УДК 519.72; 621.391

С. М. Машарский

СВЕРТКА И КОРРЕЛЯЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ХААРА–КРЕСТЕНСОНА[1]

В пространстве дискретных N-периодических сигналов $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ рассматриваются два вейвлетных базиса, связанные с дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона. Для разложений по этим базисам получены аналоги известных теорем о сдвиге, свертке и корреляции.

Sergey M. Masharsky, Convolution and Correlation of Discrete Signals in Haar–Chrestenson Bases

Two wavelet bases, related with discrete Haar–Chrestenson transform, are considered in a space $\mathbb{C}_N$ of discrete N-periodic signals with $N = n^s$. Analogues of well-known theorems of shift, convolution and correlation for these bases are obtained.

Введение

В цифровой обработке сигналов важную роль играет их спектральный анализ в различных ортогональных базисах. Одной из задач такого анализа является установление связи между спектрами исходных сигналов и спектрами их сдвига, свертки и корреляции. В общем случае этот вопрос рассмотрен в [1, 2]. Полученные в этих работах результаты отражают свойства дискретных преобразований, являющихся собственными по отношению к оператору сдвига.

В последнее десятилетие бурно развиваются новые методы обработки сигналов, основанные на разложении по вейвлетным базисам [3, 4]. В отличие от классических ортогональных преобразований, вейвлет-преобразования не являются собственными по отношению к традиционным операторам сдвига, и поэтому результаты работ [1, 2] к ним неприменимы. Однако вопрос о спектрах сигналов в вейвлетных базисах остается актуальным. В частном случае (для базисов Хаара) этот вопрос изучался в [5–7].

В работах [8, 9] рассматриваются базисы Хаара–Крестенсона, которые являются обобщением базисов Хаара. Так же, как и в хааровском случае, спектры дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона имеют блочную древовидную структуру. В данной статье, являющейся обобщением работы [7], изучается связь этих спектров с операциями сдвига, свертки и корреляции. При этом, в зависимости от базиса, в качестве оператора сдвига может выступать циклический или n-ичный сдвиг. Соответственно, свертка и корреляция может быть циклической или n-ичной.

Прокомментируем содержание статьи по разделам.

В разд. 1 содержатся предварительные сведения, необходимые для изложения дальнейшего материала. Здесь вводятся базисы Хаара–Крестенсона, дается определение и приводятся основные свойства операции n-ичного сдвига.

В разд. 2 рассматривается базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по частоте. В качестве оператора сдвига здесь выступает n-ичный сдвиг. Установлено, что сдвиг сигнала приводит к сдвигам внутри блоков его спектра с одновременным

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00747).

поворотом спектральных коэффициентов в комплексной плоскости, а свертка и корреляция двух сигналов — соответственно к поблочной свертке и корреляции их спектров.

В разд. 3 рассматривается базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по времени. Оператором сдвига здесь является циклический сдвиг. Для спектра сдвига в этом случае получен результат, аналогичный представленному в разд. 2. Для спектров свертки и корреляции результаты более тонкие: свертка и корреляция двух сигналов приводят соответственно к модифицированной свертке и корреляции соответствующих блоков их спектров (модификация заключается в том, что при вычислении осуществляется поворот части слагаемых).

Характер полученных в статье результатов позволяет надеяться на их успешное применение в прикладных задачах фильтрации, сжатия и передачи сигналов по каналам связи.

1. Предварительные сведения

Линейное пространство $\mathbb{C}_N$ комплекснозначных N-периодических последовательность $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, будем называть *пространством сигналов.* В $\mathbb{C}_N$ обычным образом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Обозначим через $\delta_N(j)$ единичный N-периодический импульс, равный 1 при $j = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сигналов $\{\delta_N(j-k)\}, k = 0, 1, \ldots N-1$, образует естественный ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$.

Пусть $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $s \geq 2$. В пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ рассмотрим два вейвлетных базиса:

$$c(j); \quad f_\nu(\sigma; j - p\Delta_{\nu+1}), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \ \sigma \in 1 : n-1, \ \nu \in 1 : s; \tag{1.1}$$

$$c(j); \quad g_\nu(\sigma; j - p), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \ \sigma \in 1 : n-1, \ \nu \in 1 : s. \tag{1.2}$$

Здесь $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$, $N_\nu = N/n^\nu$, $c(j) \equiv 1$,

$$f_\nu(\sigma; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q), \tag{1.3}$$

$$g_\nu(\sigma; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \tag{1.4}$$

$\omega_n = \exp\{2\pi i/n\}$ — первообразный корень из 1 степени n.

Базисы (1.1) и (1.2) называются *базисами Хаара–Крестенсона, связанными* соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени* [9]. При $n = 2$ получаем базисы Хаара.

Постоянно будут использоваться следующие обозначения: $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть вещественного числа α; $\langle k \rangle_n = k - \lfloor k/n \rfloor n$ — остаток от деления целого числа k на натуральное n.

Для целого числа $a \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ запись $a = (a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots, a_0)_n$ означает

$$a = a_{s-1}n^{s-1} + a_{s-2}n^{s-2} + \ldots + a_0, \quad a_k \in 0 : n-1, \; k \in 0 : s-1.$$

Пусть $a, b \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $a = (a_{s-1}, \ldots, a_0)_n$, $b = (b_{s-1}, \ldots, b_0)_n$. *Поразрядной суммой по модулю n* чисел a и b называется число $c = (c_{s-1}, \ldots, c_0)_n$, такое, что $c_k = \langle a_k + b_k \rangle_n$, $k \in 0 : s-1$. Кратко это соотношение записывается так: $c = a \underset{n}{\oplus} b$. Очевидно, что операция "$\underset{n}{\oplus}$" не выводит из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и обладает следующими свойствами:

$$a \underset{n}{\oplus} b = b \underset{n}{\oplus} a, \qquad a \underset{n}{\oplus} 0 = a, \qquad a \underset{n}{\oplus} (b \underset{n}{\oplus} c) = (a \underset{n}{\oplus} b) \underset{n}{\oplus} c.$$

Число a^* называется *n-ично противоположным* числу a, если $a \underset{n}{\oplus} a^* = 0$. Нетрудно видеть, что если $a^* = (a^*_{s-1}, \ldots, a^*_0)_n$, то из условия $\langle a_k + a^*_k \rangle_n = 0$, $k \in 0 : s-1$, следует

$$a^*_k = \langle -a_k \rangle_n = \begin{cases} n - a_k, & a_k \neq 0, \\ 0, & a_k = 0. \end{cases}$$

Число $a \underset{n}{\ominus} b := a \underset{n}{\oplus} b^*$ называется *поразрядной разностью по модулю n*.

Зафиксируем $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Отображения $j \to j \underset{n}{\oplus} q$ и $j \to j \underset{n}{\ominus} q$, $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, называются соответственно *n-сдвигом вправо* и *n-сдвигом влево* на величину q. Отметим, что n-сдвиг является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

2. Базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по частоте, и оператор n-ичного сдвига

Начнем с нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *При $\sigma \in 1 : n-1$ справедлива формула*

$$f_\nu(\sigma; j) = \omega_n^{\sigma \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} \, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor\big), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Правая часть (2.1) равна $\omega_n^{\sigma\tau}$ при $j \in \tau\Delta_\nu : (\tau+1)\Delta_\nu - 1$, $\tau \in 0 : n-1$, и равна 0 при $j \in \Delta_{\nu+1} : N-1$ (учесть, что $N = \Delta_{\nu+1} N_\nu$). Те же значения при указанных j принимает согласно (1.3) и $f_\nu(\sigma; j)$. Таким образом, при $j \in 0 : N-1$ равенство (2.1) верно. Остается проверить N-периодичность правой части (2.1). Она следует из того, что при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{j + kN}{\Delta_\nu} = \frac{j}{\Delta_\nu} + nkN_\nu, \qquad \frac{j + kN}{\Delta_{\nu+1}} = \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} + kN_\nu.$$

Лемма доказана. ∎

Следствие. *При $p \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$f_\nu(\sigma; j - p\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} \, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p\big). \tag{2.2}$$

Формулы (2.1) и (2.2) несколько упрощаются при $j \in 0 : N-1$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$, то

$$\left\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \right\rfloor = j_{s-1} n^{s-\nu} + \ldots + n\, j_\nu + j_{\nu-1},$$

так что
$$\omega_n^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = \omega_n^{j_{\nu-1}}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *При фиксированном* $q \in 0 : N-1$, $q = (q_{s-1}, \dots, q_0)_n$ *справедливо равенство*
$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu\big(\sigma;\, j - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big), \quad j \in 0 : N-1. \tag{2.4}$$

Доказательство. Имеем $j = \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + j_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle j \rangle_{\Delta_\nu}$, $q = \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q \rangle_{\Delta_\nu}$. Значит,
$$j \underset{n}{\ominus} q = \left(\left\lfloor \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} \right\rfloor \underset{n}{\ominus} \left\lfloor \frac{q}{\Delta_{\nu+1}} \right\rfloor \right) \Delta_{\nu+1} + \langle j_{\nu-1} - q_{\nu-1} \rangle_n\, \Delta_\nu + \Big(\langle j \rangle_{\Delta_\nu} \underset{n}{\ominus} \langle q \rangle_{\Delta_\nu} \Big).$$
Согласно (2.1) и (2.3) получаем
$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{\sigma(j_{\nu-1} - q_{\nu-1})}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \underset{n}{\ominus} \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \big). \tag{2.5}$$
Отметим, что при $a, b \in 0 : N-1$
$$\delta_{N_\nu}(a \underset{n}{\ominus} b) = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ если } a = b \\ 0, \text{ если } a \neq b \end{matrix} \right\} = \delta_{N_\nu}(a-b),$$
поэтому равенство (2.5) принимает вид
$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}} \left[\omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \big) \right].$$
Учитывая (2.2) и (2.3), приходим к (2.4). Лемма доказана. ■

Следствие. *При* $p \in 0 : N_\nu - 1$ *справедливо равенство*
$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in 0 : N-1. \tag{2.6}$$

Лемма 2.3. *При* $j \in 0 : N-1$, $\sigma \in 1 : n-1$ *справедливо равенство*
$$f_\nu(\sigma;\, j^*) = \overline{f_\nu}(\sigma;\, j). \tag{2.7}$$

Доказательство. Если $j \in \Delta_{\nu+1} : N-1$, то и $j^* \in \Delta_{\nu+1} : N-1$, поэтому при таких j (2.7) превращается в тождество $0 = 0$. Пусть теперь $j \in \tau\Delta_\nu : (\tau+1)\Delta_\nu - 1$ при некотором $\tau \in 0 : n-1$. Это значит, что $j = (\tau, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_n$, поэтому $j^* = (\tau^*, j^*_{\nu-2}, \dots, j^*_0)_n$. Согласно (2.1) и (2.3) при таком j имеем
$$f_\nu(\sigma;\, j^*) = \omega_n^{\sigma\tau^*} = \omega_n^{-\sigma\tau} = \overline{f_\nu}(\sigma;\, j).$$

Лемма доказана. ■

Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису (1.1):
$$x(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad x_\nu(\sigma,p) = \frac{1}{n^\nu}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{f_\nu}(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Совокупность коэффициентов разложения (2.8)

$$H_f(x) = \bigl\{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p),\ p\in 0:N_\nu-1,\ \sigma\in 1:n-1,\ \nu\in 1:s\bigr\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала x, *связанный с прореживанием по частоте*. Преобразование $x \to H_f(x)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте.*

Установим связь между спектрами исходного и n-ично сдвинутого сигнала.

Теорема 2.1. *Зафиксируем $q\in 0:N-1$, $q=(q_{s-1},\ldots,q_0)_n$. Наряду с сигналом $x\in\mathbb{C}_N$ рассмотрим сигнал $\tilde x(j) = x(j \ominus_n q)$, $j\in 0:N-1$. Пусть $H_f(x)=\{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(\tilde x)=\{\tilde\alpha;\ \tilde x_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\tilde\alpha=\alpha$ и*

$$\tilde x_\nu(\sigma,p) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, x_\nu\bigl(\sigma,\, p \ominus_n \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\bigr),$$

$$p\in 0:N_\nu-1,\quad \sigma\in 1:n-1,\quad \nu\in 1:s.$$

Доказательство. Согласно (2.8) и (2.6)

$$x(j\ominus_n q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,k)\, f_\nu\bigl(\sigma;\ (j\ominus_n q)\ominus_n k\Delta_{\nu+1}\bigr).$$

Так как

$$(j\ominus_n q)\ominus_n k\Delta_{\nu+1} = j\ominus_n (q\oplus_n k\Delta_{\nu+1}) = j\ominus_n \bigl((\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor \oplus_n k)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q\rangle_{\Delta_\nu}\bigr),$$

то в силу (2.4) имеем

$$x(j\ominus_n q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,k)\,\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu\bigl(\sigma;\ j - (\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor \oplus_n k)\Delta_{\nu+1}\bigr).$$

Произведя замену $p = k\oplus_n \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor$, получим

$$x(j\ominus_n q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu\bigl(\sigma,\, p\ominus_n \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\bigr)\,\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu(\sigma;\ j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Остается учесть единственность разложения по ортогональному базису. ■

Перейдем к вопросу о спектре свертки. Пусть x, $y\in\mathbb{C}_N$; сигнал z, формируемый по правилу

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j\ominus_n k),\quad j\in 0:N-1, \tag{2.9}$$

называется *n-сверткой* сигналов x и y.

Теорема 2.2. *Пусть z — n-свертка сигналов x и y, $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(z) = \{\gamma;\ z_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\gamma = \alpha\beta N$ и*

$$z_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,\ p \ominus_n q),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство. По предыдущей теореме

$$y(j \ominus_n k) = y(k^* \ominus_n j^*) =$$

$$= \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma j^*_{\nu-1}}\, y_\nu(\sigma,\ l \ominus_n \lfloor j^*/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, f_\nu(\sigma;\ k^* - l\Delta_{\nu+1}). \tag{2.10}$$

Согласно (2.6) и (2.7)

$$f_\nu(\sigma;\ k^* - l\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(\sigma;\ k^* \ominus_n l\Delta_{\nu+1}) = \overline{f_\nu}(\sigma;\ k \ominus_n l^*\Delta_{\nu+1}) = \overline{f_\nu}(\sigma;\ k - l^*\Delta_{\nu+1}).$$

Произведя в (2.10) замену $q = l^*$, с учетом предыдущего равенства получим

$$y(j \ominus_n k) = \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, y_\nu(\sigma,\ q^* \oplus_n \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, \overline{f_\nu}(\sigma;\ k - q\Delta_{\nu+1}). \tag{2.11}$$

Как уже упоминалось, базис (1.1) является ортогональным; кроме того, известно [9], что $\|f_\nu(\sigma; \cdot - q\Delta_{\nu+1})\|^2 = n^\nu$. Учитывая эти факты, а также формулы (2.8), (2.11) и определение (2.9), запишем

$$z(j) = \alpha\beta N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, y_\nu(\sigma,\ q^* \oplus_n \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, n^\nu.$$

Но в силу (2.2)

$$\omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, y_\nu(\sigma,\ q^* \oplus_n \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) = \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,\ q^* \oplus_n p)\, \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,\ p \ominus_n q)\, f_\nu(\sigma;\ j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Значит,

$$z(j) = \alpha\beta N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \left\{ n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,\ p \ominus_n q) \right\} f_\nu(\sigma;\ j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. ■

Пусть $x,\, y \in \mathbb{C}_N$. Сигнал r, формируемый по правилу

$$r(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{y}(k \underset{n}{\ominus} j), \quad j \in 0 : N-1, \tag{2.12}$$

называется *n-корреляцией* сигналов x и y.

Теорема 2.3. *Пусть r — n-корреляция сигналов x и y, $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(r) = \{\varrho;\ r_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$ и*

$$r_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\,\overline{y_\nu}(\sigma,\, q \underset{n}{\ominus} p),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство. Сигнал (2.12) представляет собой n-свертку сигналов x и v, где

$$v(j) = \overline{y}(j^*), \quad j \in 0 : N-1.$$

Согласно (2.6) и (2.7)

$$v(j) = \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} \overline{y_\nu}(\sigma,p)\,\overline{f_\nu}(\sigma;\, j^* - p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} \overline{y_\nu}(\sigma,p)\,f_\nu(\sigma;\, j - p^*\Delta_{\nu+1}).$$

Отсюда по теореме 2.2 получаем $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$,

$$r_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\,v_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\,\overline{y_\nu}(\sigma,\, q \underset{n}{\ominus} p),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Теорема доказана. ■

3. Базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по времени, и оператор циклического сдвига

Обратимся к вейвлетному базису (1.2).

Лемма 3.1. *При $\sigma \in 1 : n-1$ справедлива формула*

$$g_\nu(\sigma;\, j) = \omega_n^{\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Сигнал $g_\nu(\sigma;\, j)$ в силу (1.4) является $N_{\nu-1}$-периодическим. Тем же свойством обладает и сигнал, стоящий в правой части (3.1). Значит, равенство (3.1) достаточно проверить на основном периоде $0 : N_{\nu-1} - 1$.

Пусть $j = \tau N_\nu$ при некотором $\tau \in 0 : n-1$. Тогда правая часть (3.1) принимает значение $\omega_n^{\sigma\tau}$. Это же значение согласно (1.4) принимает и $g_\nu(\sigma;\, j)$. При остальных $j \in 0 : N_{\nu-1}$ равенство (3.1) превращается в $0 = 0$. Лемма доказана. ■

Следствие. *При $p \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$g_\nu(\sigma;\, j-p) = \omega_n^{\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\omega_n^{\sigma\lfloor (j-p)/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p) = \omega_n^{\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p). \tag{3.3}$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят $N_{\nu-1}$-периодические по j сигналы, то достаточно проверить его на периоде $p : p + N_{\nu-1} - 1$. При $j = p + \tau N_\nu$, $\tau \in 0 : n-1$, равенство (3.3) верно. Но оно также верно и при остальных j из указанного периода, поскольку в этом случае обе части (3.3) равны нулю. Таким образом, равенство (3.3) при $p \in 0 : N_\nu - 1$ и $j \in \mathbb{Z}$ установлено.

Теперь (3.2) следует из (3.1) и (3.3). ■

Формулы (3.1) и (3.2) принимают более простой вид при $j \in 0 : N-1$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \dots, j_0)_n$, то

$$\left\lfloor \frac{j}{N_\nu} \right\rfloor = j_{s-1} n^{\nu-1} + \ldots + j_{s-\nu+1}\, n + j_{s-\nu},$$

так что

$$\omega_n^{\lfloor j/N_\nu\rfloor} = \omega_n^{j_{s-\nu}}. \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. *При всех целых j и p*

$$g_\nu(\sigma;\, j-p) = \omega_n^{\sigma\lfloor p/N_\nu\rfloor}\, g_\nu\big(\sigma;\, j - \langle p\rangle_{N_\nu}\big). \tag{3.5}$$

Доказательство. Согласно (3.1) при $j,\, k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$g_\nu(\sigma;\, j - kN_\nu) = \omega_n^{\sigma k}\, g_\nu(\sigma;\, j). \tag{3.6}$$

Поскольку $p = \lfloor p/N_\nu\rfloor N_\nu + \langle p\rangle_{N_\nu}$, то

$$j - p = \big(j - \langle p\rangle_{N_\nu}\big) - \lfloor p/N_\nu\rfloor N_\nu.$$

Остается воспользоваться формулой (3.6). ■

Лемма 3.3. *При $\sigma \in 1 : n-1$ справедливы тождества*

$$g_\nu(\sigma;\, -j) = \overline{g_\nu}(\sigma;\, j) = g_\nu(n-\sigma;\, j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Проверим, что

$$\omega_n^{\sigma\lfloor -j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j) = \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

Действительно, если $j = kN_\nu$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, то левая и правая часть (3.8) равна $\omega_n^{-\sigma k}$. При остальных $j \in \mathbb{Z}$ обе части равенства (3.8) равны нулю.

Перейдем к доказательству равенства (3.7). Согласно (3.1) и (3.8) имеем

$$g_\nu(\sigma;\,-j)=\omega_n^{\sigma\lfloor -j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(-j)=\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j)=\overline{g_\nu}(\sigma;\,j).$$

С другой стороны,

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j)=\omega_n^{(n-\sigma)\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j)=g_\nu(n-\sigma;\,j).$$

Лемма доказана. ■

Любой сигнал $x\in\mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису (1.2):

$$x(j)=\alpha'+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1}x'_\nu(\sigma,p)\,g_\nu(\sigma;\,j-p),\quad j\in\mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Здесь

$$\alpha'=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(j),\qquad x'_\nu(\sigma,p)=\frac{1}{n^\nu}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\,\overline{g_\nu}(\sigma;\,j-p).$$

Совокупность коэффициентов этого разложения

$$H_g(x)=\bigl\{\alpha';\ x'_\nu(\sigma,p),\ p\in 0:N_\nu-1,\ \sigma\in 1:n-1,\ \nu\in 1:s\bigr\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала x, *связанный с прореживанием по времени*. Преобразование $x\to H_g(x)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени*.

Установим связь между спектрами исходного и сдвинутого сигнала.

Теорема 3.1. *Зафиксируем $q\in 0:N-1$. Наряду с сигналом $x\in\mathbb{C}_N$ рассмотрим сигнал $\tilde{x}(j)=x(j-q)$. Пусть $H_g(x)=\{\alpha';\ x'_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(\tilde{x})=\{\tilde{\alpha}';\ \tilde{x}'_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\tilde{\alpha}'=\alpha'$ и*

$$\tilde{x}'_\nu(\sigma,p)=\omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu\rfloor}\,x'_\nu\bigl(\sigma,\,\langle p-q\rangle_{N_\nu}\bigr),$$
$$p\in 0:N_\nu-1,\quad \sigma\in 1:n-1,\quad \nu\in 1:s.$$

Доказательство. Согласно (3.9) и (3.5) имеем

$$x(j-q)=\alpha'+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}x'_\nu(\sigma,k)\,g_\nu(\sigma;\,j-q-k)=$$

$$=\alpha'+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}x'_\nu(\sigma,k)\,\omega_n^{\sigma\lfloor (q+k)/N_\nu\rfloor}\,g_\nu\bigl(\sigma;\,j-\langle q+k\rangle_{N_\nu}\bigr).$$

Произведем замену $p=\langle q+k\rangle_{N_\nu}$. В этом случае $k=\langle p-q\rangle_{N_\nu}$ и

$$\Bigl\lfloor\frac{q+k}{N_\nu}\Bigr\rfloor=\Bigl\lfloor\frac{q+\langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu}\Bigr\rfloor=\lfloor q/N_\nu\rfloor+\Bigl\lfloor\frac{\langle q\rangle_{N_\nu}+\langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu}\Bigr\rfloor.$$

Отметим, что

$$\Bigl\lfloor\frac{\langle q\rangle_{N_\nu}+\langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu}\Bigr\rfloor=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если}\ p\ge\langle q\rangle_{N_\nu}\\ 1,\ \text{если}\ p<\langle q\rangle_{N_\nu}\end{array}\right\}=-\Bigl\lfloor\frac{p-\langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu}\Bigr\rfloor.$$

Значит,

$$\left\lfloor \frac{q+k}{N_\nu} \right\rfloor = \lfloor q/N_\nu \rfloor - \left\lfloor \frac{p-\langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = -\left(\left\lfloor \frac{p-\langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor - \lfloor q/N_\nu \rfloor \right) = -\left\lfloor \frac{p-q}{N_\nu} \right\rfloor .$$

Окончательно получаем

$$x(j-q) = \alpha' + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} x'_\nu\bigl(\sigma, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\bigr)\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, g_\nu(\sigma;\, j-p).$$

Теорема доказана. ■

Перейдем к вопросу о спектре свертки. Напомним, что циклической сверткой сигналов x и y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал $z = x * y$ с компонентами

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j-k), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. *Пусть z — циклическая свертка сигналов x и y, $H_g(x) = \{\alpha';\ x'_\nu(\sigma, p)\}$, $H_g(y) = \{\beta';\ y'_\nu(\sigma, p)\}$, $H_g(z) = \{\gamma';\ z'_\nu(\sigma, p)\}$. Тогда $\gamma' = \alpha'\beta' N$ и*

$$z'_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \left\{ \sum_{q=0}^{p} x'_\nu(\sigma, q)\, y'_\nu(\sigma,\, p-q) + \omega_n^\sigma \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} x'_\nu(\sigma, q)\, y'_\nu(\sigma,\, N_\nu + p - q) \right\},$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3.1

$$y(j-k) = y\bigl(-k-(-j)\bigr) =$$

$$= \beta' + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (l+j)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\bigl(\sigma, \langle l+j\rangle_{N_\nu}\bigr)\, g_\nu(\sigma;\, -k-l).$$

Сделаем замену $q = \langle -l\rangle_{N_\nu}$. Тогда $l = \langle -q\rangle_{N_\nu}$.

При $q \in 1 : N_\nu - 1$ получаем $\bigl\langle \langle -q\rangle_{N_\nu} + j \bigr\rangle_{N_\nu} = \langle j-q\rangle_{N_\nu}$,

$$\left\lfloor \frac{\langle -q\rangle_{N_\nu} + j}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N_\nu - q + j}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j-q}{N_\nu} \right\rfloor + 1.$$

Кроме того, в силу (3.6)

$$g_\nu\bigl(\sigma;\, -k - \langle -q\rangle_{N_\nu}\bigr) = g_\nu(\sigma;\, -k - N_\nu + q) = \omega_n^\sigma\, g_\nu(\sigma;\, q-k).$$

Таким образом, слагаемое с индексом q имеет вид

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\bigl(\sigma, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\bigr)\, g_\nu(\sigma;\, q-k). \tag{3.11}$$

При $q = 0$ получаем $\langle -q\rangle_{N_\nu} = 0$; слагаемое с индексом $q = 0$ имеет вид $\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor} \times$ $\times\, y'_\nu\bigl(\sigma, \langle j\rangle_{N_\nu}\bigr)\, g_\nu(\sigma;\, -k)$, что формально совпадает с (3.11).

Учитывая сказанное выше и лемму 3.3, приходим к равенству

$$y(j-k) = \beta' + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, k-q). \tag{3.12}$$

Как уже упоминалось, базис (1.2) является ортогональным; кроме того [9], $\|g_\nu(\sigma; \cdot - q)\|^2 = n^\nu$. Опираясь на эти факты, а также на формулы (3.9), (3.12) и определение (3.10), запишем

$$z(j) = \alpha'\beta' N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x'_\nu(\sigma, q)\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma,\, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big)\, n^\nu.$$

Но

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma,\, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big) = \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (\langle j\rangle_{N_\nu}-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma,\, \big\langle \langle j\rangle_{N_\nu} - q\big\rangle_{N_\nu}\big) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big)\, \delta_{N_\nu}\big(\langle j\rangle_{N_\nu} - p\big).$$

Согласно (3.2) и (3.7)

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}\big(\langle j\rangle_{N_\nu} - p\big) = \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p) = g_\nu(n-\sigma;\, j-p),$$

поэтому

$$z(j) = \alpha'\beta' N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \left\{ n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x'_\nu(\sigma, q)\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, y'_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big) \right\} g_\nu(n-\sigma;\, j-p).$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, x'_\nu(\sigma, q)\, y'_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} x'_\nu(\sigma, q)\, y'_\nu(\sigma, p-q) + \omega_n^{\sigma} \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} x'_\nu(\sigma, q)\, y'_\nu(\sigma, N_\nu + p - q).$$

Теорема доказана. ∎

Напомним, что циклической корреляцией сигналов x и y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал r с компонентами

$$r(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, \overline{y}(k-j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

Теорема 3.3. *Пусть r — циклическая корреляция сигналов x и y, $H_g(x) = \{\alpha';\ x'_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(y) = \{\beta';\ y'_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(r) = \{\varrho';\ r'_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\varrho' = \alpha'\overline{\beta'}N$ и*

$$r'_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \left\{ \sum_{q=p}^{N_\nu-1} x'_\nu(\sigma, q)\, \overline{y'_\nu}(\sigma,\, q-p) + \omega_n^{-\sigma} \sum_{q=0}^{p-1} x'_\nu(\sigma, q)\, \overline{y'_\nu}(\sigma,\, N_\nu + q - p) \right\},$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство. Сигнал (3.13) есть циклическая свертка сигнала x с сигналом

$$v(j) := \overline{y}(-j) = \overline{\beta'} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \overline{y'_\nu}(\sigma, p)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, -j-p) =$$

$$= \overline{\beta'} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \overline{y'_\nu}(\sigma, p)\, g_\nu(\sigma;\, j+p).$$

Мы воспользовались формулой (3.7).

Найдем спектр Хаара–Крестенсона сигнала v. При $p \in 1 : N_\nu - 1$ согласно (3.6) имеем

$$g_\nu(\sigma;\, j+p) = \omega_n^{-\sigma}\, g_\nu(\sigma;\, j+p-N_\nu) = \omega_n^{-\sigma}\, g_\nu\big(\sigma;\, j-(N_\nu - p)\big),$$

поэтому

$$v'_\nu(\sigma, p) = \omega_n^{-\sigma}\, \overline{y'_\nu}(\sigma, N_\nu - p),$$

$$p \in 1 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 1 : n-1, \quad \nu \in 1 : s.$$

При этом, очевидно, $v'_\nu(\sigma, 0) = \overline{y'_\nu}(\sigma, 0)$, $\sigma \in 1 : n-1$, $\nu \in 1 : s$.

По теореме 3.2 получаем $\varrho' = \alpha' \overline{\beta'} N$,

$$r'_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \Bigg\{ \sum_{q=0}^{p-1} x'_\nu(\sigma, q)\, v'_\nu(\sigma,\, p-q) + x'_\nu(\sigma, p)\, v'_\nu(\sigma,\, 0) +$$

$$+ \omega_n^\sigma \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x'_\nu(\sigma, q)\, v'_\nu(\sigma,\, N_\nu + p - q) \Bigg\} =$$

$$= n^\nu \Bigg\{ \omega_n^{-\sigma} \sum_{q=0}^{p-1} x'_\nu(\sigma, q)\, \overline{y'_\nu}(\sigma,\, N_\nu + q - p) + x'_\nu(\sigma, p)\, \overline{y'_\nu}(\sigma,\, 0) + \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x'_\nu(\sigma, q)\, \overline{y'_\nu}(\sigma,\, q-p) \Bigg\}.$$

Теорема доказана. ■

Литература

1. *Айзенберг Н. Н., Трофимлюк О. Т.* Сдвиг, свертка и корреляционная функция дискретных сигналов в произвольном базисе // ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 1. С. 47–51.

2. *Кухарев Г. А.* Основные теоремы сдвига, свертки и корреляции для задач цифровой обработки сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т. 28. № 8. С. 26–31.

3. *Daubechies I.* The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. No. 5. P. 961–1005.

4. *Петухов А. П.* Периодические дискретные всплески. // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 3. С. 151–183.

5. *Malozemov V. N., Masharsky S. M.* Haar spectra of discrete signals. In: Tools for Math. Modelling. The Second International Conf. June 14–19, 1999. Abstracts. St. Petersburg, 1999.P. 86–87.

6. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 2.

7. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Хааровские спектры дискретных сверток // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6.

8. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.

9. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Электронный архив препринтов С.-Петербургского мат. общества. Препринт № 1999-21. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/1999/index.html#21