SPb. Math. Society Preprint 2000-08 08 Jun 2000

ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ В ОПЕРАТОРНЫХ ИДЕАЛАХ

О.И.Рейнов[†]

I. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

§1. Основные определения и обозначения

Все рассматриваемые нами пространства X, Y, $Z, \ldots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \ldots, x' \in X^*$, $y'' \in Y^{**}, \ldots$. Обычно мы считаем пространство X канонически вложенным в его второе сопряженное пространство X^{**}, но если возникнет необходимость, то это естественное изометрическое вложение мы будем обозначать символом $\pi_X, \pi_X : X \to X^{**}$.

Через $\mathrm{L}\,(X, Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой (вообще, в данной работе под термином "оператор" всегда будет пониматься линейный непрерывный оператор).

Мы используем стандартные обозначения из теории операторных идеалов — Π_p, QN_p, N_p, I_p — определения этих классов приводятся ниже (классический справочник по операторным идеалам — [12]; отметим, однако, что мы придерживаемся обозначений, отличающихся от принятых в [12]).

Пусть $p \in (0, \infty]$. Оператор T, действующий из X в Y, называется *абсолютно p-суммирующим,* если существуют такая постоянная $C > 0$, что для любого конечного набора и $\{x_n\}_{n=1}^M \subset X$ выполняется соотношение

$$(1.1)\qquad \left(\sum_{n=1}^{M} \|Tx_n\|^p\right)^{1/p} \le C \sup_{\|x,\|\le 1} \left(\sum_{n=1}^{M} |< x_n,\, x >|^p\right)^{1/p}$$

(в случае, когда $p = +\infty$, (1.1) переписывается так: $\|Tx\| \le C\,\|x\|$, $x \in X$, т.е. абсолютно ∞-суммирующие операторы — это просто все ограниченные линейные отображения). Наименьшая из констант $C > 0$, удовлетворяющая указанному условию (такая всегда существует, если оператор абсолютно p-суммирующий) обозначается через $\pi_p(T)$. Если оператор T не является абсолютно p-суммирующим, то удобно положить $\pi_p(T) = +\infty$.

[†] Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36) и ФЦП "Интеграция", рег. номер 326.53.

Множество $\Pi_p(X,Y)$ всех абсолютно p-суммирующих операторов из X в Y при $p>0$ является линейным пространством, а при $p\ge 1$ — банаховым пространством с нормой π_p. Более того, в последнем случае класс Π_p всех абсолютно p-суммирующих операторов является банаховым операторным идеалом (в смысле А.Пича [12]). Отметим, что для показателей $p,q\in(0,+\infty], p<q$, имеет место включение $\Pi_p\subset\Pi_q$, причем $\pi_q\le\pi_p$.

Для $p\in[1,\infty]$ оператор T, действующий из X в Y, называется *p-ядерным,* если его можно представить в следующем виде:

$$Tx=\sum_{k=1}^{\infty} <x,x'_k,>\ y_k \qquad \text{для } x\in X, \tag{1.2}$$

где последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$ таковы, что конечна величина

$$a:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x'_k\|^p\right)^{1/p}\sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|<y_k,y'>|^{p'}\right)^{1/p'}\ :\ y'\in Y^*,\ \|y'\|\le 1\right\} \tag{1.3}$$

(напомним, что через p' мы обозначаем сопряженный к p показатель; в случае, когда один из показателей p, p' бесконечен, правую часть соотношения (1.3) надо понимать надлежащим образом). Множество всех p-ядерных операторов из X в Y обозначается через $\mathrm{N}_p\,(X,Y)$, а точная нижняя грань $\inf a$, где инфимум берется по всем представлениям вида (1.2) оператора T, — через $\nu_p\,(T)$. Для любого $p\ge 1$ класс N_p всех p-ядерных операторов является банаховым операторным идеалом [12]; при фиксированных пространствах X,Y $\mathrm{N}_p\,(X,Y)$, — банахово пространство с нормой ν_p. Отметим, что для показателей $p,q\in[1,+\infty], p<q$, имеет место включение $\mathrm{N}_p\subset\mathrm{N}_q$ с соответствующим неравенством для норм.

Оператор $T:X\to Y$ является *квази-p-ядерным,* $T\in\mathrm{QN}_p$, если для некоторого изометрического вложения $i:Y\to L_\infty(\nu)$ суперпозиция iT принадлежит пространству $\mathrm{N}_p(X,L_\infty(\nu))$. Квазинорма (норма при $p\ge 1$) в $T\in\mathrm{QN}_p$ индуцируется из пространства $\Pi_p(X,Y)$. Пространство $T\in\mathrm{QN}_p(X,Y)$ всегда является замкнутым подпространством пространства $\Pi_p(X,Y)$.

Через $\mathrm{I}_p\,(X,Y)$, где $p\in[1,+\infty]$, обозначается банахово пространство всех *p-интегральных* (*в смысле А.Пича*) отображений из X в Y. Оператор $T\in\mathrm{I}_p\,(X,Y)$, если он допускает факторизацию вида

$$X\xrightarrow{\ A\ } C(K)\xrightarrow{\ j\ } L_p(K,\mu)\xrightarrow{\ B\ } Y, \tag{1.4}$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и $\|A\|$, $\|B\|$ — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}_p\,(X,Y)$ вводится следующим образом:

$$i_p(T)=\inf\ \|A\|\,\|B\|.$$

Если $T\in\mathrm{L}(X,Y)$ и $T\in\mathrm{I}_p(X,Y^{**})$ (мы отождествляем каноническим образом Y с подпространством в Y^{**}), то мы говорим, что оператор T является *p-интегральным по Гротендику.* Пространство всех p-интегральных по Гротендику операторов из X в Y (с индуцированной из $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$ нормой i_p^{Gr}) мы обозначаем через $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$.

Алгебраическое тензорное произведение $X \otimes Y$ банаховых пространств X, Y мы естественным образом рассматриваем как множество всех конечномерных операторов из X^* в Y (или из Y^* в X), *weak*-to-weak* непрерывных; в частности, $X^* \otimes Y$ — все конечномерные операторы из X в Y.

На тензорном произведении $X \otimes Y$ мы будем рассматривать ряд тензорных норм, некоторые из которых индуцируются соответствующими пространствами операторов, а некоторые — наоборот сами индуцируют операторные нормы (все эти нормы, с другими обозначениями, впервые, видимо, рассматривались в работе [22]; там же введены и некоторые аппроксимационные условия "порядка p", налагаемые на банаховы пространства и связанные, в частности с аппроксимацией абсолютно p-суммирующих операторов конечномерными; подобного рода условия появятся и у нас ниже).

p-проективная тензорная норма $||\cdot||_p$ для $p \in [1, +\infty]$ определяется на произведении $X \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X \otimes Y$, то

$$||z||_p := \inf \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \le 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} |< y_k, y' >|^{p'} \right)^{1/p'} \right\} \tag{1.5}$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes y_k$ (формально, формула (1.5) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$; в случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ в этом определении нужно произвести соответствующие тривиальные изменения, на которых мы не останавливаемся).

Алгебраическое тензорное произведение пространств X и Y, снабженное нормой $||\cdot||_p$, будет обозначаться через $X \otimes_p Y$, а его пополнение — через $X \widehat{\otimes}_p Y$ (в случае $p = 1$ мы получаем проективное тензорное произведение, введенное и детально изученное А.Гротендиком [5], и играющее огромную роль, в частности, в теории ядерных пространств и теории аппроксимации линейных операторов).

Нетрудно заметить, что с ростом показателя p тензорные произведения $X \widehat{\otimes}_p Y$, вообще говоря, "увеличиваются" (кавычки здесь поставлены преднамеренно; проясняет ситуацию следующее замечание).

Замечание 1.1. Каноническое отображение $X \otimes_p Y \to \mathrm{L}(X^*, Y)$ естественным образом продолжается по непрерывности до оператора из $X \widehat{\otimes}_p Y$ в $\mathrm{L}(X^*, Y)$ (который мы также будем называть каноническим). При этом продолжении, как известно (см., например, [12], стр.143 и далее, и [15, 16, 19]), может произойти "склеивание" различных тензорных элементов, превращающее их в один и тот же оператор. Такая факторизация никогда не происходит лишь в случае $p = 2$. Поэтому, например, естественное отображение $X \widehat{\otimes}_1 Y \to X \widehat{\otimes}_2 Y$ вполне может быть "факторотображением" с нетривиальным ядром; так что не совсем корректно утверждать, что пространство $X \widehat{\otimes}_2 Y$ больше, чем $X \widehat{\otimes}_1 Y$.

Каждый тензорный элемент $z \in X \widehat{\otimes}_p Y$ естественным образом порождает p-ядерный оператор из X^* в Y, который мы будем обозначать через $\tilde{z}$ (в случае, когда пространство X сопряжено, т.е. когда $X = W^*$ для некоторого банахова пространства W, оператор $\tilde{z}$ будет рассматриваться нами, как оператор из W в Y, что, конечно же, не приведет к недоразумению).

Наконец, через $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ мы обозначаем замыкание множества конечномерных операторов (или подпространства $Y^*\otimes X$) в пространстве $\Pi_{p'}(Y,X)$. Отметим, что сопряженное к $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ пространство совпадает с $\mathrm{I}_p(X,Y^{**})$, причем двойственность определяется стандартным образом при помощи следа суперпозиции соответствующих операторов.

Другие факты из теории операторных идеалов, используемые нами без всяких ссылок, можно найти в цитированной выше литературе.

§2. Аппроксимационные свойства

Пусть $C\geq 1$, $p\in[1,+\infty]$. Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* AP_p *аппроксимации порядка* p (коротко — $Y\in\mathrm{AP}_p$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y\to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^*\widehat{\otimes}_p Y=\mathrm{N}_p(X,Y)$). Пространство Y *обладает свойством* C-MAP_p, $Y\in C$-MAP_p, если для любого X естественное отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y\to \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C. Наконец, Y *имеет свойство* BAP_p (соответственно, *свойство* MAP_p), если оно обладает свойством C-MAP_p для некоторого числа $C\geq 1$ (соответственно, свойством 1-MAP_p).

Если $p=1$, то мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, C-MAP, BAP, MAP.

В дальнейшем без дополнительных ссылок мы будем использовать следующие хорошо известные (и простые) факты: (1) Каждое банахово пространство обладает свойством MAP_2; (2) для всякого $p\in[1,+\infty]$ $\mathrm{AP}\Rightarrow\mathrm{AP}_p$; (3) для всякого $p\in[1,+\infty]$ $\mathrm{MAP}\Rightarrow\mathrm{MAP}_p$; (4) если $X^*\in AP$, то $X\in AP$.

Совершенно аналогично определяются аппроксимационные свойства AP_s для $s\in(0,1]$ (подробности можно найти в [19]).

Соберем вместе некоторые известные факты о соотношениях между свойствами AP_s.

Предложение 2.1. *Пусть $1/s-|1/p-1/q|\geqslant 1$ и X — банахово пространство типа p и котипа q. Тогда $X\in\mathrm{AP}_s$. В частности, если $X\subset L^p$, то $X\in\mathrm{AP}_s$, где $1/s=1+|1/2-1/p|$.*

Теорема 2.2. 1) $\mathrm{AP}_1\implies\mathrm{AP}_s\ \forall s>0$;
2) $\mathrm{AP}_r\implies\mathrm{AP}_s$, *если* $0<s\leqslant r\leqslant 1$;
3) *если $s,r\in[2/3,1)$ и $s\neq r$, то свойства AP_s и AP_r не равносильны;*
4) *если $p>2$, то свойства AP_1 и AP_p не равносильны.*

Относительно утверждения 4) см. замечание после основного определения в работе [15].

Теорема 2.3. *Если $p>2$ и $E\in\mathrm{AP}_p$, то $E\in\mathrm{AP}_q$ для любого $q\in[2,p]$. Более того, если для некоторого $q>2$ $E\notin\mathrm{AP}_q$, то существует такое пространство F и оператор $U\in\mathrm{QN}_1(E,F)$, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется элемент $z\in F^*\widehat{\otimes}_{q+\varepsilon}E$ такой, что* $\mathrm{trace}\ z\circ U=1$, $\widetilde{z}=0$.

Теорема 2.4. *Если* $s \leqslant 1$, $1/p + 1/s = 2$ *и* $s \leqslant q \leqslant p$, *то* $\mathrm{AP}_q \implies \mathrm{AP}_s$

Теорема 2.5. *Если* $p \in [1, +\infty]$ *и* X — *фактор-пространство пространства* l^p, *то* $X \in \mathrm{AP}_1$ *тогда и только тогда, когда* $X \in \mathrm{AP}_p$.

Следствие 2.6. *Если* $q \geqslant p > 2$ *и* X — *фактор-пространство пространства* l^p, *то* $X \in \mathrm{AP}_1$ *тогда и только тогда, когда* $X \in \mathrm{AP}_q$ *(эквивалентно,* $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall r \geqslant p$; $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall r \geqslant 2$; $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall r > 0$.

§3. Условно слабо компактные операторы

В этом параграфе изучаются некоторые классы линейных непрерывных отображений в банаховых и локально выпуклых пространствах. Приводится характеризация операторов $T : X \to Y$, переводящих ограниченные множества банахова пространства X в условно слабо компактные множества банахова пространства Y, а также рассматривается частный случай, когда $X = C(K)$.

Определение 3.1. Оператор $T : X \to Y$ называется условно слабо компактным, если из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\{Tx_{n_k}\}$ — последовательность Коши в пространстве $(Y, \sigma(Y, Y^*))$.

Везде ниже через X, Y, как обычно, мы обозначаем произвольные банаховы пространства, K (соответственно S) — отделимое компактное (соответственно, локально компактное) топологическое пространство, Q — канторово множество. Если X_1, X_2 — банаховы пространства, то через $\mathrm{L}(X_1, X_2)$ обозначается пространство всех линейных непрерывных отображений из X_1 в X_2. Говоря о подпространствах банаховых пространств мы всегда имеем в виду замкнутые векторные подпространства.

Теорема 3.2. *Пусть* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Следующие условия равносильны:*

1) T *не является условно слабо компактным оператором;*

2) *существует такое изоморфное* l^1 *подпространство* $Z \subset X$, *что* $T|_Z$ — *изоморфизм;*

3) *существует такое изоморфное* $C^*[0,1]$ *подпространство* $W \subset Y^*$, *что* $T^*|_W$ —*изоморфизм;*

4) *существует такое изоморфное* $L^1[0,1]$ *подпространство* $W \subset Y^*$, *что* $T^*|_W$ —*изоморфизм.*

Если Y — *слабо компактно порожденное пространство, условия* $1) - 4)$ *эквивалентны условию*

5) *существует такой оператор* $U \in \mathrm{L}(Y, C[0,1])$, *что* UT *есть отображение "на".*

Следствие 3.3. *Если существует не условно слабо компактный оператор из* X *в слабо компактно порожденное банахово пространство, то найдется фактор-пространство пространства* X, *изоморфное пространству* $C[0,1]$.

Напомним, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ называется оператором Радона–Никодима, $T \in \mathrm{RN}$, если T переводит векторные меры m ограниченной вариации в меры, представимые интегралом Бохнера по $\mathrm{Var}(m)$.

Следствие 3.4. *Пусть* $T \in L(X, Y)$. *Если* T^* *есть оператор типа* RN, *то* T — *условно слабо компактное отображение. В частности, если* Y — *слабо секвенциально полное пространство, то* T^* *является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда оператор* T *условно слабо компактен.*

Следующее утверждение является обобщением хорошо известного факта о полной непрерывности произведения двух слабо компактных отображений $Z \to C(K) \to Y$, а также усилением [9, теорема 4.12].

Предложение 3.5. *Пусть $U \in \mathrm{L}(X, C(K))$, $T \in \mathrm{L}(C(K), Y)$. Если U^* есть оператор типа* RN, *а T – слабо компактный оператор, то существует последовательность конечномерных отображений $A_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\|A_n - TU\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Теорема 3.6. 1) *Пусть $T \in \mathrm{L}(C(K), X)$. Следующие условия эквивалентны:*

а) *оператор T условно слабо компактен;*

б) *T^* есть оператор типа* RN;

в) *не существует изометричного пространству $C(Q)$ подпространства $Z \subset C(K)$, для которого $T|_Z$ есть изоморфное вложение Z в X.*

2) *Пусть $U \in \mathrm{L}(C_0(S), X)$. Если существует такая конечная положительная мера Радона μ на S, что $U^*(X^*) \subset L^1(\mu)$, то U^* есть оператор типа* RN. *Если S — метризуемый компакт, то верно и обратное.*

§4. Функции I класса Бэра

Здесь мы сформулируем ряд дополнительных результатов об операторах Радона–Никодима, связанных со свойствами векторнозначных функций I класса Бэра и некоторых их обобщений. Эти факты, представляя самостоятельный интерес, существенно используются при доказательстве некоторых утверждений из следующего раздела, а также и в ряде других (не входящих в данную статью) приложений. Мы говорим, что $f : M \to R$ (в топологических пространствах) является квазибэровской, если для всякого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ имеет хотя бы одну точку непрерывности. Например, справедлива теорема:

Теорема 4.1. *Всякая квазибэровская функция со значениями в метрическом пространстве универсально измерима.*

Следствие 4.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если не существует такого подпространства Z в X, что Z изоморфно l^1 и сужение $T|_Z$ — изоморфизм, то для всякого топологического пространства S с мерой Радона μ и для любой Y^*-значной μ-измеримой функции $f : S \to (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ функция $T^*f : S \to X^*$ является X^{**}-скалярно μ-измеримой. В частности, отображение T^* универсально X^{**}-скалярно измеримо как отображение из $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ в X^**

Замечание 4.3. Представляет интерес частный случай, когда мы имеем тождественное отображение в фиксированно банаховом пространстве (Haydon R.).

Теорема 4.4. *Для линейного непрерывного отображения T из банахова пространства X в банахово пространство Y эквивалентны утверждения:*

1) *T^* есть оператор Радона–Никодима, т.е. для любого пространства (Ω, Σ, μ) с конечной положительной мерой и для любой μ-абсолютно непрерывной Y^*-значной меры $m : \Omega \to Y^*$ ограниченной вариацииX^*-значная мера T^*m представима интегралом Бохнера по мере μ;*

2) *для всякого *-слабого компакта $K \subset Y^*$ отображение $T^*|_K : (K, \sigma(Y^*, Y)) \to X^*$ имеет на K хотя бы одну точку непрерывности.*

Теорема 4.5. *Для оператора T из X в Y эквивалентны утверждения:*

1) *множество $T(X)$ сепарабельно и T^* — оператор Радона–Никодима;*

2) *T^* является векторнозначной функцией I класса Бэра из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X^*, где $D(T^*)$ — единичный шар в Y^* (т.е. существует последовательность непрерывных отображений из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X, сходящаяся поточечно к T^*);*

3) *множество $T(X)$ сепарабельно и для всякого *-слабого компакта $K \subset Y^*$ отображение $T^*|_K : (K, \sigma(Y^*, Y)) \to X^*$ непрерывно везде на K за исключением быть может множества точек I категории в $(K, \sigma(Y^*, Y))$.*

Приведем только одно из разнообразных следствий.

Следствие 4.6. *Если K — метризуемое слабо компактное множество в банаховом пространстве X, то тождественное отображение $(K, \sigma(X, X^*)) \to (K, \|\cdot\|)$ есть функция I класса Бэра.*

II. АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§5. Вокруг контрпримера А.Гротендику о слабо компактных операторах

Начнем с такого обобщения теоремы Гротендика о произведении аппроксимируемых операторов со слабо компактными:

Теорема 5.1. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, $U \in \mathrm{L}(Y, Z)$. Предположим, что существует непрерывный проектор $P : X^{**} \to X$ и выполнено одно из следующих условий:*

1) *U равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями, $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$;*

2) *T равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями, $U \in \mathrm{RN}(Z^*, Y^*)$.*

Тогда UT есть равномерный на каждом компакте предел конечномерных отображений, норма которых не превосходит $\|P\| \cdot \|UT\|$.

В мемуаре [5], Chap.2, p.135,“Question non Résolues”, А.Гротендик сформулировал

Предположение. *Пусть E и F — два банаховых пространства, $U : E \to F$ — слабо компактный оператор. Если U может быть аппроксимирован, равномерно на каждом компактном подмножестве в E, конечномерными операторами, то U можно аппроксимировать в топологии компактной сходимости конечномерными операторами, нормы которых $\leqslant 1$.*

Отметим, что если $E = F$ и $U = \mathrm{id}_E$, то это предположение верно (см. [5], Chap.1, p. 181). Этот результат и формулировка теоремы 15 (Chap.1) позволяли считать, что сформулированное предположение справедливо также и в общем случае (см. [5], Chap.2, p.135).

Теорема 5.2. *Существуют банаховы пространства E и F и компактный оператор $U : E \to F$ такие, что*

(1) *E сепарабельно, также как и все его сопряженные;*

(2) *E удовлетворяет условию аппроксимации;*

(3) *если $d < \infty$, то нельзя аппроксимировать U, равномерно на каждом компакте из E, операторами конечного ранга с нормами $\leqslant d$.*

Таким образом, последняя теорема показывает, что сформулированное предположение не верно, так же как и неверны некоторые части теоремы 15 и ее следствий 1 и 2 в [5], Chap.1.

Замечание 5.3. Пространство E, построенное при доказательстве теоремы, обладает свойством Радона–Никодима (так как E^{**} сепарабельно), удовлетворяет условию аппроксимации, но не удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации. Впервые подобного рода пространство было построено в работе [4].

Следующая теорема доказывается с помощью теоремы о векторнозначных функциях I класса Бэра и теоремы 4.4 предыдущего раздела.

Теорема 5.4. *Пусть X, Y, W — банаховы пространства, T и Y —линейные непрерывные отображения соответственно из X в Y и из X^* в W. Предположим, что множество $T(X)$ сепарабельно в Y, а оператор U приближается равномерно на каждом компакте пространства X^* конечномерными операторами из X^* в W. Если T^* является оператором Радона–Никодима, то существует последовательность $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных отображений из Y^* в W, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\|U_n\| \leqslant \|UT^*\|$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$;*

2) *все отображения U_n непрерывны из $(Y^*, \sigma(Y^*, Y)))$ в W;*

3) *последовательность $\{U_n\}$ сходится поточечно к отображению UT^*, т.е. $\|U_n f - UT^* f\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента $f \in Y^*$.*

Отметим некоторые следствия

Следствие 5.5. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $V \in \mathrm{L}(Z, X)$ —линейные непрерывные отображения. Предположим, что множество $T(X)$ сепарабельно в Y, а T^* есть оператор Радона–Никодима. Тогда если V^* равномерно на каждом компакте пространства X^* приближается конечномерными операторами из X^* в Z^*, то существует последовательность конечномерных операторов из Z в Y, нормы которых не превосходят $\|TV\|$, и сопряженные к которым поточечно сходятся к $(TV)^*$.*

Следствие 5.6. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ — такой оператор, что множество $T(X)$ сепарабельно. Предположим, что пространство X^* удовлетворяет условию аппроксимации. Тогда T^* принадлежит классу RN в том и только том случае, когда существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных отображений из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и операторы U_n^* сходятся поточечно к T^*.*

Следствие 5.7. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и пространство X^* удовлетворяет условию аппроксимации. Если существует последовательность $\{\varphi_n\}$ непрерывных отображений из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X^*, сходящаяся к T^* поточечно, то существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных операторов из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ для всех n и $U_n^* \to T^*$ поточечно.*

Следствие 5.8. *Для банахова пространства X эквивалентны утверждения:*

1) *X^* — сепарабельное пространство, удовлетворяющее условию аппроксимации;*

2) *существует такая последовательность конечномерных операторов $\{U_n\}$ из X в Y, что $\|Un\| \leqslant 1$ и $\|U_n^* x' - x'\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x' \in X^*$.*

Заметим, что последнее следствие вытекает также из результатов работы А.Гротендика [5] и теоремы Банаха–Штейнгауза.

Следствие 5.9. *Если T — слабо компактный оператор из X в Y с сепарабельным образом и если пространство Y удовлетворяет условию аппроксимации, то существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных операторов из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ и $U_n \to T$ поточечно.*

Следствие 5.10. *Пусть K — метризуемый *-слабый компакт в сопряженном банаховом пространстве X, удовлетворяющем условию аппроксимации. Если K является* RN*-множеством, то существует такая последовательность V_n конечномерных операторов в X, что на K отображения V^* сходятся поточечно к тождественному отображению $K \to X^*$ и для всякого n имеет место включение $V_n^*(K) \subset D_a$, где D_a — шар в X^* с центром в нуле и радиуса $a = \max_{k \in K} \|k\|$.*

Замечание 5.11. См. также предложение 8.2 на стр. 14.

§6. Обобщения предыдущих фактов на случай аппроксимации порядка p (свойства AP_p)

Утверждения, приводимые ниже, используются при доказательствах многих утверждений, содержащихся в данном обзоре. В частности, они существенно используются при рассмотрении вопросов о непрерывности p-ядерных и других норм по параметру p (см. соответствующий раздел IV почти в самом конце работы).

Следующее утверждение было анонсировано в [16, теорема 4.2]; равносильное ему предложение было установлено в работе [1, леммы 7-8]. Можно дать и другое доказательство (отличное от доказательств в указанных работах), основанное на определениях аппроксимационных свойств порядка p, приведенных выше в §2.

Предложение 6.1. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P: Y^{**} \to Y$. Тогда для всякого $p \in (1, +\infty)$ из того,что Y обладает свойством AP_p вытекает условие $Y \in \|P\|\text{-}\mathrm{MAP}_p$. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_p$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$ эквивалентны между собой.*

Замечание 6.2. Насколько нам известно, вопрос о том, справедливо ли утверждение предложения 6.1 в случае $p = 1$, по-прежнему открыт (см. также замечание в самом конце работы [16]). Основная теорема в этом случае, по-существу, принадлежит А.Гротендику (см. [5], [3, стр. 246-247]): если сопряженное пространство обладает свойством Радона-Никодима и удовлетворяет условию аппроксимации, то оно удовлетворяет и условию метрической аппроксимации (некоторое ее обобщение можно найти, например, в работе [14]). Неясно также, что будет в случае $p = +\infty$. Мы можем здесь получить лишь такой аналог упомянутой теоремы А.Гротендика:

Предложение 6.3. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P: Y^{**} \to Y$. Тогда если Y^* обладает свойством Радона-Никодима и Y удовлетворяет условию AP_∞ , то $Y \in \|P\|\text{-}\mathrm{MAP}_\infty$. В частности, если пространство Y сопряжено и $Y^* \in \mathrm{RN}$, то условия $Y \in \mathrm{AP}_\infty$ и $Y \in \mathrm{MAP}_\infty$ эквивалентны между собой.*

Замечание 6.4. Для любого $p \in [1, +\infty], p \neq 2$, существуют банаховы пространства со свойством AP_p, не обладающие свойством $C-\mathrm{MAP}_p$ ни при каком $C \geq 1$ [4],[13] (подробности можно найти ниже).

Следующие два утверждения тесно связаны с предыдущими и, в некотором смысле, "открывают" вопрос о регулярности классических операторных идеалов.

Предложение 6.5. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что либо X^*, либо Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика, и пусть $p \in [1, +\infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если $T \in \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательствами теорем 2 из [10] и [5, глава 1, стр. 36]. Несколько более общий факт будет сформулирован ниже.

Замечание 6.6. На самом деле, аппроксимационные условия, накладываемые в предложении 6.5 на пространства X^* или Y^{***}, можно ослабить. Чтобы сформулировать это более сильное утверждение, нам пришлось бы ввести еще несколько определений аппроксимационных свойств банаховых пространств, что, в силу ограниченности объема статьи, мы в данной работе делать не будем.

Следствие 6.7. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, и пусть X, Y — такие банаховы пространства, что X^* обладает свойством Радона –Никодима и одно из пространств X^* или Y^{***} удовлетворяет условию аппроксимации Гротендика. Тогда $\mathrm{I}_p(X, Y) = \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y) = \mathrm{N}_p(X, Y)$. Более общо, если $U : Z \to X$ такой оператор из некоторого банахова пространства Z в X, что U^* является оператором Радона–Никодима* (см. [14]), *и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, то для любых $p \in [1, +\infty)$ и $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ имеет место включение $TU \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.*

Замечание 6.8. Аппроксимационные условия, накладываемые на рассматриваемые в последних двух утверждениях пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (см. ниже).

§7. Аппроксимация операторами из некоторых замкнутых идеалов

Пусть $a \in [1, +\infty]$. Напомним, что банахово пространство E имеет свойство a-метрической аппроксимации ($E \in a$-MAP), если тождественное отображение $\mathrm{id} : E \to E$ принадлежит замыканию в топологии компактной сходимости шара радиуса a нормированного пространства $E^* \otimes E$ всех конечномерных операторов из E в E (с обычной операторной нормой); если ($E \in a$-MAP) для $a = +\infty$, то говорят, что E обладает свойством аппроксимации; если ($E \in a$-MAP) для некоторого $a < +\infty$, то E обладает свойством ограниченной аппроксимации.

Приведем естественный и конкретный вопрос, инспирированный примером (точнее, контрпримером) Фигеля–Джонсона. Пусть банахово пространство E обладает свойством аппроксимации. Вообще говоря, нельзя ожидать, что id приближается равномерно на компактах из E конечномерными операторами с ограниченными нормами. Но, быть может, id можно аппроксимировать в топологии компактной сходимости слабо компактными операторами, нормы которых равномерно ограничены? Или даже компактными операторами? Понятно, что такого рода вопросы могут быть сформулированы в общем виде, так что мы приходим к вполне конкретной задаче, которая и имелась в виду в заглавии работы [18].

Вот другая сторона этой задачи. Свою конструкцию Фигель и Джонсон применили в [4] для построения неядерного оператора с ядерным сопряженным. Иными словами, они привели пример линейного непрерывного функционала на нормированном пространстве $E^* \otimes E$, который порождается неядерным оператором $T : E \to E$ (пространство E^* в [4] сепарабельно, так что оператор T^* обязательно будет ядерным). В связи с этим возникает, например, такой естественный вопрос: существует ли неядерный оператор $T : E \to E$, порождающий линейный непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных (или хотя бы компактных) операторов в E. Понятно, что это — вопрос типа "насколько хорошим может быть неядерный оператор?".

Основная цель сейчас — дать по возможности достаточно полные ответы на сформулированные вопросы. В частности, мы сформулируем утверждения из [18], показывающие, что существует банахово пространство со свойством аппроксимации, для которого id не приближается в топологии компактной сходимости слабо компактными операторами с равномерно ограниченными нормами, а также что существует неядерный оператор, порождающий линейный непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных отображений (точные формулировки см. ниже).

Следует отметить, что использованный в [18] метод доказательств отличается от метода работы [4] — лишь при перенормировке банахова пространства применяется формула для выражения новой нормы через старую, аналогичную формуле в [4].

Пусть $\mathrm{I}(X,Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X,Y)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Определение 7.1. Пространство Y обладает свойством λ-MAP(I) (свойством λ-метрической аппроксимации относительно I), если для всякого компакта $K \subset Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $R \in \mathrm{I}(Y,Y)$ такой, что $\|R\| \leqslant \lambda$ и $\sup_K \|Ry - y\| < \varepsilon$. Мы условимся писать $Y \in \lambda$-MAP(I), если Y обладает свойством λ-MAP(I). Если $\lambda < +\infty$ и $Y \in \lambda$-MAP(I), то Y обладает свойством BAP(I). Если $Y \in +\infty$-MAP(I), то Y обладает свойством AP(I).

Рассмотрим совсем кратко некоторые частные случаи.

а) $\mathrm{I}(Y,Y) = Y^* \otimes Y$. Свойство λ-MAP(I) есть не что иное, как свойство λ-метрической аппроксимации Гротендика. Неравносильность свойств BAP и AP установлена Фигелем и Джонсоном в [4].

б) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{K}(Y,Y)$ — множество всех компактных операторов. Свойство AP(K) — это свойство компактной аппроксимации CAP (см. [23]). Есть примеры подпространств в $l^p, p \neq 2$, не обладающих свойством CAP [23]. Вопрос об эквивалентности свойств BAP(K) и AP(K) был открыт (более того, неизвестно было, влечет ли свойство аппроксимации Гротендика свойство BAP(I), где I — какой–либо замкнутый идеал операторов, отличный от идеала всех аппроксимируемых (см. [12]) и идеала всех ограниченных операторов).

в) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{WK}(Y,Y)$ — множество всех слабо компактных операторов. Поскольку в l^1 есть подпространство без свойства CAP и l^1 обладает свойством Шура, то существует банахово пространство, не обладающее свойством AP(WK). Этот факт будет использован в дальнейшем. Ясно, что всякое рефлексивное пространство обладает свойством 1-MAP(WK), так что BAP(WK) $\not\Longleftarrow$ CAP (см. б)).

г) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{L}(Y,Y)$. Всякое банахово пространство обладает свойством 1-MAP(L), и этот тривиальный случай мы исключим из дальнейшего рассмотрения.

Удобно переформулировать определение 7.1 в несколько других терминах (впрочем, это представляет и самостоятельный интерес). Это делается в нижеследующих утверждениях. Далее в этом параграфе Y — фиксированное банахово пространство, $\mathrm{I}(Y,Y)$ — фиксированное линейное подмножество в $\mathrm{L}(Y,Y)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Лемма 7.2. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \lambda$-MAP(I);

2) *существуют* $\delta > 0, \varepsilon > 0$ *и конечномерное подпространство* E *в* Y *такие, что*

$$\{\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y); \|\Phi e - e\| \leqslant \varepsilon \|e\| \ \forall\, e \in E\} \implies \{\|\Phi\| \geqslant \lambda + \delta\}.$$

Следствие 7.3. $Y \notin \lambda$-MAP(I) $\iff$ $\exists\,\delta > 0 : Y \notin (\lambda + \delta)$-MAP(I). *Таким образом,* $\{\lambda \in [1, +\infty) : Y \notin \lambda\text{-MAP(I)}\} = [\lambda_Y, +\infty)$, *где* $\lambda \leqslant +\infty$.

По определению $Y \in \lambda$-MAP(I) тогда и только тогда, когда id_Y принадлежит замыканию шара радиуса λ из $\mathrm{I}(Y,Y)$ в $\mathrm{L}(Y,Y)$ в топологии компактной сходимости. Последнее равносильно тому (см. [5], стр. 114), что id_Y лежит в замыкании этого шара в $\mathrm{L}(Y,Y)$ в слабой топологии $\sigma\left(\mathrm{L}(Y,Y), Y^*\widehat{\otimes}Y\right)$. Отсюда вытекает

Следствие 7.4. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \lambda$-MAP(I);

2) $\exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :\ \mathrm{trace}\ z = 1,\ |\mathrm{trace}\ z \circ \Phi| < \lambda^{-1}\|\Phi\|\ \forall\,\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$;

3) $\exists\,\varepsilon > 0,\ \exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :\ \mathrm{trace}\ z = 1,\ |\mathrm{trace}\ z \circ \Phi| \leqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon)\,\|\Phi\|\ \forall\,\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$.

Следствие 7.5. *Пусть* $j : Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{I}(Y,Y)^*$ — *естественное отображение (пространство* $\mathrm{I}(Y,Y)$, *снабжено обычной операторной нормой). Если* I — *операторный идеал, то пространство* Y *не обладает свойством* λ-$\mathrm{MAP(I)}$ *тогда и только тогда, когда* $\|j^{-1}\| > \lambda$ *(эквивалентно,* $\|j^{-1}\| > \lambda+\varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$*). Таким образом,* $Y \in \lambda$-$\mathrm{MAP(I)} \iff \lambda^{-1}\|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y} \leqslant \|j(z)\|_{\mathrm{I}(Y,Y)^*} \leqslant \|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y}$ $\forall\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y$ *(т.е.* j *является* λ*-изометрическим вложением или, что здесь равносильно, является* $\lambda+\varepsilon$*-изометрией для каждого* $\varepsilon > 0$*).*

В случае $\lambda = +\infty$ имеет место

Лемма 7.6. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \mathrm{AP(I)}$;

2) $\exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :\ \mathrm{trace}\ z = 1,\ \mathrm{trace}\ z\circ\Phi = 0\ \forall\,\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$;

3) *естественное отображение* $j : Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{I}(Y,Y)^*$ *не взаимно однозначно.*

Пусть Y — банахово пространство, I —операторный идеал. Через $\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$ мы обозначаем дуальный к I идеал ($T \in \mathrm{I}^{\mathrm{dual}} \iff T^* \in \mathrm{I}$). Нам будет удобно также обозначать через $\mathrm{I}_*(Y^*,Y^*)$ линейное подпространство в $\mathrm{L}(Y^*,Y^*)$, состоящее из операторов, сопряженных к операторам из $\mathrm{I}(Y,Y)$,

$$\mathrm{I}_*(Y^*,Y^*) = \{U \in \mathrm{L}(Y^*,Y^*) :\ \exists T \in \mathrm{I}(Y,Y),\ U = T^*\}.$$

Для $A \geqslant 0$ конечномерного подпространства L в Y^* определим нормы $|||\cdot|||^1_{A,L}$ и $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$ в Y^*, эквивалентные исходной: если $y' \in Y^*$, то

$$|||y'|||^1_{A,L} = \|y'\| + Ad(y',L),$$
$$|||y'|||^\infty_{A,L} = \max\{\|y'\|; Ad(y',L)\},$$

где $d(y',L) = \inf\{\|y'-l\| :\ l \in L\}$. Эти нормы дуальны к некоторым нормам на Y, которые мы будем обозначать теми же символами. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — совокупности всех норм (на Y) $|||\cdot|||^1_{A,L}$ и $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$ соответственно.

Для банахова пространства X нам удобно будет писать $X \in (A_{\mathrm{I}})$, если

a$_1$) $X^* \in \mathrm{BAP(I)}$, либо

a$_2$) единичный шар пространства $\mathrm{I}(X^*,X^*)$ плотен в топологии поточечной сходимости в множестве операторов

$$\{U\Phi :\ \Phi \in \mathrm{I}(X^*,X^*),\ U \in \mathrm{L}(X^*,X^{***}),\ \|U\Phi\| \leqslant 1\}.$$

Теорема 7.7. *Если* $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ *и для любой нормы* $\alpha \in \mathcal{A}_1$ $(Y,\alpha) \in 1$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, *то* $Y^* \in 1$-$\mathrm{MAP(I)}$.

Теорема 7.8. 1) *Если* $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ *и для любой нормы* $\alpha \in \mathcal{A}_1$ $(Y,\alpha) \in \lambda$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, *где* $\lambda < +\infty$, *то* $Y^* \in 2\lambda(4\lambda-3)$-$\mathrm{MAP}(I)$.

2) *Если* $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ *и для любой нормы* $\alpha \in \mathcal{A}_\infty$ $(Y,\alpha) \in \lambda$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, *где* $\lambda < +\infty$, *то* $Y^* \in 8\lambda^2$-$\mathrm{MAP}(I)$.

Теорема 7.9. *Для каждого из перечисленных ниже идеалов операторов* I *существует банахово пространство* Z *со свойством аппроксимации (Гротендика), не обладающее свойством* $\mathrm{BAP(I)}$.

1) *идеал компактных операторов;*

2) *идеал слабо компактных операторов;*

3) *идеал строго сингулярных операторов;*

4) *идеал условно слабо компактных операторов;*

5) *идеал* $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$;

6) *идеал вполне непрерывных операторов.*

Теорема 7.10. *Для каждого из идеалов I, перечисленных в теореме 7.9, существуют банахово пространство Z и оператор $T \in \mathrm{L}(Z,Z)$ со следующими свойствами:*

а) $T = \sum z_n' \otimes z_n$, $z_n' \in Z^*$, $z_n \in Z$ *(ряд сходится в* $\mathrm{L}(Z,Z)$*)*;
б) $T \notin \mathrm{N}(Z,Z)$; *ряд* $\sum \langle z_n', z_n\rangle$ *расходится;*
в) $|\,\mathrm{trace}\, TU| = |\sum\langle z_n', Uz_n\rangle| \leqslant \|U\|$ *для всякого* $U \in \mathrm{I}(Z,Z)$;
г) $T^* \in \mathrm{N}(Z^*,Z^*)$.

В случае, когда $\mathrm{I}(Y,Y) = Y^* \otimes Y$ (тогда условие a_2 выполнено; см. [5, стр. 129]), утверждение теоремы 7.7 доказано Джонсоном [6]. Следует отметить, что идея его доказательства использовалась в [18] (в основном при доказательстве теоремы 7.7). Теорема 7.7, однако, не является центральной в этом разделе и приведена главным образом для полноты (тем более, что она получается в процессе доказательства остальных теорем как побочный результат).

В [4] установлено. что если $(Y,\alpha) \in \lambda$-MAP для всех $\alpha \in \mathcal{A}_1$, то $Y^* \in 2\lambda(4\lambda+1)$-MAP. Небольшое улучшение константы (теорема 7.8) по сравнению с [4], по–видимому, представляет интерес. Однако более любопытным было бы выяснить (хотя бы в предположениях теоремы 7.8), верна ли следующая

Г и п о т е з а. Существует абсолютная постоянная $C \geqslant 1$ такая, что если $(Y,\alpha) \in \lambda$-MAP$(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$ для всякой нормы α на Y, эквивалентной исходной, то $Y^* \in C\lambda$-MAP(I).

Возможно, что $C = 1$.

В настоящий момент ответ, по крайней мере мне, неизвестен.

§8. По поводу одного вопроса Ю.Брудного

Следующие результаты появились благодаря такому вопросу Ю.А.Брудного (поставленного автору в письме несколько лет назад; см. также [2]; любопытно, что аналогичный вопрос в терминах тензорных произведений в связи с теорией интерполяции был задан автору и шведским математиком С.Кайзером): верно ли, что единичный шар из $\mathrm{L}(X,Y)$ плотен в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$ в топологии поточечной $Y^* \times X$-сходимости (здесь, как обычно, $\mathrm{L}(X,Y)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y)? Простейшие достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос: а) X пространство Y рефлексивно, б) X обладает свойством метрической аппроксимации. От условия б), как мы увидим, освободиться, вообще говоря, нельзя. Условие а), конечно, можно ослабить (см. предложение 1).

Через $X^* \otimes Y$ мы по-прежнему обозначаем множество всех конечномерных операторов из Xв Y с обычной нормой. Для краткости будем писать $X \in r$-MAP, если X обладает свойством r-метрической аппроксимации: это означает, что шар радиуса r пространства $X^* \otimes X$ плотен в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(X,X)$ в топологии компактной сходимости. При $r = +\infty$ принято писать $X \in$ AP. Заметим, что свойства r-MAP при различных r не эквивалентны. Через $X \widehat{\otimes} Y$ обозначается проективное тензорное произведение пространств X и Y.

Предложение 8.1. *Для плотности шара радиуса r пространства $\mathrm{L}(X,Y)$ в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$ в топологии τ_p компактной сходимости достаточно каждого из следующих условий:*

1) *существует сеть слабо компактных операторов в Y, сопряженные к которым в топологии τ_p сходятся к тождественному оператору и нормы которых $\leqslant r$;*
2) $X \in r$-MAP;
3) $Y^* \in r$-MAP;
4) $Y^* \in$ AP *и* $X^{**} \in$ RN;
5) $Y^* \in$ RN *и* $X^* \in$ AP.

Утверждения 4) и 5) вытекают из следующего более общего факта:

Предложение 8.2. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Z), U \in \mathrm{L}(W, Y)$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

1) $U^* \in \mathrm{AP}$, *т.е.* U^* *приближается в* τ_p *конечномерными операторами, и* $T^{**} \in \mathrm{RN}$;

2) $U^* \in \mathrm{RN},\ T^* \in \mathrm{AP}$.

Тогда для всякого оператора $V \in \mathrm{L}(Z, W^{**})$ оператор $U^{**}VT$ приближается в топологии τ_p конечномерными операторами, действующими из X в Y, нормы которых $\leqslant \|U^{**}VT\|$.

То, что все перечисленные условия в предложениях 8.1 и 8.2 существенны, вытекает из нижеследующих результатов.

Предложение 8.3. *Существует пространство Y с базисом и рефлексивное сепарабельное X, а также элемент $g \in Y^*\widehat{\otimes}X$ такие, что*

1) $\mathrm{trace}\ Ag = 0\ \forall\, A \in \mathrm{L}(X, Y)$;

2) $g \neq 0$, *т.е.* $\mathrm{trace}\ Vg = 1$ *для некоторого* $V \in \mathrm{L}(X, Y^{**})$

3) *пространства* $Y, Y^*, Y^{**}, \ldots$ *все сепарабельны.*

Доказательство предложения 8.3 основано лишь на существовании банахова пространства без свойства аппроксимации.

Сформулируем теперь центральные результаты.

Теорема 8.4. *Существуют постоянная $C > 0$ и сепарабельное банахово пространство E с базисом такие, что для всякого n можно найти сепарабельное пространство E_n с базисом и n-мерный оператор $t : E \to E_n$, для которых*

1) $|\,\mathrm{trace}\ Ut| \leqslant U$ *для всех* $U \in \mathrm{L}(E_n, E)$;

2) $\|t\|_\wedge \geqslant C\sqrt{n}$;

3) *существует* $\varepsilon > 0$ *и* $V \in \mathrm{L}(E_n, E^{**}), \|V\| \leqslant 1$, *такие, что если*

$$R \in \mathrm{L}(E_n, E) \quad и \quad \|Rg - Vg\| \leqslant \varepsilon\|g\|$$

для всех $g \in t(E)$, то $\|R\| \geqslant C\sqrt{n}$.

Перечислим некоторые более менее очевидные следствия из теоремы 8.4.

Следствие 8.5. *Существуют сепарабельное пространство E с базисом и сепарабельное F, $F \in \mathrm{AP}$, обладающие следующими свойствами:*

1) *существует оператор $T \in \mathrm{L}(E, F)$, не принадлежащий $E^*\widehat{\otimes}F$, такой, что для всякого $U \in l(F, E)$ суперпозиция $UT \in E^*\widehat{\otimes}E$ и $|\,\mathrm{trace}\ UT| \leqslant \|U\|$;*

2) *существует оператор $V : F \to E^{**}$ такой, что оператор V не принадлежит замыканию в $\mathrm{L}(F, E^{**})$ никакого шара конечного радиуса пространства $\mathrm{L}(F, E)$ в топологии поточечной $F \times E^*$-сходимости;*

3) *существуют $C > 0$ и n-мерные подпространства $F_n \subset F\,(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что если $R \in \mathrm{L}(E, F), R|_{E_n} = V|_{E_n}$ (V — оператор из 2)), то $\|R\| \geqslant C\sqrt{n}$.*

Следствие 8.6. *Существуют сепарабельное банахово пространство Z, $Z \in \mathrm{AP}$, операторы $S \in \mathrm{L}(Z, Z)$ и $Q \in \mathrm{L}(Z, Z^{**})$ такие, что*

1) *$US \in Z^*\widehat{\otimes}Z$ для всякого $U \in \mathrm{L}(Z, Z)$ (т.е. $S \in \mathrm{L}(Z, Z)^*$), но $S \notin Z^*\widehat{\otimes}Z$;*

2) *если $R_\alpha \in \mathrm{L}(Z, Z)$ и $R_\alpha \to Q$ $Z \times Z^*$-поточечно, то $\|R_\alpha\| \to +\infty$ (с другой стороны, ясно, что множество конечномерных операторов $Z^* \otimes Z$ плотно в $\mathrm{L}(Z, Z^{**})$ в топологии компактной сходимости).*

Замечание 8.7. Пространство Z в следствии 8.6 можно выбрать таким образом, что все сопряженные к Z пространства будут сепарабельными (это, однако, не следует непосредственно их теоремы 8.4).

Замечание 8.8. Следствие 8.6 дополняет результаты из [18] (см. выше §7), где, в частности, установлено, что существует непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных операторов, порождаемый не ядерным оператором.

Замечание 8.9. Следствие 8.6,2) конечно же отвечает на вопрос, с которого мы начали эту заметку (так же как и предложение 8.3). В отличие от предложения 8.3 в следствии 8.6 операторы рассматриваются в одном пространстве, которое к тому же обладает свойством аппроксимации AP .

Упомянутый выше вопрос Ю.А.Брудного был связан со следующим вопросом, принадлежащим ему же (см. также [2]). Следуя [2], обозначим через $\mathrm{W}(Y^*, X^*)$ множество тех операторов T из Y^* в X^*, для которых существует число $\gamma = \gamma(T) > 0$ такое, что

$$|\langle Ty', x\rangle| \leqslant \gamma(T)\ \sup\{|\langle y', Sx\rangle| :\ S \in \mathrm{L}(X, Y),\ \|S\| \leqslant 1\}$$

и положим $\|T\|_{\mathrm{W}} = \inf \gamma(T)$. Верно ли, что $\mathrm{W}(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$? Оказывается, имеет место не только это равенство, но и более общий факт. Для его формулировки нам понадобится следующее определение. Если $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, то обозначим через $\mathrm{W}_n(Y^*, X^*)$ множество всех операторов, для которых существует число $\gamma_n = \gamma_n(T)$ такое, что

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \langle Ty'_j, x_j\rangle\, \lambda_j\right| \leqslant \gamma_n \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \langle y'_j, Sx_j\rangle\right| :\ S \in \mathrm{L}(X, Y),\ \|S\| \leqslant 1\right\}$$

для всех $x_j, y_j, \|x_j\| \leqslant 1, \|y_j\| \leqslant 1$ и всех $\lambda_j \geqslant 0 :\ \sum_1^n \lambda_j = 1$.

Положим $\|T\|_{\mathrm{W}_n} = \inf \gamma_n(T)$. Ясно, что в определении W_n можно ограничиться элементами x_j и y_j единичной нормы; при этом $\|\cdot\|_{\mathrm{W}} = \|\cdot\|_{\mathrm{W}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \|\cdot\|_{\mathrm{W}_{n+1}}$.

Теорема 8.10. *Если $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$, то $\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \sqrt{n}\,\|T\|$ (при $n \in \mathbb{N}$). В частности, $\mathrm{W}_n(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ как множества и $\|\cdot\|_{W_1} = \|T\|$.*

Предложение 8.11. *Для всякого $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и любого $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$*

$$\|T\|_{\mathrm{W}_n} = \sup_{\substack{t \in Y^* \otimes X \\ \dim\ t \leqslant n}}\ \inf_{S \in \mathrm{L}(X,Y)} \{\|S\| :\ \mathrm{trace}\ S \circ t = \mathrm{trace}\ T^* \circ t\}.$$

Таким образом, $r = \|T\|_{\mathrm{W}_n}$ есть наименьшее число r, для которого, грубо говоря, на всяком n-мерном тензоре $t \in Y^* \otimes X$ элемент T может быть сколь угодно хорошо приближен операторами из шара радиуса r пространства $\mathrm{L}(X, Y)$. Точнее, для $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$\|T\|_{\mathrm{W}_n} = \inf\{r > 0 :\ \forall\, t \in Y^* \otimes X, \dim t \leqslant n,\ \exists\, S \in \mathrm{L}(X, Y), \|S\| \leqslant r, \mathrm{trace}\ S \circ t = \mathrm{trace}\ T^* \circ t\}.$$

Теперь, используя указанную характеризацию $\|T\|_{\mathrm{W}_n}$, мы из теоремы 8.4 получаем утверждение, показывающее, что теорема 8.10 точна:

Следствие 8.12. *Существует сепарабельное банахово пространство X, $X \in \mathrm{AP}$, сепарабельное пространство Y с базисом, оператор $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и постоянная $C > 0$ такие, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\|T\|_{\mathrm{W}_n} \geqslant C\sqrt{n}$. В частности, $\|T\|_{\mathrm{W}_\infty} = +\infty$ и, следовательно, $\mathrm{W}_\infty(Y^*, X^*) \subsetneqq \mathrm{L}(Y^*, X^*)$.*

§9. Пространства без свойства аппроксимации порядка p: случай $p \leqslant 1$

Если X — банахово пространство типа p и котипа q, то всякое его n-мерное подпространство $Cn^{1/p-1/q}$-дополняемо в X (см. [13]). Шанковский [23] показал, что если $T(X) = \sup\{p : X \text{ типа } p\} \neq 2$ или $C(X) = \inf\{q : X \text{ котипа } q\} \neq 2$, то в X есть подпространство без свойства аппроксимации. Таким образом, если всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации, то необходимо $T(X) = C(X) = 2$ и, следовательно, все конечномерные подпространства в X "хорошо" дополняемы. При этом пространство X не обязано быть гильбертовым (или изоморфным ему). Примеры таких пространств построены Джонсоном [7].

В связи с примерами Шанковского и Джонсона возникают естественные вопросы: 1)*если $T(X) = C(X) = 2$, то верно ли, что всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации*? 2) насколько хорошо могут быть дополняемы конечномерные подпространства пространства без свойства аппроксимации: в частности, *существует ли пространство X без свойства аппроксимации, постоянные C и A такие, что всякое n-мерное подпространство в X $C\log^A n$-дополняемо*? Эта параграф посвящен ответам на сформулированные вопросы (отрицательному — на первый, положительному — на второй).

Пример пространства без свойства аппроксимации, обладающего достаточно хорошими конечномерными подпространствами, можно найти, например, среди подпространств пространства

$$Y = \left(\sum_n \left(\sum_{A \in \Delta_n} l^2_{\overline{\overline{A}}} \right)_{l^{p_n}} \right)_{l^2},$$

где Δ_n — подходящее разбиение множества $I_n = \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}$; причем $\overline{\overline{\Delta_n}} \leqslant C2^{n/8}$. Числа p_n определяются из соотношений $1/p_n - 1/2 = n^{-1}\log_a n^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0, a = \sqrt[8]{2}$). Ясно, что $T(Y) = C(Y) = 2$.

Пусть $I_n = \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}$; $\{e_k\}_1^\infty$ — стандартный базис в c_0; $\{e'_k\}_1^\infty$ — набор соответствующих координатных функционалов. Пусть, далее, $z_i = e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}$ и $z'_i = 2^{-1}(e'_{2i} - e'_{2i+1})$. Обозначим через W линейную оболочку множества $\{z_i\}$ и определим пространство X_ε как замыкание в Y линейного подпространства W.

Теорема 9.1. *Пространство X_ε не обладает свойством аппроксимации. Существует такая постоянная $C_\varepsilon > 0$, что если E — n-мерное подпространство в X_ε, то 1) $d(E, l_n^2) \leqslant C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$ и 2) E $C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$-дополняемо в Y (и, значит, в X_ε).*

Если определить $\{p_n\}$ из соотношений $p_n^{-1} - 2^{-1} = n^{-1} \log_a n^{1+\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n \to 0$ и ряд $\sum n^{-1-\varepsilon_n}$ сходится, то те же рассуждения показывают, что *существует такое банахово пространство X без свойства аппроксимации, что если $\varepsilon > 0$ и E — n-мерное подпространство в X, то существует такой проектор P из X на E, что $\gamma_2(P) \leqslant C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$.* Естественно, возникает вопрос: существует ли банахово пространство без свойства аппроксимации, в котором все n-мерные подпространства $C\log n$-дополняемы? $C\log n$-евклидовы?

Пример Джонсона [7] показывает, что существует банахово пространство, не изоморфное гильбертову, такое, что все его подпространства обладают свойством аппроксимации Гротендика. Эквивалентная переформулировка: существует такое банахово пространство X, что все его подпространства имеют свойство AP, но для некоторого набора $\{E_n\}$ n-мерных подпространств E_n в X относительные проекционные константы $\lambda_X(E_n)$ стремятся к $+\infty$. Отметим, что из конструкции [7] вытекает, что можно найти X и $\{E_n\}$ с указанными свойствами так, чтобы последовательность $\lambda_X(E_n)$ стремилась к $+\infty$ быстрее любой степени $\log n$; в то же время, обязательно $\lambda_X(E_n) \to +\infty$ медленнее любой степени n, так как в противном случае метод Шанковского [23] позволил бы обнаружить среди подпространств X пространство без свойства AP. Любопытно было бы найти какую–либо характеризацию банаховых пространств, все подпространства которых обладают свойством AP. Заметим лишь, что с помощью конструкции Шанковского из [23] *автору удалось найти пример пространства без свойства аппроксимации, в котором всякое*

n-мерное подпространство $C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$-дополняемо для любого $\varepsilon > 0$ (константа C_ε зависит лишь от ε).[1] Напомним

Определение 9.2. Пространство X обладает свойством AP_s ($X \in \mathrm{AP}_s$), если для любого Y естественное отображение из $Y^* \widehat{\otimes}_s X$ в $\mathrm{L}(Y, X)$ взаимно однозначно.

Напомним также, что $\mathrm{AP}_r \implies \mathrm{AP}_s$, если $s \leqslant r \leqslant 1$; AP_1 — это свойство аппроксимации Гротендика. Далее, §2, $\mathrm{AP}_1 \implies \mathrm{AP}_q\ \forall q$ и всякое пространство обладает свойством AP_2. Для любого $s > 2/3$ существует банахово пространство, не обладающее свойством AP_s (здесь $s \neq 2$) (ниже будут приведены и некоторые намного более сильные факты).

Теорема 9.3. *Пусть $0 \leqslant r \leqslant 1/2; c > 0$ и банахово пространство X таково, что*
(A_r) на любое его конечномерное подпространство E существует проектор из X с нормой $< c(\dim E)^r$.
Тогда $X \in \mathrm{AP}_s$, где $s = (r+1)^{-1}$.

Ниже будут сформулированы более общие факты.

Как и в случае $r = 0$ естественно поставить вопрос об обратимости теоремы: пусть всякое подпространство пространства X имеет свойство $\mathrm{AP}_s, s < 1$. Верно ли, что X удовлетворяет условию (A_r)? Имеются примеры, показывающие, что и в случае $r > 0$ ответ отрицательный, а также, что в теореме 9.3 показатель s увеличить нельзя. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 9.4. *Для любого $s \in [2/3, 1)$ существует банахово пространств Z со следующими свойствами:*
1) Z удовлетворяет условию (A_r), где $r = 1/s - 1$ (следовательно, $Z \in \mathrm{AP}_s$);
2) в Z есть подпространство, не обладающее свойством AP_t ни при каком $t > s, t \leqslant 1$.

Теорема 9.5. *Пусть $p \in (2/3, 1]$ и $r = 1/p - 1$. Существует банахово пространство Z, обладающее свойствами:*
1) $Z \notin \mathrm{AP}_p$;
2) для всякого $\delta > 0$ существует такая константа $c > 0$, что если E — конечномерное подпространство в Z, то

$$\lambda_Z(E) \leqslant c(\dim E)^r \log^{2+\delta(\dim E)}.$$

В частности, для любого $s < p$ Z удовлетворяет условию $(A_{r(s)})$ из теоремы 9.3 и, следовательно, $Z \in \mathrm{AP}_s\ \forall s < p$.

Теорема 9.6. *Пусть $s \in (2/3, 1]$ и $r = 1/s - 1$. Существует банахово пространство Z, обладающее свойствами:*
1) всякое подпространство в Z обладает AP_s;
2) в Z есть подпространство, не обладающее свойством AP_q ни при каком $q \in (s, 1]$;
3) существует последовательность $\{E_n\}$ конечномерных подпространств в Z такая, что для любого $\alpha > 0$

$$\lambda_Z(E_n)\,\dim(E_n)^{-r}\,(\log\dim E_n)^{-\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Теорема 9.3 моментально вытекает из следующей леммы. Эта лемма, представляя самостоятельный интерес, нужна также и при доказательстве теоремы 9.6.

[1] Эта теорема была сформулирована выше.

Лемма 9.7. *Пусть* $c > 0, r \in [0, 1/2]$ *и* $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— такая числовая последовательность, что* $m_n \to +\infty$ *и если* $E \subset X$ *и* $\dim E \leqslant m_n$, *то существует конечномерное подпространство* $F \supset E$ *и оператор* $p \in X^* \otimes F$ *такие, что* $P|_E = \mathrm{id}_E$ *и* $\|P\| \leqslant cm_n^r$. *Тогда* $X \in \mathrm{AP}_s$, *где* $s = (r+1)^{-1}$. *В частности, если всякое подпространство в* X *размерности* $\leqslant m_n$ *является* cm_n^r*-дополняемым, то всякое подпространство в* X *обладает свойством* AP_s.

§10. Дальнейшие вариации на конечномерную тему: случай $p = 1$

Ниже приводятся некоторые дальнейшие результаты, относящиеся к Гротендиковским аппроксимационным условиям в банаховых пространствах. Нас интересуют здесь как качественные, так и количественные аспекты проблем, возникающих в этом направлении. В частности, мы формулируем аналоги основного результата работы [10] для случая пространств со свойством ограниченной аппроксимации Гротендика, так же как и для случая конечномерных операторов. Например, легко видеть, что для n-мерного оператора T имеет место следующее соотношение между его ядерной и интегральной (по Гротендику) нормами: если $\nu(T) = 1$ то $i(T) \geq 1/\sqrt{n}$. Оказывается, что это соотношение асимптотически точно даже в пространствах со свойством BAP.

Если X — банахово пространство, то $\pi_X : X \to X^{**}$ обозначает каноническое вложение. Нам будет удобно говорить, что банахово пространство X *вполне сепарабельно*, если как X так и все его сопряженные пространства сепарабельны.

Теорема 10.1. *Существует вполне сепарабельное сопряженное банахово пространство* W *с базисом такое, что для каждого* $\alpha \geq 1$ *на* W *можно ввести эквивалентную норму* $\|\cdot\|_\alpha$, *с которой пространство* $W_\alpha = (W, \|\cdot\|_\alpha)$ *обладает следующими свойствами:*

(i) $W_\alpha \in \alpha$-MAP*;*
(ii) $W_\alpha \notin \beta$-MAP, $\forall \beta < \alpha$*;*
(iii) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует ядерный оператор* $t \in W^* \widehat{\otimes} W$ *такой, что* a) $\operatorname{trace} t = 1$, b) $1/\alpha \leq \|t\|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq (1+\varepsilon) 1/\alpha$, c) $1 \leq \|t\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq (1+\varepsilon)$, d) $\|t\|_{\mathrm{I}(W, W_\alpha)} \leq 1+\varepsilon$, e) $\|t\|_{\mathrm{N}(W, W_\alpha)} \geq c\,\alpha$ *для некоторой абсолютной постоянной* $c > 0$.

Теорема 10.2. *Существует сепарабельное сопряженное банахово пространство* W *с базисом и постоянная* $C > 0$ *такие, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *найдется эквивалентная норма* $\|\cdot\|_n$ *на* W *и* n*-мерный оператор* $t_n : W_n \to W_n$, *где* $W_n = (W, \|\cdot\|_n)$, *обладающие следующими свойствами:*

(i) $W_n \in \sqrt{n}$-MAP;
(ii) $W_n \notin C^{-1}\sqrt{n}$-MAP;
(iii) $\|t\|_{\mathrm{I}(W_n, W_n)} \leq C/\sqrt{n}$;
(iv) $\|t\|_{\mathrm{N}(W_n, W_n)} \geq \operatorname{trace} t_n = 1$;
(v) $\|t\|_{\mathrm{I}(W, W_n)} \leq C$;
(vi) $\|t\|_{\mathrm{N}(W, W_n)} \geq c\sqrt{n}$ *для некоторой абсолютной постоянной* $c > 0$.

Следствие 10.3. *Если* Z *— такое сепарабельное пространство, что* $Z^{**} \in \mathrm{AP}$ *и* $Z^{**}/Z \notin \mathrm{AP}$, *то естественное вложение* $\pi_Z : Z \to Z^{**}$ *факторизуется через сепарабельное пространство* X *со свойством аппроксимации, не обладающее свойством ограниченной аппроксимации.*

(Это, по существу, получается при доказательстве теоремы 10.2).

Следствие 10.4. *Существуют вполне сепарабельное банахово пространство X, Y и операторы $A \in \mathrm{L}(Y,X)$, $B \in \mathrm{L}(X,Y^{**})$ и $T \in \mathrm{L}(Y^{**},Y)$, со следующими свойствами:*

1) $X \in \mathrm{AP}$, Y^{**} *имеет базис;*
2) $\pi_Y = BA$, $\pi_Y T = BAT \in \mathrm{N}(Y^{**},Y^{**})$
3) $T \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}(Y^{**},Y)$, *но* T *не лежит в замыкании множества* $Y^{***} \otimes Y$ *в* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}(Y^{**},Y)$;
4) $AT \notin \mathrm{N}(Y^{**},X))$, *но* AT *не лежит в замыкании множества* $Y^{***} \otimes X$ *в* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}(Y^{**},X)$.

III. АППРОКСИМАЦИЯ В $\Pi_p(X,Y)$ И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОРЯДКА p : случай $p \geqslant 1$.

§11. Топологический аспект

Ниже мы опишем топологию τ_p в пространстве $\Pi_p(Y,X)$, для которой замыкание выпуклых множеств в τ_p и в *-слабой топологии пространства $\Pi_p(Y,X)$ совпадают (это ответ на соответствующий вопрос Сафара в [22], с. 385). Затем мы исследуем некоторые свойства пространства Π_p, связанные с этой топологией.

Итак, рассмотрим в пространстве $\Pi_p(Y,X)$ топологию τ_p π_p-компактной сходимости, базу окрестностей нуля в которой определяют множества вида

$$\omega_{K,\varepsilon} = \{U \in \Pi_p(Y,X) : \ \pi_p(U\Phi_K) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0, K = \overline{\Gamma(K)}$ — компактное подмножество в Y.

Предложение 11.1. *Пусть* R *— линейное подпространство в* $\Pi_p(Y,X)$, *содержащее* $Y^* \otimes X$. *Тогда* $(\mathrm{R},\tau_p)'$ *изоморфно факторпространству пространства* $X^*\widehat{\otimes} Y$. *Точнее, если* $\varphi \in (\mathrm{R},\tau_p)'$, *то существует элемент* $z = \sum_1^\infty x_n' \otimes y_n \in X^*\widehat{\otimes} Y$ *такой, что*

$$(*) \qquad \varphi(U) = \mathrm{trace}\ U \circ z,\ \ U \in \mathrm{R}.$$

Обратно, для любого $z \in X^*\widehat{\otimes} Y$ *формула* $(*)$ *определяет линейный непрерывный функционал на* (R,τ_p).

Следствие 11.2. $(\mathrm{R},\tau_p)' = (\mathrm{R},\sigma)'$, *где* $\sigma = \sigma(\mathrm{R}, X^*\widehat{\otimes}_{p'} Y)$. *Таким образом, замыкания в* τ_p *и в* σ *выпуклых подмножеств пространства* $\Pi_p(Y,X)$ *совпадают.*

Обозначим через $X^*\widetilde{\otimes}_{p'} Y$ замыкание в пространстве $\mathrm{I}_{p'}(X,Y^{**})$ (сопряженном к $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_p X$) множества $X^* \otimes Y$ конечномерных операторов.

Предложение 11.3. *Пусть* A *— пересечение единичного шара из сопряженного к* $X^*\widetilde{\otimes}_{p'} Y$ *пространства* $G = G(Y,X^{**})$ *с пространством* $Y^* \otimes X$. $*$*-слабое замыкание множества* A *в* $G \cap \Pi_p(Y,X)$ *совпадает с замыканием* A *в* $(\Pi_p(Y,X),\tau_p)$.

Следствие 11.4. *В обозначениях предложения* 11.3 *замыкание множества* A *в* τ_p *совпадает с замыканием* A *в пространстве* $\mathrm{L}(Y,X)$ *в топологии компактной сходимости.*

Следствие 11.5. *Пусть $C > 0$ и $T \in \Pi_p(Y, X)$. Эквивалентны следующие утверждения:*

1) существует сеть $\{T_\alpha\}, T_\alpha \in Y^* \otimes X$, сходящаяся к T в топологии τ_p и такая, что $\pi_p(T_\alpha) \leqslant C$;

2) существует сеть $\{T_\alpha\}, T_\alpha \in Y^* \otimes X$, сходящаяся к T в топологии компактной сходимости и такая, что $\pi_p(T_\alpha) \leqslant C$.

Предложение 11.6. *Для оператора $T \in \Pi_p(Y, X), \overline{T(Y)} = X$, следующие условия равносильны:*

1) $T \in \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$;

2) существует сеть операторов $R_\alpha \in Y^* \otimes Y$ такая, что $TR_\alpha \to T$ в топологии τ_p.

Следующие два предложения дают достаточные (но не необходимые, как мы увидим ниже) условия плотности множества всех конечномерных операторов в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ в топологии τ_p π_p-компактной сходимости.

Предложение 11.7. *Если $\mathrm{QN}_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\pi_p}$ для всякого банахова пространства Y, то для любого Y $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Предложение 11.8. *Если каноническое отображение $j : X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y \to \mathrm{N}_{p'}(X, Y)$ взаимно однозначно, то $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Для рефлексивного пространства X сопряженное к $X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y$ пространство совпадает с пространством $\Pi_p(Y, X)$. Поэтому из 11.2 и 11.8 вытекает

Следствие 11.9. *Для рефлексивного пространства X каноническое отображение $j : X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y \to \mathrm{N}_{p'}(X, Y)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда множество конечномерных операторов плотно в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ в топологии τ_p π_p-компактной сходимости.*

В заключение наших рассуждений на тему аппроксимации абсолютно p-суммирующих операторов приведем утверждение, показывающее, что из существования не аппроксимируемого в топологии τ_p абсолютно p-суммирующего оператора вытекает существование не аппроксимируемого (в этой же топологии) квази-p-ядерного оператора (со значениями в том же пространстве).

Предложение 11.10. *Если существует оператор $T \in \Pi_p(Y, X) \setminus \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$, то существуют рефлексивное пространство Z и оператор $U \in \mathrm{QN}_p(Z, X)$, не принадлежащий замыканию $\overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Далее в этом параграфе мы фиксируем пространство образов (либо пространство задания) операторов и исследуем условия, при которых возможна аппроксимация конечномерными отображениями всех абсолютно p-суммирующих операторов со значениями в данном пространстве (либо действующих из данного пространства).

Предложение 11.11. *Для банахова пространства X равносильны утверждения:*

1) для всякого банахова пространства Y имеет место равенство $\mathrm{QN}_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\pi_p}$;

2) для всякого банахова пространства Y имеет место равенство $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$;

3) *для всякого банахова пространства* Y *имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\tau_p}$;

4) *для всякого рефлексивного банахова пространства* Y *имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\tau_p}$.

Следствие 11.12. *Если для любого рефлексивного пространства* Y *каноническое отображение* $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ *взаимно однозначно, то для всякого банахова пространства* Y *имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\pi_p}$.

Из следствий 11.9 и 11.12 вытекает

Следствие 11.13. *Для рефлексивного банахова пространства* X *равносильны утверждения:*

1) *для любого пространства* Y *каноническое отображение* $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ *взаимно однозначно;*

2) *для всякого пространства* Y *конечномерные операторы плотны в банаховом пространстве* $\mathrm{QN}_p(Y,X)$.

Следующее утверждение содержит в себе, помимо прочего, частичное обращение предложения 11.8.

Следствие 11.14. *Для произвольного банахова пространства* X *равносильны утверждения:*

1) *для всякого пространства* Y *каноническое отображение* $Y^*\widehat{\otimes}_pX \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ *взаимно однозначно;*

2) *для всякого рефлексивного банахова пространства* Y *каноническое отображение* $Y^*\widehat{\otimes}_pX \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ *взаимно однозначно;*

3) *для всякого (рефлексивного) пространства* Y $\overline{X^*\otimes_{p'} Y}^{\tau_{p'}} = \Pi_{p'}(X,Y)$.

Из предыдущего утверждения получается следующее хорошо известное предложение:

Следствие 11.15. *Если банахово пространство* X *обладает свойством аппроксимации (Гротендика), то для любого* $p>1$ *и любого пространства* Y *каноническое отображение* $Y^*\widehat{\otimes}_pX \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ *взаимно однозначно;*

Доказанные факты приводят нас к следующему определению, эквивалентному соответствующему определению в [15], [16], [19], так же как и определению, приведенному в начале данной работы.

Определение 11.16. Пусть $p\geqslant 1$. Банахово пространство X обладает свойством AP_p (свойством аппроксимации порядка p), если всякий абсолютно p'-суммирующий оператор, действующий из пространства X, может быть аппроксимирован в топологии π'_p-компактной сходимости $\tau_{p'}$ операторами конечного ранга.

Из предложения 11.7 и следствия 11.14 вытекает

Следствие 11.17. *Если для любого банахова пространства* Y *имеет место равенство* $\mathrm{QN}_{p'}(X,Y) = \overline{X^*\otimes Y}^{\pi_{p'}}$, *то пространство* X *обладает свойством* AP_p.

Сформулируем для полноты картины следующее утверждение о характеризации пространств со свойством AP_p (доказательство см. в [1]).

Предложение 11.18. *Банахово пространство X обладает свойством AP_p тогда и только тогда, когда для любого банахова пространства Y, любого оператора $T \in \Pi_{p'}(X,Y)$, всякой слабо p'-суммируемой последовательности $\{x_k\}$ элементов пространства X и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \to Y$, что $\sum \|Ux_k - Rx_k\|^{p'} < \varepsilon$.*

Как и свойство AP_1 (обычное свойство аппроксимации Гротендика), свойства AP_p весьма полезны при исследовании разного рода вопросов в геометрической теории линейных операторов (например, при описании сопряженных пространств к некоторым пространствам операторов; так, если X обладает свойством AP_p, то $\mathrm{N}_p(Y,X)^* = \Pi_{p'}(X,Y^{**})$ для всякого пространства Y). Нам, однако, в заключение рассмотренной серии "положительных результатов" хотелось бы привести один простой факт, справедливый без каких–либо предположений об аппроксимации (см. [22], где аналогичное утверждение доказано в предположении свойства аппроксимации; см. также [8], теорема 4.6, в которой установлен несколько менее общий результат).

Предложение 11.19. *Пусть $p \in [1, +\infty)$. Равносильны утверждения:*
1) *банаховы пространства X и Y рефлексивны;*
2) *пространство $\mathrm{QN}_p(X,Y)$ рефлексивно;*
3) *пространство $\Pi_p(X,Y)$ рефлексивно.*

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых контрпримеров, связанных с темой этого параграфа (большое число контрпримеров, касающихся свойств AP_p, содержится в [15], [16], [19]; многие из них рассматриваются в данной работе). Напомним, что для любого $p \geqslant 1$ существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство, не обладающее свойством AP_p . Более того, для любого $p \geqslant 1$ существует сепарабельное рефлексивное E, оператор $R \in \Pi_{p'}(E,E)$ и тензорный элемент $t \in E^* \widehat{\otimes}_p E$ такие, что trace $t \circ R = 1$ и trace $t \circ A = 0$ для любого конечномерного оператора $A \in E^* \otimes E$ (за подробностями мы отсылаем читателя к работам [15], [16], [19]).

Предложение 11.20. *Для любого $p \in [1, +\infty]$ существует сепарабельное рефлексивное пространство E, сепарабельное сопряженное пространство H с базисом такие, что каноническое отображение $j : H^* \widehat{\otimes}_{p'} E \to \mathrm{N}_{p'}(H,E)$ не взаимно однозначно. С другой стороны, так как H обладает свойством аппроксимации, то $\mathrm{QN}_p(E,H) = \overline{E^* \otimes H}^{\pi_p}$ и $\Pi_p(E,H) = \overline{E^* \otimes H}^{\tau_p}$.*

Следствие 11.21. *Для всякого $p \in [1, +\infty]$ существуют банахово пространство Z, элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes}_{p'} Z$ и оператор $\Psi \in \Pi_p(Z, Z^{**})$ такие, что* trace $\Psi \circ z = 1$, *но* trace $\Phi \circ z = 0$ *для всех $\Phi \in \Pi_p(Z,Z)$.*

Замечание 11.22. При $p = +\infty$ получаем ненулевой тензорный элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes}_1 Z$, обращающийся в нуль на подпространстве $\mathrm{L}(Z,Z)$ пространства $\mathrm{L}(Z,Z^{**})$. Это — ответ на вопрос (устный) шведского математика С.Кайзера, который и обратил мое внимание на возможность существования такого элемента z.

Теперь мы покажем, что обращения предложения 11.7 и следствия 11.17 также не верны.

Предложение 11.23. *Для всякого $p \in [1, +\infty]$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство E, сепарабельное сопряженное пространство H с базисом (и, значит, со свойством $\mathrm{AP}_{p'}$) такие, что $\mathrm{QN}_p(H,E) \neq \overline{H^* \otimes E}^{\pi_p}$; с другой стороны, $\Pi_p(H,E) = \overline{H^* \otimes E}^{\tau_p}$* (см. следствие 11.14).

В заключение приведем следующее, на первый взгляд удивительное, утверждение, которое показывает, грубо говоря, что существуют пространства X и Y, для которых замыкание в

$(\Pi_p(X, Y^{**}), w^*)$ множества конечномерных операторов из X в Y минимально: совпадает с $X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_p Y$.

Предложение 11.24. *Для всякого $p \in [1, +\infty)$ существуют такие банаховы (сепарабельные и рефлексивные) пространства X и Y, что*

$$\overline{X^* \otimes Y}^{\tau_p} = X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_p Y.$$

Замечание 11.25. По–видимому, не известно, верно ли предложение 11.24 при $p = +\infty$.

§12. Пространства без свойств $AP_p, p \geqslant 1$

В этом параграфе мы приведем представляющие и самостоятельный интерес вспомогательные утверждения (они, в частности, используются при установлении всех фактов следующего параграфа).

Лемма 12.1. 1) *Для каждого $p < 2$ существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства E, F, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_{p'}(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_1 E$ такие, что* $\mathrm{trace}\ z \circ \overline{U} = 1$ *и* $\mathrm{trace}\ z \circ \varphi = 0$ *для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$.*

2) *Для каждого $v > 2$ существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства E, F, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_{\mathrm{M}} E$ такие, что* $\mathrm{trace}\ z \circ \overline{U} = 1$ *и* $\mathrm{trace}\ z \circ \varphi = 0$ *для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$.*

Замечание 12.2. В утверждении 1) леммы мы можем найти $E, F, \overline{U}$ и z с тем дополнительным свойством, что $\overline{U} \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q(E, F)$.

Следствие 12.3. *Для каждого $r \neq 2$ существует квази-r-ядерный оператор, не принадлежащий замыканию множества всех конечномерных отображений по π_r-норме. Более того,*

1) *если $r > 2$, то существует квази-r-ядерный оператор, не принадлежащий замыканию конечномерных относительно обычной операторной нормы (и даже в топологии компактной сходимости!);*

2) *существует оператор из QN_1 (и, таким образом, из $\mathrm{QN}_r, r < 2$), который не лежит в замыкании множества конечномерных операторов по норме π_a, каково бы ни было $a \in [1, 2)$.*

Замечание 12.4. 1) Из замечания 12.2 следует, что существует оператор $U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q(E, F)$, не лежащий в замыкании множества конечномерных операторов в топологии компактной сходимости.

2) Лемма 12.1 предоставляет примеры (для каждого $r \neq 2$) r-абсолютно суммирующих отображений (и даже квази-r-ядерных), которые не являются r-интегральными (впервые подобного рода примеры были построены в [11]), так же как и примеры квази-r-ядерных операторов (для $r > 2$), не являющихся p-факторизуемыми ни для какого p.

Следствие 12.5. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство Z такое, что для каждого $r \neq 2$ естественное отображение $Z^* \widehat{\otimes}_r Z \to \mathrm{N}_r(Z, Z)$ не взаимно однозначно. В частности, для каждого $r \neq 2$ пространство Z не обладает свойством AP_r.*

Следствия 12.3 и 12.5 (они — из работы [16]) в свое время показали, что ответы на ряд старых вопросов Пича, Пелчинского, Сафара и др. отрицательны.

Лемма 12.6. 1) *Для каждого $p < 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство Y, сепарабельно пространство X с базисом (и с сепарабельными сопряженными), оператор $U \in \mathrm{QN}_{p'}(X,Y)$ и $\widehat{T} \in Y^*\widehat{\otimes}_1 X^{**}$ такие, что* $\mathrm{trace}\, \widehat{T} \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in X^* \otimes Y$ и* $\mathrm{trace}\, \widehat{T} \circ U = 1$.

2) *Для каждого $v > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство Y, сепарабельно пространство X с базисом, оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X,Y)$ и элемент $\widehat{T} \in Y^*\widehat{\otimes}_v X^{**}$ такие, что* $\mathrm{trace}\, \widehat{T} \circ U = 1$ *и* $\mathrm{trace}\, \widehat{T} \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in X^* \otimes Y$.*

Замечание 12.7. В лемме 12.6 X обладает свойством MAP, а X^{**} не обладает свойством AP_p в случае 1) и свойством AP_v в случае 2).

Следующая теорема из [19] дополняет и уточняет предыдущие результаты.

Для сокращения формулировки теоремы нам удобно ввести такое обозначение: если $s \leqslant p$, то j_{sp} — каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_s Y \to X^*\widehat{\otimes}_p Y$.

Теорема 12.8. A) *Если $s \leqslant 1$ и $p \geqslant 2s/(2-s)$, то для любых X и Y каноническое отображение $\varphi_{sp} : j_{sp}(X^*\widehat{\otimes}_s Y) \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно.*

B) Если $s \in [1,2]$, то для любых X и Y отображение φ_{s2} взаимно однозначно.

C) Если $s > 2$, то не существует числа p, такого, что для всех X и Y отображение φ_{sp} взаимно однозначно.

A′) 1) Для любых чисел $s \in (2/3, 1]$ и $p < 2s/(2-s)$ существуют пространства X и Y, такие, что φ_{sp} не является взаимно однозначным.

2) Если $r \in [2/3, 1)$, то существует пара пространств X, Y, таких, что для любого $s > r$ отображение φ_{sp} взаимно однозначно при $p > 2r/(2-r)$, но не является взаимно однозначным при $p = 2r/(2-r)$.

B′) Если $1 \leqslant s \leqslant p < 2$, то существует пара пространств X, Y, таких, что отображение φ_{sp} не взаимно однозначно.

§13. Нерегулярность идеалов N_p : случай незамкнутости N_p в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$

Основная теорема этого параграфа — теорема из [16] о перенормировке типа Фигеля–Джонсона [4] пространства X из леммы 12.6 предыдущего параграфа (со свойством метрической аппроксимации), для которого второе сопряженное не обладает свойством AP_p (или AP_v).

Теорема 13.1. *Пусть X, Y, U — из леммы 12.6. Существует конечномерный оператор $T_0 \in Y^* \otimes X$, для которого справедливы следующие утверждения:*

1) Для любого $\delta > 0$ и для каждого $p < 2$ существует эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, такая, что если $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$, то

(i_1) $X_\delta \in \mathrm{AP}$;

(ii_1) $\|U\|_{\Pi_{p'}(X_\delta,Y)} \leqslant 3/2$;

(iii_1) *U не принадлежит замыканию шара радиуса $4/5\,\delta$ пространства $X^*_{\pi_\infty} Y$ в пространстве $\mathrm{L}(X_\delta, Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;*

(iv_1) $\|T_0\|_{Y^*\widehat{\otimes}_p, X_\delta} \geqslant 1/2$;

(v_1) $\|T_0\|_{\mathrm{I}_1(Y,X^{**})} < \delta$.

2) Для любого $\delta > 0$ и для каждого $v > 2$ существует эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, такая, что если $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$, то

(i_2) $X_\delta \in \mathrm{AP}$;

(ii_2) $\|U\|_{\Pi_1(X_\delta,Y)} \leqslant 3/2$;

(iii_2) U не принадлежит замыканию шара радиуса $4/5\,\delta$ пространства $X^*_{\pi_{v'}}Y$ в пространстве $\Pi_{v'}(X_\delta, Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;

(iv_2) $\|T_0\|_\infty \geqslant 1/2$;[2]

(v_2) $\|T_0\|_{\mathrm{I}_v(Y,X^{**})} < \delta$.

Более того, как в случае 1), так и в случае 2) норма $|||\cdot|||$, дуальная к которой определяется соотношением $|||x'||| = \|x'\| + A\,\mathrm{dist}\,(x', L)$, удовлетворяет всем указанным выше условиям при подходящем выборе числа A.

Следствие 13.2. 1) *Для каждого $C > 0$ и любого $q > 2$ существует сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_q(X,Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, *$\pi_q(U) = 1$ и U не является пределом конечномерных операторов φ, с нормами $\|\varphi\| \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

2) *Для каждого $C > 0$ и любого $q > 2$ существует сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X,Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, *$\pi_1(U) = 1$ и U не является пределом конечномерных операторов φ, с нормами $\pi_q(\varphi) \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

Следствие 13.3. 1) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p < 2$ существует сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, *$\|T\|_{\mathrm{N}_p(Y,X)} = 1$ и $\|T\|_{\mathrm{I}_1(Y,X^{**})} < \delta$.*

2) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p > 2$ существует сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, *$\|T\|_\infty = 1$ и $\|T\|_{\mathrm{I}_p(Y,X^{**})} < \delta$.*

Следствие 13.4. *Для каждого $C > 0$ и для любого $p \geqslant 1, p \neq 2$ существует банахово пространство X со свойством C-MAP_p такое, что X не обладает свойством C_1-MAP, если $C_1 < C$.*

Теперь мы приведем основные применения сформулированной выше теоремы.

Теорема 13.5. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP*), сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(X,Y)$ такие, что*

(i) U лежит в замыкании множества $X^* \otimes Y$ в $\mathrm{QN}_q(X,Y)$ в топологии

$$\sigma\left(\mathrm{QN}_q(X,Y), Y^* \widehat{\otimes}_{q'} X\right)$$

(следовательно, и в топологии компактной сходимости), но

(ii) для всякого $C < +\infty$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, нормы которых $\|\Phi\| \leqslant C$.

2) *Существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP*), сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X,Y)$ такие, что*

(i) $U \in X^* \otimes_2 Y$ (очевидно), *но*

(ii) если $q < 2$, то для всякого $C > 0$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, для которых $\pi_q(\Phi) \leqslant C$.

[2] Для $R \in \mathrm{L}(Z_1, Z_2)$ $\|R\|_\infty = \inf\{\|R_1\|\,\|R_2\| : R_1 \in \mathrm{L}(Z_1, C(K)),\ R_2 \in \mathrm{L}(C(K), Z_2)\}$.

Теорема 13.6. 1) *Существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP), *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что $T^{**} \in \mathrm{N}_1(Y, X^{**})$, но для каждого $p < 2$ $T \notin \mathrm{N}_p(Y,X)$; более того, существует последовательность $\{T_n\}$ в $Y^* \otimes X$ такая, что $T_n \to T$ по норме, индуцированной из $\mathrm{N}_1(X, Y^{**})$.*

2) *Существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP), *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что для каждого $p > 2$ $T^{**} \in \mathrm{N}_p(Y, X^{**})$, но T не факторизуется ни через какое пространство $C(K)$ (следовательно, не лежит в N_r, если $r \in [1, +\infty)$); более того, существует последовательность $\{T_n\}$ в $Y^* \otimes X$ такая, что $T_n \to T$ по любой из норм $\widetilde{\nu}_p$, $p > 2$, индуцированной из $\mathrm{N}_p(X, Y^{**})$.*

Следствие 13.7. *Существует банахово пространство со свойством* AP *(следовательно, со свойством* AP_p *для каждого $p > 0$), не обладающее свойством* BAP_p *ни для какого p, $p \neq 2$.*

Следствие 13.8. *Для каждого $p \neq 2$ существует интегральный по Гротендику, но не интегральный по Пичу оператор.*

Следствие 13.9. *Для каждого $p \neq 2$ существует не p-ядерный оператор с p-ядерным вторым сопряженным.*

Следствие 13.10. *Существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $C(K)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство c_0.*

Как следствие мы опять (и подобное будет происходить на протяжении всей статьи) получаем следующий результат Фигеля–Джонсона: существует банахово пространство со свойством AP, не обладающее свойством BAP; существует не ядерный оператор с ядерным сопряженным.

Замечание 13.11. Так как в лемме 12.1,1), в лемме 12.6,1), в теореме 13.1,1), в следствии 13.2,1) $\overline{U}$ и $U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q$ (см. замечание 12.2), то мы в теореме 13.5,1) имеем: $\exists X, Y;\ U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q$ такие, что U принадлежит замыканию множества конечномерных отображений в топологии компактной сходимости τ_c, но для каждого $C > 0$ U не есть предел в τ_c конечномерных операторов φ, нормы которых не превосходят C.

Следующая теорема из [19] полностью отвечает на вопрос типа "где исчезают p-ядерные операторы?" (подробное обсуждение проблемы можно найти в [19]).

Теорема 13.12. *A) Пусть $s \leqslant 1, p = 2s/(2-s); T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Если $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_p(X,Y)$.*

B) Пусть $s \in [1,2]$. Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_2(X,Y)$.

A′) 1) Если $s \in (2/3, 1]$ и $p < 2s/(2-s)$, то существуют пространства X, Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$.

2) Для всякого $r \in [2/3, 1)$ существуют пространства X, Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$ для любого $s > r$, но $T \notin \mathrm{N}_{2r/(2-r)}(X,Y)$; в то же время $T \in \cap\{\mathrm{N}_q(X,Y):\ q > 2r/(2-r)\}$.

B′) Существуют пространства X, Y и оператор $T \in L(X,Y)$ такие, что $T \in \mathrm{N}_1(X, Y^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$ при $p < 2$.

C′) Существуют пространства X, Y и оператор $T \in L(X,Y)$ такие что $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$ для любого $s > 2$, но $T \notin \mathrm{N}_\infty(X,Y)$.

Замечание 13.13. В утверждениях A'), 1) – 2) и в B'), C') существует последовательность $\{T_n\}$ в $Y^* \otimes X$ такая, что $T_n \to T$ по норме, индуцированной соответственно из $\mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, $\mathrm{N}_1(X, Y^{**})$.

Следствие 13.14. *При $p > 2/3, p \neq 2$, идеал N_p не является регулярным.*

Теорема 13.15. *Пусть $s \geqslant 1$. Предположим, что каноническое отображение $X^* \otimes_s Y^{****} \to \mathrm{L}(X, Y^{****})$ взаимно однозначно или $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$. Тогда имеет место включение $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset \mathrm{N}_s(X, Y)$. В частности, это верно, если $X^* \in \mathrm{AP}_1$ или $Y^{****} \in \mathrm{AP}_s$.*

Замечание 13.16. Приводимая ниже теорема 14.1 показывает, что аппроксимационные условия в теореме 13.15 существенны.

§14. Нерегулярность идеалов N_p : случай замкнутости N_p в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$

Перед тем как сформулировать центральные результаты этого параграфа, отметим, что при доказательстве нижеследующей теоремы получается тот факт, что соответствующие пространства N_p являются собственными *замкнутыми* подпространствами в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ (откуда автоматически вытекает, в частности, снова нерегулярность рассматриваемых операторных идеалов).

Теорема 14.1. 1) *Существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, сепарабельное пространство Z, $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \cap_{q>2}\Pi_q(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|_Z = 0$, $\mathrm{trace}\ UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$, если $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, сепарабельное пространство Z, $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \Pi_1(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|_Z = 0$, $\mathrm{trace}\ UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_\infty(F, Z)$.*

Следствие 14.2. 1) *Существуют два пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы и такие, что $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_p(W, Z)$ для $p < 2$.*

2)*Для каждого $s > 2$ существуют два пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы и такие, что $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_\infty(W, Z)$.*

Замечание 14.3. Последний результат обобщает основную теорему из [10], полученную для $p = 1$.

Следствие 14.4. *Существует сепарабельное пространство V такое, что V имеет базис и такое, что:*

1) *для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, существует $T \in \mathrm{L}(V, V)$, $T \notin \mathrm{N}_p(V, V)$, такой, что T^{**} является p-ядерным;*

2) *существует $T \in \mathrm{L}(V, V)$ такой, что T не факторизуется ни через какое пространство $C(K)$, но T^{**} факторизуется через пространство c_0.*

Следствие 14.5. 1) *Существуют такие два пространства F, Z и операторы $T \in \Pi_0(F, Z)$, $U \in \bigcap_{p>2}\Pi_p(Z^{**}, F)$, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, но $T^{**} \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют два пространства F и Z и операторы $T \in \Pi_s(F, Z)$, $U \in \Pi_0(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, F)$, но $T^{**}U \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

Следствие 14.6. *Для каждого $r > 2$ существуют пространства F, G и Z и операторы $T \in \mathrm{N}_r(F,G)$ и $U \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(G,Z)$ такие, что F, G, Z^{**} имеют базисы и $UT \notin \mathrm{N}_p(F,Z)$, если $p < 2$. В частности, $\mathrm{I}_1 \circ \mathrm{I}_r \not\subset \cup_{p<2} \mathrm{N}_p$; если $q < 2$ и $1/r + 1/s = 1/q \leqslant 1$, то $\mathrm{I}_s \circ \Pi_r \not\subset \mathrm{N}_q$* ($\mathrm{I}_p$ — идеал p-интегральных операторов).

Замечание 14.7. Если $1/r + 1/s = 1/q \leqslant 1$ и $1 < r, s < +\infty$, то $\mathrm{I}_s \circ \Pi_r \subset \mathrm{N}_q^{\mathrm{reg}}$ (см. [12], теорема 24.6.4).

§15. Приближение квази-p-ядерных операторов: количественный аспект, $p > 2$

Если $U \in \Pi_{p'}$, то на всяком n-мерном подпространстве области определения оператора U его можно отождествить с таким конечномерным оператором Φ, что $\pi_{p'} \leqslant n^{1/2-1/p'}\pi_{p'}(U)$. Что можно сказать о точности этого результата?

Теорема 15.1. *Для любых $q > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют пространства E, F и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(E,F)$, такие, что*

1) $E = \cup_1^\infty E_n$, где $E1 \subset E_2 \subset \ldots$; $\dim E_n \leqslant n$;

2) существует $C > 0$ такое, что если $\Phi \in E^* \otimes F$ и $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$, то $\pi_q(\Phi) \geqslant Cn^{1/2-1/q-\varepsilon}\pi_q(U)$.

Таким образом, в степенной шкале сформулированный выше результат является точным. В теореме 15.1 (таково ее доказательство в [19]), однако, оба пространства E и F не обладают свойством аппроксимации, а оператор U не принадлежит замыканию конечномерных операторов в топологии τ_c компактной сходимости. Можно ли найти оператор U из QN_q (для $Q > 2$), также обладающий "экстремальным" свойством 2), но аппроксимируемый в τ_c операторами конечного ранга? Оказывается, можно, но подпространства E_n из 1) в этом случае (у нас) уже не расположены в E так же хорошо, как в теореме 1 (см. ниже теорему 2).

Наиболее прозрачна ситуация при $q = +\infty$, т.е. $\pi_q = \|\cdot\|$. В этом случае наш второй вопрос выглядит так. Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Поскольку на всякое n -мерное подпространств H в X есть проектор с нормой не выше $N^{1/2}$, то на H оператор T можно отождествить с некоторым оператором $\Phi \in X^* \otimes Y, \|\Phi\| \leqslant n^{1/2}\|T\|$. Предположим, что оператор T "обладает свойством аппроксимации", т.е. $T \in \overline{X^* \otimes Y}^{\tau_c}$, но "не обладает свойством ограниченной аппроксимации", т.е. нет такой постоянной $c > 0$, что на всяком конечномерном подпространстве в X оператор T совпадает с некоторым $\Phi \in X^* \otimes Y$, $\|\Phi\| \leqslant c$. Насколько плохим может быть этот оператор с количественной точки зрения? Верно ли, что, вообще говоря, на n-мерных подпространствах он не может быть приближен конечномерными операторами, нормы которых существенно меньше $n^{1/2}\|T\|$?[3] Следующая теорема показывает, что такие операторы есть.

Теорема 15.2. *Для всяких $q > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют пространства E, F и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(E,F)$ такие, что*

1) E обладает свойством аппроксимации;

2) в E содержится набор $\{E_n\}$ подпространств таких. что

a) $\dim E_n \leqslant n$;

b) если $\Phi \in E^* \otimes F$ и $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$, то $\pi_q(\Phi) \geqslant Cn^{1/2-1/q-\varepsilon}$, где константа $C > 0$ зависит только от q, ε.

Замечание 15.3. На самом деле при доказательстве теоремы получается, что в утверждении в 2б) имеет место неравенство $\|\Phi\| \geqslant cn^{1/2-1/q-\varepsilon}$ для всякого конечномерного Φ такого, что $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$. Кроме того, при $q = +\infty$ можно взять $E = F$ и $U = \mathrm{id}_E$.

[3] На n-мерных вне зависимости от n!!! 06.02.00 0:46:58 Sat

§16. Пример: пространство Харди H^∞

Неизвестно, обладает ли пространство Харди H^∞ свойством аппроксимации, Однако, можно показать, что для каждого $p \neq 1$ H^∞ обладает аппроксимационным свойством AP_p, и, более того, что H^∞ удовлетворяет условию аппроксимации "с точностью до логарифма" (см. теорему 16.5).

Напомним еще раз, что банахово пространство X имеет свойство AP_p, если каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ взаимно однозначно. Если $p \geqslant 1$, то X имеет свойство C-MAP_p, если для каждого Y каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{I}_p(Y,X^{**})$ есть C-изометричное вложение.

Теорема 16.1. *Пространство H^∞ обладает свойством AP_p для всякого $p > 0, p \neq 1$. Более того, если $p > 1$, то H^∞ и все его четные сопряженные имеют свойство 1-MAP_p; если $p < 1$, то все сопряженные к H^∞ пространства имеют свойство AP_p.*

Теорема 16.1 является непосредственным следствием следующих трех утверждений.

Теорема 16.2. *Пусть $p > 1$ и X — такое банахово пространство, что $\Pi_{p'}(X,Z) = \mathrm{I}\prime\, p(X,Z)$ как множества для каждого (рефлексивного) банахова пространства Z. Тогда X и все его четные сопряженные обладают свойством 1-MAP_p.*

Теорема 16.3. (ср. [19]). *Если $p \in [1,2]$ и X имеет свойство AP_p, то X обладает также свойством AP_s, где $1/p + 1/s = 2$. Таким образом, если X имеет свойство AP_p для каждого $p > 1$, то X имеет свойство AP_p для всех $p > 0, p \neq 1$.*

Из теорем 16.2 и 16.3 вытекает

Следствие 16.4. *Пусть $p > 1$ и X — такое банахово пространство, что для каждого (рефлексивного) банахова пространства Z $\Pi_{p'}(X,Z) = \mathrm{I}_{p'}(X,Z)$. Если $1/s + 1/p = 2$, то пространство X, так же как и все его сопряженные, обладают свойством AP_s.*

Теорема 16.5. *Существует такая функция $B(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что если $(x_j)_{j=2}^\infty$ — последовательность в H^∞, удовлетворяющая соотношениям*

$$\|x_j\| \leq \frac{1}{\log j},\ j = 2, 3, \dots,$$

то существует такой оператор $T : H^\infty \to H^\infty$, что

1) $\sup_j \|Tx_j - x_j\| < \varepsilon$,
21) $\operatorname{rank} T < B(\varepsilon)$,
3) $\|T\| < B(\varepsilon)$.

IV. НЕПРЕРЫВНОСТЬ p-ЯДЕРНЫХ И ДРУГИХ НОРМ ПО ПАРАМЕТРУ p

§17. Непрерывность π_p- и ν_p-норм

Лемма 17.1. *Если X, Y — банаховы пространства, T — конечномерный оператор из X в Y, и $1 \leq r \leq +\infty$, то $\lim_{s\to r} \pi_s(T) = \pi_r(T)$.*

Лемма 17.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $r \in [1, +\infty)$ и $T \in \Pi_s(X, Y)$ для всех $s, s > r$. Тогда $\lim_{s \to r+0} \pi_s(T) = \pi_r(T)$. В частности, если все нормы $\pi_s(T)$ при $s > r$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \Pi_r(X, Y)$ и $\pi_r(T) \leq C$.*

Лемма 17.3. *Если X, Y — банаховы пространства, $p \in (1, +\infty]$ и T — q-ядерный оператор из X в Y для некоторого $q \in [1, +\infty)$, $q < p$, то $\lim_{q \to p-0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.*

Лемма 17.4. *Если $p \in (0, +\infty]$ и $T \in \Pi_{p-\delta}(X, Y)$ для некоторого $\delta > 0$, то*

$$\lim_{q \to p-0} \pi_q(T) = \pi_p(T).$$

Лемма 17.5. *Пусть $C \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$, X, Y — банаховы пространства и T — оператор из X в Y, для которого выполняется следующее условие:*

$$\nu_p(T) \leq C \sup \{\operatorname{trace} UT : U \in Y^* \otimes X^{**},\ \pi_{p'}(U) \leq 1\} \tag{17.1}$$

(оба выражения в (17.1), могут принимать и бесконечные значения). *Тогда*

$$\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) \geq C^{-1} \nu_p(T).$$

В частности, если $C = 1$, (т.е. если норма $\nu_p(T)$ равна *supremum*'у из соотношения (17.1)), *то* $\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.

Лемма 17.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $p \in [1, +\infty)$ и $T \in \mathrm{I}_q^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ для всех $q, q > p$. Тогда $\lim_{q \to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$. В частности, если все нормы $i_q^{\mathrm{Gr}}(T)$ при $q > p$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ и $i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \leq C$.*

§18. Некоторые следствия

Приведем некоторые условия, накладываемые на банаховы пространства X, Y, при которых имеет место соотношение (17.1).

Пример 18.1. Если $C > 0$ и $Y \in C$-BAP_p, то (17.1) выполнено с константой C для любого банахова пространства X и любого оператора $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.

В частности, с помощью леммы 17.5 получаются такие следствия:

Следствие 18.2. *Если $p \geq 1$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в точке p.*
Таким образом,

(i) *семейство норм ν_p непрерывно в точке 2;*

(ii) *если $Y \in \mathrm{MAP}$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в любой точке p, $p \geq 1$.*

Следствие 18.3. *Пусть $\mathrm{C} \geq 1$, $p \geq 1$, и Y — банахово пространство. Если существуют такие банахово пространство X и оператор $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$, что*

$$\lim_{p+0} \nu_q(T) < C^{-1} \nu_p(T),$$

то пространство Y не обладает свойством C- BAP_p.

Следствие 18.4. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, но $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$, то $\nu_q(T) \to \nu_p(T) = +\infty$ при $q \to p+0$.*

Нам представляется интересным переформулировать последнее утверждение в связи со следующим известным (решенным отрицательно в [15],[16]) вопросом: верно ли, что из p-ядерности второго сопряженного к некоторому оператору вытекает p-ядерность самого этого оператора? Приводимая переформулировка следствия 18.4 дает некоторые достаточные (и, тривиально, необходимые) условия для положительного ответа на последний вопрос:

Следствие 18.5. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$ и семейство $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$; в частности, если $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то из p-ядерности оператора T^{**} вытекает p-ядерность оператора T.*

Замечание 18.6. Еще раз подчеркнем тонкость рассматриваемых аппроксимационных условий и связанных с ними рассуждений и утверждений на примере "предельного перехода в следствии 18.3. В этом следствии чем хуже "p-ядерность" оператора T (точнее, чем больше норма $\nu_p(T)$ при равномерной ограниченности норм $\nu_q(T)$, $q > p$), тем более плохим с точки зрения условий ограниченной аппроксимации оказывается пространство Y: в такой ситуации константе C позволительно расти с ростом $\nu_p(T)$, и "в пределе" естественно ожидать появления такого "следствия" (заранее, чтобы не допустить недоразумений, отметим, что *формулируемое "следствие" неверно!*).

> Если существует не p-ядерный оператор $T : X \to Y$, для которого $\sup_{q>p} \nu_q(T) < +\infty$, то пространство Y не обладает свойством BAP_p.

Тонкость здесь как раз и состоит в том, что подобный "предельный переход" не допустим, и имеется пример пространства Y с базисом (даже еще более хорошего, — см. ниже теорему 19.2), для которого первая часть утверждения этого "следствия" в действительности имеет место (это так по-крайней мере для всех $p \in [1,2)$); в §19 мы рассмотрим только простейший случай $p = 1$). Любопытно также отметить в связи со сказанным, что следствие 18.4 показывает, что если оператор T "совсем плохой" ($T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$), то его q-ядерные нормы ведут себя как надо, а именно, не ограничены при $q \to p$.

Следствие 18.7. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что X^* обладает свойством Радона–Никодима и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$. Пусть, далее, $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и $1 \le p < +\infty$. Если $C := \sup_{p<q} \nu_q(T) < +\infty$, то $\nu_p \le C$.*

§19. (Контр)пример

Напомним еще раз, что каждое банахово пространство мы рассматриваем также как подпространство его второго сопряженного (не вводя никаких обозначений для оператора канонического вложения). В доказательстве "положительной части" теоремы 19.2 существенно используется следующая

Лемма 19.1 (см. [19, теорема 3.1,A]). *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$, для некоторого $s \in [2/3,1]$, то $T \in \mathrm{N}_q(X,Y)$, где показатель q, $1 \le q \le 2$, определяется из соотношений $s = \dfrac{2q}{q+2}$, или $q = \dfrac{2s}{2-s}$.*

Теорема 19.2. *Существуют такие банахово пространство Z и оператор $S : Z^{**} \to Z$, что*

(1) *пространство Z^{**} имеет ограниченно полный базис;*
(2) *все сопряженные к Z пространства $Z^*, Z^{**}, Z^{***}, \ldots$ сепарабельны* (и, следовательно, обладают свойством RN)*;*
(3) *Z^{***} не обладает свойством аппроксимации;*

(4) $S \in N_s(Z^{**}, Z^{**})$ *для любого* $s > 2/3$;
(5) $C := \sup_{q>1} \nu_q(S) \le 1$, *но*
(6) $S \notin N(Z^{**}, Z)$.

V. ДОбАВЛЕНИЕ: о свойствах $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, $s < 1$

Для пары пространств X, Y и числа $s \in (0,1)$ обозначим через $Y^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное пространство, состоящее из тензоров $z \in Y^*\widehat{\otimes}_1 X$ (проективное тензорное произведение), допускающих представление вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, y'_k \otimes x_k \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow, \; \lambda_k^s = o(1/k), \; \|y'_k\| \, \|x_k\| = 1.$$

Определение V.1. Банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $s \in (0,1)$, если для любого пространства Z каноническое отображение $Z^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}(Z,X)$ взаимно однозначно (иными словами, $Z^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}(Z,X)$; должно быть вполне понятно, что из себя представляет операторное пространство справа).

Отметим, что пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ тогда и только тогда, когда взаимно однозначным является каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}(X,X)$; в этом случае, $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}(X,X)$.

Теорема V.2. 1) *Пусть* $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, *и* X *— банахово пространство. Если каждое конечномерное подпространство* E *пространства* X $C(\dim E)^\alpha$*-дополняемо в* X, *то* $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, *где* $1/s = 1 + \alpha$. *В частности,* (надо взять $\alpha = 1/2$), *всякое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$, *а если* X *является подпространством или факторпространством некоторого пространства* $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$, *где* $p \in (1, +\infty)$, $p \ne 2$, *то* $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$ $(1/s = 1 + |1/p - 1/2|)$.

2) *Для каждого* $s \in [2/3, 1)$ *существует такое сепарабельное рефлексивное пространство* Y, *что* $Y \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, *но* $Y \notin \mathrm{AP}_{\mathrm{r}}$ *каково бы ни было* $r \in (s, 1]$.

Предложение V.3. *Пусть* $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, *и* X *— банахово пространство. Предположим: что для каждого конечномерного подпространства* E *пространства* X *найдется такое конечномерное подпространство* E, $E \subset F \subset X$, *что* F $C(\dim E)^\alpha$*-дополняемо в* X. *Тогда* $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, *где* $1/s = 1 + \alpha$.

Теорема V.4. 1) *Пусть* $s \in (0,1)$. *Если* $X^* \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$ *или* $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *то* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}(X,Y) \subset \mathrm{N}_1(X,Y)$. *В частности, для любых банаховых пространств* X *и* Y *имеем:* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{2/3,\infty}(X,Y) \subset \mathrm{N}_1(X,Y)$.

2) *Существует такое банахово пространство* Z, *что*
(*i*) Z^{**} *имеет базис* (*следовательно,* $Z^{**} \in \mathrm{AP}$);
(*ii*) *для каждого* $s \in (2/3, 1]$ $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$.
Таким образом, аппроксимационные условия, наложенные на X *и* Y *в* 1) *существенны.*

Замечание V.5. Совсем нетрудно показать, что $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{2/3} \subset \mathrm{N}_1$. Действительно, если оператор T действует из пространства E в пространство Z и является $2/3$-ядерным как оператор из E в Z^{**}, то по самому определению 2/3-ядерного оператора, "расщепляя" коэффициенты его разложения в тензорный ряд на пары соответствующим образом подобранных множителей, мы можем разложить сам оператор T в произведение:

$$T:\ E \xrightarrow{A} c_0 \xrightarrow{\Delta_1} l^1 \xrightarrow{j} l^2 \xrightarrow{\Delta_2} l^1 \xrightarrow{B} Z^{**}$$

где Δ_j — диагональные операторы (таким образом, Δ_1 — ядерный), а остальные операторы непрерывны. Спроектировав ортогонально в l^2 на замыкание образа оператора $j\,\Delta_1\,A$, и рассмотрев B только на этой проекции, мы получим в совокупности все тот же оператор $T: E \to Z$; этот простой трюк показывает, что T — ядерный из E в Z. В данный момент у меня нет никакой идеи, как примерно подобным способом непосредственно можно получить соответствующий результат из последней теоремы (то есть, для $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{2/3,\infty}$).

Следствие V.6. *Пусть X — такое рефлексивное банахово пространство, что каждое n-мерное подпространство в X Cn^{α}-дополняемо в X (здесь $C > 0, \alpha \in (0,1/2)$ — некоторые постоянные, $n = 1,2,\dots$). Тогда для любого банахова пространства Y*

$$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y)\,.$$

где $1/s = 1+\alpha$.

В частности, если $X \subset L^p(\mu), 1 < p < +\infty, p \neq 2$, и $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, то

$$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y) \qquad \text{для каждого } Y.$$

Замечание V.7. В теореме V.4,1) и следствии V.6 мы получили, на самом деле, следующее формально более сильное включение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y) \subset X^*\widehat{\otimes}_1\,Y$. Последнее включение следует понимать таким образом: каждый оператор $T \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y)$ (однозначно) порождается тензорным элементом из пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}\,Y^{**} \subset X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**}$, который (тензорный элемент), в свою очередь, принадлежит пространству $X^*\widehat{\otimes}_1\,Y$, подпространству пространства $X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**}$; так что, если

$$\begin{aligned}
&\sum x'_n \otimes y''_n && \text{– представление оператора } T \text{ в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**},\\
&\sum \tilde{x}'_n \otimes \tilde{y}''_n && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1\,Y^{**} \ \text{ и}\\
&\sum \tilde{\tilde{x}}'_n \otimes \tilde{\tilde{y}} && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1\,Y,
\end{aligned}$$

то для всякого $U \in \mathrm{L}\,(Y^{**}, X^{**})$

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle x'_n, U y''_n\rangle = \sum \langle \tilde{x}'_n, U \tilde{y}''_n\rangle = \sum \langle \tilde{\tilde{x}}'_n, U \tilde{\tilde{y}}_n\rangle$$

(заметим, что след вполне определен, поскольку в теореме V.4,1) и в следствии V.6 естественное отображение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X,Y^{**}) \to \mathrm{L}\,(X,Y^{**})$ взаимно однозначно).

Теорема V.8. *Пусть $s \in (0,1]$. Если $X^* \in \mathrm{AP_s}$, или $Y^{***} \in \mathrm{AP_s}$, то $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y)$.*

На самом деле имеет место следующий более сильный факт, чем утверждение в пункте 2) теоремы V.4:

Предложение V.9. *Существуют такие сепарабельное банахово пространство Z и оператор $A \in \mathrm{L}(Z^{**}, Z)$, что Z^{**} имеет базис, $\pi_Z\,A \in \mathrm{N_s}\,(Z^{**}, Z^{**})$ для каждого $s > 2/3$, но $A \notin \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$.*

Теорема V.10. *Для всякого $s \in [2/3, 1)$ существует такое сепарабельное банахово пространство Z, что*

(i) *Z^{**} имеет базис;*

(ii) *все пространства $Z, Z^*, Z^{**}, \dots$ обладают свойством $\mathrm{AP_s}$;*

(iii) *Z^{***} не обладает свойством $\mathrm{AP_r}$, каково бы ни было $r \in (s, 1]$;*

(iv) *для всякого банахова пространства X*

$$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X, Z) \subset \mathrm{N}_1\,(X, Z) \quad \text{и} \quad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(Z^{**}, X) \subset \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, X)\,;$$

(v) *для каждого $r \in (s, 1]$ $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$. Более того, существует такой оператор $U : Z^{**} \to Z$, что $U \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**}, Z)$ для всех $r \in (s, 1]$, но $U \notin \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$.*

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно получить в утверждениях наших теорем, если полностью отказаться от каких-либо аппроксимационных предположений относительно рассматриваемых пространств (как, например, в случае $s = 2/3$ из теоремы V.4,1) - хотя там неявно подобные условия присутствуют, ведь каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2,/3,\infty}$). Сначала посмотрим, как будет выглядеть в этой ситуации часть 1) теоремы V.4.

Предварительно сформулируем одно вспомогательное предложение, которое, по существу, доказано в [19] (теорема 2,1,A). Нам удобно обозначить каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y \to X^*\widehat{\otimes}_p Y$ через φ^{∞}_{sp}, а каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}\,(X, Y)$ — через j_p.

Предложение V.11. *Если $s \le 1$ и $p \ge 2s/(2-s)$, то отображение*

$$j_p : \varphi^{\infty}_{sp}\left(X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y\right) \to \mathrm{L}\,(X, Y)$$

является взаимно однозначным.

Приведем теперь усиление теоремы 3.1.A) из [19], где было показано, что в условиях предложения V.11 имеет место включение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X, Y) \subset \mathrm{N_p}\,(X, Y)$. Доказательство, однако, не столь элементарно, как в [19].

Теорема V.12. *Если $2/3 \le s < 1$ и $p = 2s/(2-s)$, то $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X, Y) \subset \mathrm{N_p}\,(X, Y)$, каковы бы ни были банаховы пространства X и Y.*

Замечание V.13. Утверждение A$'$ теоремы 3.1 из [19] показывает, что наша теорема V.12 точна. Аналогичное замечание можно отнести и к предложению V.11. Следующий факт, однако, намного сильнее, чем часть A$'$ теоремы 3.1 из [19], в которой установлено существование двух банаховых пространств X и Y, для которых, в частности, $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X, Y) \not\subset \mathrm{N_p}\,(X, Y)$ и $Y \in \mathrm{AP}$. Под впечатлением неверного результата А.Гротендика, о котором шла речь выше, я написал в замечании к теореме 3.1 в [19], что Y “конечно, не обладает свойством ограниченной аппроксимации” BAP. Сейчас мы увидим, что последняя фраза была лишена оснований.

Теорема V.14. *Пусть $r \in [2/3, 1)$ и $1/r = 1/2 + 1/p$. Существуют два сепарабельных банаховых пространства Z и W такие, что*

(i) *W и Z^{**} имеют базисы;*

(ii) *как W, так и все сопряженные к нему пространства $W', W'', \dots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$;*

(iii) *W^* не обладает свойством $\mathrm{AP_s}$ ни при каком $s \in (r, 1]$;*

(iv) *для любого банахова пространства E $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r},\infty}\,(W, E) \subset \mathrm{N}_1\,(W, E)$;*

(v) *$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(W, Z) \not\subset \mathrm{N_p}\,(W, Z)$, каково бы ни было $s \in (r, 1]$.*

Из (i) и (v) предыдущей теоремы моментально вытекает

Следствие V.15. *Существует пара сепарабельных банаховых пространств Z и W со следующими свойствами. Пространства Z^{**} и W имеют базисы (и, следовательно, обладают свойством аппроксимации), и для каждого $p, 1 \leq p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным.*

Замечание V.16. Подобного феномена не может быть, если либо W^*, либо Z^{***} обладает свойством аппроксимации. Вскользь об этом уже упоминалось выше (частный случай сформулирован в теореме V.8). Что касается случая $p > 2$, то его мы здесь не рассматриваем.

VI. ДВЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Уже более двадцати лет открытыми остаются ответы на следующие проблемы.

1). Предположим, что X — такое банахово пространство, что X^* обладает свойством аппроксимации. Верно ли, что пространство X^* обладает свойством ограниченной аппроксимации?

2). Пусть оператор T, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, таков, что его второй сопряженный T^{**} факторизуется через некоторое пространство l_p, где $1 < p \neq 2 < \infty$. Верно ли, что сам оператор T допускает (строгую) факторизацию подобного рода?

Замечание VI.1. Если X^* обладает свойством Радона–Никодима, то ответ на вопрос 1) положителен. Если либо $p = 1$, либо $p = +\infty$, то ответ на вопрос 2) отрицателен. Если $p = 2$, то ответ на второй вопрос с очевидностью положителен.

References

1. Bourgain J., Reinov O.I., *On the approximation properties for the space H^∞*, Math. Nachr. **122** (1985), 19-27.
2. Brudnyi Y.A., Aisenstein M.H., *Computable interpolational functors*, Investigations in the theory of functions of several real variables, Jaroslavl': JaGU, 1986, pp. 3–35, (in Russian).
3. Diestel J. and Uhl J.J., *Vector measures*, Math. Survey 15, Amer. Math. Soc., Providence RI. **15** (1977).
4. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197–200, MR49#5782..
5. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), pp. 196 + 140.
6. Johnson W.B., *A complementary universal conjugate Banach space and its relation to thr approxmation problem*, Israel J. Math. **13** (1972), 301–310.
7. Johnson W.B., *Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property*, Seminaire d'analyse fonctionelle 1979–1980 (1980), exp. 16, 1-11.
8. Makarov B.M., Samarskii V.G., *Weak sequential completeness and close properties of some spaces of operators*, in book "Theory of operators and theory of functions". Leningrad University (1983), 122-144, (in Russian).
9. Nielsen N.J., *Banach ideals determined by Banach lattices and their applications*, Dissertationes Math. **109** (1973), 5–62.
10. Oja E., Reinov O.I., *Un contre–exemple à une affirmation de A. Grothendieck*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I **305** (1987), 121-122.
11. Pełczyński A., *p-integral operators commuting with group represetations andexamples of quasi-p-integral operators which are not p-integral*, Studia Math. **33** (1969), 63–70, MR39#6125..
12. Pietsch A., *Operator ideals*, North-Holland, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1978.
13. Pisier G., *Estimations des distances à un espace euclidien et des constantes de projéction des espace de Banach de dimensions finie*, Seminaire d'analyse fonctionelle 1978–1979 (1979), exp. 10, 1-21.

14. Reinov O.I., *Operators of type RN in Banach spaces*, DAN SSSR **220** (1975), no. 3, 528-531, (in Russian).
15. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, DAN SSSR **256** (1981), no. 1, 43-47, (in Russian).
16. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
17. Reinov O.I., *A simple proof of two theorems of A.Grothendieck*, Vestnik LGU **7** (1983), 115-116, (in Russian).
18. Reinov O.I., *How bad may be a Banach space with the approximaton property?*, Matem. zametki **33** (1983), no. 6, 833-846, (in Russian).
19. Reinov O.I., *Disappearing tensor elements in the scale of p-nuclear operators*, in book "Theory of operators and theory of functions". Leningrad University (1983), 145-165, (in Russian).
20. Reinov O.I., *A finite dimensional aspect of the existence of non-nuclear operators with nuclear ajoints*, Reports of the Univ. of Stockholm., No 12 (1983).
21. Reinov O.I., *A survey of some results in connection with Grothendieck approximation property*, Math. Nachr. **119** (1984), 257-264.
22. Saphar P., *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires*, Studia Math. **38** (1970), 71-100 $MR43\#878$..
23. Szankowski A., *Subspaces without approximation property*, Israel J. Math. **30** (1978), 123–130.

Oleg I. Reinov
Department of Mathematics
St Petersburg University
St Peterhof, Bibliotechnaya pl. 2
198904 St Petersburg, Russia
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru