3, 378 - 397.
37. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло - фокус. Мат. сб., 1970, 81, N 1, 92 - 103.
38. Bamon R., Labarca R., Mane R., Pacifico M.J. The explosion of singular cycles. IHES. Publ. Math., 1993, v. 78, 207 - 232.
39. Bo Deng. Exponential expantion with Silnikov's Saddle - Focus. J. Diff. equat., 1989, 83, N 1, 11 - 25.
40. Bo Deng. Homoclinic Twisting bifurcation and Cusp Horseshoe Maps. J. of dyn. and differential equat., 1993, 5, N 3, 417 - 469.
41. Bo Deng. Silnikov problem. J. diff. equat., 1989,79, N 2, 189 -231.
42. Bo Deng. Exponential exxpantion with Silnikov saddle - focus. J. diff. equat. , 82, N 1,
43. Chow S.N., Bo Deng, Terman D. The bifurcations of homoclinic and peroidic orbits from the two heteroclinic orbits. SIAM J. Math. Anal., 1990, 21, N 1, 179 - 204.
44. Coppel W.A. Dichotomies in stability theory. Lect. Notes Math., 1978,629, 98 p.
45. Devaney R.L. An introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin /Cummings: Melo Park, Ca. 1986, 234 p.
46. Evans J.W., Fenichel N. and Feroe J.A. Double impulse solutions in nerve axon equations. SIAM J. Appl. Math., 1982, 42, N 2, 219 - 234.
47. Glasner E., Weiss B. Sensitive dependence on initial conditions. Nonlinearity, 1993, 6, N 6, p. 331-340.
48. Hirsch M., Pugh C. Stable manifolds and hyperbolic sets. Global analysis. Proc. Symp. in Pure Math., v 14, A.M.S., 1970, 133 - 163.
49. Hirsch M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds. Lect. Notes Math., 1977, 583.
50. Yorke J., Yorke E. Metastable chaos: the transition to sustained chatic behaviour in the Lorenz model. J. Stat. Phyz., 1979, 21, N 3, 263 - 278.
51. Labarca R., Pacifico M.J. Stability of singular horseshoes. Topol., 1986, 25, N 3, 337 - 352.
52. Lorenz E.N. Determenistic nonperiodic flow. J. Atmosph. Sci., 1963, 20, N 2, 130 - 141.
53. Palmer K.J. Exponential dychotomies and transversal homoclinic points. J.different. equations, 1984, 55, N 2, 225 -256.
54. Robinson C. Differentiability of the Stable Foliation for the Model Lorenz Equations. Lect. Notes Math., 1981, 868, 302 - 315.
55. Robinson C. Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type. Nonlinearity, 1989, 2, N 4, 495 - 518.
56. Rychlik M. Lorenz attractors through Silnikov type bifurcation. I. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1990, 10, N 4, 793 - 821.
57. Sinai Ja.G., Vul E.B. Hyperbolicity conditions for the Lorenz model. Phys. D., 1981, 20, N 1, 3 - 7.
58. Sparrow C. The Lorenz equations: Bifurcations, chaos and strange attractors. Appl. Math. Sci. - N.-Y.etc.: Springer, 1982, 41, 269p.
59. Tresser C. About some theorems by L.P. Silnikov. Ann. Inst. Henri Poincare,

1984, 40, N 4, 441 - 461.

60. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Text. appl. math. N 4 Springer, 1990, 667 p.
61. Williams R.F. The structure of Lorenz attractors. Lect. Notes Math., 1977, 615, 94 - 112.
62. Williams R.F. The structure of Lorenz attractors. Publ. math. Inst. hautes etud. sci., 1979, 50, 73 - 100.