ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РОСТА В ГРУППАХ: ЭНТРОПИЯ, ГРАНИЦЫ, ПРИМЕРЫ

А.М.ВЕРШИК [1]

[1] *С.-Петербургское отделение Математического Института им. В. А. Стеклова Фонтанка 27,
119011 С.-Петербург, Россия.* *При частичной поддержке РФФИ, грант 99-01- 00098*

31.05.2000.

Аннотация

В статье идет речь

1) о численных инвариантах счетных групп — энтропии, логарифмическом объеме, сносе, о фундаментальном неравенстве, связывающем их, и основанном на нем сравнении систем образующих групп; о задании групп с помощью метода Монте-Карло;

2) об эргодическом методе построения и изучения границ случайных блужданий, энтропии полиморфизма границы и связи с фундаментальным неравенством;

3) о геометрической реализации свободных разрешимых групп, их границах и о геометрическом подходе к построению нормальных форм в группах;

4) о локальных, локально-свободных группах, и о вычислении констант для них;

5) об энтропии в теории меры и в теории динамических систем и о вводимых вновь понятиях энтропии убывающей последовательности измеримых разбиений и о вторичной энтропии колмогоровских автоморфизмов.

Ключевые слова: энтропия, фундаментальное неравенство, границы групп, полиморфизмы, локальные группы, свободные разрешимые группы, вторичная энтропия.

ABSTRACT

We study the numerical constants of the countable groups, - logariphmic volume (v), entropy (h), escape (l) - and establish the fundamental unequality

$$h \leq l \cdot v$$

The new interpretation of those constants using boundary polimorphisms is given. We consider the new classes of the groups from the point of view of the boundary and fundamental inequality. In particulary we find the boundary of the free solvable groups of degree two and define so called locally free groups for which estimations of the constants are given. This gives some estimations for the braid groups. We discuss a various notion of entropy of decrasing sequences of measurable partitions and so called secondary entropy of the K-automorphisms in the context.

Содержание:

1 Введение

В этом обзоре рассматриваются асимптотические характеристики счетных групп, связанные с динамикой роста, случайными блужданиями, границами; изучаются новые классы примеров групп с этой точки зрения. Мы приводим также ряд известных и новых результатов о границах групп, о численных характеристиках групп и обсуждаем общие вопросы энтропийной теории.

Основной материал настоящей статьи связан с энтропией в группах, точнее, с энтропией случайных блужданий на группах, и ее применением к случайным блужданиям, гармоническому анализу на группах, но в первую очередь, к теории асимптотических характеристик групп, сравнению систем образующих и к возможности равномерного распределения на экспоненциальных группах. Энтропия случайных блужданий на группах была введена Авецом в 1972 [1] и переоткрыта мной несколькими годами позже. Но в специальном случае направленного блуждания на градуированном графе энтропия блуждания фактически рассматривалась еще в 1962 г. Гарсиа [2], а в несколько иной форме близкое понятие энтропии в связи с теорией границ рассматривалось в 1964 году Г. Фюрстенбергом [3, 4, 5]. Систематический и подробный анализ энтропии случайных блужданий, их границ и связанных с ними проблем был начат автором в работах с В. Каймановичем [6, 7, 8] и продолжен в работах Ф. Ледраппье, В. Кайменовича, И. Деренника и др. последовавших за ними. К настоящему времени этой теме посвящено много статей, имеются систематические обзоры (напр. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 108, 105, 107, 106]) первого этапа энтропийной теории случайных блужданий. Поэтому я не ставил целью давать здесь обзор и даже приводить сколько-нибудь полный перечень литературы об энтропии, границах и свойствах случайных блужданий; цели данной статьи несколько иные. В частности, они состоят в применении энтропии для изучения *асимптотик в экспоненциальных группах*, в обсуждении новых подходов и их иллюстрации для описания границ на примерах некоторых групп. В последние годы наблюдается заметное повышение интереса со строны физиков к разнообразным задачам о стохастических дискретных моделях и связанных с ними асимптотиками. Случайные блуждания на группах дают богатый материал для таких моделей, и привлечение внимания к таким связям есть одна из целей обзора. Столь же активно идет работа по вычислению и определению границ групп и однородных пространств. В этой работе мы также затрагиваем вопрос о вычислении границ с новой точки зрения.

Новые результаты статьи, помимо установления фундаментального неравенства в должной общности и вывода следствий из него, состоят в придании ему нового смысла с помощью марковской динамики на границе (параграфы 2 и 3), в абстрактном описании метода нахождения границ Пуассона–Фюрстенберга и его применения к свободным разрешимым группам ступени два и для некоторых сплетений, и в конструкции новой (топологической) модели свободных разрешимых групп (параграф 4). Мы также продолжаем обсуждение нового класса групп — локальных и локально свободных групп (параграф 5) и воспроизводим, возможно, первый нетривиальный пример использования фундаментального неравенства с оценками введенных констант, полученных в недавней работе [15], для локально свободных групп. Мы объясняем причину того, почему имеет место строгое неравенство в фундаментальном неравенстве для локально свободной группы и группы кос. Интересен также обнаруженный при этом эффект стабилизации констант при стремлении числа образующих к бесконечности.

Наконец, в добавлении к статье (параграфы 6 и 7) приводятся два тесно связанных между собой новых понятия энтропии — энтропии убывающих последовательностей и вторичной энтропии колмогоровских автоморфизмов, и ставятся задачи, связанные с этими понятиями.

Прежде чем переходить к более подробному описанию проблем и результатов, отметим, что вся современная энтропийная проблематика так или иначе связана с колмогоровской энтропией динамических систем и, если двигаться назад по времени, с теорией информации Шеннона. Но, быть может, самый глубокий вклад в энтропийную технику, складывавшуюся уже после открытия А. Н. Колмогорова, был сделан В. А. Рохлиным, а также Я. Г. Синаем. Техника измеримых разбиений, разработанная в 40-х гг. В. А. Рохлиным, была тем языком, на котором А. Н. Колмогоров изложил свое определение энтропии динамической системы. Одна из целей этой статьи — показать, что несмотря на внешнее несходство ситуаций, в которых рассматривается энтропия в этой статье (теория групповых характеристик и случайных блужданий на группах) и энтропия в теории преобразований с инвариантной мерой — способ образования понятий и техника, разработанная в те годы, с успехом применима и в этой ситуации. По поводу своего определения Авец [1] замечает, что он следует примеру колмогоровской энтропии динамической системы, но эти два понятия, конечно, очень различны — сходство остается чисто внешним до тех пор, пока не вскрываются более глубокие связи с границами, о некоторых из них и идет речь в статье.

Мотивировка, которая привела меня к понятию энтропии групп с мерой, состояла в следующем. Если в конечной группе выбрана произвольная система образующих и мера (например, равномерная) с носителем на этой системе, то ее свертки стремятся к равномерной мере — мере Хаара; имеется обширная литература, посвященная оценкам скорости этой сходимости и приложениям этих результатов. Если группа имеет полиномиальный или даже субэкспоненциальный рост, то также можно говорить об асимптотической равнораспределенности сверток меры на группе или на G-пространстве, что столь же активно обсуждалось во многих работах. Но если группа экспоненциальна, то вообще говоря, никакой равномерной распределенности сверток нет, и встает вопрос о возможности выбора такой системы образующих и меры на них, свертки которых имеют распределение наиболее близкое к равномерному или даже асимптотически совпадают с равномерным. Такие меры могут служить средством генерации элементов самой группы. Этот вопрос имеет практическое значение: группу можно задавать не только с помощью образующих и соотношений, что всегда связано с проблемой тождества слов и другими трудностями логического характера, и не только с помощью представления группы, которое определяет лишь действие образующих, и оставляет другие элементы заданными лишь неявно, — но и с помощью метода Монте-Карло, т.е. задавая меру на образующих и обратных к ним (например, равномерную) и генерируя элементы группы случайным образом, составляя слова из последовательных независимых образующих (и обратных к ним). Это есть то, что называют случайным блужданием на группе. Спрашивается, получим ли мы асимптотически полное представление об элементах группы в результате такого процесса. Более точно, какова доля среди всех элементов группы данной длины тех из них, которые мы получим в результате нашего процесса с вероятностью близкой к единице; будет ли эта доля асимптотически исчерпывать все элементы группы, или такой выбор даст лишь экспоненциально малую часть группы? В этом и состоит вопрос о равномерной распределенности, о котором шла речь выше. *По существу мы обсуждаем проблему связи между асимптотикой равномерных мер на словах данной длины и асимптотикой случайных произведений образующих.*

Конечно, ответ на поставленный вопрос зависит от выбора образующих и мер на них, что отличает проблему для экспоненциальных групп от остальных групп. Отчасти ответ содержится в так называемом фундаментальном неравенстве, обсуждаемом ниже. Положительный ответ на этот вопрос дает оправдание случайного генерирования, отрицательный — в нашем случае означает, что метод Монте-Карло порождает асимптотически лишь *экспоненциально малую часть группы.*

Все это — тема второго параграфа. В нем даются необходимые определения и отмечается, что сверхпопулярный в литературе рост числа слов (логарифмический объем) сам по себе не содержит глубокой информации об экспоненциальных группах. Гораздо более эффективно изучать его вместе с энтропией, которая в данном контексте показывает, какая информация об одной образующей содержится в среднем в типичном элементе группы, записанном словом в этих образующих, или, по-другому, учитывает, сколькими способами можно записывать данный элемент группы словами в данных образующих. Тем самым, энтропия измеряет неопределенность, содержащуюся в ансамбле всех слов данной длины, снабженных сверточной степенью исходной меры. В экспоненциальных группах возникает еще одна важная характеристика — снос, т.е. линейная скорость роста слов. Именно эти три характеристики (рост, энтропия, снос) и связаны замечательным *фундаментальным неравенством*:

$$h \leq l \cdot v,$$

которое, несмотря на простоту доказательства, имеет очень важное и глубокое значение. В конце второго параграфа мы уточняем, как использовать его как средство для сравнения асимптотик равномерной и сверточной мер. Если неравенство становится равенством, то, как отмечалось, метод случайного генерирования является адекватным, а в противном случае мы получаем лишь экспоненциально малую часть группы. Таким образом, появляется объективный способ сравнения систем образующих: какая из них "в большей степени" порождает группу.

Само неравенство в частных формах появлялось и ранее. Уже в первой статье Авеца ([1]) было отмечено почти очевидное похожее неравенство $h \leq v$, а в еще более ранней работе Милнора [16] ставился вопрос о связи роста (того, что далее мы называем логарифмическим объемом) и характеристик случайного блуждания типа спектрального радиуса, который несколькими годами ранее изучал Кестен [17]. Неравенство отмечается также в статье В. Каймановича [18] для случая фундаментальной группы многообразий отрицательной кривизны, а в его недавней работе [9] оно исследуется в случае блужданий на деревьях; этот класс пересекается с изучаемым здесь групповым случаем только по свободным группам. В нашей статье мы придаем фундаментальному неравенству общий характер в алгебраических (в первую очередь, групповых) ситуациях; его связь с хаусдорфовой размерностью гармонической меры на границе, фрактальностью и др. в общем случае предстоит еще понять. *Задачи вычисления указанных характеристик (роста, энтропии, сноса) и фундаментального неравенства для разных групп, различных систем образующих и мер на них, соотнесение этих характеристик со свойствами гармонических мер на границах и с предельными распределениями функционалов на них представляется главными проблемами в этом круге вопросов.* В настоящее время ответы известны лишь в единичных случаях; для различных дискретных подгрупп группы $SL(2, R)$ эти задачи частично рассматривались, они имеют прямое отношение к геометрии и к задачам, возникающим в статистической физике. Нечего и говорить, что для решеток в полупростых группах Ли вопросы чрезвычайно сложны и интересны.

Наиболее важная проблема — *описать те сильно экспоненциальные группы и системы образующих в них, для которых фундаментальное неравенство превращается в равенство, и описать экстремальные системы образующих в группах, где этого свойства нет.* Последнее означает выбор той системы образующих и меры на ней, для которых неравенство ближе всего к равенству, точнее, для которых введенный во втором параграфе показатель q принимает наибольшее значение. Вполне возможно, что экстремальная система образующих или система сколь угодно близкая к экстремальной существует во всякой группе, но заведомо ясно, что если она и существует, то отличается от привычных систем образующих для некоторых групп. Например, для групп кос и локально свободных групп это следует из приводимых в статье результатов работы [15]. Пока известные примеры образуют сравнительно узкий класс групп — виртуально свободные группы (т.е. группы со свободной подгруппой конечного индекса) и близкие к ним, — мы называем их свободноподобными.

Попутно заметим, что можно ослаблять условие независимости образующих для генерирования элементов группы, например, запрещать ставить рядом образующую и обратную к ней, продуцируя, таким образом, процесс с марковскими, а не независимыми приращениями; для свободной группы это сразу дает однозначность представления элемента. Но в общем случае такая модификация бесполезна, так как уменьшение длин слов в несвободной группе происходит не столько за счет таких сокращений, сколько за счет соотношений между образующими, которые могут быть очень длинными (например, в разрешимых группах), поэтому введение ограничений на случайный процесс генерирования, учитывающих соотношения, слишком усложняет дело. Но более сложные процессы генерирования могут оказаться полезными в специальных случаях (см., например, доказательство эргодических теорем для свободных полугрупп в недавней работе [19]). С другой стороны, оправдание независимости процесса генерирования, т.е. классического случайного блуждания, лежит в его связях с гармоническим анализом на группах, с обширной теорией произведений случайных матриц, с гармоническим анализом и со многими другими вопросами.

Таким образом, энтропийная тема оказывается в существе дела в вопросах роста и распределений на группах. Но оказывается, и в более техническом смысле динамический подход вскрывает более глубокую связь колмогоровской энтропии и теории границ Пуассона–Фюрстенберга для случайных блужданий. Это — предмет третьего параграфа.

В начале третьего параграфа мы излагаем в основном известные факты о границах групп — границе-выход (=метрическом абсолюте), стационарной границе, границе Пуассона—Фюрстенберга — все они в данном случае совпадают. Теория границ отвечает за самую глубокую и интересную часть теории асимптотического поведения траекторий марковского процесса и всего гармонического анализа на группах. Нахождение границ Мартина и других границ для конкретных групп и пространств и их идентификация с другими геометрическими объектами — весьма интересная и сложная проблема, которой посвящено много работ. Начало их в групповой ситуации положено работой Е. Б. Дынкина и М. Б. Малютова [20], где вычислялась граница Мартина для свободной группы с мерой на образующих. С тех пор вычислено немало в том числе и групповых примеров, в которых общая ситуация сходна со свободной группой. Среди многих работ на эту тему мы упомянем здесь лишь недавние результаты Каймановича–Мазура о совпадении этой границы с границей Терстона [21, 22] для пространств Тейхмюллера и более раннюю работу К. Сериес [23] о границе Мартина фундаментальных групп поверхностей. По-видимому, главная трудность лежит в том, как выбрать термины для описания границ.

На наш взгляд наиболее убедительное описание границ должно использовать комбинаторные или геометрические термины. "Словарные" (в терминах слов в алфавите образующих) описания, как мы увидим, работают не всегда, а геометрические сильно зависят от происхождения группы. *Однако, есть некоторая общая схема нахождения границ, которую мы излагаем в третьем параграфе, и которая является вариацией "эргодического метода"*, широко применявшегося в ряде задач нахождения инвариантных мер, характеров, асимптотической теории представлений и т.д. Это — простое следствие общих теорем типа эргодической теоремы, утверждающее, что задача сводится к нахождению пределов последовательностей функций (мер) вполне определенного вида. Разумеется, вычисление этих пределов есть конкретная задача, условия которой определяются группой или графом, и проведение этих вычислений может оказаться весьма сложным.

Поскольку наш подход к теории границ и структур на ней базируется на идеях эргодической теории пространств Лебега, то мы рассматриваем бернуллиевскую модель границы, иначе говоря, сначала вводится пространство приращений процесса, которое в данном случае есть бесконечное прямое произведение множества образующих, с продакт-мерой, сомножитель которой есть симметричная мера на образующих, а различные границы есть фактор-пространства по тому или иному измеримому разбиению, задаваемому как предел цилиндрических разбиений. В групповом случае все интересные метрические границы совпадают и *граница нетривиальна (не сводится к одной точке), как было установлено в [7, 8] и независимо в [11], в том и только в том случае, когда энтропия блуждания (энтропия группы с мерой) положительна.* Именно этот, на первый взгляд, неожиданный результат показал пользу энтропии случайных блужданий. Новое объяснение этого факта, связанное с полной положительностью энтропии автоморфизма Бернулли, дано ниже.

Затем мы делаем следующий шаг и отвечаем на вопрос: что означает фундаментальное неравенство в предельной форме, т.е. как изучаемые характеристики интерпретируются в терминах границ случайного блуждания. Мы привлекаем еще одно, пока не слишком распространенное, понятие — полиморфизм, и даем новую трактовку фундаментального неравенства, используя многозначное преобразование границы блужданий, названное *полиморфизмом границы.*

Объясним это обстоятельство подробнее. Граница группы с мерой определяется как фактор-пространство пространства траекторий блуждания по разбиению на классы с одинаковым асимптотическим поведением (граница-выход). В рассматриваемых нами терминах это можно высказать так — граница группы с мерой есть фактор-пространство бесконечных слов в алфавите из образующих по измеримому замыканию следующего отношения эквивалентности: два бесконечных слова эквивалентны, если они как последовательности совпадают, начиная с некоторого места, а произведения их начал — равны как элементы группы. Это разбиение неинвариантно относительно левого сдвига, поэтому на фактор-пространстве сдвиг не индуцирует однозначного преобразования. Однако, *сдвиг индуцирует многозначное преобразование — полиморфизм*, играющее ключевую роль. Слово и понятие "полиморфизм", равнозначные понятию "марковского отображения пространств Лебега с инвариантной мерой", были введены в [24] для того чтобы подчеркнуть намерение изучать этот объект с точки зрения эргодической и энтропийной теории. Мы приводим несколько определений, связанных с понятием полиморфизма, и в частности, вводим понятие энтропии, обобщающее энтропию автоморфизма.

Тождественность энтропии вводимого здесь канонического полиморфизма границы и энтропии группы с мерой показывает, что *фундаментальное неравенство есть обобщение неравенства между топологической и метрической энтропиями для этого полиморфизма.* Энтропия группы выступает в роли энтропии канонического полиморфизма, а произведение логарифмического объема на снос — в роли его топологической энтропии в надлежащей (уточненной) топологии. Таким образом, энтропия группы действительно есть колмогоровская энтропия марковского процесса (полиморфизма) на границе. Эта точка зрения объясняет и энтропийный критерий тривиальности границы — он просто является обобщением так называемой полной положительности энтропии бернуллиевского сдвига, состоящей в том, что у автоморфизма Бернулли нет нетривиальных факторов с нулевой энтропией. Как известно, из теорем Пинскера и Синая–Рохлина следует, что тем же свойством обладают К-автоморфизмы и только они. Наш полиморфизм задает случайное блуждание по траекториям канонического действия исходной группы на границе — в чем характеристическое свойство этого "вторичного" случайного блуждания и каковы его свойства в конкретных примерах, по-видимому, интересная проблема.

С другой стороны, эта интерпретация ставит новые вопросы: если фундаментальное неравенство — строгое, какие меры на границе имеют максимальную энтропию и в чем их групповой смысл? Иначе говоря, если гармоническая мера не есть мера с максимальной энтропией, то как получить последнюю с помощью групповых соображений?

Объяснение строгости неравенства кроется в весьма нетривиальном обстоятельстве, которое иллюстрируется на примере локально свободной группы (эффект "запирания", см. параграф 5). Оно же подсказывает новый неожиданный способ обобщения случайных блужданий, который и должен привести к мере с максимальной энтропией: *обобщенное блуждание должно состоять в том, что образующие добавляются не только в конец слова, но и в середину по определенному правилу.* Мы оставляем до другого раза более подробный анализ этой возможности. Напомним лишь, что до сих пор меры с максимальной энтропией воспринимались лишь как гиббсовские меры и не имели интерпретации, связанной напрямую с блужданиями.

Важный вопрос о явном описании можно связать с нормальными формами элементов группы. *Нормальной формой в группах с заданной системой образующих* называется отображение, сопоставляющее каждому элементу группы некоторого слова (нормальной формы), представляющего этот элемент, иначе говоря, нормальная форма есть сечение в расслоении свободной группы над данной группой. Границу, определяемую как фактор-пространство пространства всех бесконечных слов в алфавите образующих, иногда можно описать и как его подпространство, т.е. как некоторое множество бесконечных неприводимых слов, или, если угодно, как множество нормальных форм бесконечных слов. Например, для свободной группы дело обстоит именно так: граница есть пространство всех несократимых слов (теорема Дынкина–Малютова [20]). Точно также обстоит дело с группами поверхностей, группами с марковской нормальной формой и др. Мы доказываем более общую теорему состоящую в том, что всякая *стабильная нормальная форма* определяет изоморфизм между некоторым пространством бесконечных слов и границей.

Но чаще всего, как видно из дальнейшего, стабильную нормальную форму не удается найти (может быть, ее нет). Например, найти минимальную нормальную форму означает решить сложную комбинаторную изопериметрическую задачу, и проверить ее стабильность тем более трудно; нестабильность нормальной формы означает, что она плохо согласована с групповой операцией. Так или иначе встает вопрос об иных способах *описания границы групп с мерой.* Границы групп и, следовательно, гармонические функции на группах совсем не обязательно связаны со стабильной нормальной формой. Примеры этому — решаемая в параграфе 4 задача об описании границ свободных разрешимых групп ступени два и сплетений. Однако сам метод доказательства полноты границы остается тем же, что и случае стабильной нормальной формы. Этому посвящен конец третьего параграфа — приведенная теорема, по-видимому, аккумулирует все, что можно сказать общего о методе отыскания границы, и обобщает в духе эргодического метода почти все имеющиеся описания. Конкретные вычисления могут быть сложными, они зависят от конкретных особенностей групп.

В четвертом и пятом параграфах мы переходим к конкретным классам групп и примерам вычислений. Мы выделяем два класса групп — первый класс групп изучался с давних пор в алгебре, но не привлекался к задачам подобного типа — это свободные разрешимые группы. Ранее ([25, 8]) исследовались случайные блуждания на похожих группах — сплетениях решеток с циклическими группами; эти группы служили хорошим материалом для различных примеров и контрпримеров; сплетения также являются разрешимыми группами ступени 2, с бесконечнопорожденным коммутантом. Эти примеры сплетений с произвольной финитной мерой, имеющие нетривиальную границу, широко использовались в теории факторов [26, 27]. Но сейчас стало ясно, что свободные разрешимые группы доставляют гораздо более естественные примеры такого рода и более приспособлены для задач такого рода. *Мы даем новую топологическую модель свободной разрешимой группы ступени два с произвольным числом образующих и полностью описываем ее границу.* Описание границы — геометрическое, а не "словарное", т.е. оно дано не в терминах нормальных форм, а в геометрических, подобно абсолюту плоскости Лобачевского. С помощью того же способа мы даем описание границы сплетений решеток с циклической группой, что оставалось до последнего времени открытым вопросом.

Одно общее замечание сводит изучение траекторий блуждания на конечнопорожденной группе (т.е. блуждания на графе Кэли) к изучению классов эквивалентных траекторий простого случайного блуждания на обычной решетке ранга, равного числу образующих группы; понятие эквивалентности траекторий определяется группой. Хотя эта эквивалентность в общем случае является тавтологической переформулировкой эквивалентности слов, в примерах со свободной разрешимой группой эта эквивалентность описывается очень просто, и задачи о блужданиях на группе сводятся к изучению функционалов геометрической природы от путей простых блужданий на решетке. Возможности этого приема далеки от исчерпания и полезны не только для изучения групп, но как мы думаем, и в обратном направлении — придании алгебраического характера некоторым моделям статистической физики. *Этот прием сводит вычисление границ и другие асимптотические вопросы о блужданиях на группах к изучению G-инвариантных функционалов от траекторий классических простых блужданий на решетках.*

Второй класс групп является относительно новым, он введен несколько лет тому назад автором [28, 29] под влиянием тематики, связанной с уравнением Янга–Бакстера и теорией групп Кокстера, — это так называемые локальные группы и, в частности, локально свободные группы, которые более подробно рассмотрены в [30, 31]. В локальной группе образующие линейно упорядочены, они коммутируют, если они не стоят рядом, а соседние подчинены некоторым коммутационным соотношениям. В локально свободных группах кроме того пары соседних образующих порождают свободную группу. Таким образом, локально свободные группы являются свободными группами в многообразии локальных групп, и потому группы кос, например, являются их фактор-группами. Но локально свободная группа вкладывается в группу кос как подгруппа, порожденная квадратами образующих. Поэтому мы получаем возможность давать двусторонние оценки некторых констант для группы кос, если они известны для локально свободной группы. В работе [15] для локально свободной группы найдены оценки констант, описываемых в данной работе, — роста, сноса и энтропии. Оказалось, что фундаментальное неравенство является строгим: естественная система образующих не дает равенства, и неизвестно, существует ли в этой группе другая система образующих, дающая равенство. Отсюда можно вывести, что для классических образующих группы кос равенства также не будет. Упоминавшееся выше объяснение строгости неравенства и идея о том, как получить меру с максимальной энтропией, иллюстрируется на примере локально свободной группы, такая же интерпретация может быть дана для группы кос.

Для комбинаторного изучения локально свободной группы использована геометрическая техника, связанная с понятием груды (heap), которое возникло по другому поводу в связи с работой [32] и рассматривалось подробно в [33, 34]). Мы даем описание границы этой группы с помощью нормальной формы. Но наиболее неожиданный эффект в том, что *при стремлении числа образующих к бесконечности все три константы стабилизируются к некоторым конечным значениям.* Например, рост (логарифмический объем) стремится с увеличением числа образующих к числу, равному логарифмическому объему свободной группы с четырьмя образующими. Более подробные результаты о локально свободной группе см. в [15].

Общий вывод из анализа рассматриваемых примеров в этих двух параграфах состоит в том, что естественные *алгебраические примеры, возникающие из анализа блужданий на группах, приводят к моделям, имеющим физическую подоплеку.* Для локально свободных групп — это модели направленного роста, для свободных разрешимых групп мы приходим к вопросам, близким к проблемам просачивания. При этом кажущаяся на первый взгляд громоздкость группы (например, свободной разрешимой группы) оказывается в конце концов полезной, если найти наглядную геометрическую реализацию ее элементов (циклов в случае свободной разрешимой группы, груды в случае локально свободной группы).

В добавлении к статье, после нескольких замечаний об истории энтропий, мы приводим два новых определения, связанных с основным текстом общей энтропийной темой. Первое — определение общей *тополого-метрической энтропии убывающих последовательностей разбиений.* Это определение включает нормировку (скейлинг), которая однозначно определяется типом самой последовательности. Для экспоненциальной нормировки эта энтропия с иным, более частным, определением вводилась и использовалась в самом начале возникновения теории убывающих последовательностей (см. обзор [35]). Оказалось, что предлагаемый здесь скейлинг дает серию инвариантов произвольных (не обязательно диадических) последовательностей измеримых разбиений. Другое понятие — *вторичной энтропии регулярных процессов и K-автоморфизмов* — возникло по аналогии с предыдущим и также имеет тополого-метрический характер, но связано совсем с другой темой — небернуллиевскими колмогоровскими системами. Их открыл в 70-х гг. Д. Орнштейн, а несчетное множество попарно неизоморфных небернуллиевских K-автоморфизмов было описано впервые в [36]; до этого было популярно мнение, что всякий автоморфизм с вполне положительной энтропией изоморфен бернуллиевскому. Бернуллиевские эндоморфизмы и условие VWB Орнштейна аналогичны, соотвественно, стандартным убывающим последовательностям и критерию стандартности [35]. Эта аналогия и стала источником определения вторичной энтропии и параллельного изучения обоих объектов. В дальнейшем появились много примеров небернуллиевских К-автоморфизмов, среди которых наиболее плодотворный пример рассмотрен С. Каликовым — случайное блуждание по траекториям автоморфизма Бернулли; однако, практически никаких конструктивных инвариантов построено не было. Точно также как введенные в шестом параграфе понятия энтропий дают систему инвариантов убывающих последовательностей измеримых разбиений, вторичная энтропия, определяемая в седьмом параграфе, — кандидат на такую систему инвариантов для эндоморфизмов; она измеряет ϵ-энтропию множества условных мер на будущем, при фиксированном прошлом. Любопытно отметить, что ϵ-энтропия в пространстве мер измеряется относительно метрики Канторовича–Рубинштейна, с завидным постоянством появляющейся во всех подобных задачах. Оба вводимых инварианта связаны как динамической теорией энтропии, так и с теорией ϵ-энтропии: несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что рассматривается асимптотическая ϵ-энтропия последовательности компактов, строящихся с помощью нормировки (скейлинга) по последовательности разбиений в первом случае, или фрагментов случайного процесса — во втором.

В недавнем примере П. Шилдса и К. Мартон [37] построен пример K-автоморфизма, у которого в наших терминах вторичная энтропия имеет скейлинг выше линейного, в противоположность $\sqrt{n}$ в примере Каликова. Описание возможных скейлингов, появляющихся в определении вторичной энтропии, — одна из наиболее интересных проблем в теории колмогоровских автоморфизмов.

В процессе работы над статьей автор беседовал со многими коллегами и учениками и выражает им благодарность за дискуссии и ссылки на литературу. Среди них

М. Концевич, В. Кайманович, Ю. Матиясевич, Т. Нагнибеда, С. Нечаев, А. Шмелькин, J.-P. Thouvenot, X. Viennot, P. Shields, P. Dehornya, Y. Guivarch, D. Epstein, C. Series, R. Kenyon, студенты А. Горбульский, С. Добрынин, А. Дюбина. Автор благодарит также профессора A. Comtet и лабораторию LPTMS университета Париж-11 и Институт высших исследований (IHES), где завершалась работа над статьей, за гостеприимство. Первая часть работы рассказывалась на конференции, посвященной 80-летию В. А. Рохлина в августе 1999 года в институте Эйлера в С.-Петербурге, и конференции в Warwick (март 2000) и на семинарах в университете Париж-6, а содержание параграфов 3 и 4 — на семинарах ПОМИ, МИАН и IHES, краткая публикация этой части содержится в сборнике [38]. Настоящей статьей мы хотели бы привлечь внимание к новым аспектам теории случайных блужданий и асимптотикам на экспоненциальных группах, новым классам примеров групп и энтропийной теории. Доказательства некоторых из основных утверждений лишь намечены, более подробное изложение и развитие этих тем будет предметом других публикаций.

2 Основные понятия. Фундаментальное неравенство

Пусть G — счетная конечно-порожденная группа, $S = (g_1, \ldots, g_k, g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1})$ — симметричное множество образующих группы G и обратных к ним (т.е. образующих G как полугруппы), а μ — симметричная (т.е. $\mu\{g_i\} = \mu\{g_i^{-1}\} > 0$) вероятностная мера с носителем S, т.е. $\mu(S) = 1$

Определим три константы, связанные с тройкой (G, S, μ):

2.1 Логарифмический объем

Первая константа определяется только системой образующих и хорошо известна. Под длиной элемента g группы G относительно данной системы образующих S мы понимаем минимальное число $l(g)$ символов в записи элемента g как слова в алфавите S. Функция от $\rho(g, h) = l(gh^{-1})$ определяет правоинвариантную "словарную" метрику на группе (см. [39]). Пусть W_n — множество слов в группе G длины равной n относительно образующих S (т.е. сфера радиуса n с центром в единице в словарной метрике), а $|\cdot|$ — число элементов в множестве.

Определение 1 *Логарифмическим объемом группы G в заданной системе образующих S назовем число*

$$v_S = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |W_n|}{n}.$$

Эта константа измеряет экспоненциальную скорость роста числа слов. Она изучалась во многих работах. Группы, для которых существует система образующих S с $v_S > 0$, называются *экспоненциальными.* В этом случае для любой системы образующих логарифмический обьем больше нуля.

Вот некоторые из важнейших свойств этой характеристики: если логарифмический объем равен нулю (т.е. группа имеет субэкспоненциальный рост), то группа аменабельна (см. [40]); однако, среди аменабельных групп есть, конечно, и экспоненциальные — например, свободные разрешимые группы, о которых пойдет речь далее; полиномиальный рост имеют только абелевы, нильпотентные и их конечные расширения (Громов [41]), существуют группы с промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным ростом (Григорчук [42]) и т.д. Сам по себе логарифмический объем зависит от выбора образующих и в очень слабой мере отражает свойства группы. Очень многие группы, важные в топологии, алгебре, теории динамических систем и т.д. — экспоненциальны, например, таковы фундаментальные группы поверхностей отрицательной кривизны, решетки в полупростых группах и др. Много работ посвящено изучению производящей функции числа слов и выяснению ее рациональности (см. монографию [43] и [44, 45, 46] и литературу там).

2.2 Мера и соответствующее случайное блуждание на группе

Пусть теперь μ — симметричная вероятностная мера на группе G с конечным носителем S и пусть μ^{*n} — ее n-я свертка. Т.е.

$$\mu^{*n}(A) = (\underbrace{\mu \times \ldots \times \mu}_{n})\{(g_1, \ldots, g_n) : g_1 \cdots g_n \in A\}.$$

Если μ — равномерная мера на S (на образующих и их обратных), то ее значение $\mu^{*n}(g)$ на элементе g пропорционально числу способов представления данного элемента в виде слова длины n в алфавите S, таким образом, свертки учитывают кратности представления элементов группы, т.е. соотношения между образующими.

Пара (G, μ) задает случайное блуждание на группе, т.е. марковский процесс с переходной вероятностью

$$P(wg|w) = \mu(g)$$

(правое блуждание на группе) и начальным состоянием (в нулевой момент времени) в единице группы. Переход совершается из слова w в слово wg (g принадлежит носителю меры μ) с вероятностью $\mu(g)$. Реализации получившегося марковского процесса можно понимать как связные бесконечные пути на графе Кэли группы G относительно образующих S, начинающиеся в единице группы.

Обозначим марковскую меру на пространстве путей, соответствующую процессу, через $\bar{\mu}^{\infty}$. Но чаще мы будем изучать не сам процесс, а его приращения, т.е. схему Бернулли с мерой, обозначаемой далее μ^{∞}, на пространстве бесконечных последовательностей символов из S — образующих и их обратных.

Мера μ определяет элемент групповой алгебры $l^1(G)$, а именно, $P_\mu f(h) = \int f(xg)d\mu(g)$, который является положительным (марковским) оператором в пространствах $l^p(G)$. Его спектральные свойства очень важны и мало изучены. Этот оператор также можно рассматривать в пространствах различных представлений группы G. Инвариантные функции этого оператора ($Pf = f$) на группе называются гармоническими функциями.

Один из фундаментальных результатов — теорема Кестена [17] об аменабельности: спектральный радиус в $l^2(G)$ самосопряженного (в силу симметрии меры μ) оператора P_μ равен единице в том и только в том случае, когда группа порожденная носителем меры — аменабельна.

С другой стороны, спектральный радиус есть предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu^{*n}\{e\}},$$

который измеряет экспоненциальную скорость убывания вероятности возвращения траектории случайного блуждания в единицу: таким образом, для аменабельных групп и только для них скорость убывания — субэкспоненциальна. Прозрачное доказательство теоремы Кестена, связывающее напрямую спектр оператора и асимптотику мощности множеств Фельнера, имеется в [8]. Подробнее основные определения и факты можно найти в статьях и книгах, см., например, [8, 47, 48]

2.3 Снос

Рассмотрим $L(g)$, длину данного элемента группы g, т.е. расстояние до единицы в словарной метрике.

Определение 2 *Сносом (drift) данной меры μ на группе называется число*

$$l_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mu^{*n}} L(g)}{n},$$

где E_ν — знак математического ожидания относительно меры ν.

Снос есть средняя линейная (нормированная на n) скорость роста длины случайного слова, т.е. средняя скорость ухода слова на бесконечность в словарной метрике. Такая скорость существует для почти всех по мере μ^∞ бесконечных слов, это вытекает из субаддитивной эргодической теоремы Кингмана (см. лемму ниже). Поскольку нормированная длина меньше единицы, то и ее среднее по мере, т.е. снос, также существует.

2.4 Энтропия

(см. [1, 7, 8]) Определим теперь наиболее важную скалярную характеристику блуждания — энтропию пары (G, μ).

Определение 3 *Энтропией меры μ на группе G называется число*

$$h_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu^{*n})}{n} = \inf_n \frac{H(\mu^{*n})}{n},$$

где $H(\cdot)$ — обычная энтропия атомической меры.

И вновь предел существует из соображений выпуклости и совпадает поэтому с точной нижней границей. Из дальнейших свойств энтропии пока отметим лишь самые существенные: равенство нулю энтропии равносильно тривиальности границы Пуассона ([8]) — см. далее, энтропия может вычисляться на траекториях как предел нормированных логарифмов вероятностей типичных траекторий (аналог теоремы Шеннона–Макмиллана–Бреймана ([7, 11]).

Установим важное соотношение между введенными понятиями.

Теорема 1 *(Фундаментальное неравенство)*

В указанных обозначениях имеет место неравенство

$$h_\mu \leq l_\mu \cdot v_{_S}.$$

Это неравенство было доказано в работе [38], хотя его различные частные случаи рассматривались ранее, (см. работу [1, 18], ссылки в [38]); в [18] изучались блуждания на деревьях, в этом случае неравенство имеет смысл соотношений между энтропией и хаусдорфовой размерностью гармонической меры на границе, о чем упоминалось выше. Однако, следует сказать, что принципиальное значение фундаментального неравенства в широком контексте теории роста в группах и полугруппах еще должно стать предметом пристального изучения.

Доказательство. Мы фиксируем G, S, μ и опускаем поэтому индексы у v, l, h.

Лемма 1 *Если снос отличен от нуля, то случайная последовательность длин слов удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т.е. для любого $\epsilon > 0$ и почти любой последовательности ω существует такое N, что при всех $n \geq N$ имеет место соотношение*

$$|L_n(\omega)/n - 1| \leq \epsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим длины начальных отрезков слов как цилиндрические функционалы на бесконечном произведении (G^∞, μ^∞). Пусть $L_n(\omega)$ есть длина элемента группы, отвечающего начальному отрезку из n букв бесконечной последовательности ω в алфавите S. Последовательность $L_n(\omega)$, $n = 1, \ldots$, как легко видеть, удовлетворяет условиям субаддитивной эргодической теоремы (Кингмана) относительно левого сдвига T как преобразования G^∞ с продакт мерой μ^∞, а именно:

$$L_{n+m}(\omega) \leq L_n(\omega) + L_m(T^n\omega).$$

Поэтому последовательность $L_n(\omega)/n$ сходится почти всюду. То, что ее предел есть константа, следует из закона $0-1$ для последовательности независимых и того, что этот предел не меняется при любом изменении конечного отрезка последовательности. Утверждение леммы равносильно сходимости по мере последовательности нормированных длин элементов и, следовательно, вытекает из сходимости почти всюду. ■

Перейдем к доказательству теоремы.

Удобно ввести множество $W_{\leq n}$ элементов группы, длина которых не превышает n. Возьмем произвольное положительное ϵ и выберем натуральное n в соответствии с леммой. Разложим меру μ^{*n} в выпуклую комбинацию двух мер, одна из которых — μ_1

— есть нормированное ограничение этой меры на множество V тех элементов, длины которых лежат в интервале $[(1-\epsilon)l \cdot n, (1+\epsilon)l \cdot n]$, а другая — μ_2 — есть нормированное ограничение меры μ^{*n} на дополнение к множеству V в $W_{\leq n}$. По лемме множество V имеет меру больше $1-\epsilon$, а число элементов во втором не превышает общее число элементов в $W_{\leq n}$.

Тогда энтропия $H(\mu^{*n})$ оценивается как

$$H(\mu^{*n}) \leq (1-\epsilon)H(\mu_1) - \log(1-\epsilon) + \epsilon \cdot \log(W_{\leq n})$$

(последнее слагаемое оценивает сверху энтропию меры μ_2 энтропией равномерной меры на $W_{\leq n}$). Поделив на n и переходя к пределу по n с учетом того, что последнее слагаемое после деления на n стремится к логарифмическому объему v, умноженному на ϵ, (см. определение), получаем

$$h \leq (1-\epsilon)H(\mu_1)/n + \epsilon \cdot v.$$

Но $H(\mu_1)/n$ оценивается сверху выражением $(\log|V|)/n$, которое при n стремящемся к бесконечности дает $l \cdot v$, т. е.

$$h \leq (1-\epsilon)l \cdot v + \epsilon \cdot v,$$

и в силу произвольности ϵ получаем нужное неравенство:

$$h \leq l \cdot v.$$

■

Замечание 1 *1. Все рассуждения остаются верными и для полугрупп. Если рассматривать полугруппу, в которой все соотношения между образующими не меняют длину элементов (а значит, в полугруппе нет обратных элементов), то, разумеется, снос равен единице, и фундаментальное неравенство принимает вид*

$$h \leq v.$$

Это относится к локально свободной полугруппе, см. параграф 5.

2. В свободной полугруппе n-я свертка равномерной меры на образующих тривиальным образом совпадает с равномерной мерой на словах длины n; это — тот малоинтересный и единственный случай, когда оба подхода к росту — обычный и динамический, тождественны уже при конечных n.

Следствие 1 *Если $l_\mu = 0$, т.е. рост слов медленнее линейного, то и энтропия равна нулю. Тем самым, положительность энтропии влечет линейный рост длин типичных по этой мере слов.*

Н. Варопоулосу ([49]) принадлежит важное замечание о том, что из доказанной им общей верхней оценки переходных вероятностей произвольной счетной марковской цепи можно легко вывести и нижнюю оценку для энтропии. Действительно, хотя это неравенство явно не приводится в [49], оно сразу следует из данной там основной оценки и, как отмечает автор, и было поводом для ее получения. Эта нижняя оценка такова:

$$C \cdot (l_\mu)^2 \leq h_\mu,$$

здесь константа C отлична от нуля и зависит лишь от группы с мерой. Таким образом, *энтропия отлична от нуля одновременно со сносом.* Прокомментируем это обстоятельство чуть подробнее. Легко видеть, что линейность длины типичного случайного слова с ростом n приводит и к линейности роста и каждой из его двух половин, четвертей и т.д., при этом коэффициент остается тем же. Отсюда по индукции можно вывести, что вероятность типичного элемента убывает экспоненциально с ростом n; а тогда энтропия, которая в силу аналога теоремы Шеннона–Макмиллана–Бреймана (см. ниже) есть предел нормированного логарифма вероятности типичного слова, также положительна. Это рассуждение не дает вышеприведенной оценки, но поясняет роль линейности сноса и ее эквивалентность экспоненциальности убывания вероятностей.

Еще одно замечание относится к возможному росту длин слов. Если снос отличен от нуля, то длины почти всех слов, как утверждает лемма, растут линейно по n с одной и той же скоростью. С другой стороны, хорошо известно, что на абелевых и многих других группах снос равен нулю, а скорость роста максимума длин слов сублинейна, и, более точно, имеет в силу центральной предельной теоремы порядок $\sqrt{n}$. Вопрос, поставленный в этой связи, — может ли эта скорость для каких-либо групп быть промежуточной между $\sqrt{n}$ и n. Этот вопрос важен для гипотетических обобщений центральной предельной теоремы для экспоненциальных групп, и до сих пор, насколько известно, он не изучался. Ответ — положителен: используя понятие размаха из классической теории случайных блужданий на решетках [50], студентка А. Дюбина [51] доказала, что снос в сплетении групп $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}$ с естественными образующими имеет асимптотику: $\frac{n}{\log n}$. Те же соображения показывают, что такой же ответ верен для свободной разрешимой группы с двумя образующими. Существуют и другие промежуточные асимптотики сноса. Любопытно, что при $h_\mu = l_\mu = 0$, т.е. при сублинейном росте длин слов, асимптотики энтропии $H(\mu^{*n})$ и длин могут отличаться очень существенно, например, для абелевых групп $H(\mu^{*n}) \sim \log n$, а $E_{\mu^{*n}} l(g) \sim \sqrt{n}$.

2.5 Сравнение систем образующих

Будем рассматривать *сильно экспоненциальные группы*, т.е. такие, для которых существует система образующих S и симметричная мера μ на ней с положительной энтропией $h_\mu > 0$; из фундаментального неравенства следует, что $l > 0$ и $v > 0$, т.е. число слов растет экспоненциально. Очевидно, что положительность энтропии влечет экспоненциальность, но не влечет аменабельность (см. [8] и параграф 4), а экспоненциальность не влечет положительность энтропии: например, среди экспоненциальных разрешимых групп существуют как сильно экспоненциальные, так и не сильно экспоненциальные. Однако, как отмечено выше, положительность энтропии равносильна положительности сноса: $l_\mu > 0$, т.е. линейности среднего роста длины слова.

Удобно ввести нормированную энтропию

$$\widehat{h}_\mu = \frac{h_\mu}{l_\mu}.$$

Величина $\widehat{h}_\mu$ имеет смысл *удельной энтропии или среднего количества информации на одну букву (образующую).*

Фундаментальное неравенство превратится в следующее неравенство:

$$\widehat{h}_\mu \leq v_S.$$

Эта форма фундаментального неравенства подчеркивает сходство v_S с топологической энтропией и интерпретацию фундаментального неравенства как неравенства между метрической и топологической энтропиями. В параграфе 3 мы придадим точный смысл этой аналогии, где в роли метрической энтропии преобразования (полиморфизма) выступает энтропия h, а в роли его топологической энтропии — правая часть фундаментального неравенства.

Рассмотрим величину

$$\sup_\mu h_\mu \equiv h_S,$$

где супремум берется по всем симметричным мерам с носителем S. Аналогично определяются величины $\widehat{h}_S$ и l_S.

Лемма 2 *Существует мера с носителем S, для которой реализуется супремум h_S величины h_μ.*

Действительно, так как множество S конечно, то множество симметричных мер на нем — компактно. Энтропия h_μ, как можно убедиться из простых оценок, приведенных в [38], непрерывно зависит от меры μ.

Поскольку различные меры μ определяют попарно взаимно-сингулярные бернуллиевские меры на пространстве бесконечных слов (см. следующий пункт), то непрерывность математических ожиданий функционалов, зависящих от n (таких как нормированная длина слова), вообще говоря, не имеет места. Поэтому, пока неясно, существует ли мера с носителем S, реализующая супремумы для величин l_μ и $\widehat{h}_\mu$, но для дальнейшего важна как раз мера, реализующая супремум величины h_μ — эта мера называется *мерой с максимальной энтропией на данной системе образующих S.* Из предыдущего видно, что имеет место неравенство:

$$\widehat{h}_S \leq v_S,$$

и

$$h_S \leq l_s \cdot v_S.$$

Стоит отметить, что равномерная мера на образующих S не обязательно является мерой с максимальной энтропией, так как образующие могут быть неравноправны с точки зрения определяющих соотношений. Если же существует транзитивно действующая на образующих группа, продолжающаяся до автоморфизма всей группы, то естественно предположить, что равномерная мера на образующих и обратных к ним есть мера с максимальной энтропией.

Наконец, введем величину

$$q_S \equiv \frac{\widehat{h}_S}{v_S}.$$

Величина q_S зависит только от системы образующих S и, как мы увидим, является ее важной характеристикой.

Определение 4 *Система образующих S в сильно экспоненциальной группе G называется экстремальной, если величина q_S принимает максимально возможное значение $q(G) = q = \sup q_S$ (супремум берется по всем конечным системам образующих).*

Из неравенства следует, что

$$q \leq 1.$$

Возникает возможность сравнения систем образующих с помощью параметра q_S. Неизвестно, в каждой ли конечно-порожденной группе существует экстремальная система образующих. Однако введенное выше число $q(G)$ является нетривиальным *инвариантом конечно-порожденной сильно экспоненциальной группы.*

Определение 5 *Группа G называется свободноподобной, если $q(G) = 1$.*

Смысл термина разъясняется из следующего простого и известного вычисления, показывающего, что в свободной группе с $d > 1$ образующими система свободных образующих экстремальна, а равномерная мера на образующих имеет максимальную энтропию, т.е. $q = 1$. Явные значения всех трех констант для этой меры таковы:

$$v = \log(2d-1), \quad l = \frac{d-1}{d}, \quad h = \frac{(d-1)\cdot\log(2d-1)}{d}.$$

Эти подсчеты хорошо известны, их простота определяется тем, что в этом примере сами длины случайных слов образуют марковскую цепь, а именно, простое случайное блуждание на одномерной полурешетке с отражением в нуле. В конкретных примерах наибольшую трудность представляет подсчет энтропии, главный метод здесь — теорема шенновского типа, позволяющая считать энтропию на траекториях.

Нетрудно убедиться в том, что конечные расширения свободноподобных групп свободноподобны, поэтому, виртуально свободные группы (конечные расширения свободных групп), и в частности, свободное произведение циклических групп, есть также свободноподобные группы (напомним, что только свободное произведение двух групп второго порядка не является виртуально-свободной группой). Но и явные вычисления для свободных произведений циклических групп, как и для некоторых подгрупп $SL(2,\mathbb{Z})$, дают равенство.

Теперь дадим интерпретацию фундаментального неравенства с точки зрения генерации элементов группы, повторяя чуть более подробно то, о чем шла речь во введении. Как оценить, какая система образующих группы более удобна для работы? Мы можем говорить, например, о нормальных формах элементов группы в данных образующих, и об их сравнениях. Но следует помнить, что нормальные формы могут не существовать в алгоритмическом смысле, так как их существование и означает возможность алгоритмического решения проблемы тождества в группе. Но даже в тех классических случаях, когда такая форма есть, она может быть неустойчивой, т.е. существенно меняться при малом изменении элемента группы, т.е. умножении его на какую-либо образующую.

Динамический же подход состоит в другом — мы порождаем элементы случайным образом в соответствии с той или иной мерой на образующих и затем следим, насколько типичны порождаемые элементы в группе. Точная формулировка состоит в том, что сравниваются сверточные степени выбранной меры с равномерной мерой на словах данной длины. Действительно, распределение элементов группы, которое мы получим в процессе генерирования после n шагов есть в точности n-я свертка исходной меры, а снос показывает, какова их средняя длина; поэтому сравнивать этот массив надо с равномерной мерой на словах той же длины. Таким образом, фундаментальное неравенство показывает, в какой степени эти меры близки, — если мы имеем строгое неравенство, то это означает, что *случайный процесс порождает экспоненциально малую часть множества всех слов.* Если же оно превращается в равенство, то случайное генерирование дает основную часть всех элементов группы (отличающуюся лишь на субэкспоненциальную поправку). Поэтому *следует сравнивать системы образующих по показателю q_S, введенному выше*, — он характеризует отклонение между равномерной мерой и динамической, а экстремальная система образующих ($q_S = q(G)$), если она существует, — дает наилучшее возможное для данной группы решение вопроса. В некоторых примерах константа q_S для естественной системы образующих меньше единицы, но не известно, является эта система образующих экстремальной. Именно такое положение сейчас с группой кос — мы имеем лишь частичную информацию о росте и фундаментальном неравенстве для произвольных образующих в ней.

Следует отметить еще одно общее соображение по поводу случайного генерирования элементов групп, о котором шла речь выше: можно, конечно, генерировать элементы не независимым образом, а следуя, например, марковскому правилу, частично учитывающему соотношения между образующими, запрещающее ставить после какой-либо образующей некоторую другую и.т.д. Это приводит к более сложным постановкам вопроса, и проблема явного описания границы и гармонических функций остается и этом случае.

Вышеприведенные определения ставят ряд вопросов, некоторые из которых приведем здесь.

Главный вопрос таков:

1. В любой ли конечнопорожденной сильно экспоненциальной группе существует экстремальная система образующих, т.е. всегда ли $q(G) = 1$?

Иначе говоря, всякая ли конечнопорожденная группа свободноподобна?

Другие вопросы:

2. Описать меры с максимальной энтропией для фиксированной системы образующих.

3. Когда такая система образующих единственна в существенном?

Некоторый материал для анализа этих, по-видимому, сложных вопросов дает содержание следующих параграфов. В них мы привлекаем внимание к некоторым классам групп, которые не изучались до сих пор в этом контексте.

3 Структура границ и связь фундаментального неравенства с полиморфизмом границы

В этом параграфе мы исследуем предельные объекты — границы случайных блужданий, структуры на них — и придаем смысл введенным раннее характеристикам в терминах этих предельных пространств и их преобразований, мы приводим также общий способ описания границ для групп со стабильной нормальной формой.

3.1 Бернуллиевская модель и описание различных границ (граница-выход, стационарная граница, граница Пуассона–Фюрстенберга, гармонические функции)

Мы изучаем статистику слов в группе, границы и др. с помощью *модели бесконечных слов* и разбиений пространства бесконечных слов. С точки зрения случайных блужданий эта модель рассматривает приращения марковского процесса вместо самого процесса. Такой подход ближе к эргодической теории и теории меры, более того, основная идея дальнейшего — свести все вопросы о случайных блужданиях к тем или иным задачам об автоморфизме Бернулли. Существенную роль при этом играют убывающие последовательности разбиений на этих пространствах.

Пусть $S^{\mathbb{N}}$ — пространство бесконечных слов в алфавите $S = (g_1, \dots, g_k, g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1})$ — образующих группы G. В терминах графа Кэли, соответствующем системе образующих S, пространство $S^{\mathbb{N}}$ есть пространство бесконечных связных путей, начинающихся из единицы группы, каждое ребро этого пути занумеровано элементом S. В следующем параграфе мы рассмотрим пространство путей на графе Кэли любой конечнопорожденной группы как пространство путей на решетке, что даст новые способы изучения случайных блужданий.

Если μ — симметричная мера на образующих, то μ^∞ — бернуллиевская мера (продакт-мера) на $S^{\mathbb{N}}$. Все последующие разбиения понимаются как измеримые разбиения этого пространства Лебега $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$. В то же время на $S^{\mathbb{N}}$ определена стандартная вполне несвязная компактная топология, а левый сдвиг есть непрерывный эндоморфизм этого компакта, сохраняющий меру.

Рассмотрим сначала координатные (цилиндрические) разбиения η_m пространства $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$ — на последовательности с фиксированной m-ой координатой. Разбиение $\xi_n^0 = \vee_{m \geq n} \eta^m$ назовем n-хвостовым — его элемент есть множество всех последовательностей с фиксированными координатами, начиная с $(n+1)$-й. Разбиения ξ_n^0 убывают, и их измеримое пересечение $\wedge \xi_n^0$ есть — по закону $0-1$ Колмогорова — тривиальное разбиение пространства $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$. Теоретико-множественное ("неизмеримое") пересечение

$\cap_n \xi_n^0$ разбиений ξ_n^0 есть разбиение на классы последовательностей, различающихся на произвольном конечном числе мест. Оно "абсолютно неизмеримо", а его измеримая оболочка, т.е. измеримое пересечение последовательности $\{\xi_n\}$ — тривиально. Определения всех этих разбиений не используют структуру группы.

Определим теперь последовательность конечных цилиндрических измеримых разбиений $\{\zeta_n(G)\}$, относя в один элемент разбиения $\zeta_n(G)$ все последовательности из $S^{\mathbb{N}}$, у которых произведение в группе G первых n координат одинаковы. Мы будем опускать указание на группу в обозначении ζ_n, если нет опасности смешения.

Очевидно, что энтропия конечного разбиения ζ_n равна $H(\mu^{*n})$, а число его элементов есть число элементов группы длины n. Поэтому, следующие равенства тавтологичны:

$$h_\mu = \lim_n \frac{H(\zeta_n)}{n},$$

$$v = \lim_n \frac{\log|\zeta_n|}{n},$$

здесь $|\cdot|$ — число элементов в разбиении. Что касается интерпретации сноса, то в каждом элементе разбиения ζ_n есть слово минимальной длины, следовательно, оно определяет функцию длины l_n на $S^{\mathbb{N}}$, а ее математическое ожидание есть средняя длина слова, нормированный на n предел этого ожидания и есть снос. Гораздо более важная интерпретация этих констант и фундаментального неравенства будет дана ниже.

Разбиения ζ_n не образуют возрастающей последовательности, и их произведение не является инвариантным относительно левого сдвига. Для наших целей более удобна несколько иная последовательность измеримых разбиений — $\{\xi_n\}$, определяемая следующим образом:

$$\xi_n = \zeta_n \vee \xi_n^0.$$

Разбиения ξ_n имеют конечные элементы, состоящие из последовательностей, все координаты которых начиная с $(n+1)$-й совпадают, а произведения первых n координат в группе G — одинаковы. Очевидно, что каждое разбиение ξ_n^0 мажорирует разбиение ξ_n. Имеет место следующая очевидная

Лемма 3 *Введенные разбиения связаны следующим образом:*

$$\xi_n = \vee_{m>n}\zeta_m,$$

при этом последовательность разбиений $\{\xi_n\}$ монотонно убывает, а ее измеримое пересечение, обозначаемое далее $\sigma(G,\mu)$, совпадает с верхним пределом разбиений ζ_n:

$$\wedge_N \vee_{m>N} \zeta_m = \wedge_n \xi_n = \sigma(G,\mu).$$

Это разбиение, вообще говоря, неинвариантно относительно левого сдвига.

Иногда удобнее говорить о разбиениях как об отношениях эквивалентности. В этом смысле мы имеем монотонные последовательности отношений эквивалентности бесконечных слов, сходящиеся к некоторому предельному отношению эквивалентности, однако, необходимо рассматривать не само предельное отношение, а его измеримую оболочку.

Определение 6 *Назовем измеримое пересечение*

$$\wedge_n \xi_n = \sigma(G,\mu)$$

пространства $(S^{\mathbb{Z}},\mu^\infty)$ *граничным разбиением, отвечающим мере* μ*, а фактор-пространство по нему* $S^{\mathbb{N}}/\sigma$ *— границей пары* (G,μ)*. Образ меры* μ^∞ *на фактор-пространстве обозначим* μ_σ*.*

Более точно было бы сказать, что это граница-выход марковского процесса, отвечающего случайному блужданию, если перейти к соответствующему марковскому процессу. В нашей ситуации граница совпадает со стационарной границей (см. ниже), границей Пуассона и др. (см. [8]). Для группы движений пространства Лобачевского — это абсолют плоскости и т.д. Границы представляют основной интерес в теории случайных блужданий на группах и гармоническом анализе. Сложность их изучения в тех случаях, когда она нетривиальна, в том, что нет единого способа определить цилиндрический базис разбиения π — он существует только если существует стабильная нормальная форма элементов группы, как будет видно из дальнейшего, а такая нормальная форма существует, по-видимому, не всегда.

Для абелевых групп (и симметричных мер на них) граница тривиальна, и это есть следствие другого закона $0-1$ — закона Хьюитт–Сэвиджа, по которому сигма-алгебра измеримых подмножеств пространства Бернулли, инвариантных относительно группы финитных подстановок, тривиальна, иначе говоря, бесконечная симметрическая группа действует на этом пространстве эргодично. Таким образом, *всякая группа с мерой, для которой граница тривиальна (например, группы субэкспоненциального роста) задает свой закон* $0-1$ — мы получаем алгебраический источник нетривиальных $0-1$-законов для классических бернуллиевских последовательностей. Особенно интересны те из них, которые возникают из экспоненциальных групп, граница которых тривиальна, как, например, для свободной разрешимой группы с двумя образующими ступени два (см. параграф 4).

Введем еще одно важное семейство разбиений. Зафиксируем два натуральных числа (n,k) и скажем, что две точки $x,y\in S^{\mathbb{N}}$ (n,k)-эквивалентны, если произведение первых n координат точки x совпадает с произведением первых k координат точки y, и для всех i, $x_{n+i}=y_{k+i}$. Тем самым, определено разбиение $\zeta_{n,k}$. При $n=k$ получаем разбиения ζ_n.

Определение 7 *Измеримое пересечение разбиений*

$$\wedge_{n,k}\zeta_{n,k}$$

обозначается $\pi(G,\mu)$ *и называется стационарным разбиением, фактор-пространство* $\Gamma(G,\mu)$ *— стационарной границей пары* (G,μ), *а фактор-мера* μ_π *— гармонической мерой.*

Стационарная граница естественно отображается на границу, так как стационарное разбиение мажорируется граничным, ниже мы увидим, что в нашем случае это отображение есть изоморфизм.

Теорема 2 *Отображение стационарной границы на границу есть изоморфизм соответствующих пространств с мерой.*

Доказательство можно провести в "бернуллиевских" терминах, но на самом деле это утверждение хорошо известно в обычной теории марковских цепей; кратко опишем его.

Прежде всего отметим, что при переходе от марковской цепи случайных блужданий к независимым приращениям, т.е. к бернуллиевской схеме, обычным понятиям стационарной границы и границы-выход для марковской цепи (см. [47, 8]) соответствуют данные выше определения стационарной границы и границы. Иначе говоря, факторизуемые пространства различны, но фактор-пространства канонически отождествлены: отображение, переводящее траекторию блуждания в последовательность приращений, согласовано с обоими отношениями эквивалентности: две траектории, эквивалентные в смысле стационарного отношения эквивалентности, имеют и приращения эквивалентные в том же смысле, то же самое верно и для хвостового отношения. Далее нужно повторить хорошо известное рассуждение из теории стационарных марковских цепей: *всякая апериодическая марковская цепь с конечным или счетным множеством состояний регулярна*, т.е. удовлетворяет закону $0-1$ и ее граница-выход — тривиальна. Апериодичность означает отсутствие разбиения множества состояний на собственные подмножества (подклассы), которые детерминированно переставляются при сдвиге. Таким образом, апериодичность, эквивалентная эргодичности, т.е. тривиальности стационарной границы, влечет тривиальность границы-выход. Этот вывод верен и для сигма-конечной инвариантной меры. Утверждение перестает быть верным для произвольного (континуального) пространства состояний: известны примеры стационарных эргодических, но нерегулярных марковских цепей с непрерывным множеством состояний (ср. понятие сверхгрубости гиперболических систем в [52, 53]). Изоморфизм границы и стационарной границы следует из "условного" аналога приведенного рассуждения (т.е. примененного к условному процессу, а именно, эргодической компоненте). *Теперь мы можем отождествить обе границы как пространства с мерами и обозначать их одинаково — $(\Gamma(G,\mu),\widehat{\mu})$, и называть просто границей*, а предельные разбиения (граничное и стационарное), по которым факторизуется пространство $S^{\mathbb{N}}$, обозначать единым образом — $\sigma(G,\mu)$, опуская иногда упоминание о группе G и о мере μ и называть *граничным разбиением*, а меру $\widehat{\mu}$ — *гармонической мерой.*

Точки границы фактически классифицируют типы асимптотических поведений траекторий блуждания, при стремлении времени к бесконечности, различимые измеримыми функционалами. Мы отсылаем к специальным статьям тех, кто интересуется теорией границ и ее многочисленными связями с уравнениями, пополнениями групп, теорией концов групп и т.д.

В теории марковских процессов и операторов определяется наиболее известная из границ — граница Пуассона, которая впервые изучалась в общем групповом контексте Г. Фюрстенбергом [3, 4], чем и объясняется предложение называть ее границей Пуассона–Фюрстенберга. О понятиях и теории μ-гармонических функций имеется колоссальная литература (см., например, [47]).

Каждая точка $\gamma \in \Gamma(G,\mu)$ стационарной границы (в вышеприведенном смысле) есть по определению элемент разбиения σ, на почти каждом из которых определена условная мера. Возьмем значение этой условной меры на каком-либо элементе разбиения ζ_n, этот элемент определяет некоторый элемент группы $h \in G$, обозначим его через $f_\gamma(h)$, тем самым, определена функция на группе. Ее значение в единице группы равно единице, и из определения следует, что f_γ — *есть положительная ограниченная гармоническая функция*

$$P_\mu f = f.$$

Особую роль в дальнейшем играют значения гармонической функции на множестве S — образующих и их обратных — $f_\gamma(g)$, т.е. значения условной меры на элементах разбиения $\zeta_1 = \eta_1$.

Таким образом, определено $\mathrm{mod}\,0$ отображение стационарной границы на множество положительных ограниченных гармонических функций относительно оператора перехода P_μ, определяемого мерой μ. Гармоничность функции и корректность определения следует из стационарности.

Лемма 4 *Это отображение есть изоморфизм* $\mathrm{mod}0$ *между стационарной границей и границей Шоке множества ограниченных нормированных положительных гармонических функций.*

Тем самым, стационарная граница $(\Gamma(G,\mu),\widehat{\mu})$ совпадает с границей Пуассона–Фюрстенберга. Всякая положительная ограниченная гармоническая функция представляется интегралом по стационарной границе. Тривиальность границы Пуассона для абелевых групп есть содержание теоремы Шоке–Дени (см. [47]). В одном из следующих пунктов мы используем гармонические функции для определения нового марковского преобразования (полиморфизма) границы. Несколько более тонкий вопрос — как все эти определения перенести из метрической в топологическую категорию — проблема состоит в том, что рохлинская теория условных мер гарантирует их существование не всюду, как можно было бы предположить в некоторых случаях, а лишь почти всюду, поэтому и гармонические функции соответствуют почти всякой, а не всякой, точке границы, вообще говоря. Тем не менее, запас корректно определенных гармонических функций задает обычным образом топологию на границе.

Разбиения π, σ можно строить в пространстве траекторий произвольного одностороннего стационарного процесса. В общем случае (небернуллиевского пространства) эти разбиения аналогичны разбиениям, соответственно, на траектории группы финитных замен координат (σ) и на траектории (по Рохлину) полугруппы сдвигов (π). Разумеется, оба разбиения и оба фактор-пространства или границы, вообще говоря, не совпадают, поскольку различны понятия эргодичности и регулярности по Колмогорову: тривиальность σ означает регулярность (обычный закон $0-1$), а тривиальность π — эргодичность. Эти разбиения встречаются также в алгебраической теории динамических систем при построении C^*-алгебр, связанных с эндоморфизмами.

Существенно при этом, что эти конструкции относятся к пространству односторонних последовательностей, в котором действует односторонний сдвиг. В связи с этим упомянем еще об одном естественном построении — "двусторонизации". Рассмотрим пространство $S_f^{\mathbb{Z}}$ — пространство *бесконечных в обе стороны последовательностей символов*, причем лишь конечное число координат с отрицательными номерами отлично от единицы группы (можно считать, что единица входит в S, но может встречаться только на местах с отрицательными номерами). Это пространство можно представить как объединение счетного числа экземпляров $S^{\mathbb{N}}$, занумерованных конечными последовательностями, стоящими на местах с отрицательными номерами. Определим сигма-конечную меру на этом пространстве, приписав каждому из этих экземпляров меру 1, а на $S^{\mathbb{N}}$ определим ее как и выше. Разбиения $\bar{\xi}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ определяются на $S_f^{\mathbb{Z}}$ точно так же — а именно, элемент есть множество двусторонних последовательностей, совпадающих начиная с координаты с номером $n+1$, и имеющих одинаковое произведение в группе всех предшествующих координат (число отличных от единицы — конечно). Польза этой конструкции в том, что теперь пересечение $\wedge_n \bar{\xi}_n$ есть уже инвариантное относительно сдвига разбиение, а сдвиг сохраняет введенную сигма-конечную меру. Произведение координат с отрицательными номерами можно воспринимать как начальную точку в нулевой момент времени при случайном блуждании — в основной модели мы всегда считали ее единицей группы, что лишает, конечно, модель инварриантности. Недостаток этой конструкции — в бесконечности инвариантной меры, поэтому теория границ не становится проще от такого перехода.

Вернемся к одностороннему случаю. Приведенные определения разбиений естественно обобщаются на широкий класс марковских процессов — блужданий на ассоциативных системах, формальных грамматиках и др. Вот точное определение. Пусть S — произвольный алфавит и пусть для каждого n задано разбиение θ_n множества слов длины n на эквивалентные слова (синонимы), при этом при разных n они согласованы следующим образом: если два слова длины $n+k$ эквивалентны (относительно разбиения θ_{n+k}) и их начала (или концы) длины k также эквивалентны (относительно разбиения θ_k), то и оставшиеся части длины n также эквивалентны (относительно θ_n). Теперь мы можем повторить построение разбиений ξ_n на $S^{\mathbb{N}}$, определить обе границы, расширенное пространство и т.д. Условие согласования разбиений θ_n гарантирует монотонность последовательности ξ_n на $S^{\mathbb{N}}$. Пересечение $\wedge_n \xi_n$ неинвариантно относительно левого сдвига, но обладает более слабым свойством, а именно, *полуинвариантностью*: т.е. является инвариантным относительно преобразований, сдвигающих последовательность на один шаг вправо и ставящее на первое место фиксированную образующую. Иначе говоря, вместо условия инвариантности: $T^{-1}\xi \prec \xi \prec T^{-1}\xi \vee \eta_1$ выполнено условие полуинвариантности: $\xi \prec T^{-1}\xi \vee \eta_1$.

3.2 Проблема описания границ

Явное описание границ составляет основной предмет теории асимптотического поведения случайных блужданий и гармонического анализа на группах. Канонический алгебраический пример нетривиальной границы — граница Мартина свободной группы для случайного блуждания по образующим и обратным к ним, найденная в работе Дынкина–Малютова — см. [20]. Ею является пространство бесконечных односторонних несократимых слов. Оно же (уже как пространство с гармонической мерой) выступает в качестве границы Пуассона–Фюрстенберга для блужданий с переходной мерой с конечным носителем (и даже для мер с первым моментом — см. ссылки в [54]). Особенность этого примера в том, что границу, являющуюся по определению факторпространством, удается вложить в исходное пространство, т.е. построить сечение к факторизации по граничному разбиению. Как уже говорилось, это можно сделать далеко не всегда, так как наличие сечения связано с существованием стабильной нормальной формы в группе (см. определение далее). Имеются немногочисленные примеры явных вычислений, их можно найти в работах Фюрстенберга [3], а из последних работ см. [23], [21, 22]. Ниже и в последующих параграфах будут даны новые примеры.

Двойственным к вопросу об описании границ является вопрос о том, как охарактеризовать те функции от бесконечных траекторий, которые постоянны на элементах разбиения $\sigma = \pi$, и тем самым, зависят лишь от точек границы (Γ, μ). Докажем общее утверждение, играющее ту же роль для вычисления границ, как и эргодический метод [55] для нахождения инвариантных мер для ручных отношений эквивалентности. Мы используем обозначения, введенные выше. Для определенности мы будем говорить об L^2-функциях.

Теорема 3 *Всякая функция F на $S^{\mathbb{Z}}$, постоянная на элементах разбиения σ (т. е. корректно определенная на границе), есть предел в L^2 последовательности функций $\{f_n\}$, где f_n измерима относительно разбиения ζ_n.*

Напомним, что разбиения ζ_n — цилиндричны, но не образуют возрастающую последовательность разбиений. В дальнейшем мы обозначаем пространство (конечномерное) функций, измеримых относительно ζ_n, через B_n, а подпространство пространства L^2 функций, измеримых относительно разбиения σ, т.е. функций на границе — через $L^2(\Gamma, \widehat{\mu})$. Наше утверждение сводится к тому, что это подпространство есть предел подпространств B_n.

Доказательство. Пусть F — произвольная измеримая относительно σ функция. Для всякого $\epsilon > 0$ найдется $n(\epsilon) = n$ и цилиндрическая функция F_n, отличающаяся по норме L^2 от F не более, чем на ϵ. Возьмем условное ожидание от обеих функций относительно разбиения ξ_n; это не изменит функцию F, поскольку она измерима относительно ξ_n (напомним, что $\xi_n \succ \sigma$), а в силу цилиндричности F_n и бернуллиевости меры μ^{∞}, условное ожидание от F_n снова будет цилиндрической функцией и, потому, измеримой относительно ζ_n. Так как условное ожидание не увеличивает норм, то теорема доказана. ■

Таким образом, вычисление границы сводится к нахождению всех пределов функций, измеримых относительно цилиндрических разбиений ζ_n, или иначе — к нахождению пределов функций от слов в алфавите S длины n, зависящих лишь от класса слова, т.е. от соответствующего элемента группы. Несмотря на почти тавтологичность этого утверждения, оно играет основную роль в обосновании вычислений границ. Конечно, само нахождение пределов есть конкретная задача в конкретной групповой ситуации, однако, мы увидим, что есть весьма общие классы групп, где и это вычисление может быть стандартизировано.

Специальным случаем общей проблемы является задача распознавания тривиальности границы. В этом случае предельные функции — лишь константы. Хотя энтропийный критерий нетривиальности границы [8, 11, 56], обсуждаемый с новой точки зрения далее, весьма эффективен, тем не менее подсчет энтропии все же непрост, и иногда нетривиальность границы проще доказать прямым предъявлением нетривиальных хвостовых множеств или непостоянных гармонических функций, а не вычислением энтропии. Аналогично этому, и в эргодической теории проверка того, положительна ли энтропия конкретного автоморфизма, и эргодичен ли он, часто представляет содержательную проблему.

Очевидно, что проблема распознавания тривиальности границы для равномерных мер на образующих по заданным соотношениям между образующими, т.е. выяснения равна ли нулю энтропия, — алгоритмически неразрешима, как любая содержательная проблема теории групп (см. напр. [57, 58]). Явное описание границ $\Gamma(G,\mu)$ имеется лишь для небольшого количества счетных групп и мер на них. Помимо свободных групп, фундаментальных групп поверхностей [23] и классических симметрических пространств [4, 8], таких примеров совсем немного.

Как правило, пространство, являющееся “кандидатом” в границы, угадывается легко; сложнее доказать, что это пространство совпадает с границей. Иначе говоря, первый относительно простой шаг состоит в нахождении запаса некоторых хвостовых функций на пространстве траекторий блужданий (или функций на $S^{\mathbb{N}}$, измеримых относительно разбиения σ), — это дает, вообще говоря, лишь фактор-пространство границы, а второй шаг (если правильно угадан кандидат) — в доказательстве того, что они исчерпывают весь запас функций на границе, т.е. что граница условного процесса при фиксации точки из фактор-пространства тривиальна, или, эквивалентным образом, что все пределы исчерпываются указанными функциями. В ряде примеров первый шаг был сделан давно (сплетения, лампочные группы). Ниже мы используем вышеприведенную теорему, для того, чтобы сделать второй шаг в конкретных случаях.

Начнем со следующего определения.

Определение 8 *Нормальной формой элементов группы относительно данной системы образующих S называется отображение, сопоставляющее каждому элементу группы некоторую запись этого элемента в виде слова в алфавите S. Минимальной называется нормальная форма, в которой длина слова равна длине элемента. Нормальная форма называется стабильной относительно меры μ на S, если для почти всякой по мере μ^∞ бесконечной последовательности $(z_1, z_2, \dots)$ как элемента пространства $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$, последовательность нормальных форм отрезков этой последовательности стабилизируется, т.е. сходится в слабой топологии к некоторому элементу того же пространства.*

Нетрудно дать количественный критерий стабильности нормальной формы для равномерных мер.

Лемма 5 *Пусть в группе G выделена система образующих $S = \{g_1, \dots, g_k, g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}\}$ и μ — равномерная мера на S. Для того, чтобы некоторая нормальная форма от-*

носительно образующих S была стабильной относительно равномерной меры μ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim \frac{W(N, k_N)}{W_N} = 1,$$

где W_N — число элементов в группе, длина данной нормальной формы которых в образующих S равна N, $W(N,k)$ — число тех из них, у которых первые k знаков данной нормальной формы не меняются при умножении элемента справа на любой из элементов из S, а k_N — произвольная стремящаяся к бесконечности при $N \to \infty$ последовательность натуральных чисел.

Если существует стабильная нормальная форма, то в пространстве $S^{\mathbb{N}}$ выделено подмножество элементов, являющихся пределами нормальных форм почти всех элементов. Такие элементы по аналогии со свободной группой мы будем называть *бесконечными несократимыми словами.* Отметим, что их запас определяется не только выбором образующих, но и выбором нормальной формы. Обозначим отображение, сопоставляющее почти каждому элементу $(S^{\mathbb{N}}, \mu^{\infty})$ его бесконечное несократимое слово, через Φ, а его образ через $(\Gamma_0, \widehat{\mu}_0)$. Мы будем использовать следующие обозначения: если элемент $z \in S^{\mathbb{N}}$, т.е. последовательность $z = \{z_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, стабилизируется, то его образ $\Phi(z)$ обозначается через $\{\widehat{z}_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, а его координаты называются *стабильными координатами элемента z* (точнее было бы называть их ∞-стабильными). Координаты нормальной формы начального отрезка последовательности $\{z_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ $\{\widehat{z}_i^n\}$ будем называть n-стабильными — их число может быть меньше n, но мы будем считать его равным n, добавляя если нужно к слову несколько единиц справа. По определению стабилизация означает, что для любого i, начиная с достаточно большого n, значения $\widehat{z}_i^n$ не меняются, т.е. при любом i стабильная i-ая координата совпадает с n-стабильной при больших n.

Утверждение следующей леммы непосредственно вытекает из стабильности.

Лемма 6 *Если нормальная форма стабильна, то относительно гармонической меры координаты бесконечных несократимых слов асимптотически независимы, точнее, распределение пары образующих, стоящих на местах k и $k+N$, стремится к прямому произведению при $N \to \infty$.*

Действительно, стабилизация равносильна тому, что на множестве меры сколь угодно близкой к единице первые k координат не меняются, и потому условное распределение при условии фиксации k-ой координаты будет стремиться к безусловному. Аналогично этому, асимптотическая независимость имеет место не только для координат, но и для отрезков несократимых слов.

Теорема 4 *Если для пары (G,μ) группы G с мерой μ с конечным носителем существует стабильная нормальная форма, то граница $(\Gamma(G,\mu),\widehat{\mu})$ совпадает с $(\Gamma_0,\widehat{\mu}_0)$ — множеством бесконечных несократимых слов, снабженном мерой-образом.*

Доказательство.

Будем использовать вышеприведенный метод отыскания функций на $L^2(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$, измеримых относительно разбиения σ, т.е. функций на границе. Подпространство B_n в нашем случае есть подпространство n-цилиндрических функций в $L^2(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$, зависящих лишь от нормальной формы n-отрезка бесконечного слова. Эта нормальная форма имеет длину n (с добавленными единицами, если нормальная форма короче n) и, вообще говоря, не совпадает с отрезком длины n соответствующего бесконечного несократимого слова. Таким образом, функции из B_n есть функции от элементов группы длины не превосходящей n, заданных в нормальной форме. Наша цель — доказать, что всякая $L^2(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$-функция, измеримая относительно σ (т.е. функция, корректно определенная на границе $\Gamma(G,\mu)$), есть функция от стабильных координат, коротко — стабильная функция). Иначе говоря, требуется установить, что не существует пределов функций из B_n, которые были бы ортогональны всем стабильным функциям. Мы несколько усилим условие ортогональности и докажем сначала более слабое утверждение: не существует непостоянных предельных функций, *независимых со всеми стабильными функциями.* Заметим, что из теоремы Рохлина о классификации измеримых разбиений (и это главный ее случай) следует, что независимое дополнение существует у всякого разбиения, почти все элементы которого непрерывны, или более общо — изоморфны. Это свойство в свою очередь вытекает из наличия эргодически действующей группы, оставляющей разбиение инвариантным. В нашем случае это можно вывести из групповых соображений, поэтому наше предположение не умаляет общности. Но способ доказательства годится и для произвольного дополнительного разбиения (не независимого).

Пусть F — предельная функция, независимая со всеми стабильными функциями. Возьмем убывающую, стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел δ_n и будем строить аппроксимацию функции F функциями из $\{B_n\}$.

По $\delta_1>0$ выберем натуральное n_1 и цилиндрическую функцию от n_1 координат слова — f_{n_1} так, чтобы $\| F-f_{n_1} \|<\delta_1$ и для элементов $z\in S^{\mathbb{N}}$ из множества A_1 меры $\mu^\infty(A_1)>1-\delta_1$ первая координата стабилизировалась: $\widehat{z}_1=\widehat{z}_1^{n_1}$, последнее возможно в силу стабильности. Предположим, что мы построили аппроксимирующие функции $f_{n_1},\dots,f_{n_{k-1}}$. Следующая функция f_{n_k} строится сходным образом — по δ_k и n_{k-1} находим n_k и f_{n_k} так, чтобы норма разности F и f_{n_k} была бы меньше δ_k, и для элементов $z\in S^{\mathbb{N}}$ из некоторого множества $A_к$ меры $\mu^\infty(A_1)>1-\delta_к$ координаты с номерами n_{k-1} стабилизировались: $\widehat{z}_i=\widehat{z}_i^n$, $n>n_k$, $i=1,\dots,n_{k-1}$. Такие n_k и f_{n_k} существуют в силу стабилизации и предыдущей теоремы.

Утверждается, что такая последовательность f_{n_k} может стремиться при $k \to \infty$ разве лишь к константе и, следовательно, F=const.

Далее более удобно говорить о множествах уровня, а не о функциях, или, что тоже самое, — о характеристических функциях. Предположим, что A есть множество уровня функции F меры, отличной от 0 и 1. По предположению оно должно быть независимым от всех стабильных функций. С другой стороны, это множество сколь угодно точно аппроксимируется множествами уровня функций f_{n_k}, а каждая из этих функций, например, f_{n_k}, по определению зависит лишь от n_k-стабильных координат $\widehat{z}_i^n$, $i < n_k$.

Следовательно, совокупность этих двух требований приводит к тому, что функция F и ее множества уровней с произвольной точностью приближаются функциями, зависящими от нестабильных, но n_k-стабильных координат. Последнее означает, что координаты нормальной формы слов длины n_k, от которых зависят аппроксимирующие функции и их множества уровней, не являются стабильными (коротко — нестабильны). Таким образом, при каждом k из всех n_k-стабильных координат, определяющих n_k-нормальные формы, мы выбираем подмножество (зависящее от δ_k) $J_k \subset (1, \dots, n_k)$ лишь тех, которые могут в дальнейшем измениться — в частности, в него не входят координаты с номерами меньшими n_{k-1}. Поэтому наше построение гарантирует, что множества J_k при разных k почти не пересекаются, точнее, их возможные малые пересечения оцениваются через параметры δ_k. С другой стороны, эти множества уровня должны сходиться к множеству уровня функции F. Сравним два таких множества при разных k: возьмем по данному δ достаточно большие номера $r < s$, тогда соответствующие множества уровня должны отличаться по мере не больше чем на δ, а определяются они непересекающимися множествами координат в исходном пространстве и поэтому должны быть почти независимыми (не представляет труда сделать оценки этой независимости в терминах скорости стабилизации). Такое может быть, только если исходное множество уровня имело меру 0 или 1.

Остается заметить, что предположение о независимости функции F несущественно — если разбиение на уровни стабильных функций не совпадает с разбиением σ, то всегда существует *дополнительное разбиение*, которое на множестве положительной меры может быть превращено в независимое дополнение введением плотности. Наше рассуждение при этом не меняется. Предположение о независимости выше играло лишь методическую роль. ■

Замечание 2 *В следующем параграфе мы приведем описание границы свободной разрешимой группы ступени два и опишем границу некоторых сплетений. В этих случаях не используются нормальные формы, поскольку первый шаг (нахождение* *стабильных функций) описывается не в терминах нормальных форм, а с помощью геометрических координат границы. Однако метод доказательства полноты границы — в точности тот же, что и выше — описания пределов естественного класса стабильных функционалов от траекторий блуждания на свободной разрешимой группы.*

По-видимому, можно, несколько детализировав это рассуждение, получить при тех же предположениях утверждение, что и граница Мартина в случае стабильности нормальной формы есть множество несократимых бесконечных слов в принятом выше смысле. Во всяком случае, доказанная теорема, в частности, повторяет известные результаты о границах Пуассона–Фюрстенберга для свободных ([20]) и близких к ним групп.

Если нормальная форма стабильна, то граница представляется не только как фактор-пространство, но и в виде подмножества того же пространства последовательностей образующих $S^{\mathbb{N}}$ со своей мерой — образом гармонической меры. Разумеется, эти две меры взаимно-сингулярны. Как уже говорилось, это верно в случае свободных и локально свободных групп (см. далее), фуксовых групп (см. [23]) и всегда, когда в группе есть так называемое строго марковское свойство (см. [59]), как в гиперболических группах по Громову. Однако, большого разнообразия групп со стабильной нормальной формой пока найти не удалось. Например, неизвестно, существует ли для групп кос стабильная нормальная форма. Эксперименты, которые по моей просьбе провел профессор P. Dehornya с предложенной им нормальной формой кос, показали, что и она не обладает стабильностью: форма записи случайной косы не стабилизируется со временем, более того, она полностью и многократно обновляется начиная с первого символа.

Поэтому возникает следующая по существу алгебраическая или логическая проблема — *в каких сильно экспоненциальных группах существует система образующих, для которой какая-либо нормальная форма стабильна?*

По сообщению профессора D. Epstein'a, для автоматных групп этот вопрос, по-видимому, решается методами теории, развитой в [43].

Но можно пытаться описать границу в координатах, никак не связанных с исходным алфавитом и нормальными формами. Поиски явной записи границы группы сходны в этом смысле с явным описанием пространства орбит действия групп или с заданием классов эквивалентности неявно заданного отношения эквивалентности — термины, в которых следует дать ответ, не определены заранее, и их отыскание есть творческая задача. Кроме того, стабильная нормальная форма, даже если она существует, может быть неминимальной или громоздкой, и поэтому полезно использовать естественные геометрические координаты вместо "словарных".

Другой вопрос возникает при сравнении систем образующих группы и мер на них: как сравнивать границы одной и той же группы с разными мерами? Экспериментально можно установить, что для некоторых групп границу, которая по определению зависит от оператора (т.е. от меры), для широкого класса мер можно моделировать на одном и том же топологическом пространстве, но с различными гармоническими мерами. Так дело обстоит, например, со свободными группами и др., где для всех финитных мер граница есть множество бесконечных несократимых слов. Это дает возможность сравнивать исходные меры и системы образующих уже с помощью соответствующих гармонических мер. Насколько мне известно, вопрос можно считать относительно изученным только для подгрупп $SL(2,Z)$ и свободных групп.

Соберем в заключение вместе все отмеченные выше факты о нетривиальности границ $\Gamma(G,\mu)$.

Теорема 5 *Следующие предложения эквивалентны:*

1. Граница $\Gamma(\mu)$ нетривиальна (не состоит из одной точки), иначе говоря, разбиение $\pi(\mu)$ пространства $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$ не равно тривиальному.

2. Стационарная граница нетривиальна, иначе говоря, разбиение $\sigma(\mu)$ пространства $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$ нетривиально. При этом стационарная граница совпадает с границей.

3. Существуют непостоянные положительные ограниченные гармонические функции относительно оператора перехода, определяемого мерой μ.

4. Энтропия блуждания положительна: $h_\mu \geq 0$.

5. Энтропия полиморфизма границы T_σ положительна.

6. Математическое ожидание логарифма вероятности слова по мере μ^n растет с линейной скоростью по n.

7. Снос положителен: $l_\mu \geq 0$, т.е. средняя по мерам μ^n длина слов растет линейно.

Доказательства этих фактов, большинство которых известно (см. [8, 10] и имеющиеся там ссылки), следует из приводившихся рассуждений. Пункт 5 будет разъяснен ниже.

3.3 Полиморфизм границы, его энтропия и фундаментальное неравенство

В этом пункте мы дадим истолкование введенных в предыдущем параграфе асимптотических параметров в терминах границы блужданий, и опишем более подробно структуры, существующие на границах, и, в частности, определим так называемый полиморфизм границы. Мы не будем использовать ту или иную модель границ и дадим интерпретацию введенных численных констант в терминах бернуллиевской модели в инвариантной форме. Значительная часть материала этого пункта посвящена опреденлиям, связанным с поянтием полиморфизма, в частности, началам энтропийной теории полиморфизмов.

Граница $\Gamma(G, \mu)$ (для правого случайного блуждания) является левым G-пространством, действительно, правый сдвиг

$$R_g(z_1, z_2, \dots) = (g, z_1, z_2, \dots),$$

где $g \in S$, сохраняет инвариантным разбиение σ. Поэтому он корректно определен на фактор-пространстве по разбиению σ, т.е. на границе, и задает там действие образующей g. Сдвиг R_g переводит меру μ^∞ в абсолютно непрерывную меру, но не равную, и даже не эквивалентную мере μ^∞. Группа, натянутая на сдвиги R_g, задает действие группы G с *квазиинвариантной гармонической мерой* $\widehat{\mu}$ на границе Γ. В обычных терминах марковской цепи случайного блуждания это действие состоит в приписывании слева элемента g всем элементам траектории случайного блуждания, иначе говоря, в сдвиге на g всей траектории. Отметим, что действие группы G на границе $(\Gamma, \widehat{\mu})$ как на пространстве с мерой эргодично и аменабельно в смысле Зиммера как действие с квазиинвариантной мерой [60] для любой (даже неаменабельной) группы. Это, в частности, означает (следствие теоремы Конна–Фельдмана–Вейсса [61]), что траекторное разбиение действия группы — ручное (гиперконечное), т.е. изоморфно траекторному разбиению действия группы $\mathbb{Z}$ с квазиинвариантной мерой и, следовательно, допускает монотонную аппроксимацию измеримыми разбиениями. Эти факты тесно связаны с тем способом описания действия (траектории полиморфизма границы), который описан ниже.

Действие группы G на границе с квазиинвариантной гармонической мерой определяет в $L^2(\Gamma, \widehat{\mu})$ унитарное представление этой группы. Спектральная теория этого представления, в частности, элемента P_μ, задающего блуждание, тесно связана с материалом, излагаемым далее.

Почти каждая точка границы определяет условный марковский процесс, траектории которого сходятся к этой точке границы, соответствующая ему мера сосредоточена на одном элементе разбиения σ в пространстве $S^{\mathbb{N}}$. Переходные вероятности этих условных случайных блужданий уже зависят от выбранной точки границы и могут быть легко выражены через исходную меру и значения гармонической функции, отвечающей точке границы, на образующих, но общее свойство всех условных процессов в том, что их *копереходные вероятности одинаковы*, более того, всякий марковский процес с теми же копереходными вероятностями есть смесь (интеграл) таких процессов. На важность понятия копереходных вероятностей обращал внимание в своих статьях 60-х гг. Е.Б. Дынкин [62]. Это утверждение вытекает из того, что копереходные вероятности есть в точности значения гармонических функций, т.е., как было отмечено выше, условные вероятности (относительно фиксированной точки границы) начал траектории случайного блуждания. Описание мер с заданными копереходными вероятностями аналогично описанию квазиинвариантных (в частном случае, инвариантных) мер относительно некоторого отношения эквивалентности и с заданным коциклом Радона на этом отношении.

Поскольку разбиение $\sigma(G,\mu)$, вообще говоря, *не инвариантно относительно левого сдвига* T как эндоморфизма Бернулли пространства $(S^{\mathbb{N}},\mu^{\infty})$, то он не индуцирует однозначное преобразование на фактор-пространстве по этому разбиению - $S^{\mathbb{N}}/\sigma = \Gamma$. Но он определяет *полиморфизм, т.е. многозначное или марковское преобразование фактор-пространства.* Отсылая за подробностями определений и общей теории полиморфизмов к работе автора [24], приведем основные определения в нужной нам форме.

Определение 9 *Полиморфизмом пространства Лебега* (Y,ϕ) *с инвариантной мерой называется пара: пространство Лебега* $(Y\times Y,\psi)$ *и диаграмма*

$$(Y,\phi)\leftarrow(Y\times Y,\psi)\rightarrow(Y,\phi),$$

где стрелки означают гомоморфизмы-проекции на первую (левая стрелка) и вторую (правая стрелка) координаты пространства $Y\times Y$*, переводящие меру* ψ *в меру* ϕ*. Всякий эндоморфизм есть полиморфизм, причем мера* ψ *на* $Y\times Y$ *сосредоточена на графике этого эндоморфизма. Класс полиморфизмов* mod0 *определяется обычным образом.*

Если T — произвольный эндоморфизм пространства Лебега (X,μ), а ξ — произвольное произвольное измеримое разбиение, то *канонически определен фактор-полиморфизм* пространства $(X/\xi,\mu/\xi)$ с инвариантной мерой, где мера ψ на произведении $(X/\xi\times X/\xi)$ определена своими значениями на прямоугольниках следующим образом:

$$\psi(A\times B)=\mu(T(\pi^{-1}A)\cap\pi^{-1}B),$$

здесь π — каноническая проекция: $\pi:(X,\mu)\rightarrow(X/\xi,\mu/\xi)$. Если разбиение ψ инвариантно относительно T, то фактор-полиморфизм есть mod0 фактор-эндоморфизм T/ξ

пространства $(X/\xi, \mu/\xi)$, а мера ψ сосредоточена на графике фактор-эндоморфизма T/ξ. Точно также определяется фактор-полиморфизм полиморфизма. Будем обозначать фактор-полиморфизм эндоморфизма или полиморфизма T по произвольному разбиению ξ тем же символом, каким обычно обозначаются фактор-преобразования: T_ξ. Обращение порядка стрелок в определении полиморфизма задает полиморфизм Π^*, сопряженный с полиморфизмом Π. Для автоморфизма это обратный автоморфизм, для эндоморфизма это т.н. *экзоморфизм* (=один прообраз, но несколько образов).

Неформально, полиморфизм это многозначное преобразование пространства (Y, ϕ), график которого как подмножество квадрата $Y \times Y$ есть носитель меры ψ, а образы каждой точки снабжены вероятностями. Можно также сказать, что это марковское преобразование пространства (Y, ϕ), сопоставляющее почти каждой точке $y \in Y$ некоторую меру на Y, а именно, условную меру, индуцированную мерой ψ на слое $y \times Y$. Понятие полиморфизма есть метрический аналог понятий бирасслоения, многозначного отображения, соответствия и др. в соответствующих категориях, специфика теории меры в том, что оно определяется не только графиком, как в перечисленных случаях, а мерой на графике. Поскольку условные меры определены почти всюду, то полиморфизм, в отличие от марковского преобразования, определен с точностью до множеств меры нуль, и все связанные с ним объекты, как обычно в теории меры, понимаются как классы $(\bmod 0)$. Важность этого понятия, в частности, в том, что становится возможной факторизация эндо- и автоморфизмов не только по инвариантным, но и по произвольным разбиениям. Кроме того, аппроксимация полиморфизмами автоморфизмов позволяет упростить некоторые факты энтропийной и аппроксимационной теории.

Функциональный аналог полиморфизма Π есть марковский оператор U_Π, действующий в пространстве $L^2(Y, \phi)$ по формуле:

$$(U_\Pi f)(y) = \int_Y f(x)\mu_y(dx),$$

где μ_y — условная мера на слое $y \times Y$.

Этот оператор является сжатием (норма равна единице), он положителен (сохраняет конус неотрицательных функций), вещеественнен (коммутирует с комплексным сопряжением) и сохраняет (как и сопряженный оператор) единицу. Наоборот, всякий оператор U с этими свойствами соответствует единственному $\bmod 0$ полиморфизму ($U = U_\Pi$. Сопряженному полиморфизму Π^* отвечает в L^2 марковский оператор U_Π^* сопряженный с U_Π. Полиморфизмы образуют выпуклую полугруппу в векторном пространстве операторов, группой обратимых элементами которой являются группа автоморфизмов, плотная в полугруппе. Более подробное изложение см. в [24].

Всякий полиморфизм Π с инвариантной мерой пространства (X, μ) однозначно определяет стационарный марковский процесс с пространством состояний (X, μ) и мерой на $X \times X$, отвечающей полиморфизму Π в качестве двумерного распределения этого процесса. Автоморфизм сдвига в пространстве траекторий процесса обозначим через $V(\Pi)$. Переход от Π к $V(\Pi)$ соответствует взятию дилатации (неминимальной) в терминах теории операторов. Отметим, что операция перехода от Π к $V(\Pi)$ не коммутирует с переходом к фактор-полиморфизму: если Π_1 есть фактор-полиморфизм Π_2, то $V(\Pi_1)$ не есть фактор-автоморфизм автоморфизма $V(\Pi_2)$.

Полиморфизм называется *точным*, если у него нет фактор-эндоморфизмов. и *вполне точным*, если соответствующая марковская цепь — регулярна, т.е. имеет тривиальное пересечение сигма-алгебр прошлого. В случае конечных или счетных цепей эти два понятия совпадают, но для общего случая они различны (см. [52, 53].

Простейшие примеры полиморфизмов — конечные выпуклые линейные комбинации эндо- и автоморфизмов с коэффициентами, зависящими от точки: $\Pi(x) = \sum_i p_i(x) \cdot T_i x$, равенство понимается как равенство условных мер перехода из точки x. Если p_i — постоянны, то Π есть полиморфизм, соответствующий случайному блужданию по траекториям эндоморфизмов T_i. Если p_i — неотрицательные измеримые функции с единичной суммой, а T_i — несингулярные преобразования, возможно, даже не эпиморфные, то такой полиморфизм назовем *конечно разложимым.* Однако, такие полиморфизмы не исчерпывают запас всех полиморфизмом, более того, даже если заменить в формуле сумму на интеграл, мы получим лишь малую часть всех возможностей: существуют и образуют всюду плотное G_δ множество экстремальные точки в выпуклом компакте полиморфизмов, отличные от эндоморфизмов (см. [24]).

Определение 10 *Полиморфизмом T_σ границы $(\Gamma, \widehat{\mu})$, называется фактор-полиморфизм левого сдвига T пространства $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$ по (неинвариантному) разбиению σ.*

Из определения полиморфизма границы ясно, что он есть конечная выпуклая комбинация (с, вообще говоря, непостоянными коэффициентами) несингулярных сдвигов границы на элементы образующих группы G.

Рассмотрим простейший нетривиальный пример полиморфизма границы — полиморфизма границы свободной группы.

Пусть F_d — свободная группа с d образующими, S — есть множество образующих и обратных к ним, а μ — равномерная мера на S. Как было сказано, граница $\Gamma(F_d, \mu)$ есть пространство бесконечных несократимых слов; оно есть фактор-пространство пространства $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$ по разбиению σ, элементы которого определяются как множества бесконечных слов, превращающиеся после сокращений (сокращения делаются слева направо) в одно и то же несократимое слово. Это разбиение *неинвариантно относительно сдвига*, поэтому при факторизации сдвиг T определяет не фактор-эндоморфизм, а следующий фактор-полиморфизм $\Pi = T_\sigma$ границы: образ $T_\sigma(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ бесконечного несократимого слова $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ есть с некоторой вероятностью α сдвиг влево этого несократимого слова, т.е. слово $(z_2, z_3, \ldots)$, и с вероятностями $\frac{1-\alpha}{2d-1}$ — правый сдвиг со вставкой новой образующей, т.е. слово $\{(g, z_1, z_2, z_3, \ldots)\}$, где g — произвольная образующая или обратная к ней, отличные от обратной к z_1 вероятности всех вставок — одинаковы. Константа α может быть вычислена, она равна вероятности того, что первая буква несократимого слова есть первая буква исходного (сократимого) слова; как будет видно далее, это есть значение гармонической функции на образующих, которое зависит только от первой буквы несократимого слова. Это дает возможность легко вычислить все гармонические функции на свободной группе: значение гармонической функции на элементе $g \in S$, отвечающей несократимому слову γ (=точке границы), начинающемуся с символа $h \in S$, равно α, если $gh = e$, и $\frac{1-\alpha}{2d-1}$ — в противоположном случае. Обратим внимание на то, что в примере со свободной группой определен и обычный сдвиг на самой границе, сохраняющий меру, поскольку граница есть марковский компакт, состоящий из всех бесконечных несократимых слов, т.е. таких, в которых соседние координаты не являются взаимно обратными. Поднятие этого сдвига в пространство $(S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty)$ есть довольно громоздкий оператор — "случайный сдвиг" T^ω, где ω —лучайная целочисленная функция. Но все это — специфическая особенность свободной группы, и в общем случае нельзя определить канонического эндоморфизма границы. Возможно, такой сдвиг определен и в случаях, когда имеется стабильная нормальная форма. (см. выше).

Рассмотрим теперь полиморфизм границы T_σ в случае произвольной сильно экспоненциальной группы с мерой и свяжем его с действием группы G на границе. Напомним, что траекторией точки x под действием полиморфизма Π называется множество точек y, для которых существуют такие натуральные n, m, что образы $\Pi^n x$ и $\Pi^m y$ имеют непустое пересечение. Разбиение на траектории называется траекторным разбиением полиморфизма, оно также определено $(\bmod 0)$. Непосредственно из определения ясно, что

Лемма 7 *Траекторное разбиение полиморфизма T_σ совпадает с траекторным разбиением группы G в смысле определенного выше действия группы на границе. Вероятность перехода из точки границы γ в точку $g\gamma$, где $g \in S$, равна значению гармонической функции $f_\gamma(g)$ в точке g, т.е. условной мере того, что траектория блуждания, пришедшая в пределе в точку границы $\gamma \in \Gamma$, стартовала в первый момент времени с элемента $g \in S$.*

В соответствии со сказанным выше, полиморфизм T_σ, как и всякий полиморфизм, определяет стационарный марковский процесс; пространством его состояний является граница $\Gamma(G,\mu)$, переходные вероятности полиморфизма T_σ определяются гармоническими функциями и, вообще говоря, зависят от точки границы. Для построенного полиморфизма, в силу его определения, гармоническая мера $\widehat{\mu}$ (фактор-мера) является конечной инвариантной мерой. Этот марковский процесс является также случайным блужданием, но уже не на группе G, а на ее границе — $\Gamma(G,\mu)$, и блуждание совершается по траекториям действия группы G на границе. Этот процесс можно было бы назвать *вторичным, или граничным случайным блужданием*. Обозначим сдвиг в пространстве траекторий этого процесса через $V(T_\sigma)$. Свойства этого процесса представляют большой интерес: например, будет ли сдвиг $V(T_\sigma)$ изоморфен сдвигу Бернулли? Полиморфизм T_σ никогда не является эндоморфизмом (т.е. детерминированным преобразованием границы), за исключением случая свободной полугруппы.

Упомянем в этой связи, что в теории случайных блужданий, начиная с работ Фюрстенберга, рассматривают другой марковский оператор на границе Пуассона — блуждание по образующим группы G, действующей на границе с вероятностями $\mu(\cdot)$, т.е. с постоянными вероятностями перехода, поэтому полиморфизм также есть конечная выпуклая комбинация несингулярных преобразований. Однако полиморфизм границы не совпадает с ним; как мы видели, вероятности перехода, вообще говоря, непостоянны. Гармоническая мера является инвариантной по отношению к обоим полиморфизмам, или, в принятой терминологии, — стационарна по отношению к группе с мерой (G,μ)); траекторные разбиения обоих полиморфизмов совпадают, однако, нам кажется, что полиморфизм T_σ вскрывает более глубокие свойства случайных блужданий. Двусторонний марковский стационарный процесс, порожденный полиморфизмом T_σ, также имеет естественное истолкование в терминах случайных блужданий, на чем мы здесь не останавливаемся.

Начала общей эргодической теории полиморфизмов изложены в [24] (аппроксимация, связь с марковскими процессами, выпуклая и алгебраическая структуры), что же касается таких фактов как индивидуальная и статистическая эргодические теоремы, то они были доказаны еще в старых работах Э. Хопфа, Чакона–Орнштейна и др. (см. напр. [63]). Вопрос об энтропии полиморфизмов до сих пор не затрагивался. Определение, предлагаемое ниже, обобщает определение колмогоровской энтропии автоморфизмов и не является вполне традиционным и в этом случае. Грубо говоря, *энтропийная теория полиморфизмов сводится к расширению энтропиной теории эндоморфизмов, охватывающему случай неинвариантных разбиений.*

Напомним сначала, что полиморфизм конечного пространства $\{1,2,\dots,n\}$ с инвариантной равномерной мерой задается бистохастической матрицей $(p_{i,j})$, и ее энтропия h, т.е. энтропия соответствующей марковской цепи, определяется как средняя условная энтропия матрицы переходов: $h = \sum_j p(j)\cdot H(P_j)$, где $p(j) = \sum_i p_{i,j}$,

$P_j = (p_{1,j}/p_j, \dots, p_{n,j}/p_j)$. Число h мы по определению считаем энтропией конечного полиморфизма, оно же является колмогоровской энтропией соответствующей марковской цепи, т.е. $h = H(\xi|T^{-1}\xi)$, где ξ - марковская образующая, а T- сдвиг в пространстве ее траекторий.

Определение 11 *Пусть* Π *— полиморфизм пространства Лебега* (Y, ϕ) *и* $\{\zeta_n\}$ *— произвольная последовательность конечных разбиений, стремящаяся (необязательно монотонно) к разбиению на точки пространства* (Y, ϕ). *Определим энтропию полиморфизма* Π *вдоль данной последовательности конечных разбиений:*

$$h(\Pi, \{\zeta_n\}) = \limsup_n h(\Pi_{\zeta_n}),$$

и энтропию полиморфизма:

$$h(\Pi) = \sup h(\Pi, \{\zeta_n\}),$$

здесь Π_{ζ_n} *— конечный фактор-полиморфизм пространства* Y/ζ_n, *а последний супремум берется по всем таким последовательностям конечных разбиений* $\{\zeta_n\}$.

Лемма 8 *1. Энтропия полиморфизма, совпадающего* $\mathrm{mod}0$ *с некоторым эндоморфизмом, равна классической энтропии этого эндоморфизма.*

2. Энтропия полиморфизма, неравного $\mathrm{mod}\,0$ *эндоморфизму, всегда положительна, следовательно, она равна нулю, только если полиморфизм есть* $\mathrm{mod}0$ *эндоморфизм с нулевой энтропией.*

Доказательство. 1. Пусть T — эндоморфизм. Поскольку разбиения ζ_n — конечны, то фактор-полиморфизм автоморфизма T есть полиморфизм конечного пространства, т.е. задается бистохастической матрицей (матрицей переходов), и энтропия конечного полиморфизма вычисляется по классической формуле энтропии конечных марковских цепей, приведенной выше, т.е. по формуле для средней условной энтропии. Поэтому правая часть есть верхний предел средних условных энтропий:

$$H(\zeta_n|T^{-1}\zeta_n)$$

по последовательности конечных разбиений, стремящимся к разбиению на отдельные точки; супремум по всем последовательностям совпадает с энтропией эндоморфизма в силу следующей очевидной формулы, легко выводимой из общих свойств средней условной энтропии (см.[64], леммы 5.9-7.2):

$$H(\xi^n|T^{-1}\xi^n) = H(\xi|T^{-1}\xi^n)$$

действительно, правая часть стремится к $H(\xi|T^{-1}\xi)$, а супремум этих выражений и есть энтропия h(T) в колмогоровском определении. Это оценивает энтропию эндоморфизма сверху нашей энтропией. Противоположная оценка следует из существования счетной образующей эндоморфизма с максимальной энтропией (см. [64]):

$$h(T) = h(T, \xi) = H(\xi|T^{-1}\xi).$$

2 Рассмотрим марковский сдвиг $V(\Pi)$, отвечающий полиморфизму Π. Из нашего определения энтропии $h(\Pi)$ ясно, что она больше или равна средней условной энтропии переходных вероятностей марковского сдвига (т.е. полиморфизма):

$$h(\Pi) \geq h(\xi|V(\Pi)^{-1}\xi),$$

здесь ξ — марковская образующая для $V(\Pi)$. Поэтому, если полиморфизм не совпадает с эндоморфизмом, т.е. его переходы не являются детерминированными почти всюду, то и энтропия полиморфизма $h(\Pi))$ — положительна. Если же полиморфизм Π совпадает $\mathrm{mod}\,0$ с эндоморфизмом S, то марковская цепь детерминирована и энтропия $h(\Pi)$, как доказано в п. 1, равна энтропии $h(S)$. ■

Пункт 1 леммы показывает, что переход к полиморфизмам полезен и для теории эндоморфизмов — он позволяет расширить теорию аппроксимаций эндоморфизмов, а именно, всякий эндоморфизм очевидным образом является слабым пределом конечных полиморфизмов, т.е. конечных марковских цепей (см. [24]), и вычисления энтропии упрощаются существенным образом. Эти упрощения происходят за счет отказа от постоянного использования только инвариантных разбиений. Заметим, что некоторое преимущество определения Синая по сравнению с первоначальным определением Колмогорова как раз в том, что в нем не используется полностью свойства инвариантных разбиения. Отличие предлагаемого способа вычислений энтропии от общепринятого еще и в том, что предельный переход совершается не по измельчениям данного разбиения с помощью последовательных сдвигов и последующим взятием супремума по конечным разбиениям, а по произвольной последовательности разбиений. Наше определение применимо также ко всем несингулярным преобразованиям (при этом матрица $\mu(T(A_i) \cap A_j)$ будет уже не бистохастической, а лишь марковской).

Энтропия $h(\Pi)$ полиморфизма Π, вообще говоря, не совпадает ни с энтропией соответствующего марковского сдвига $h(V(\Pi))$, ни со средней условной энтропией переходов. Например, для полиморфизма случайного блуждания с равными вероятностями по траекториям (T, T^{-1}), где T — автоморфизм с положительной энтропией, $h(\Pi) = 2h(T)$, в то время как $h(V(\Pi)) = h(T)$. Точно так же, если полиморфизм есть эндоморфизм, то условная энтропия переходов равна нулю, хотя его энтропия может быть положительной; но вот нетривиальный пример того же эффекта из теории убывающих последовательностей (см. также Добавление): для блуждания по траекториям бернуллиевского действия свободной группы с двумя образующими и вероятностями $(1/2, 1/2)$ — см. [65, 35] — энтропия марковской цепи равна бесконечности, а условная энтропия переходов равна единице. Попутно заметим, что небольшое видоизменение этого примера дает положительный ответ на старый вопрос, поднятый в работах В. А. Рохлина и Я. Г. Синая: для автоморфизма Бернулли с бесконечной энтропией можно найти K-образующую, для которой условная энтропия на один шаг имеет наперед заданное значение.

Таким образом, для полиморфизма Π и соответствующего марковского сдвига $V(\Pi)$, порожденного полиморфизмом Π, мы определили три, вообще говоря, различные величины:

$$h(\xi|V(\Pi)^{-1}\xi) \equiv \underline{h}(\Pi)$$

— среднюю условную энтропию переходных вероятностей полиморфизма (марковского процесса),

$$h(\Pi)$$

— энтропию полиморфизма, и

$$h(V(\Pi)) \equiv \bar{h}(\Pi)$$

— энтропию марковского сдвига. Для эндоморфизмов последние два числа совпадают. В общем случае имеет место следующее неравенство, вытекающее из определений:

$$\underline{h}(\Pi) \leq \bar{h}(\Pi) \leq h(\Pi).$$

Проблема вычисления энтропии полиморфизма и энтропии марковского сдвига общего вида (с непрерывным множеством состояний) — исследована недостаточно. Заметим, что марковость на самом деле нисколько не уменьшает общность задачи, поскольку любой K-автоморфизм имеет марковскую K-образующую — ею может быть любое инвариантное исчерпывающее (см. [64]) разбиение автоморфизма с вполне положительной энтропией.

Основной вопрос можно сформулировать так: когда марковская образующая имеет максимальную энтропию, иначе говоря, когда средняя условная энтропия на один шаг равна энтропии марковского сдвига т.е. $\bar{h}(\Pi) = \underline{h}(\Pi)$ и, в частности, для каких случайных блужданий по траекториям действия групп это так? Ответ, конечно, зависит от свойств группы и характера ее действия. Не исключено, что аменабельность действия играет здесь решающую роль. Другой вопрос — когда энтропия марковской цепи равна энтропии полиморфизма, т.е. когда ее можно вычислять по марковским аппроксимациям, т.е. $h(\Pi) = \bar{h}(\Pi)$?

Формула Абрамова–Рохлина для энтропии косых произведений даже в тех случаях, когда марковский сдвиг представляется как косое произведение (случайные блуждания с постоянными переходными вероятностями), здесь не всегда применима, поскольку смешанная энтропия слоев не вычисляется обозримым образом в нужных терминах. С другой стороны эта формула может быть обобщена на полиморфизмы, при этом, она послужит средством вычисления энтропии фактор-полиморфизма, - обычно она применяется для вычисления энтропии накрытия, мы вернемся к этому ниже. Обратим внимание на то, что энтропия полиморфизма *не монотонна даже классе конечных разбиений*, т.е. энтропия фактор полиморфизма может быть больше энтропии исходного полиморфизма (эндоморфизма). Для эндоморфизмов монотонность имеет место, однако условная энтропия $h(T,\xi)$ монотонна лишь в классе разбиений с конечной энтропией и не выполнена для призвольных разбиений. В целом энтропийная теория полиморфизмов должна в существенном отличаться от известной теории.

В дальнейшем мы ограничимся лишь *фактор-полиморфизмами эндоморфизма Бернулли*, оставив изучение общего случая до другого раза. Назовем такие полиморфизмы бернуллиевскими. Полиморфизм границы по определению является бернуллиевским.

Сформулируем теорему об энтропии бернуллиевского полиморфизма границы T_σ.

Теорема 6 *Энтропия полиморфизма T_σ границы $(\Gamma(G,\mu),\widehat{\mu})$ равна энтропии случайного блуждания пары (G,μ):*

$$h(T_\sigma) = h_\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим T_σ — полиморфизм границы $(\Gamma(G,\mu),\widehat{\mu})$ т.е. фактор-полиморфизм левого сдвига T пространства $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$ по разбиению σ. Все рассмотрения будут проводиться в накрывающем пространстве $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$.

Для вычисления энтропии фактор-полиморфизмов $h(T_\sigma)$, согласно нашему определению, нужно взять последовательность каких-либо конечных разбиений $\{\psi_n\}$, сходящуюся к разбиению на точки $\bmod 0$ в пространстве $(\Gamma,\widehat{\mu})$ и вычислить $\lim_{n\to\infty} H(\psi_n|T^{-1}\psi_n)$. В накрывающем пространстве $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$ задача вычисления $h(T_\sigma)$ сводится к вычислению некоторой поправки энтропии сдвига Бернулли T. При этом поскольку в пространстве $(S^{\mathbb{N}},\mu^\infty)$ последовательность конечных разбиений $\{\zeta_n\}$ (см. пункт 3.1), сходится при $n\to\infty$ к разбиению σ, то эта поправка есть в пределе условная энтропия $h(T,\sigma)$. Таким образом, вычисления сводятся к следующему:

$$h(T_\sigma) = H(\epsilon|T^{-1}\epsilon) - \lim_{n\to\infty} H(\xi_n|T^{-1}\xi_n) = h(T) - H(\sigma|T^{-1}\sigma),$$

здесь ϵ -разбиение mod0 на точки в том же пространстве, $h(T)$ - энтропия сдвига, равная $H(\mu)$ и равная условной энтропии $H(\epsilon|T^{-1}\epsilon) = H(\xi_1|T^{-1}\epsilon)$, Кроме того, легко видеть также, что $\zeta_1 = \xi_1^0$ и что $H(\sigma|T^{-1}\sigma) = H(\xi_1^0|\sigma)$. Следовательно, мы должны доказать, что правая часть равенства:

$$h(T_\sigma) = H(\zeta_1|T^{-1}\epsilon) - H(\zeta_1|T^{-1}\sigma)$$

есть

$$h(T_\sigma) = h_\mu.$$

Это вычисление уже было проделано в [8] в связи с изучением энтропии случайного блуждания и энтропийного критерия тривиальности границы (понятие полиморфизма границы там не вводилось). Точнее, доказанная в [8] формула, в наших обозначениях выглядит так:

$$H(\zeta_1|\sigma) = H(\mu) - h_\mu = h(T) - h_\mu$$

или

$$h(T) - H(\zeta_1|\sigma) = h_\mu = h(T_\sigma).$$

Это равносильно формуле

$$H(\zeta_1|T^{-1}\epsilon) - H(\zeta_1|T^{-1}\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\zeta_n)}{n}$$

Можно использовать иной по сравнению с [8] вывод, основанный на следующей аналогии. Если бы вместо σ мы имели дело с инвариантным относительно T разбиением, и если бы существовало независимое инвариантное дополнение к σ, например, разбиение ψ, то мы бы воспользовались основной формулой энтропийной теории

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\psi^n)}{n} = h(T,\psi) \equiv H(\psi|T^{-1}\psi)$$

(см. формулы 7.2–7.4 в [64]),

где $\psi^n = \vee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\psi$ Подобную формулу можно оправдать и в нашем случае, используя полуинвариантность разбиения σ. А именно, разбиения ζ_n играют роль ψ^n, т.е. разбиений, аппроксимирующих разбиение на точки в $(\Gamma\widehat{\mu})$ ■

Следующая выкладка, аналогичная упомянутой выше лемме об энтропии эндоморфизма в [64] дает еще одно неравенство для энтропий. Так как имеет место включение $\zeta_n \prec T^{-1}\zeta_{n-1} \vee \zeta_1$, из которого, собственно, и следует полуинвариантность σ; (в терминах предыдущего пункта $\xi = \sigma, \eta_1 = \zeta_1$), то

$$H(\zeta_n) \leq H(\zeta_{n-1} \vee T^{-1}\zeta_1) = H(\zeta_{n-1}) + H(\zeta_1|T^{-1}\zeta_{n-1})$$

Применяя обратную индукцию по $n, n-1, \dots 1$ и складывая все неравенства, получим

$$H(\zeta_n) \le \sum_{k=0}^{n-1} H(\zeta_1|T^{-1}\zeta_k) + H(\zeta_1),$$

деля на n а затем, устремляя n к бесконечности и используя выражение h_μ через ζ_n, получим:

$$h_\mu \le H(\sigma|T^{-1}\sigma)$$

Замечание 3 *1. Формула*

$$h(T) - H(\zeta_1|\sigma) = h_\mu.$$

может рассматриваться, как аналог формулы энтропии косых произведений - формулы Абрамова-Рохлина - для энтропии полиморфизма границы иначе говоря, выражение $H(\zeta_1|\sigma)$ имеет смысл "смешаной энтропии слоев". Напомним, также, что это выражение есть средняя по всем гармоническим функциям (относительно гармонической меры) энтропия распределения гармонической функциии на образующих.

2.Полным аналогом теоремы Колмогорова-Рохлина-Синая для полиморфизмов в терминах накрывающего эндоморфизма, была бы формула

$$H(\alpha|T^{-1}\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\beta_n)}{n},$$

где T - произвольный эндоморфизм, α - произвольное (не инвариантное) измеримое разбиение, а β_n -его базис. Такая (пока не доказанная) формула, точнее, супремум обеих частей этой формулы по некоторому классу последовательностей разбиений, давал бы энтропию полиморфизма T_α. Мы доказали весьма специальный случай этой формулы (для бернуллиевских полиморфизмов).

В конце этого пункта мы применим тот же прием, что и выше для более простой задачи -вычисления топологической энтропии.

Прокомментируем теперь с новой точки зрения энтропийный критерий тривиальности границы. Он следует из приведенной теоремы и из известного свойства полной положительности автоморфизмов Бернулли (см. [64]).

Теорема 7 *Граница $\Gamma(G,\mu)$ тривиальна тогда и только тогда, когда энтропия h_μ равна нулю.*

Этот критерий ("тогда") доказан впервые в [8] с помощью приведенной выше формулы; то очевидное обстоятельство, что в случае тривиальной границы энтропия равна нулю, отмечено в первой статье по энтропии блужданий [1]. Фактически, оценки в [8], приводящие к нужной формуле копируют доказательство факта о полной положительности автоморфизма Бернулли. Аналогия с полной положительностью вскрывает истинную суть энтропийного критерия тривиальности границы.

Доказательство. Если граница тривиальна (одноточечна), то тривиален и полиморфизм границы, и энтропия его равна нулю. Если энтропия h_μ равна нулю, то полиморфизм границы есть эндоморфизм $\bmod 0$ с нулевой энтропией и, следовательно, T_σ есть фактор-эндоморфизм эндоморфизма Бернулли с нулевой энтропией, а тогда он тривиален в силу полной положительности эндоморфизма Бернулли. ■

Мы видим, что классическое свойство *полной положительности энтропии автоморфизма Бернулли* (см. [64]) можно очевидным образом обобщить: всякий нетривиальный (т.е. действующий на неодноточечном пространстве) фактор-полиморфизм эндоморфизма Бернулли имеет положительную энтропию. То же самое относится к любому эндоморфизму с вполне положительной энтропией.

Обратимся теперь к топологической энтропии полиморфизмов и полиморфизма границы, в частности. Определение топологической энтропии для общего полиморфизма, по-видимому, можно свести к случаю эндоморфизмов таким же образом, что и выше, — переходом к марковскому сдвигу, но мы не будем рассматривать общий случай, а ограничимся ситуацией, когда полиморфизм возникает как фактор-отображение эндоморфизма компакта, и потому вопрос по определению сводится к подсчету топологической энтропии эндоморфизма в накрывающем пространстве, но в неотделимой топологии. В данном случае этим компактом является $S^{\mathbb{N}}$, а преобразованием — левый сдвиг T. Фактор-отображение берется по разбиению σ. Заметим, что можно определить и фактор-топологию границы с помощью множества гармонических функций, но проще рассмотреть само пространство $S^{\mathbb{N}}$. Топологическую энтропию полиморфизма границы мы вычисляем *как топологическую энтропию левого сдвига в* $S^{\mathbb{N}}$ *относительно (неотделимой) топологии, в которой отождествляются эквивалентные бесконечные слова.* В этом случае топологическую энтропию сдвига относительно квазикомпактной топологии можно определить, как обычно, (см. напр. [54, 66]), а именно, нужно найти минимальное конечное подпокрытие произведения сдвигов данного открытого покрытия, и затем взять супремум предела нормированных логарифмов мощности этих подпокрытий по всем измельчающимся покрытиям (см. напр. [66]).

В нашем случае мы должны проделать это со стандартным левым сдвигом в $S^{\mathbb{N}}$, но при подсчете числа элементов подпокрытий должны принимать в расчет отождествление слов, т.е. факторизацию цилиндров по разбиению σ. Поскольку разбиение σ есть предел цилиндрических разбиений ζ_n, то вопрос сводится к подсчету мощности минимального подпокрытия элементов этих конечных разбиений. Буквальная реализация этой схемы приводит к следующей выкладке. В силу соотношения $\sigma = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$, факторизация цилиндров совпадает с факторизацией по разбиениям ζ_n, а число элементов разбиения ζ_n есть число слов длины n, поэтому оценка топологической энтропии такова:

$$h_{top} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log \#\zeta_n}{n} = v,$$

что дает лишь неравенство $h_\mu = h(T_\sigma) \leq \lim_{n\to\infty} h_{top}(T_\sigma) = v_S$.

Однако, мы можем поступить более аккуратно и получить уже в точности фундаментальное неравенство. Для этого мы выберем подпокрытие более экономно, учитывая, что на множестве полной μ^∞ меры в $S^{\mathbb{N}}$ верно следующее.

Для всякого $\epsilon > 0$ существует такое n, что цилиндрами минимальной длины $(l+\epsilon)n$ можно покрыть подмножество в $S^{\mathbb{N}}$, мера которого больше, чем $1-\epsilon$, здесь l — снос; это есть прямое следствие теоремы о сносе. Поэтому, можно выбрать последовательность ϵ_n стремящуюся к нулю, так, что покрытие множества полной меры будет осуществляться элементами разбиений $\zeta_{(l+\epsilon_n)n}$, где $\epsilon_n \to 0$. Таким образом, мощность подпокрытий множества полной меры (но не всего $S^{\mathbb{N}}$!) асимптотически равна числу слов длины $l \cdot n$, где l — снос. Назовем топологию, индуцированную на множестве полной меры обычной топологией на $S^{\mathbb{N}}$, уточненной топологией. Тем самым, топологическая энтропия уточненной топологии оценивается сверху пределом

$$\tilde{h}_{top} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log \#\zeta_{l\cdot n}}{n} = l \cdot v,$$

здесь тильда означает переход к уточненной топологии в фактор-пространстве. Нетрудно видеть, что эту оценку нельзя улучшить не меняя топологию.

Суммируя все предыдущее, получаем следующее утверждение:

Теорема 8 *Топологическая энтропия полиморфизма границы относительно уточненной топологии совпадает с произведением логарифмического объема на снос:*

$$\tilde{h}_{top}(T_\sigma) = v_S \cdot l_\mu,$$

и фундаментальное неравенство есть неравенство между топологической и метрической энтропией для полиморфизма границы:

$$h_\mu = h_\mu(T_\sigma) \leq \tilde{h}_{top}(T_\sigma) = v \cdot l_\mu.$$

Замечание 4 *То обстоятельство, что в определении топологии и, следовательно, топологической энтропии участвует снос, зависящий от меры μ, не должно удивлять, например, топологическую энтропию марковской цепи также определяют с помощью топологической марковской цепи, которая задается матрицей из нулей и* *единиц, построенной по матрице переходов марковской цепи, а не в полном (бернуллиевском) компакте. Ровно такая же ситуация и здесь: топологическая энтропия определяется не в полном прообразе — компакте $S^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей, — тогда бы она была равна v, как при первом подсчете, а на меньшем подмножестве, которое учитывает снос.*

Здесь уместно обратить внимание на общую задачу об определении естественной компактной (или сигма-компактной) топологии, в которой следует рассматривать данную динамическую систему. А именно, в какой топологии метрическая энтропия данного автоморфизма есть его топологическая энтропия? Считается, что известная теорема Джуитта–Кригера [67, 68] решает этот вопрос: всякий эргодический автоморфизм может быть реализован как гомеоморфизм строго эргодического компакта — в этом случае топологическая и метрическая энтропии тривиальным образом совпадают в силу единственности инвариантной меры. Однако это решение неудовлетворительно, поскольку этот компакт строится искусственно, отдельно от исходного пространства с мерой, в котором задан автоморфизм. На самом деле гораздо ближе к этой задаче находится работа Р. Боуэна [66], в которой сначала определена топологическая энтропия для некомпактных пространств, а затем построено множество полной меры в исходном пространстве, на котором топология (как правило, некомпактная) вводится так, чтобы топологическая и метрическая энтропии эргодического автоморфизма — совпадали; по поводу топологической энтропии в некомпактных пространствах см. также [69]. Остается открытым вопрос, когда можно построить компактную топологию. Кроме того — и это в точности тот вопрос, который обсуждался выше в связи с полиморфизмом границы, — можно не настаивать на том, чтобы топологическая энтропия была обязательно равна метрической, но взамен требовать более естественной связи топологической и метрической структур. Именно так мы и поступили — фундаментальное неравенство может оставаться строгим, но уточненная топология определена так, что топологическая энтропия более полно отражает ситуацию (в данном случае, топологическая энтропия явно учитывает снос). В добавлении к этой статье мы также затрагиваем вопрос о множестве топологий, согласованных со структурой данного пространства с мерой, правда, в связи с другими задачами.

Таким образом, мы привели динамическую интерпретацию фундаментального неравенства. Интересно было бы дать прямое доказательство неравенства для общих полиморфизмов.

Но что же такое мера с максимальной энтропией, если неравенство — строгое? Обычно мерой с максимальной энтропией в контексте теории границ Пуассона–Фюрстенберга называют *гиббсовскую меру*, определение которой никак непосредственно не связано со случайным блужданием, а лишь с действием группы.

В предлагаемом подходе такой мерой следует называть меру на границе, которая является мерой с максимальной энтропией для *полиморфизма границы.* Но это еще само по себе не проясняет ее связей с исходным блужданием. Оказывается, в случае строгого неравенства эта мера, если она существует, порождается *обобщенным случайным блужданием ("блужданием со вставками")*, о чем мы кратко скажем ниже, в связи с конкретным примером локально свободной группы (параграф 5). Общее определение будет рассмотрено особо; оно открывает новую связь между групповыми и метрическими конструкциями. Если фундаментальное неравенство есть равенство, то гармоническая мера есть мера максимальной энтропии относительно полиморфизма границы. Это имеет место для свободноподобных групп. В общем же случае, при новом подходе мера с максимальной энтропией является обобщенной гармонической мерой.

4 Свободные разрешимые группы

4.1 Топологическая модель свободной разрешимой группы ступени два

По ряду причин интересно рассмотреть указанные проблемы для свободных разрешимых групп. Эти группы подробно изучались алгебраистами в 50–60-х гг. и ранее (в работах Холла, Магнуса, и др. [70, 71, 72]), позже рассматривался рост нижнего центрального ряда [73], коэффициенты Голода–Шафаревича (см. напр. [74]), однако, лишь сейчас эти группы стали предметом исследования с точки зрения гармонического анализа и асимптотических характеристик.

Свободные разрешимые группы ступени два и выше не имеют точных матричных представлений и вообще являются в некотором смысле "бесконечномерными" группами, как мы увидим далее. В этом параграфе мы приводим *новую топологическую модель для свободных метаабелевых групп*, т.е. свободных разрешимых групп ступени два, и вычисляем их границу. Заметим, что наша реализация отличается от известных (базисы в коммутанте Нильсена–Шрайера) инвариантностью построения модели.

Очень близкие к свободным разрешимым группам — сплетения — давно рассматривались в теории роста и случайных блужданий, как естественный источник примеров и контрпримеров. В [25] сплетение $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ использовано как пример группы со сверхэкспоненциальным ростом множеств Фельнера, а в [8] $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$, $d > 2$ — как пример разрешимой и, следовательно, аменабельной группы с нетривиальной границей. Термин "сплетение" в этих работах не использовался, но привился предложенный тогда термин "лампочные группы" (lamplighter group) и "группа динамических конфигураций". Сплетения $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$ при $d > 2$ дают тем самым важный пример групп, являющихся аменабельными группами, но имеющими положительную энтропию. Это явилось неожиданностью — до этого считалось, что для аменабельных групп энтропия всегда равна нулю ([1]). Граница же в этом примере не была вычислена полностью — был дан естественный кандидат — более того, в этом и состояло (в силу критерия) доказательство положительности энтропии, явно она также не вычислена до сих пор. Недавно сплетения использованы также студенткой А. Дюбиной для построения примера квазиизометричных групп, одна из которых разрешима, а вторая не виртуально разрешима, и для примера промежуточного роста сноса.

Теперь становится ясным, что свободные разрешимые группы являются гораздо более естественным и важным классом примеров, чем сплетения с решетками, и те эффекты, которые были открыты в сплетениях, еще более выпукло проявляются в свободных разрешимых группах.

Мы опишем границу этих групп (ступени 2) и, используя тот же метод и переход к свободной разрешимой группе, решим старую задачу о границе сплетений, поставленную в [8].

Начнем с новой, насколько нам известно, модели свободной разрешимой группы ступени 2, имеющей топологическое истолкование.

Пусть $Sol_d^2 \equiv Sol_d$ — свободная разрешимая группа ступени 2 с d образующими, т.е. универсальный объект многообразия разрешимых групп ступени 2 с d образующими. Эту группу можно определить более конструктивно как фактор-группу свободной группы с d образующими по второму коммутанту.

Ее коммутант — есть абелева группа с бесконечным числом образующих, которые можно занумеровать элементами d-мерной решетки, а именно, — это образы коммутаторов $[x_i, x_j]$, $i, j = 1 \dots r$; $i \neq j$ исходных образующих под действием внутренних автоморфизмов, определяемых мономами $x_1^{k_1} \dot{x}_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$ (порядок сомножителей несущественнен, так как такой автоморфизм коммутанта, как нетрудно проверить, определяется лишь степенями переменных $k_1, k_2, \dots, k_d$ и не зависит от их порядка). Сама группа Sol_d изоморфна расширению коммутанта с помощью группы $\mathbb{Z}^d$, действующей на коммутанте, и некоторого 2-коцикла. (Автор придерживается терминологии, по которой расширяющей является та группа, которая действует автоморфизмами, а не та, на которой производится это действие, как это принято в алгебре).

Для $d = 2$ коммутант полностью определен, так как между описанными образующими коммутанта нет никаких соотношений, и они являются свободными образующими абелевой группы, но при $d \geq 3$ описание становится более громоздким, так как между коммутаторами появляются соотношения. Это легко увидеть: например, элемент

$$x_1 x_2 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}$$

допускает две различных записи через попарные коммутаторы образующих группы и сопряженные с ними элементы, т.е. через выписанные выше образующие коммутанта. Легко понять, что написанный элемент представляет собой цикл на одномерном остове трехмерного куба, и его можно разложить в произведение циклов плоских граней двумя способами. Поэтому использование этих образующих неудобно. В классических работах ([70] и др.) доказывалось вложение этой группы в сплетение $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}^d$, но и оно плохо приспособлено для наших целей, поскольку образ этих групп при вложении в сплетение описывается не столь просто. В готовящейся работе автора и С. Добрынина эти вопросы будут рассмотрены подробней.

Однако, есть прямой способ описания коммутанта и всей группы, отчасти заимствованный из аналогий с *теорией кубических гомологий* [66]. Он же позволяет легко описать коцикл, задающий расширение.

Будем понимать решетку как одномерный комплекс — топологическое пространство, а именно, как объединение всех сдвигов координатных осей на целочисленные векторы. Чтобы отличить ее от решетки как дискретной группы, обозначим этот одномерный комплекс через E^d. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbf{B}_d$ ориентированных замкнутых 1-циклов на решетке E^d как на одномерном комплексе. Ее образующими являются *элементарные циклы (плакеты, по физической терминологии, или стандартные 1-циклы в смысле теории кубических гомологий [66])*, т.е. циклы, обходящие один раз квадрат решетки в одном из двух направлений. Обход квадрата с вершинами $(0, e_i, e_i + e_j, e_j)$ в указанном порядке, где e_i, e_j — координатные орты, назовем *элементарным (i,j)-координатным циклом.* На группе циклов $\mathbf{B}_d$ естественно действует сдвигами группа $\mathbb{Z}^d$. Всякий элементарный цикл есть трансляция одного из элементарных координатных циклов.

Определим 2-коцикл $\beta(\cdot,\cdot)$ группы $\mathbb{Z}^d$ со значениями в группе циклов $\mathbf{B}_d$. Точнее, мы сразу определяем класс когомологий коциклов. Для этого каждому элементу $v \in \mathbb{Z}^d$ решетки сопоставим произвольный связный путь τ_v, соединяющий нуль с элементом v (“путь”, как и “решетка” понимается буквально: путь есть непрерывное отображение полупрямой R_+ или отрезка в решетку как в топологическое пространство, переводящее целые точки $\mathbb{N} \in R_+$ в целочисленные вектора, и линейные на каждом целочисленном отрезке). Тогда для пары (v, w) элементов решетки $\mathbb{Z}^d$ определяется *цикл* $\beta(v, w) \in \mathbf{B}_d$, составленный из трех путей:

$$(\tau_v, v + \tau_w, -\tau_{v+w}).$$

Этот цикл, рассматриваемый как элемент $\mathbf{B}_d$, и есть значение 2-коцикла $\beta(v, w)$.

Лемма 9 *Различные выборы системы путей $v \mapsto \tau_v$ приводят к когомологичным коциклам.*

Доказательство. Действительно, если $v \mapsto \tau_v$ и $v \mapsto \rho_v$ — две такие системы, то цикл $v \mapsto \tau_v \cdot (v \mapsto \rho_v)^{-1}$ есть пленка, осуществляющая гомологичность. ■

Обозначим класс гомологий построенного коцикла через $\bar\beta$. Обратим внимание на то, что по самому построению этот коцикл тривиален в группе путей, однако, он нетривиален как коцикл в группе циклов.

Теорема 9 *Расширение группы циклов $\mathbf{B}_d$ при помощи группы сдвигов $\mathbb{Z}^d$ и класса когомологий $\bar\beta$ канонически изоморфно свободной разрешимой группе ступени 2 с d образующими Sol_d. При этом изоморфизме образ группы циклов $\mathbf{B_d}$ есть в точности коммутант группы Sol_d, причем образ элементарного (i,j)-координатного цикла есть коммутатор образующих $[x_i, x_j]$, а действие $\mathbb{Z}^d$ на циклах переходит в действие Z^d внутренними автоморфизмами на коммутанте группы Sol_d*

Нетрудно доказать, что $H^2(\mathbb{Z}^r; \mathbf{B}_r) = \mathbb{Z}$, и построенный коцикл есть образующая этой группы.

Эта конструкция допускает далекие обобщения. Например, становится понятным, как понимать континуальный аналог свободных разрешимых групп второй ступени — в них группа циклов на решетке заменяется на аддитивную группу тех или иных 1-форм на R^d (или потоков по ДеРаму), а действие R^d и коцикл определяются точно так же, как и выше. Такое обобщение делает понятным, почему свободную разрешимую группу следует считать бесконечномерной, о чем уже упоминалось выше. Более того, тот же прием можно применить для построения свободных разрешимых групп следующих ступеней — например, группа ступени 3 может быть представлена тем же способом, так ее коммутант есть свободная разрешимая группа с бесконечным числом образующих, поэтому второй коммутант естественно представлять как группу 2-циклов на решетке и т.д.

4.2 Граница свободных разрешимых групп и сплетений

Изложим некоторый общий и простой прием, который сводит проблему слов в конечно порожденных группах к комбинаторной геометрии на решетке. Мы увидим, что проблема равенства слов имеет ярко выраженный геометрический характер: равенство слов в группе равносильно зависящему от группы понятию эквивалентности путей на решетке, отыскание нормальной формы — решению изопериметрической задачи и т.д. По существу мы заменяем пространство путей на графе Кэли канонически изоморфным ему пространством путей на решетке. В ряде случаев, таких как изучаемый далее, этот прием оказывается весьма эффективным.

Пусть задана группа G с выделенной системой $S = S^{-1}$ из d образующих. Всякий элемент группы можно записать словом в алфавите S, а этому слову поставить в соответствие связный путь на решетке $\mathbf{Z^d}$ с началом в нуле следующим образом. Отождествим i-ую образующую с i-ым координатным ортом фиксированного базиса решетки $i = 1, \ldots, d$. Припишем теперь каждому *ориентированному* ребру решетки образующую или обратную к ней, которая отвечает координатной прямой, параллельной ребру, беря саму образующую, если ребро проходится в направлении возрастания расстояния от нуля, и обратную к ней, если направление противоположно.

Таким образом, каждое слово есть путь на решетке: пустому слову (единице группы) соответствует путь, состоящий из одной нулевой точки решетки — будем называть его тривиальным; если к уже имеющемуся слову приписывается некоторая образующая (или обратная к ней), то к концу уже построенного пути присоединяется очередное ориентированное ребро, соответствующее этой образующей или обратной к ней, в зависимости от ориентации.

Определение 12 *Два пути G-эквивалентны, если они определяют один и тот же элемент группы G.*

Тем самым, проблема тождества слов переформулирутеся как проблема G-эквивалентности путей на решетке.

Если соотношения между образующими в группе порождаются элементами коммутанта свободной группы, то достаточно определить эквивалентность замкнутого пути (=цикла) тривиальному пути (=циклу). Именно так дело обстоит в нескольких из нижеперечисленных случаях. Но иногда (группа Гейзенберга) незамкнутый путь может быть эквивалентным замкнутому. В этом случае задание эквивалентности замкнутых путей тривиальному — недостаточно.

Пример 1.

Если $G = \mathbf{Z^d}$, то два пути G-эквивалентны, если их концы совпадают. Группа отождествляется с решеткой. Любой замкнутый путь (заканчивающийся в нуле) эквивалентен тривиальному и определяет единичный элемент группы.

Пример 2.

Еще один тривиальный пример дает свободная группа. В этом случае два пути эквивалентны, если они совпадут после последовательного сокращения всех *соседних* ребер (в каждом из путей), которые отличаются лишь ориентацией.

Пример 3.

Свободные нильпотентные группы ступени 2.

Менее тривиальный пример. Пусть G — свободная нильпотентная группа ступени 2 с d образующими. Сначала рассмотрим случай $d = 2$ — это дискретная группа Гейзенберга, т.е. группа целочисленных верхнетреугольных матриц третьего порядка с единицами на главной диагонали. Если образующие a,b то соотношения таковы:

$$[a,b]a = a[a,b], \quad [a,b]b = b[a,b], \quad [a,b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

В этом случае замкнутый путь эквивалентен нулевому пути тогда и только тогда, когда алгебраическая (ориентированная) площадь, ограниченная им, равна нулю. А два пути γ_1 и γ_2 эквивалентны, если замкнутый путь, образованный $\gamma_1\gamma_2^{-1}$, эквивалентен тривиальному пути.

Тот же вывод верен и для непрерывной группы Гейзенберга — площадь есть в точности значение симплектической 2-формы (определяющей группу) на соответствующем 2-цикле. Это соображение давно известно и используется в симплектической и неголономной геометрии и теории управления.

При $d > 2$ эквивалентность замкнутого пути нулевому описывается тем же критерием, но примененным ко всем проекциям замкнутого пути на двумерные координатные подпространства решетки.

Следующий пример, ключевой для дальнейшего, насколько известно, новый.

Пример 4.

Свободные разрешимые группы ступени два. Пусть $G = Sol_d$. Соотношения между образующими по определению лежат во втором (и, тем более, первом) коммутанте свободной группы. Поэтому достаточно определить эквивалентность замкнутых циклов тривиальному циклу. Но мы даем условие эквивалентности для произвольных путей.

Пусть задан путь γ; ребро решетки ρ может входить в γ с различной ориентацией $+, -$; обозначим алгебраическую сумму (с учетом знака) всех вхождений этого ребра в путь γ через $\gamma(\rho)$.

Лемма 10 *Два конечных пути γ_1, γ_2 на решетке $\mathbf{Z^d}$ являются Sol_d-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всякого ребра ρ $\gamma_1(\rho) = \gamma_2(\rho)$.*

Иначе говоря, эквивалентность означает одинаковость кратностей прохождения (с учетом направлений) ребер решетки вне зависимости от порядка их прохождения; напомним, что в примере 2 (свободная группа) сокращались лишь последовательно проходимые ребра разной ориентации.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из описания коммутанта группы Sol_d, действительно, поскольку все коммутаторы группы Sol_d коммутируют, то это значит, что два пути, отличающиеся порядком обхода входящих в них плакетов, эквивалентны. Поэтому класс эквивалентности определяется лишь суммарной кратностью прохождения каждого ребра с учетом ориентаций. ■

Легко переформулировать этот критерий как некоторое решение проблемы тождества слов в группе Sol_d^2 в терминах самих этих слов, т.е. как нормальную форму элементов группы, но приведенный критерий более полезен для дальнейшего.

Рассмотрим теперь пространство бесконечных путей на решетке $\mathbb{Z}^d$, начинающихся в нуле. Его можно отождествить с пространством бесконечных последовательностей $S^{\mathbb{N}}$ в алфавите S из образующих и их обратных. Снабдим его, как и выше, естественной топологией и мерой (бернуллиевской) μ^∞.

Рассмотрим также пространство $F(E^d; \mathbb{Z} \cup +\infty)$ всех функций с целыми или бесконечными значениями на множестве ребер решетки E^d и введем отображение Φ пространства бесконечных путей $S^{\mathbb{N}}$ в $F(E^d; \mathbb{Z})$, сопоставляющее бесконечному пути γ и ребру ρ число $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(\rho)$, если предел существует (т.е. стабилизируется) и $+\infty$ — в противоположном случае, здесь γ_n есть начальный отрезок пути γ.

Напомним фундаментальный факт из теории простых случайных блужданий на решетках: если $d = 1, 2$, то случайное блуждание возвратно, т.е. с вероятностью единица бесконечное число раз проходит через любую вершину и по любому ребру, а если $d > 2$, то случайное блуждание невозвратно и, в частности, каждое ребро с вероятностью единица проходится траекторией случайного блуждания конечное число раз (см. [50]). Мы будем далее рассматривать именно этот случай $d > 2$. Назовем стабильными функциями функции из $F(E^d; \mathbb{Z})$. (Мы исключаем бесконечные значения, так как, в силу невозвратности блуждания, все значения стабильных функций конечны.) Два бесконечных пути, имеющих при отображении Φ один и тот же образ (конечный или нет), назовем стабильно эквивалентными. Таким образом, стабильная эквивалентность совпадает с тем определением стабильности, которое рассматривалось в предыдущем параграфе. Наша задача — доказать, что эта эквивалентность совпадает с эквивалентностью, определяемой граничным разбиением σ на $S^{\mathbb{N}}$ из параграфа 3. Т.е. что не существует такой измеримой функции (достаточно рассматривать функции из L^2), которая была бы ортогональна всем стабильным функциям и была бы σ-измерима, т.е. постоянна на путях, конечные отрезки которых эквивалентны в определенном выше смысле.

Теорема 10 *1. При $d \leq 2$ пространство классов бесконечных стабильно эквивалентных путей и граница $(\Gamma(Sol_d, \mu), \mu_\sigma)$, где μ — равномерная мера на образующих группы Sol_d — тривиальны* (mod0)*, т.е. состоят из одной точки. Точнее, отображение Φ переводит почти все пути в тождественно бесконечную функцию на ребрах.*

2. При $d > 2$ пространство классов стабильно эквивалентных путей нетривиально и канонически изоморфно границе $(\Gamma(Sol_d, \mu), \widehat{\mu})$. Точнее, отображение

$$\Phi : (S^{\mathbb{N}}, \mu^\infty) \to F(E^d; Z)$$

корректно определено, и для почти всех путей образ есть всюду конечная функция на ребрах, а проекция Φ есть канонический изоморфизм этого пространства и границы:

$$(\Gamma(Sol_d, \mu), \widehat{\mu}) = (F(E^d; Z), \Phi(\mu^\infty))$$

Таким образом, граница Пуассона–Фюрстенберга пары $\Gamma(Sol_d^2, \mu)$ как пространство с мерой канонически изоморфно пространству $(F(E^d; \mathbf{Z}), \mathbf{\Phi}(\mu^\infty))$ целочисленных функций на ребрах, снабженных мерой-образом.

Доказательство.

■ Мы используем тот же прием, что и в теореме параграфа 3 о границах для групп со стабильной нормальной формой, однако пользоваться будем не стабильными нормальными формами, а стабильной эквивалентностью. И здесь достаточно доказать, что пределы функций, зависящих от стабильных координат, исчерпывают все пространство σ-измеримых (граничных) функций. Предполагая, что такая функция существует и независима от всех стабильных функций, аппроксимируем ее цилиндрическими, т.е. n-стабильными функциями, зависящими от стабильных координат путей длины, меньшей n (см. теорему параграфа 3). По тем же соображениям, что и параграфе 3, такие функции должны зависеть только от координат $(\beta(\gamma))$, которые могут при продолжении пути γ меняться и, следовательно, в силу невозвратности, расстояние соответствующих ребер β от начала координат должно быть больше некоторой константы, зависящей от n для путей γ из множества меры достаточно близкой к единице, также определяемой выбором n. Выбирая, как и ранее, последовательность n_k так, чтобы эти множества номеров координат, от которых зависят аппроксиманты, не пересекались, мы получаем противоречие (если функции отличны от константы) с асимптотической независимостью значений функционалов $\beta(\gamma)$ при достаточно далеких друг от друга ребрах β. Таким образом, функций, отличных от констант, ортогональных всем стабильным функционалам, не существует. В соответствии с этим, граница $\Gamma(Sol_d^2, \mu)$ отображается в $(F(E^d; \mathbf{Z}), \mathbf{\Phi}(\mu^\infty))$, поскольку образ пути при этом отображении зависит лишь от стабильных функционалов от пути, и это отображение есть изоморфизм.

Замечание 5 *Свойства меры $\Phi(\mu^\infty)$, т.е. канонической меры на границе свободной разрешимой группы, представляют большой интерес. Это мера на пространстве целочисленных функций на ребрах решетки. Ее одномерные распределения (значения на одном ребре) выражаются через разности функции Грина простого d-мерного ($d \geq 3$) случайного блуждания в конце и начале ребра. Однако о корреляциях этой естественной меры автору ничего неизвестно. Эта мера представляется более естественной, чем аналогичная мера на конфигурациях, т.е. на пространстве целочисленных функций на узлах решетки, возникающая в модели сплетения (см. ниже).*

Применим этот метод к другим группам. Рассмотрим сплетение $\mathbb{Z}^d \wr H \equiv G_d(H)$, где H — циклическая группа конечного или бесконечного порядка (это сплетение называют теперь лампочной группой — "lamplighter group", поскольку блуждание на ней есть блуждание по решетке с одновременным случайным переключением лампочек в каждом из узлов решетки). Это также разрешимая группа ступени 2 с $d+1$ образующей, ее удобно представлять как скрещенное произведение $\mathbb{Z}^d$ на пространство $F_0(\mathbb{Z}^d; H)$ всех финитных конфигураций — функций на решетке со значениями в группе H. Следовательно, эта группа естественным образом представляется как фактор-группа группы Sol_{d+1}. Если $d \geq 3$, то *граница $\Gamma(G_d(H), \mu)$, где μ — равномерная мера на образующих, — нетривиальна*, это впервые было отмечено в [8]. Легко видеть, что граница отображается на пространство $F(\mathbb{Z}^d; H)$ всех конфигураций: это отображение есть просто "финальная" конфигурация, каждому узлу сопоставляется тот элемент группы H, который был в момент последнего посещения блужданием этого узла. Однако, до сих пор оставалось неясным, является ли это отображение изоморфизмом, т.е. всякая ли функция на границе зависит только от финальной конфигурации. Этот вопрос был сведен к некоторой задаче об обычных простых блужданиях на решетке, но решения получено не было. В том случае, когда H — полугруппа, ответ положителен ([75]), но метод не применим к случаю группы.

Следствие 2 *Граница $\Gamma(G_d(H), \mu)$ изоморфна пространству $F(\mathbb{Z}^d; H)$.*

Доказательство. Можно использовать доказанную выше теорему для свободной разрешимой группы Sol_{d+1} и тот факт, что сплетение есть ее фактор-группа. Но более поучительно провести аналогичное рассуждение для самого сплетения, используя описанный метод. Рассмотрим для простоты случай $d = 3$ и $H = \mathbb{Z}$ и обозначим сплетение $\mathbb{Z}^3 \wr \mathbb{Z}$ через G_3. В этом случае сплетение имеет четыре образующих, первые три из которых коммутируют, и коммутаторы любого элемента из подгруппы Z^3, образованной ими, с четвертой образующей также коммутируют. Будем отождествлять слова в образующих с путями на решетке E^4. Из предыдущего вытекает, что два пути G_3-эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают проекции концов путей на подрешетку, образованную первыми тремя осями, и алгебраическая сумма кратностей прохождения каждого из ребер, параллельных четвертой оси, одна и та же для обоих путей. Дальнейшее рассуждение в точности повторяет доказательство теоремы для свободной разрешимой группы. ■

Имевшиеся попытки доказать эту теорему наталкивались на следующую сложность: сведение задачи о границе группы G_d к блужданию на группе $\mathbb{Z}_d$ (а не $\mathbb{Z}_{d+1}$) затемняет особую роль четвертой образующей, что приводит к необходимости исследовать условный процесс и доказывать тривиальность его хвостовой сигма-алгебры, а это требует тех или иных оценок сложных функционалов от траекторий. В проведенном рассуждении различие между образующими прослеживается, как мы видели, очень наглядно. В частности, *проекция кратностей прохождения ребер, параллельных четвертой оси, на решетку, образованную первыми тремя образующими, — и есть финальная конфигурация*, о которой шла речь выше.

Мы не будем останавливаться на других примерах, отметим лишь, что приведенный метод сводит все задачи о границах на конечнопорожденных группах к задачам о тех или иных сигма-алгебрах (а именно, о сигма-алгебрах G-эквивалентных путей) для классических простых блужданий на решетках того же ранга, что и число образующих группы. Но не всегда удается легко описать G-эквивалентность путей (например, для групп кос). Этот метод также показывает, что поиск нормальной формы есть выделение какого-то одного пути из класса эквивалентных, а задача о минимальной нормальной форме есть *задача изопериметрического типа: найти контур минимальной длины в данном классе (замкнутых) путей.* Для непрерывной группы Гейзенберга — это классическая изопериметрическая задача. В общем случае они названы изоголономными (см. [76]) — это задачи о минимуме длины кривой при фиксированных значениях некоторого семейства 1-форм.

Для свободной разрешимой группы нормальная форма элементов также может быть описана, но гораздо продуктивнее рассматривать в качестве координат не исходные образующие, а те, которые рассмотрены выше, — описание границы оказалось не связанным с бесконечными словами и даже не интерпретируется в “цилиндрических” (по отношению к $S^{\mathbb{N}}$) терминах. Более подробно на этих вопросах мы остановимся в другом месте.

В заключение заметим, что точный подсчет всех трех констант — v, c, h — для свободных разрешимых групп ступени два, видимо, весьма не прост, равно как и явное вычисление значений гармонических функций, — пока неизвестно, превращается ли в равенство фундаментальное неравенство. Не исключено, что эти константы для свободных разрешимых групп более высоких степеней аномально близки к константам свободной группы с тем же числом образующих.

Использованные приемы отыскания границ с помощью пространств путей и сама реализация групп имеют широкую область применений: при отыскании других границ (Мартина), перечислении мер с заданным коциклом, центральных мер и др. могут быть использованы те же средства.

5 Локальные и локально свободные группы

5.1 Определения

Определение 13 *Локальной группой (алгеброй) L (см. [28, 29]) называется группа, в которой образующие a_i линейно упорядочены по типу $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ или по типу отрезка натурального ряда, при этом*

$$a_i a_j = a_j a_i, \quad |i - j| > k,$$

а между образующими $a_i, \ldots, a_{i+k}$ имеются некоторые соотношения. Если эти соотношения не зависят от i, то группа (алгебра) называется локальной стационарной группой (алгеброй).

Как правило, интересен случай $k = 1$, в этом случае коммутируют все несоседние образующие. Мы будем рассматривать только этот случай. Если никаких соотношений между соседними образующими нет, то локальная группа (алгебра) называется *локально свободной.* Мы будем рассматривать локально свободную группу LF_n с n образующими и точно также определяемую локально свободную полугруппу LF_n^+ с n образующими. Эти группы (полугруппы) являются свободными объектами в многообразии локальных групп (полугрупп).

По указанной причине локально свободная группа LF_n накрывает группу кос B_{n+1} с $n+1$ нитями (n образующими). Напомним, что группа кос есть в наших терминах локальная стационарная группа с соотношением между соседними образующими:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}.$$

Квадраты образующих σ^2 порождают в группе кос B_n подгруппу, изоморфную локально свободной группе. Иначе говоря, между квадратами соседних образующих нет никаких соотношений. Доказательство этого полезного для дальнейшего факта не столь просто. как может показаться из следующего примера группы B_3, фактор которой по центру есть группа $PSL(2, \mathbb{Z})$, а две образующие переходят в матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

квадраты которых образуют, как известно, свободную подгруппу. Случай произвольного n есть специальный вариант гипотезы Титса, который для группы кос доказан в [103, 104].

Нормальный делитель, порожденный подгруппой квадратов стандартных образующих в группе кос (т.е. объединение всех подгрупп, сопряженных с этой подгруппой), совпадает с подгруппой крашеных кос. Наш интерес к локально свободной группой связан, в частности, с надеждой на то, что она поможет в изучении границ и асимптотик групп кос и, в частности, стабильных групп кос.

Основные примеры локальных групп и алгебр — группы Кокстера, алгебры Гекке и др. (см. [28, 29]). Легко перенести определения на случай, когда вместо линейного порядка рассматривается произвольный граф, вершины которого нумеруют образующие, а пары образующих, несоединенные ребрами, коммутируют. Особенно полезен случай цикла в качестве графа — в этом случае мы называем соответствующую локально свободную группу n-циклической (n — число вершин цикла) и обозначаем LFC_n. Идея локальных групп очень полезна в теории представлений, например, симметрической группы (см. [77]); очевидна ее связь с концепциями теории интегрируемых решеточных моделей и уравнением Янга–Бакстера.

Мы будем рассматривать здесь лишь локально свободные группы LF_n и полугруппы LF_n^+ со стандартными образующими $g_1, \dots, g_n$ и равномерной мерой μ на них и, в случае группы, их обратных. Легко написать нормальную минимальную форму для элементов локально свободной группы с образующими. Для этого надо каждое слово записывать так, чтобы после ненулевой степени каждой из образующих g_i в слове стояла образующая с бо́льшим или на единицу меньшим номером. Этим определена нормальная (минимальная) форма в группе (полугруппе). Точно так же определяются бесконечные слова в нормальной форме.

Лемма 11 *Эта нормальная форма — стабильна.*

Нормальная форма имеет замечательную геометрическую модель — элементы локально свободной группы или полугруппы можно представлять себе как *груды* (этот термин использовался в общей алгебре для объектов, которые редко употребляются, поэтому я решил именно им перевести принятое в западной литературе слово “heap”). Это понятие возникло в связи со свободной полугруппой ([32]), но использовалось для других задач (см. [33]).

Определение 14 *Грудой называется всякое конечное подмножество $H = \{(i,j)\}$ дискретного бесконечного прямоугольника $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,\infty\}$, $n \in N$, удовлетворяющее условиям:*

Если точка (будем называть ее кирпичом) $(i,j) \in H$, то $(i \pm 1, j) \notin H$, и для $j \geq 2$ хотя бы один из элементов $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$, $(i+1,j-1)$ принадлежит H. Число n — ширина груды — фиксировано, это число образующих в группе (полугруппе). При фиксированном i совокупность позиций $\{(i,\cdot)\}$, назовем i-ой колонкой.

Каждая груда определяет однозначно элемент полугруппы LF_n^+, число кирпичей в груде есть минимальная длина элемента полугруппы. Поэтому число элементов данной длины есть число груд с данным число кирпичей. Для группы надо определить груды, кирпичи которых могут быть окрашены в один из двух цветов $(+,-)$, и дополнительно потребовать, чтобы цвета кирпичей (i,j), $(i,j+1)$ были одинаковы. Комбинаторика груд напоминает комбинаторику диаграмм Юнга. В частности, определяется понятие *крыши груды: множества тех ее кирпичей, которые можно удалить, причем оставшееся множество по-прежнему есть груда.* Это понятие аналогично понятию угла в диаграмме Юнга. Комбинаторика груд является основным техническим средством для получения результатов, приводимых ниже. В терминах нормальной формы крыша состоит из букв слова, которые могут быть сокращены добавлением справа обратного элемента. Мы отсылаем интересующихся к работам [15] и [33, 34].

Модель случайного блуждания на локально свободной группе и полугруппе сводится к модели случайного роста груды, рассмотренной впервые в [15]: независимым (с одинаковыми вероятностями) образом бросаются кирпичи в колонки с соблюдением указанных правил (что-то вроде игры в тетрис). Ищутся вероятностные характеристики случайной груды, и в частности, оценки размера крыши дают возможность оценить энтропию и другие нужные константы. Оценка математического ожидания высоты груды является непростой и не до конца решенной задачей.

Как следствие теоремы о границе группы с мерой со стабильной нормальной формой (параграф 3) или непосредственно как теорема о границе свободной метаабелевой группы (параграф 4) доказывается теорема:

Теорема 11 *Рассмотрим локально свободную группу (полугруппу) LF_n (LF_n^+) с равномерной мерой μ на образующих. Граница группы (полугруппы) есть множество бесконечных слов в нормальной форме, или в геометрической формулировке — множество бесконечных крашеных груд (груд в случае полугруппы)*

Эта модель груд сходна с некоторыми физическими моделями (ASEP) и моделями направленного роста (ср. [78, 15, 79, 80]), активно изучаемыми в настоящее время.

5.2 Фундаментальное неравенство для локально свободных групп

Мы приведем результаты работы [15], где вычислены, точнее, даны оценки всех трех констант (v, l, h) для локально свободной группы и равномерной меры на естественных образующих.

Теорема 12 *Для локально свободной группы с двумя и более образующими фундаментальное неравенство является строгим (т.е. не является равенством).*

Особенность постановки вопросов для локально свободных групп и более общо — локальных групп [29], в частности, группы кос, в специальном интересе к асимптотике по числу образующих. Оказывается, такой *конечный* предел существует для каждой из трех констант. Мы приведем соответствующие оценки. Заметим сначала, что каждая из групп имеет свою "положительную" полугруппу LF_n^+, порожденную положительными степенями образующих, которая служит базой для предварительных оценок.

Теорема 13 *Значения пределов констант при стремлении числа образующих к бесконечности $n \to \infty$ таковы:*

1. Логарифмический объем равен для LF_n^+

$$v = \log 4 + O(n^{-1}),$$

для LF_n

$$v = \log 7 + O(n^{-1}).$$

2. Снос для LF_n равен

$$l = \frac{2-\alpha}{3-\alpha},$$

где константа $|\alpha| < 1/2$, т.е.

$$3/5 < l < 5/7.$$

(Снос для полугруппы равен $l = 1$, так как в LF_n^+ нет сокращений).

3. Энтропия равна для LF_n^+

$$h = \log 3 + O(n^{-1}),$$

а для LF_n —

$$h = \log(3-\alpha) + O(n^{-1}).$$

Таким образом, фундаментальные неравенства в обоих случаях строгие при достаточно больших n: для LF_n^+

$$\log 3 < \log 4,$$

а для LF_n —

$$\log(3-\alpha) < \frac{2-\alpha}{3-\alpha} \cdot \log 7$$

для $|\alpha| < 1/2$. Таким образом, константа q из пункта 1 равна:

$$q = \frac{(3-\alpha)\log(3-\alpha)}{(2-\alpha)\log 7} < 1.$$

Эти подсчеты существенно используют теоремы, цитированные в предыдущем пункте, в частности, аналог теоремы Шеннона–Макмиллана–Бреймана и др., а также геометрическую модель груд, о которой говорилось в первом пункте.

Из соотношений между группами кос и локально свободными группами, указанных выше, можно получить оценки энтропии, сноса и для группы кос, но вопрос о неравенстве для этих групп не решен, и описание границы для локально свободной группы не помогает явному нахождению границы для группы кос — в отличие от нее, в группе кос ни для одной из известных нормальный форм стабилизация не доказана.

Но даже для достаточно хорошо изученной локально свободной группы мы до сих пор не знаем, есть ли в ней образующие, для которых эта константа лучше, чем для естественных образующих, и тем более неизвестно, является ли эта группа свободно-подобной, т.е. есть ли в ней система образующих, для которой $q_S = q = 1$.

О чем говорит строгое неравенство для локально свободной группы? Здесь мы дадим объяснение этому эффекту, которое, по-видимому, имеет общий характер. Это явление, которое можно назвать "запиранием" слов. В чем различие между типичными словами, которые мы получаем в процессе случайного блуждания (метода Монте-Карло) и типичными в смысле равномерного распределения на словах данной длины? Модель груд дает немедленный ответ: в процессе роста случайная груда может закрыть (и закрывает) доступ ко многим клеткам, которые могли бы быть заполнены ранее. Иначе говоря, эволюция случайной груды пропускает (с положительной вероятностью) большое число промежуточных возможностей точнее, "запирает" некоторые клетки, которые уже нельзя заполнить в процессе последующего роста. Поэтому типичная случайная груда имеет больше пустых мест, чем типичная по отношению к равномерной мере, и именно поэтому число типичных случайных слов данной длины экспоненциально мало по сравнению с числом всех слов данной длины. Эксперименты подтверждают различие в плотностях заполнения в том и другом случае.

В этом и состоит физическое объяснение причины неравенства в фундаментальном неравенстве.

Возникает вопрос, как можно исправить случайный механизм, чтобы получить все же равенство в фундаментальном неравенстве? Ответ состоит в том, что случайный механизм должен допускать появление "запертых" слов. При переводе на групповой язык, этот шаг означает, что *нужно допустить не только приписывание образующих справа к имеющемуся слову, как в обычном случайном блуждании (правом), но и случайную ВСТАВКУ образующих внутрь слова с соблюдением некоторых правил.* Такие блуждания на группах можно назвать блужданиями со вставками.

Разумеется, это резко расширяет возможности случайных механизмов и, соответственно, усложняет всю теорию таких обобщенных блужданий на группах, полугруппах и т.д. Но в то же время это сближает задачу генерации элементов группы, изучения характеристик их действительно типичных свойств, получение численных характеристик с новыми проблемами, возникавшими в других областях (ср. [81]). Именно такие блуждания отвечают моделям направленного роста в статистике полимеров (marche dirigée — см. напр. [34]); и, тем самым, модели получают алгебраическое истолкование.

ДОБАВЛЕНИЕ

О различных понятиях энтропии; энтропия убывающих последовательностей, вторичная энтропия.

“..............*Энтропия!*

Энтропия ....”.

Тимур Кибиров.

В этом добавлении после нескольких кратких замечаний об истории энтропии в теории меры и функциональном анализе, мы приводим несколько новых понятий энтропии, определяемых по общей схеме.

А. Н. Колмогоров первым по-настоящему осознал фундаментальную роль шенноновской теории информации для всей математики и дал ей общематематическое, универсальное употребление. Самым значительным применением энтропии в математике является, несомненно, его понятие энтропии в метрической теории динамических систем. Чуть позже это привело и к понятию топологической энтропии. Он же сделал ϵ-энтропию компактов, появившуюся еще в 30-х гг., но не ставшую до него общепринятым инструментом исследования, средством изучения бесконечномерных и функциональных пространств, их размерностей и их аппроксимаций. Все последующие понятия энтропии могут считаться потомками колмогоровской и шенноновской энтропий в разных областях.

Колмогоровская энтропия динамической системы, введенная более сорока лет назад [82, 83], поставила теорию динамических систем и эргодическую теорию на совершенно новый уровень. В одном из своих публичных докладов В. А. Рохлин сказал: “Каждый может сделать свою науку модной, надо только выдумать что-либо подобное энтропии Колмогорова”. Действительно, эргодическая теория и теория динамических систем из сравнительно периферийной области стали на долгое время и, пожалуй, до сих пор остаются, в центре внимания большинства математиков. Конечно, тому имеются и другие веские причины, это, в первую очередь, их востребованность в разнообразных приложениях, а также многие другие открытия (КАМ теория, гиперболическая теория, теория Орнштейна, связи со статфизикой, вычислительные вопросы и т.д.). В. А. Рохлин к началу пятидесятых годов перестал заниматься эргодической теорией, в которой ему в 40-е годы принадлежали крупные достижения. Он целиком переключился на гладкую топологию, где совершил замечательные открытия. Но, по его собственному признанию, открытие Колмогорова (кстати, впервые доложенное на семинаре Рохлина в МГУ) произвело на него очень сильное впечатление и он надолго, почти до конца 60-х гг., сосредоточился на изучении эргодической теории и, в первую очередь, на энтропийной теории. В. А. Рохлину и Я. Г. Синаю безусловно принадлежат главные и наиболее глубокие факты энтропийной теории [84, 64, 85, 86], в которую, конечно, внесли вклад многие, М. С. Пинскер, Л. М. Абрамов, Д. З. Аров, С. А. Юзвинский и другие. Блестящие обзоры В. А. Рохлина в "Успехах" [84, 64] до сих пор могут читаться как руководства по этой теме. Во втором из них было дано первое замкнутое изложение того состояния энтропийной теории, которое было достигнуто к тому времени. К сожалению, ни им, ни другими создателями теории не была написана специальная монография по энтропийной теории динамических систем, дело ограничилось лишь общими сведениями в книгах [87, 88] и несколькими обзорами. Последующие обстоятельные книги [89, 90, 91] и др. написаны людьми, не участвовавшими непосредственно в событиях, что налагает отпечаток на их стиль.

После работ 50-х гг. А. Н. Колмогорова и работ его продолжателей в математический обиход вошло своеобразное *энтропийное мышление*, т.е. определенный прием построения инвариантов экспоненциального типа в различных ситуациях. Такие инварианты, если они существуют, как правило, устойчивы и потому вычислимы. Их интерпретация может быть очень разной — скорость передачи информации, показатель убывания вероятности, скорость перемешивания или скорость роста и т.д. Эти инварианты связаны с показателями Ляпунова, действием, функциями роста, хаусдорфовой размерностью мер, она может служить средством различения взаимно сингулярных мер и т.п. Энтропийная теория действия аменабельных групп с инвариантной мерой также получила значительное развитие (см. [92]), однако, за пределами этого класса групп положение остается неясным.

В этой статье мы имели дело с энтропией случайных блужданий, фактически, характеризующей информацию, содержащуюся в одной букве случайного слова, представляющего данный элемент группы (при выбранной системе образующих и их вероятностей), или, иначе говоря, экспоненциальную скорость того, как "размазываются" по группе свертки данной меры. Мы придали этой энтропии более широкий смысл, определив ее как колмогоровскую энтропию, но уже для полиморфизмов — многозначных преобразований, и связали энтропийный критерий тривиальности границы с полной положительностью энтропии преобразований. Стоит отметить, что в некотором отношении и колмогоровская энтропия преобразования как раз и измеряет близость его к многозначному (хаотичность преобразования может быть охарактеризована как существенная многозначность фактор-полиморфизмов по конечным разбиениям).

Очень близко в техническом отношении к колмогоровскому определению находится понятие *энтропии фильтраций (убывающих последовательностей разбиений)*, в частности, наиболее изученная энтропия диадических последовательностей — см. [35]. Здесь, как и в определяемой далее *вторичной энтропии динамической системы*, энтропия выступает как показатель экспоненциального разброса в асимптотике условных мер. В этом добавлении мы даем новую трактовку энтропии последовательностей измеримых разбиений, годную и для неоднородных разбиений, и использующую одновременно и ϵ-энтропию компактов, и по аналогии с этим определяем вторичную энтропию случайных регулярных процессов. Следует заметить, что все виды энтропий (быть может, пока за исключением энтропий в некоммутативных теориях) определяются по общей схеме: с данным объектом тем или иным образом ассоциируются допустимые возрастающие последовательности конечных разбиений и вычисляется предел их нормированных энтропий, а затем берется супремум по всем допустимым последовательностям, который и называется энтропией данного объекта. При этом для приложений существенно, чтобы предел зависел непрерывно от возрастающей последовательности, что и дает возможность вычислять энтропию. Первый пример этой схемы и есть энтропия Колмогорова в варианте, предложенном Синаем. В эту же схему вкладывается буквальным образом (без взятия супремума) энтропия случайных блужданий в том варианте, который описан в параграфе 3, а также и нижеследующие определения.

6 Энтропия дискретных фильтраций

Дискретной фильтрацией в теории случайных процессов называют убывающую последовательность сигма-алгебр или, на более удобном для нас языке, *убывающую последовательность измеримых разбиений пространства Лебега.* Обозначим такую последовательность $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Здесь $\xi_{n+1} \prec \xi_n$, а ξ_0 — разбиение на отдельные точки mod0 пространства Лебега (X, μ). Мы не налагаем никаких требований на условные меры разбиений, наиболее интересные частные случаи, с которых начиналась эта теория (см. литературу в [35]), — диадический (условные меры разбиения ξ_n равномерны, и каждый элемент содержит 2^n точек) и непрерывный (условные меры всех разбиений ξ_n/ξ_{n-1} непрерывны). Мы не предполагаем также и эргодичности, т.е. того, что измеримое пересечение последовательности $[\xi_n]_{n \in \mathbf{N}}$ — тривиально. Важный факт теории фильтраций состоит в том, что существует континуум попарно неизоморфных однородных диадических эргодических последовательностей, и потому встает задача классификации фильтраций. Один из естественных инвариантов — энтропия диадической последовательности $h(\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}})$, введенная в [65, 93], см. также [94].

Приводимое ниже новое определение энтропии в силу некоторых комбинаторных соображений совпадает для диадических последовательностей при экспоненциальной нормировке (скейлинге) с прежней энтропией $h(\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}})$ диадических последовательностей, как она была введена в [93] и подробно рассмотрена в [35]). Но это определение допускает уже различные скейлинги и, кроме того, пригодно и для неоднородных последовательностей. С другой стороны, оно использует понятие ϵ-энтропии компактного пространства мер и позволяет рассматривать произвольные асимптотики роста, а это, в свою очередь, дает новые возможности даже для диадических последовательностей, для которых старая энтропия обращалась в нуль. Заметим, что для определения энтропии диадических (однородных) последовательностей может быть использована колмогоровская энтропия действия диадической (p-адической) группы: она, как показано в [94], есть инвариант не только действия диадической группы, ассоциированного с последовательностью, но и самой диадической последовательности, и при этом она совпадает с нашей энтропией $h(\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}})$. Однако, этот способ использования колмогоровской энтропии действия никак не обобщается на неоднородный случай, так как никакого естественно ассоциированного с общего вида убывающей последовательностью действия определить нельзя. Метод использования итерированных метрик Канторовича–Рубинштейна (КР), предложенный в [65] и использованный в формулировке критерия стандартности, позволяет рассмотреть самый общий случай.

Напомним сначала построение КР-метрики. Пусть задан метрический компакт (K, r), где r — метрика (или даже полуметрика) на K. По метрике (полуметрике) r на

K можно построить метрику (соответственно, полуметрику) ρ_r на $V(K)$ — пространстве вероятностных борелевских мер. Эта транспортная, или КР-метрика, введенная впервые Л. В. Канторовичем [95] и исследованная в совместной статье с Г. Ш. Рубинштейном [96], переоткрывалась в десятках работ на самые различные темы, она оказалась необычайно полезной во многих областях: в теории меры, эргодической теории, статистике, статфизике и пр. Она определяется как

$$\rho_r(\mu_1, \mu_2) = \inf E_\psi r(x_1, x_2),$$

где инфимум берется по всем вероятностным мерам ψ на произведении $K \times K$ с заданными маргинальными мерами (проекциями на сомножители) μ_1 и μ_2, а E_ψ — знак математического ожидания по мере ψ. Иначе говоря, это инфимум по всевозможным совместным распределениям математических ожиданий расстояния между двумя случайными величинами, принимающими значения в данном метрическом пространстве и имеющих заданные распределения.

Эта конструкция перехода от (K, r) к $(V(K), \rho_r)$ допускает итерирование: в работах автора ([65], [35]) введена так называемая башня мер $V^k = V(V^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$ ("меры на мерах") с соответствующими итерациями КР-метрик и ее проективный и индуктивные пределы. Здесь мы не будем обращаться к этим понятиям во всей их общности и определим итерации непосредственно, используя последовательность разбиений. В работе [35] содержится более полная информация об этой конструкции.

Рассмотрим метрический компакт с мерой и метрикой (X, μ, r). Предположим, что имеется некоторое измеримое разбиение ξ пространства (X, μ, r), тогда мы можем ввести новую допустимую полуметрику $\rho_{\xi,r}$ на том же пространстве (X, μ) следующим образом:

$$\rho_{\xi,r}(x, y) = \rho_r(\mu^x, \mu^y),$$

где μ^z есть условная мера на элементе этого разбиения ξ, содержащем точку z, а ρ_r — КР-метрика на мерах, заданных на (X, r). Корректность этого определения вытекает из того, что условные меры определены для почти всех элементов разбиений, а элементы разбиений как подмножества в (X, r), снабжены (полу)метрикой. Заметим, что $\rho_{\xi,r}$, фактически, есть метрика (полуметрика) на фактор-пространстве X/ξ, заданная почти всюду. Таким образом, метрика на условных мерах определяет полуметрику на самом пространстве. Если на (X, μ, r) задана убывающая последовательность разбиений, то на (X, μ) возникает последовательность полуметрик

$$\rho_1 = \rho_{\xi_1,r}, \quad \rho_n = \rho_{\xi_n,\rho_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots.$$

Эта последовательность полуметрик — $\{\rho_n\}$ — определяется по исходной метрике r и последовательности разбиений $\{\xi_n\}$.

Теперь напомним, что такое ϵ-энтропия меры ν в метрическом (полуметрическом) пространстве (Y, r), по существу, введенная Шенноном:

$$H_{\epsilon,r}(\nu) \equiv \inf\{H(\alpha) : \rho_r(\nu, \alpha) < \epsilon\},$$

где инфимум берется по всем дискретным мерам α на Y из ϵ-окрестности (в смысле КР-метрики) меры ν, а H — обычная энтропия дискретной меры. Применяя это понятие к нашему случаю, мы получим функцию от (n, ϵ), зависящую от последовательности разбиений, которую мы фиксируем, и от исходной метрики r:

$$\phi(\epsilon, n, r) = H_{\epsilon,\rho_n}(\mu).$$

Нам придется в дальнейшем варьировать метрику на фиксированном пространстве с мерой, в противоположность традиции, в силу которой, наоборот, фиксируют метрический компакт, и на нем рассматривают различные борелевские меры. Поэтому дадим определение допустимой метрики на пространстве Лебега.

Определение 15 *Допустимой полуметрикой (в частном случае — метрикой) на пространстве Лебега (X, μ) называется полуметрика (соответственно, метрика), определенная на подмножестве полной меры и обладающая следующими свойствами:*

а) она измерима как функция двух переменных на $(X \times X, \mu \times \mu)$, в частности, шары с центром в почти каждой точке есть измеримые множества, а разбиение ω на классы точек с попарно нулевым расстоянием (в случае полуметрики) является измеримым разбиением;

б) подмножество полной меры в пространстве X, снабженное этой метрикой (в случае полуметрики — фактор-пространство X/ω с фактор-метрикой), есть компакт.

Прием варьирования допустимых метрик на фиксированном пространстве Лебега, по-видимому, недооценивался до сих пор. Определим теперь с его помощью *метрический инвариант последовательности разбиений* — функцию $\{\xi_n\}(\epsilon)$, которая будет строиться по некоторой растущей последовательности положительных чисел $\{c_n\}$ — скейлингу, при этом ее выбор однозначно диктуется самой последовательностью разбиений:

Определение 16 *Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — последовательность измеримых разбиений и r — допустимая полуметрика на пространстве (X, μ). Выберем скейлинговую последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ так, чтобы для достаточно малых $\epsilon \geq 0$ существовал следующий предел*

$$h^{(r)}(\epsilon, \{\xi_n\}, \{c_n\}) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\epsilon, n, r)}{c_n}$$

(например, можно взять $c_n \equiv \phi(\widehat{\epsilon}, n, r)$ для некоторого фиксированного малого $\widehat{\epsilon}$ и какой-либо полуметрики r).

ϵ-энтропией последовательности измеримых разбиений $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ со скейлингом c_n называется функция

$$h(\epsilon, \{\xi_n\}, \{c_n\}) = \sup h^{(r)}(\epsilon, \{\xi_n\}, \{c_n\}),$$

где супремум берется по всем допустимым полуметрикам r на пространстве X.

Замечание 6 *1. Существование скейлинга, годящегося для всех полуметрик, требует доказательства, но в случае его существования выбор $\{c_n\}$, при котором предел конечен, единствен с точностью до эквивалентной последовательности. Поэтому указание на $\{c_n\}$ можно опустить.*

2. Достаточно варьировать r лишь по вырожденным полуметрикам вида: $r(x,y) = \inf_{i=1\dots n} |f_i(x) - f_i(y)|)$, где f_i — конечный набор измеримых функций. Более того, можно доказать, что супремум реализуется, например, уже на эвклидовой метрике (если отождествить (X,μ) с единичным отрезком), но вычисления удобнее проводить на вырожденных полуметриках.

3. Как обычно, важен лишь росток функции h в нуле по ϵ. В некоторых случаях функция не зависит от ϵ, если ϵ достаточно мало. В этом случае инвариант есть число. Именно это имеет место в случае диадических последовательностей и скейлинга 2^n, как проверил студент А. Горбульский, можно даже менять ϵ вместе с n, а именно, положить $\epsilon_n = 2^{-n}$, и тогда определение выше совпадает со старым определением энтропии в [35].

Теорема 14 *Пусть $\{\xi_n\}$ — диадическая последовательность измеримых разбиений, $c_n = 2^n$. Тогда*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\epsilon, n, r)}{2^n} = h^r(\{\xi_n\}, \{2^n\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(2^{-n}, n, r)}{2^n},$$

и, следовательно, переход к супремуму по r в левой и правой части равенства приводит к соотношению:

$$h(\epsilon, \{\xi_n\}, \{2^n\}) = \bar{h}(\{\xi_n\}),$$

где правая часть — $\bar{h}(\{\xi_n\})$ — есть энтропия диадической последовательности в смысле [35], а левая не зависит от ϵ в достаточно малой окрестности нуля.

С очевидными изменениями то же верно для любых однородных ((r_n)-адических) последовательностей. С другой стороны, для диадических последовательностей, у которых энтропия равна нулю, возможен иной скейлинг, дающий ненулевую энтропию в смысле данного выше общего определения. Некоторая зависимость от ϵ может в этом случае стать необходимой.

Недавний пример [97] нестандартной последовательности разбиений, получающейся из стандартной диадической последовательности изменением плотности меры, как оказалось, имеет положительную энтропию в смысле данного определения. Это фактически прямо следует из вычислений, сделанных в [97], и означает, что энтропия не есть инвариант типа меры (т.е. не сохраняется при преобразованиях с квазиинвариантной мерой). Любопытно, что обращение этого примера — невозможно: превратить диадическую последовательность с положительной энтропией в последовательность с нулевой энтропией с помощью изменения плотности меры — нельзя.

Относительно неплохо изучен еще один класс примеров, в котором энтропия со скейлингом $c_n = \{2^{-n}\}$ равна нулю, но энтропия со скейлингом $c_n = \sqrt{n}$ разделяет диадические последовательности. Мы имеем в виду прошлое процесса (T, T^{-1}), где T — автоморфизм Бернулли. Как доказал С. Каликов, этот автоморфизм не является свободно бернуллиевским (loosely Bernoulli), и тем более бернуллиевским. Поэтому возник вопрос об инвариантах прошлого этого процесса. Гипотеза о том, что эта диадическая последовательность нестандартна, была довольно давно высказана автором, и существенные (энтропийные) доводы в ее пользу были приведены в неопубликованной рукописи (Berkeley, 1995). Именно в связи с этим примером автор предложил общее определение энтропии, которое приведено выше. Полное доказательство нестандартности этой последовательности, основанное на критерии стандартности из [35], дано в [98]. Энтропия как инвариант последовательности в [98] не используется.

7 Вторичная энтропия

Вторичная энтропия измеряет "случайность случайности" K-автоморфизмов и соответствующих стационарных процессов. Она строится точно так же, как и энтропия убывающих последовательностей, определенная выше, но по более простой метрике. Если зафиксировать течение процесса до некоторого момента (т.е. зафиксировать прошлое), то распределение вероятности на состояниях будущего, вообще говоря, будет различным в зависимости от прошлого. Для классической последовательности независимых это распределение одно и то же. Оказывается, для процессов, неудачно названных "очень слабо бернуллиевскими" ($=VWB$-процессов), случайность будущего, точнее, распределение на будущем, — "детерминировано" в том смысле, что эти распределения мало отличаются в определенной метрике для почти всех возможных течений прошлого случайного процесса. Инвариантность этого свойства образующей — один из главных результатов Орнштейна [99]: по его теореме любая конечная образующая бернуллиевского автоморфизма является VWB, поэтому распределения на будущем почти совпадают в смысле КР-метрики). Это свойство аналогично стандартности убывающей последовательности в силу критерия стандартности (см. ниже). В предлагаемых далее терминах это означает, в частности, что вторичная энтропия равна нулю с любым скейлингом. В то же время, для общих, т.е. небернуллиевских K-автоморфизмов, впервые открытых также Д. Орнштейном в начале 70-х гг. (см.[36]), случайность будущего может быть существенно различной в зависимости от прошлого. В этих случайных процессах проявляется некоторая небуквальная детерминированность: фиксированное прошлое не определяет однозначно будущего, но определяет распределение вероятностей на будущем, которое существенно зависит от прошлого. Вторичная энтропия как раз и измеряет разброс в той же метрике условных мер на будущем при различных прошлых, точно так же, как энтропия убывающей последовательности измеряла разброс итерированных метрик на элементах разбиений. Иначе говоря, подобно тому, как классическая энтропия измеряет неопределенность, содержащуюся в передаваемом случайном тексте, вторичная энтропия измеряет неопределенность, содержащуюся в самом распределении вероятностей случайного текста.

Наиболее убедительный пример небернуллиевского K-автоморфизма дает случайное блуждание по траекториям стохастической системы, например, исследованное С. Каликовым в своей известной работе [100] блуждание с переходными вероятностями $Prob\{x \to Tx\} = Prob\{x \to T^{-1}x\} = 1/2$ по траекториям автоморфизма Бернулли T. Такие (на жаргоне "(T, T^{-1})-inverse") и чуть более общие примеры блужданий по траекториям динамических систем представляют большой интерес с разных точек зрения, и, в частности, в связи с блужданиями в случайных средах. Это — косые произведения и, одновременно, марковские процессы, поэтому они задаются полиморфизмом. Пример Каликова имеет энтропию равную единице и является K-автоморфизмом, но он не является не только бернуллиевским, но даже "свободно-бернуллиевским" (loosely-bernoulli), как уже упоминалось. Это обстоятельство достойно внимания: *случайное блуждание по траекториям самого случайного автоморфизма — не является "абсолютно случайным"*. Отметим, что аналогичное (T, T^{-1})-преобразование — случайное блуждание по траекториям автоморфизма T с дискретным спектром, определяет, в противоположность предыдущему, автоморфизм Бернулли ([101]), также как и блуждание по траекториям бернуллиевского действия свободной группы, но уже по другой причине ([65, 35]). В двух последних примерах диадические последовательности прошлых совершенно различны — в первом случае она стандартна, и даже сам эндоморфизм изоморфен бернуллиевскому (Parry, Rudolf–Hoffman), а во втором — нестандартна и имеет бесконечную энтропию; в случае же примера Каликова последовательность прошлых — нестандартна ([98] — см. выше), но ее обычная энтропия как диадической последовательности — равна нулю.

Перейдем к точным определениям. Пусть $(y_n, n \in \mathbb{Z})$ — стационарный случайный процесс с конечным множеством состояний $A = (a, b, \dots, c))$, а T — правый сдвиг в пространстве $X = \prod_{i \in \mathbb{Z}} A$ траекторий (т.е. T — автоморфизм пространства Лебега (X, μ), где μ — мера, определяемая процессом, и выделена конечная двусторонняя образующая T, тем самым, T имеет конечную энтропию). Обозначим через η эту конечную образующую, т.е. разбиение на траектории с одной и той же нулевой координатой, и через $(\xi_n) = \vee_{k \leq n} T^k \eta$ — инвариантное относительно T разбиение пространства (X, μ) на классы траекторий с совпадающими координатами, номера которых не превышают n. В соответствии с общепринятыми определениями ξ_0 есть K-образующая, а T — K-автоморфизм (см. [64]), иначе говоря:

$$\wedge_{n<0} T^n \xi_0 = \nu,$$

где ν — тривиальное разбиение, и

$$\vee_{n>0} T^n \xi_0 = \epsilon,$$

где ϵ — разбиение mod0 на точки.

Рассмотрим на множестве A дискретную метрику $d(x, y) = \delta(x, y)$ и метрику Хэмминга r_n на множестве X_n конечных слов длины n $X_n = \prod_{1 \leq i \leq n} A$, т.е.

$$r_n((y_1, \dots y_n), (z_1 \dots z_n)) = \frac{|(i : y_i \neq z_i)|}{n}.$$

На пространстве вероятностных мер $V(X_n)$ на X_n введем КР-метрику $\rho_n \equiv \rho_{r_n}$. Обозначим через $\mu_{(0,\infty)}$ проекцию меры μ на $\prod_{i \leq 0} A \equiv X^0_{-\infty}$.

Рассмотрим следующее отображение: $F_n : X^0_{-\infty} \to V(X_n)$, сопоставляющее почти каждой (по мере $\mu_{(0,\infty)}$) последовательности $(y_i)_{i\leq 0}$ (т.е. "прошлому") условную меру на множестве слов $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ ("будущем продолжительности n"). Отображение F_n переводит меру $\mu_{(0,\infty)}$ в некоторую меру $M_n = F_n(\mu_{(0,\infty)})$ на $V(X_n)$; вычислим ее ϵ-энтропию как меры на компакте $V(X_n)$, снабженном КР-метрикой ρ_n,

$$H_{\epsilon,\rho_n}(M_n)$$

(см. выше определение энтропии убывающей последовательности, как и там, мы фиксируем последовательность ϵ_n). Сохраним эти обозначения в нижеследующем определении:

Определение 17 *Вторичной энтропией K-автоморфизма T относительно конечной двусторонней образующей η со скейлингом c_n называется предел*

$$sh(T,\eta)(\epsilon) = \lim_{n\to\infty} c(n)^{-1} H_{\epsilon,\rho_n}(M_n).$$

Вторичной энтропией K-автоморфизма T со скейлингом c_n называется функция

$$sh(T)(\epsilon) = \sup_{\eta} sh(T,\eta)(\epsilon),$$

где супремум берется по всем конечным двусторонним образующим η автоморфизма T, а скейлинг фиксирован.

Скейлинг с(n) в определении вторичной энтропии $sh(T,\eta)$ можно варьировать также, как и в определении энтропии последовательности в предыдущем пункте; мы не указываем его в обозначении $sh(T,\eta)$, поскольку нетривиальный предел получается разве лишь для одного, с точностью до асимптотической эквивалентности, его выбора.

Вторичная энтропия есть функция от ϵ, и, как обычно, нас интересует лишь ее росток в нуле, а не вся функция. В некоторых случаях она не зависит от ϵ при малых значениях, т.е. является числовым инвариантом. Вторичная энтропия претендует на начальную классификацию небернуллиевских К-автоморфизмов, в связи с чем возникает много новых вопросов. Например, каким может быть скейлинг с(n) при $n \to \infty$ в целом для разных автоморфизмов, при котором вторичная энтропия автоморфизма конечна. Ж.-П. Тувено обратил мое внимание на то, что сверхэкспоненциальный рост $c(n)$ невозможен для автоморфизмов, для которых доказана слабая гипотеза Пинскера — т.е. представление автоморфизма в виде прямого произведения автоморфизма Бернулли на автоморфизм с произвольно малой энтропией. Поэтому эта, много лет стоящая, проблема может быть сформулирована как проблема построения (или доказательства его невозможности) примера со сверхэкспоненциальным ростом вторичной энтропии.

В примере Каликова рост последовательности $\{c(n)\}$, по-видимому, есть $\sqrt{n}$, что мы сформулируем в виде общего предположения ниже.

Гипотеза 1 *1. Вторичная энтропия автоморфизма T с данным скейлингом для данной двусторонней K-образующей η положительна (как функция от ϵ при малых значениях) тогда и только тогда, когда положительна (тоже как функция ϵ) энтропия последовательности прошлых $\{T^{-n}\epsilon\}$ с тем же скейлингом. Например, в случае автоморфизма Каликова этот скейлинг — $\{\sqrt{n}\}$.*

В частности,

2. Энтропия последовательности прошлых (со скейлингом n^{-1}) равна нулю для бернуллиевских автоморфизмов с произвольной конечной K-образующей.

Сделанное предположение об идентичности скейлингов для вторичной энтропии и для последовательности прошлых базируется на том, что фактически, для последовательностей прошлого, т.е. для стационарных убывающих последовательностей разбиений, различие между энтропиями, введенными здесь, лишь в том, как определяется метрика в пространстве условных мер: в первом случае — это итерированная КР-метрика, а во втором — это КР-метрика, построенная по метрикам Хэмминга. Итерирование — более сложная процедура, чем увеличение длины слова и соответствующее ему изменение метрики Хэмминга. Впрочем, взаимоотношения между этими метриками довольно запутанные.

С другой стороны, в недавнем препринте К. Мартон и П. Шилдса [37] построен наибольший из известных скейлингов (в других терминах), а именно, оцениваемый снизу линейным ростом с произвольным коэффициентом. Для убывающих последовательностей скейлинг может быть экспоненциальным — именно так было в моих первых примерах — но, по-видимому, здесь проявляется различие между задачами, или в терминах теории колмогоровских автоморфизмов — различие между имеющейся теорией Орнштейна для конечной образующей, т.е. процессов с конечным множеством состояний, и пока отсутствующей теорией процессов с произвольным множеством состояний. Дело в том, что положительность вторичной энтропии свидетельствует, что процесс (с конечным числом состояний) не бернуллиевский, т.е. не имеет VWB-образующей, но для произвольного множества состояний положительность вторичной энтропии даже с экспоненциальным скейлингом не противоречит бернуллиевости и говорит лишь о качестве образующей. В упомянутом примере экспоненциальность скейлинга в определении энтропии последовательности прошлых процесса была использована для доказательства нестандартности этой последовательности, т.е. некоторого свойства образующей. Такие образующие либо имеют немаксимальную энтропию, либо отличаются другими нерегулярными свойствами. Как уже упоминалось, эти факты означают, что теория инвариантных разбиений для общего процесса (с бесконечной энтропией) должна сильно отличаться от орнштейновской теории, эта теория все еще не разработана.

Подытожим сделанные в добавлении замечания. Главный смысл параллели между вторичной энтропией и энтропией последовательности прошлых не только в технической схожести, но в том, что оба понятия претендуют на то, чтобы *быть инвариантами автоморфизмов*. Более подробно, последовательность прошлых одностороннего стационарного случайного процесса задает стационарную убывающую последовательность измеримых разбиений, уже метрический тип последовательности $\{T^{-n}\epsilon\}$ сам по себе есть метрический инвариант одностороннего сдвига. Эту идею неоднократно подчеркивал В. А. Рохлин. В частности, энтропия последовательности есть характеристика эндоморфизма. Легко видеть, что обычная энтропия может принимать на них только два значения — нуль и бесконечность. Однако, значения введенной здесь вторичной энтропии со скейлингом уже не стеснено какими-то ограничениями и может быть использовано для нахождения новых инвариантов эндоморфизмов. Но наибольший интерес представляют инварианты двустороннего сдвига. Дело в том, что выбор образующей может сильно изменить последовательность прошлых, и глубокий вопрос в том, какие инварианты прошлого являются инвариантами не только эндоморфизма, но и автоморфизма, т.е. не зависят от того, как выбрана образующая. Например, стандартность последовательности прошлых в смысле [35] может иметь место для одной образующей и не иметь для другой — уже первый пример нестандартной последовательности [65] был построен как прошлое автоморфизма Бернулли с бесконечной энтропией относительно неэкстремальной образующей. (Кстати, как замечено было позже, вариация этого примера доказывает гипотезу Синая–Рохлина [64] о том, что энтропия $h(\xi|T^{-1}\xi)$ может принимать любые промежуточные значения между 0 и $h(T)$ на K-образующих.) Недавние примеры Рудольфа–Фельдмана–Хофмана показывают, что у бернуллиевских автоморфизмов с конечной энтропией тоже могут быть образующие с нестандартным прошлым. В то же время стандартность (и, следовательно, равенство нулю энтропии) последовательности прошлых может иметь место и для небернуллиевских K-автоморфизмов.

Таким образом тип прошлого как тип убывающей последовательности разбиений, как видно, не является инвариантом автоморфизма. Но некоторые инварианты последовательностей прошлого, такие как энтропия, являются, по-видимому, инвариантами автоморфизма, именно это есть содержание второго пункта гипотезы выше. Если это так, то мы получаем новый способ классифицировать автоморфизмы и их образующие, рассматривая все более и более тонкие свойства последовательности прошлых. Варьируя метрики в пространстве условных мер, можно по тому же образцу строить и иные понятия энтропии. Один такой пример метрики хорошо известен — это f-

метрика (см. [101, 102]), приводящая к понятию свободной бернуллиевости (“loosely Bernoulli”). Эта метрика также приводит к другому (более широкому) понятию вторичной энтропии. Продолжая аналогию между теорией Орнштейна и теорией убывающих последовательностей прошлого, заметим, что условие VWB Орнштейна в точности параллельно стандартности: критерий стандартности ([35]) и теорема Орнштейна утверждают, что в обоих случаях идет речь о сходимости последовательности случайных условных мер в соответствующих метриках (итерированной КР или Хэмминга) к вырожденной мере. То же можно сказать и о свободной бернуллиевости, если использовать вместо метрики Хэмминга f-метрику. Таким образом, вторичная энтропия (как и энтропия последовательностей прошлого) расщепляет небернуллиевские автоморфизмы (соответственно, нестандартные последовательности) на грубые классы в зависимости от того, какова ϵ-энтропия в той или иной метрике множества случайных условных мер.

Стоит отметить, что свойства нестационарных убывающих последовательностей вообще говоря сильно отличаются от свойств последовательностей прошлых (т.е. стационарных) и имеют совсем другие применения. Результаты и инварианты в теории убывающих последовательностей, например, введенная выше энтропия, в равной мере относятся как к стационарному, так и к нестационарному случаю. Более существенно различие между однородными и неоднородными последовательностями. Основной интерес представляют однородные последовательности, например, диадические, или неатомические (см. [35]). Главное их применение — в теории аппроксимации действий групп.

Литература

[1] Avez A. Entropie des group de type fini // CRAS. 1972. V. 275. P. 1363–1366.

[2] Garsia A. Entropy and singularity of infinite convolutions // Pacific J. Math. 1963. V. 13. P. 1159–1169.

[3] Furstenberg H. A Poisson formula for semisimple Lie groups // Ann. Math. 1963. V. 77. P. 335–386.

[4] Furstenberg H. Random walks and discrete subgroups of Lie groups // Adv. Prob. Related Topics. 1971. V. 1. P. 3–63.

[5] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in Diophantine approximation // Math. Systems Theory. 1967. V. 1. P. 1–49.

[6] Вершик А. М. Случайные блуждания на группах и близкие вопросы // Теор. вероятн. и ее прим. 1981. Т. 26, №1. С. 190–191.

[7] Вершик А. М., Кайманович В. А. Случайные блуждания на группах: границы, энтропия, равномерные распределения // ДАН СССР. 1979. Т. 249, №1. С. 15–18.

[8] Kaimanovich V., Vershik A. Random walk on discrete groups: boundary and entropy // Ann. Prob. 1983. V. 11 (3). P. 457–490.

[9] Kaimanovich V. Measure theoretic boundary of markov chains, 0-2 law and entropy. In: Harmonic analysis and discrete potential theory (Picalrdello ed.). P. 145–180. NY, 1990.

[10] Woess W. Random walks on infinite graphs and groups // Cambr. Tracts. 2000. V. 138.

[11] Deriennic Y. Entropie, theoremes limites et marches aleatoires // SLNM. 1986. V. 1210. P. 241–284.

[12] Gerl P. Random walks on graphs // SLNM. 1986. V. 1210. P. 285–303.

[13] Willis G. Probability measures on groups and some related ideals in group algebras // J. Func. Anal. 1991. V. 92. P. 202–263.

[14] Ledrappier F. Une relation entre entropie, dimension et exposant pour certaines marches aleatoires // CRAS. 1983. V. 296. P. 369–372.

[15] Vershik A., Nechaev S., Bikbov R. Statistical properties of braid groups in locally free approximation // Preprint IHES/M/99/45. 1999. To appear in Comm. Math. Phys.

[16] Milnor J. Note on curvature and fundamental group // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. P. 1–7.

[17] Kesten H. Symmetric random walk on groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. P. 336–354.

[18] Kaimanovich V. Hausdorff dimension of the harmonic measure // Erg. Th. Dyn. Syst. 1998. V. 18 (3). P. 631–660.

[19] Буфетов А. Эргодические теоремы для свободных полугрупп // Функц. анал. и прил. 2000. Т. 34.

[20] Дынкин Е. Б., Малютов М. Б. Случайное блуждание на группах с конечным числом образующих // ДАН СССР. 1961. Т. 137. С. 1042–1045.

[21] Masur H. Random walk on Teichmuller space and mapping class groups // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 117–164.

[22] Kaimanovich V., Masur H. The Poisson boundary of Teichmuller space // J. Funct. Anal. 1998. V. 156 (2). P. 301–332.

[23] Series C. Martin boundary of random walks of Fuchsian groups // Isr. Math. J. 1983. V. 44 (3). P. 221–242.

[24] Вершик А.М. Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 72. С. 26–61.

[25] Vershik A. Amenability and approximation of infinite groups // Selecta Math. Sov. 1982. V. 2 (4). P. 311–330.

[26] Bisch D., Haagerup U. Composition of subfactors: new examples of infinite depth subfactors // Ann. Sci. Ecole Norm. 1996. V. 29 (3). P. 329–383.

[27] Bisch D. Entropy of groups and subfactors // J. Funct. Anal. 1992. V. 103 (1). P. 190–208.

[28] Вершик А. М. Локальные стационарные алгебры. В сб.: Труды сибирск. школы "Алгебра и анализ", Кемерово. ВИНИТИ, 1988. С. 3–22.

[29] Vershik A. Local algebras and new version of Young's orthogonal form. In: Topics in Algebra, v. 26. P. 467–473. Banach Center Publ., 1990.

[30] Grosberg A., Nechaev S., Vershik A. Random walk on braid groups, brownian motion, complexity and statistics // J. Phys. A. Math. Gen. 1996. V. 29. P. 2411–2433.

[31] Desbois J., Nechaev S. Statistics of reduced words in locally free and braid groups // J. Stat. Phys. 1997. V. 88. P. 2767–2789.

[32] Cartier P., Foata D. Problèmes combinatoires de commutation et réarrangenments // SLNM. 1969. V. 85.

[33] Viennot G. X. Heaps of pieces I. Basic definitions and combinatorial lemmas // SLNM. 1986. V. 1234. P. 321–350.

[34] Viennot G. X. Problémes combinatorial posès par la physique statistique // Séminaire Bourbaki. 1985. V. 626.

[35] Вершик А. М. Убывающие последовательности измеримых разбиений // Алгебра и Анализ. 1994. Т. 6, №4. С. 1–68.

[36] Shields P., Ornstein D. Uncountably many of K-automorphisms // Adv. in Math. 1973. V. 10 (1). P. 63–88.

[37] Marton K., Shields P. How many future measures can there be? // Preprint, Hungary Academy. 1999.

[38] Вершик А. М. Численные характеристики групп и соотношения между ними // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 240. С. 1–11.

[39] Gromov M. Hyperbolic groups. In: Essays in Group Theory, v. 8. P. 75–263. MSRI, NY, 1987.

[40] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на группах. М.: Мир, 1973.

[41] Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. 1981. V. 53. P. 53–73.

[42] Григорчук Р. И. К проблеме Милнора роста в группах // ДАН СССР. 1983. Т. 271, №3. С. 30–33.

[43] Epstein D., Cannon J., Holt D., Levy S., Patterson M., Thurston W. Word Processing in Groups. JB Publ., 1992.

[44] Grigorchuk R., Nagnibeda T. Complete growth functions of hyperbolic groups // Invent. Math. 1997. V. 130. P. 159–188.

[45] de la Harpe P. Topics in geometric groups theory. Univ. Chicago Press. To appear.

[46] de la Harpe P., Grigorchuk R. On problem related to growth, entropy and spectrum in group theory // JDCT. 1997. V. 3 (1). P. 51–89.

[47] Ревюз Д. Марковские цепи. М., 1996.

[48] Varopoulos N., Saloff-Coste L., Coulhon T. Analysis on Lie groups. Cambr. Univ. Press, 1992.

[49] Varopoulos N. Long range estimates for Markov chains // Bull. Sci. Math. 1985. V. 109. P. 225–252.

[50] Спитцер Ф. Принципы случайных блужданий. М.: Мир, 1968.

[51] Дюбина А. Г. Пример скорости ухода на бесконечность случайного блуждания на группах. // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. no 5, С. 159-160.

[52] Rozenblatt M. Markov Processes, Structure and Asymptotic behavior. NY, 1971.

[53] Вершик А. М. Сверхгрубость гиперболических автоморфизмов и унитарные дилатации марковских операторов // Вестн. ЛГУ, сер. матем. 1987. №3. С. 28–33.

[54] Динабург Е. И. Соотношения между топологической энтропией и метрической энтропией // ДАН СССР. 1970. Т. 190, №1. С. 19–22.

[55] Вершик А. М. Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп // ДАН СССР. 1974. Т. 218, №4. С. 749–752.

[56] Кайманович В. А. Броуновское движение и гармонические функции на накрывающих многообразиях. Энтропийный подход // ДАН СССР. 1986. Т. 288, №5. С. 1045–1049.

[57] Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов, 2-е изд. М.: Фазис, 1998.

[58] Адян С. И. Об алгоритмическом распознавании свойств групп // ДАН СССР. 1957. Т. 117, №4. С. 9–12.

[59] Ghys E., de la Harpe P. Infinite groups as geometric objects (after Gromov). NY, 1991.

[60] Zimmer R. Ergodic Theory and Semisimple Groups. Birkhauser, 1984.

[61] Connes A., Feldman J., Weiss B. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation // Erg. Th. Dyn. Syst. 1981. V. 1. P. 431–450.

[62] Дынкин Е. Б. Пространство выходов марковских процессов // УМН. 1969. Т. 24, №3. С. 89–152.

[63] Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin, 1985.

[64] Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22, №5(137). С. 4–56.

[65] Вершик А. М. Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения // ДАН СССР. 1970. Т. 193. С. 748–751.

[66] Bowen R. Topological entropy for noncompact sets // Trans. AMS. 1973. V. 184. P. 125–136.

[67] Jewett R. The prevalence of uniquely ergodic systems // J. Math. Mech. 1970. V. 19. P. 717–729.

[68] Krieger W. On unique ergodicity. In: Proc. Sixth Berkeley Symp. 1. P. 327–346. 1970.

[69] Гуревич Б., Савченко С. В. Термодинамический формализм для символических цепей Маркова со счетным числом сотояний // УМН. 1998. Т. 53, №2(320). С. 3–106.

[70] Холл М. Теория групп. М., 1962.

[71] Magnus W. On a theorem of M. Hall // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 764–768.

[72] Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, №1. С. 149–176.

[73] Соколов В. Г. Аналог формулы Витта для свободных разрешимых групп // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, №3. С. 367–372.

[74] Петроградский. О некоторых типах промежуточного роста в алгебрах Ли // УМН. 1996. Т. 48, №5. С. 181–182.

[75] Lyons R., Pemantle R., Peres Y. Random walk on the lamplighter group // Ann. Prob. 1996. V. 24 (4). P. 1993–2006.

[76] Вершик А. М., Граничина О. А. Редукция неголономных вариационных задач к изопериметрическим и связности в главных расслоениях // Мат. зам. 1991. Т. 49, №5. С. 37–44.

[77] Okounkov A., Vershik A. New approach to representation theory of symmetric groups // Selecta Math. 1996. V. 2 (4). P. 581–605.

[78] Derrida B., Leibovitz J. Exact large deviation function in the assymetric exclusion process // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 5091.

[79] Bikbov R., Nechaev S. On the limiting power of the set of knots generated by $1+1$ and $2+1$ braids // J. Math. Phys. 1999. V. 40 (12). P. 6598–6608.

[80] Comtet A., Nechaev S. Random operator approach for word enumeration in braid groups // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 31. P. 5609–5630.

[81] Малышев В. А. Случайные грамматики // УМН. 1998. Т. 53, №2(320). С. 107–134.

[82] Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119, №5. С. 861–864.

[83] Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 759–765.

[84] Рохлин В. А. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1960. Т. 15, №4(94). С. 3–28.

[85] Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124, №4. С. 768–771.

[86] Sinai Ya. Probabilistic ideas in ergodic theory. In: Proc. Int. Congr. Math. Stockholm. 1962.

[87] Корнфельд И. П., Синай А. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1975.

[88] Динамические системы-2 (ред. Синай А. Г.). Итоги науки. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. ВИНИТИ. М., 1985.

[89] Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1970.

[90] Мартин Н., Ингланд Дж. Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1989.

[91] Smorodinsky M. Ergodic theory, entropy // SLNM. 1976. V. 214.

[92] Ornstein D., Weiss B. Entropy theory and isomorphism theorems for action of amenable groups // J. Anal. Math. 1987. V. 48. P. 1–141.

[93] Вершик А. М. Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей // Функц. анал. и прил. 1971. Т. 5, №3. С. 16–18.

[94] Степин А. М. Об энтропийном инварианте убывающих последовательностей измеримых разбиений // Функц. анал. и прил. 1971. Т. 5, №2. С. 80–84.

[95] Канторович Л. В. О перевозке масс // ДАН СССР. 1942. Т. 37. С. 227–229.

[96] Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. О пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ. 1958. №2. С. 52–59.

[97] Dubins L., Feldman J., Smorodinsky M., Tsirel'son B. Decreasing sequences of σ-fields and measure change for Brownian motion // Ann. Prob. 1997. V. 25.

[98] Heicklen D., Hoffman C. (T, T^{-1}) is not standard // Erg. Th. Dyn. Syst. 1998. V. 18. P. 875–879.

[99] Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность, динамические системы. М., 1978.

[100] Kalikow S. (T, T^{-1})-transformation is not loosely Bernoulli // Ann. Math. 1982. V. 115. P. 393–409.

[101] Feldman J. New K-automotphism and a problem of Kakutani // Isr. Math. J. 1976. V. 24. P. 16–38.

[102] Каток А. Б. Монотонная эквивалентность в эргодической теории // Изв. АН СССР. 1977. Т. 41, №1. С. 104–157.

[103] Collins R. Relation among the squares of the generators of the braid groups // Invent.Math. 1994. V. 117. №3. P.525-529.

[104] Humphries S. On representations of Artin Groups and the Tits Conjecture // Journ of Algebra. 1994. V 169. P. 847-862.

[105] Kaimanovich V. The Poisson boundary of covering markov operators// Isr.J.Math. 1995. V.89, P.77-134.

[106] Kaimanovich V. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties// Preprint, May 1997.

[107] Kaimanovich V. Boundaries of invariant markov operators: the identitification problem// Proceedings of the Warwick Symposium 1993-4. eds. M.Pollicott ,K.Schmidt, Cambr. Univ. Press, 1996, P. 127-196.

[108] Ledrappier F. Some asymptotic properties of random walks on free groups.// to appear.