ЗАМЕТКИ О ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.И.Рейнов.

Мы исследуем вопрос, связанный с вычислением норм тензорных произведений операторов, действующих между функциональными пространствами Лебега: верно ли, что норма тензорного произведения $A \otimes B : L^p(\mu \otimes \mu) \to L^q(\nu \otimes \nu)$ операторов $A : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ и $B : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ совпадает с произведением $\|A\|\|B\|$ их норм?

Мы формулируем и доказываем утверждения, которые показывают, что ответ положителен тогда и только тогда, когда $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

Этот результат является ответом на вопрос, поставленный автору профессором Я. Ю. Никитиным в конце мая 2000 г. Полученный результат может быть использован при изучении асимптотики хвоста распределения L_p-нормы гауссовских полей на единичном квадрате, у которых ковариация распадается в произведение одномерных ковариаций. Типичным примером такого поля является броуновский лист (см., например, [1]). Такая асимптотика представляет интерес также для вычисления приближенной бахадуровской асимптотической эффективности непараметрических критериев независимости, основанных на L_p-нормах эмпирических полей (см. [2, гл. 5]) .

Положительная часть представленных здесь результатов может быть установлена с использованием абстрактной техники теории тензорных произведений в нормированных пространствах, но имеется также и удивительно простое элементарное доказательство, использующее только некоторые стандартные факты классической теории интеграла Лебега. Что касается отрицательной части наших результатов (“контрпримеров”), то для их вывода используются некоторые оценки из теории конечномерных p-суммирующих операторов в нормированных пространствах. Последнее доказательство состоит из одиннадцати лемм, в которых мы рассматриваем, шаг за шагом, различные возможные случаи, такие как $1 < q < p < 2$, $1 < q < 2 < p < +\infty$ и т.д.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант №97-0-1.7-36) и Федеральной целевой программой “Интеграция” (грант № 326.53).

§ 1. Предварительные сведения

Алгебраическое тензорное произведение $X\otimes Y$ банаховых пространств X и Y будем рассматривать также как линейное пространство всех *-слабо непрерывных линейных отображений конечного ранга (конечномерных) из X^* в Y (или из Y^* в X — из контекста всегда понятно, о каком случае идет речь). Если пространство X сопряжено, т. е. $X = W^*$ для некоторого нормированного пространства W, то тензорное произведение $W^*\otimes Y$ будет рассматриваться как множество всех конечномерных операторов из W в Y, что не приведет к недоразумению в конкретных ситуациях.

Норма α на алгебраическом произведении $X\otimes Y$ банаховых пространств X и Y называется *кросс–нормой*, если

$$\alpha(x\otimes y) = \|x\|\|y\| \quad \forall x \in X,\ y \in Y.$$

Пространство $X\otimes Y$, снабженное нормой α, обычно (если не указано противное) обозначается через $X\otimes_\alpha Y$, а его пополнение — через $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$. Пусть X, Y, E, F — банаховы пространства. Алгебраическое тензорное произведение $A\otimes B$ операторов $A \in L(X,E)$, $B \in L(Y,F)$ есть линейный оператор из $X\otimes Y$ в $E\otimes F$, однозначно определяемый своими значениями на элементарных тензорах:

$$(A\otimes B)(x\otimes y) := Ax\otimes By,$$

и продолжаемый на все пространство по линейности:

$$(A\otimes B)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right) := \sum_{i=1}^{n} Ax_i\otimes By_i, \quad x_i \in X, y_i \in Y.$$

Пусть $A\otimes B : X\otimes Y \to E\otimes F$. Если $e' \in E^*$ и $f \in F$, то

$$\langle (Ax\otimes By)e', f\rangle = \langle Ax, e'\rangle\langle By, f'\rangle = \langle B \circ (x\otimes y) \circ A^* e', f\rangle,$$

т. е. $(A\otimes B)(U) = BUA^*$ для операторов U из $X\otimes Y$.

Если E — банахово пространство, $p \in [1,+\infty]$ и (Ω,Σ,μ) — пространство с положительной мерой, то через $L^p(\Omega,\Sigma,\mu;E)$ ($L^p(\mu;E)$ либо $L^p(X)$) обозначается линейное пространство всех сильно измеримых E-значных функций $f : \Omega \to E$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|_p^p := \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p d\mu(\omega).$$

Пространство $L^p(E)$, снабженное нормой (как обычно, почти всюду равные функции отождествляются) $\|\cdot\|_p$, становится банаховым (подробности можно найти в [3] или любой книге по функциональному анализу, например, [4] или

[5]). Как хорошо известно, если ν — σ-конечная мера на некотором пространстве, то $L^p(\mu; L^p(\nu))$ естественным образом отождествляется с множеством всех измеримых функций двух переменных — с банаховым пространством $L^p(\mu\otimes\nu)$. Это соответствие является изометрией. Иногда мы пишем для краткости $L^p(L^p)$, что не должно привести к недоразумениям, поскольку из контекста всегда понятно о каком именно пространстве идет речь. Рассматриваемые далее меры считаются σ-конечными.

Для $r \in [1, +\infty]$ алгебраическое тензорное произведение $L^r\otimes L^r$ состоит из тензоров вида

$$\Phi = \sum_1^N f_k \otimes g_k,$$

которые рассматриваются, с одной стороны, как конечномерные операторы из $L^{r'}$ в L^r, а с другой стороны, как функции, измеримые на произведении $S \times T$:

$$\Phi(s,t) = \sum_1^N f_k(s) g_k(t).$$

Для таких функций имеем

$$\Phi \in L^r(S \times T, \mu\otimes\nu).$$

Для $r < \infty$ обозначим через $L^r\otimes_r L^r$ тензорное произведение с нормой $\|\cdot\|_r$, индуцированной из $L^r(\mu\otimes\nu)$, и через $L^r\widetilde{\otimes}_r L^r$ — его пополнение. Так как пространство $L^r\otimes_r L^r$ содержит все простые функции вида (1) (где вместо f_k, g_k рассматриваются характеристические функции попарно дизъюнктных множеств) и $r < +\infty$, это пространство плотно в $L^r(\mu\otimes\nu)$. Таким образом, $L^r\widetilde{\otimes}_r L^r$ и $L^r(\mu\otimes\nu)$ изометрически совпадают.

На тензорном произведении $X \otimes Y$ рассмотрим тензорные нормы. Некоторые из норм индуцируются соответствующими пространствами операторов, тогда как другие сами индуцируют операторные нормы (эти нормы в других обозначениях рассматривались впервые, видимо, в [6–8], где были также введены аппроксимационные условия "порядка p" на банаховы пространства и связанные, в частности, с аппроксимацией абсолютно p-суммирующих операторов конечномерными операторами).

p-Проективная тензорная норма $\|\cdot\|_p$ для $p \in [1, +\infty]$ определяется на произведении $X \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X \otimes Y$, то

$$\|z\|_p := \inf \left(\sum_{k=1}^N \|x_k\|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\|\leqslant 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^N |< y_k, y' >|^{p'} \right)^{1/p'} \right\} \tag{1.1}$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и инфимум берется по всевозможным представлениям $z = \sum_{k=1}^N x_k \otimes y_k$ тензорного элемента z в пространстве $X\otimes Y$. Формула (1.1) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$. В случаях $p = 1$, и $p = +\infty$, определение следует модифицировать очевидным образом.

Алгебраическое тензорное произведение пространств X и Y, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$, обозначается через $X \otimes_p Y$, а его пополнение — через $X \widehat{\otimes}_p Y$. В случае $p = 1$ мы получаем проективное тензорное произведение, введенное и детально изученное Гротендиком [9] и играющее огромную роль, в частности, в теории ядерных пространств и теории аппроксимации линейных операторов.

Мы используем стандартные обозначения из теории операторных идеалов: Π_p, N_p и I_p обозначают идеалы абсолютно p-суммирующих, p-ядерных и строго p-интегральных операторов с нормами π_p, ν_p и i_p соответственно. Определения этих классов можно найти, например, в справочнике по операторным идеалам [10]. Отметим, что мы используем обозначения, отличающиеся от принятых в [10].

Справедливы следующие неравенства:

$$\|\cdot\| \leqslant \pi_p \leqslant i_p \leqslant \nu_p \leqslant \nu_1.$$

Для любых отделимого компактного пространства K и пространства с σ-конечной мерой μ при $p \geqslant 1$ имеют место равенства [10, п. 17.3.5]

$$\Pi_p(C(K), F) = \mathrm{I}_p(C(K), F), \quad \Pi_p(L^\infty(\mu), F) = \mathrm{I}_p(L^\infty(\mu), F).$$

Если пространство F рефлексивно, то

$$\Pi_1(C(K), F) = \mathrm{N}_1(C(K), F) = C^*(K) \widehat{\otimes}_1 F.$$

Аналогичные соотношения справедливы для пространства $L^\infty(\mu)$ (см. [9, 11]). С другой стороны, имеем [10, п. 19.2.7]

$$\Pi_p(E, L^\infty) = \mathrm{I}_p(E, L^\infty).$$

Для рефлексивного пространства E при любом $p \in [1, +\infty)$ любой p-интегральный оператор, заданный на E, является p-ядерным (см., например, [11, 12]). В частности, для рефлексивного пространства E и $p \in [1, +\infty)$ выполняются соотношения

$$\Pi_p(E, L^\infty) = \mathrm{I}_p(E, L^\infty) = \mathrm{N}_p(E, L^\infty),$$

при этом соответствующие нормы равны.

Если $T \in L(E, L^r)$ и $T^* \in \Pi_r(L^{r'}, E^*)$, то $T \in \Pi_r(E, L^r)$ и $\pi_r(T) \leqslant \pi_r(T^*)$ по теореме двойственности Шварца (см., например, [7, 12–14]). Поэтому, если $1 \leqslant r < \infty$, то для оператора $T \in L(L^{r'}, L^r)$ условия $T \in \Pi_r$ и $T^* \in \Pi_r$ равносильны, при этом $\pi_r(T) = \pi_r(T^*)$. Кроме того, если дополнительно $r > 1$, то ввиду рефлексивности пространства L^r пространства $\Pi_r(L^{r'}, L^r)$, $\mathrm{I}_r(L^{r'}, L^r)$ и $\mathrm{N}_r(L^{r'}, L^r)$ совпадают (с равенством норм) и отождествляются с тензорным произведением $L^r \widehat{\otimes}_r L^r$. При $r \in [1, +\infty)$ это тензорное произведение совпадает с тензорным произведением

$L^r \widetilde{\otimes}_r L^r$ или с банаховыми пространствами $L^r(\mu \otimes \nu)$, $L^r(\mu; L^r(\nu))$ или пространством $L^r(\nu; L^r(\mu))$. Впервые этот факт установлен Гротендиком [9] для случая $p = 1$ и Перссоном [12] для остальных показателей $p \geqslant 1$ (см. также [8]).

Если H — гильбертово пространство, то все пространства $\Pi_p(H, H)$ совпадают между собой и совпадают с пространством всех операторов Гильберта — Шмидта [15] (см. также [10]).

Будем говорить, что оператор $U \in \mathrm{L}(X, Y)$ *факторизуется через гильбертово пространство* (является 2-*факторизуемым*), если существуют гильбертово пространство H и два оператора $U_1 : X \to H$ и $U_2 : H \to Y$ такие, что $U = U_2 U_1$. Инфимум произведений $\|U_1\| \, \|U_2\|$ по всем подобным факторизациям обозначается через $\gamma_2(U)$ и является идеальной нормой (в смысле Пича [10]) на семействе всех 2-факторизуемых операторов.

Если $1 \leqslant r \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, то любой оператор из $L^p(\mu)$ в $L^r(\mu)$ факторизуется через гильбертово пространство [16, теорема 5.2] (см. также [10, п. 22.5.1; 17, следствие 3.7]).

Напомним знаменитую теорему Гротендика (см. [10, п. 22.4.4; 16; 18, п. 6.7]): любой оператор из L^1 в L^2 является 2-абсолютно суммирующим, причем для $T \in L(L^1, L^2)$ имеем (см. [18])

$$\pi_2(T) \leqslant c_K \|T\|,$$

где c_K — постоянная в неравенстве Хинчина

$$\|x\|_2 \leqslant c_K \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\langle x, \varepsilon \rangle| \quad \forall\ x \in \mathbb{K}^n,$$

где $\mathcal{E}$ — множество n-мерных векторов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_i = \pm 1$. Как показано в [19], наилучшее значение этой постоянной c_K равно $\sqrt{2}$. Эта постоянная не зависит от выбора поля скаляров.

Ниже $\{r_n\}$ обозначает последовательность функций Радемахера на отрезке $[0, 1]$. Будем говорить, что оператор $U \in \mathrm{L}(X, Y)$ есть *оператор котипа* q, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из пространства X с некоторой постоянной выполняется неравенство

$$\Big(\sum \|Ux_j\|^q \Big)^{1/q} \leqslant C \Big(\int_0^1 \Big\| \sum r_j(t) x_j \Big\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Наименьшая такая постоянная C обозначается $C_q(U)$.

Оператор U называется *оператором типа* p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из X с некоторой постоянной выполняется неравенство

$$\Big(\int_0^1 \Big\| \sum r_j(t) U x_j \Big\|^2 \Big)^{1/2} \leqslant C \Big(\sum \|x_j\|^p \Big)^{1/p}.$$

Наименьшая такая постоянная C обозначается $T_p(U)$.

Двойственность этих двух свойств выражается в том факте, что, если оператор U имеет тип p, то сопряженное оператор U^* имеет котип p', $1/p+1/p'=1$, и, если U^* имеет тип p, то U имеет котип p'. При этом в первом случае $C_{p'}(U^*) \leqslant T_p(U)$, а во втором — $C_{p'}(U) \leqslant T_p(U^*)$. Если оператор имеет котип p (соответственно тип q), то второй сопряженный к нему обладает тем же свойством (см. [10, 17]). Особенно важен частный случай, когда U есть тождественный оператор в некотором банаховом пространстве X. В этом случае говорят, что пространство X есть пространство типа p (котипа q), если id_X есть оператор типа p (котипа q,) а соответствующие константы типа и котипа пространства X обозначаются просто через $T_p(X)$ и $C_q(X)$. Примерами пространств конечного котипа 2 могут служить все пространства L^p при $1 \leqslant p \leqslant 2$, конечного типа 2 — пространства L^p с $2 \leqslant p < \infty$ [10].

Имеет место следующая замечательная теорема Море (см. [17, теорема 3.4]): если $U \in \mathrm{L}(X,Y)$ — оператор типа 2 и $T \in \mathrm{L}(Y,Z)$ — оператор котипа 2, то оператор TU факторизуется через гильбертово пространство, причем $\gamma_2(TU) \leqslant T_2(U)C_2(T)$. В частности, любое пространство типа 2 и котипа 2 изоморфно гильбертову пространству (теорема Квапеня [20]) и любой оператор U, действующий из пространства X типа 2 в пространство Y котипа 2 факторизуется через гильбертово пространство, причем $\gamma_2(U) \leqslant T_2(X)C_2(Y)\|U\|$.

Ниже нам потребуется следующее утверждение (точнее, его конечномерный аналог), доказательство которого можно найти в [21, предложение (XV,6;1) и его следствие]. Другой вариант этого утверждения приводится ниже. Далее (X,μ) — топологической пространство с положительной мерой Радона (при доказательстве можно считать, что это — прямая с мерой Лебега).

Лемма 1.1. *Любое гильбертово пространство вкладывается в некоторое пространство L^0 (с индуцированной топологией) и вкладывается изометрически в некоторое L^p для любого конечного $p > 0$. Любое пространство $L^s(X,\mu,)$, $0 < s < 2$, вкладывается в пространство L^0 (с индуцированной топологией) и вкладывается изометрически в пространство L^p, если только $0 < p < s$.*

Следующие сведения взяты из [10, пп. 20–22] и приводятся здесь для удобства читателя.

При $0 < p < \infty$ полагаем

$$c_{2p}^{(n)} := \begin{cases} 2\left[\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\right]^{1/p} & \text{в вещественном случае,} \\ 2\left[\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2n+p}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right]^{1/p} & \text{в комплексном случае.} \end{cases}$$

Положим $a_{np} := c_{2p}^{(1)}/c_{2p}^{(n)}$. Тогда

$$1 = a_{1p} \geqslant a_{2p} \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lim_n n^{1/2} a_{np} = c_{2p}^{(1)} (c_{22}^{(1)})^{-1}.$$

Пусть σ_2^n — нормированная инвариантная относительно вращений мера на n-мерной единичной сфере S_2^n.

Лемма 1.2. *Если* $0 < p < \infty$, *то*

$$a_{np}^{-1} \left\{ \int\limits_{S_2^n} |\langle x, a\rangle|^p d\sigma_2^n(a) \right\}^{1/p} = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Формулу из леммы 1.12 можно получить переходом к сферическим координатам.

Лемма 1.3. *Если* $0 < p < \infty$, *то* $\pi_p(I : l_2^n \to l_2^n) = a_{np}^{-1}$.

В частных случаях $p = 1, 2$ имеем

$$a_{n2} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$a_{n1} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Для нас важна асимптотика величины $a_{n2}a_{n1}^{-1}$. Напомним, что $\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi}e^{-\alpha}\alpha^{\alpha+1/2}$ при $\alpha \to +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
a_{n2}a_{n1}^{-1} &= \sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(\dfrac{n}{2})} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{e^{-(n-1)/2}\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^{(n-1)/2+1/2}}{e^{-n/2+1}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^{(n/2-1)+1/2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n}}e^{-1/2}\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n/2}\frac{2^{-1/2}}{(n-2)^{-1/2}} \\
&\sim \sqrt{\frac{\pi}{2en}}\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{(n-2)/2} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{при } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\pi_1(I : l_2^n \to l_2^n) = (\sqrt{\pi/2} + o(1))\pi_2(I : l_2^n \to l_2^n).$$

Согласно [10, п. 20.2.1], если $0 < p \leqslant s \leqslant \infty$, то произведение ST s-абсолютно суммирующего оператора S и так называемого (s,p)-смешивающего оператора T (см. определение в [10, п. 20.1.1]) является p-абсолютно суммирующим оператором, причем

$$\pi_p(ST) \leqslant M_{(s,p)}(T)\pi_s(S),$$

где $M_{(s,p)}$ — соответствующая квазинорма. В силу [10, п. 22.1.6] при $0 < p < s \leqslant 2$ справедливо равенство

$$M_{(s,p)}(I : l_2^n \to l_2^n) = a_{ns}a_{np}^{-1}.$$

Поэтому для любого n-мерного оператора $U \in L(H,H)$ и $0 < p < s \leqslant 2$

$$\pi_1(U) \leqslant a_{n2}a_{n1}^{-1}\pi_2(U) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1)\right)\pi_2(U).$$

Мы переформулируем лемму из [10, п. 21.1.3] для случая $s < 2$ таким образом, чтобы не вдаваться в подробности появления соответствующей меры.

Лемма 1.4. *Для каждого $s \in (0,2)$ существует вероятностная мера μ на прямой $\mathbb{R}$ (соответственно на комплексной плоскости) такая, что при $0 < p < s$*

$$c_{sp}^{-1}\left\{\int\limits_{\mathbb{K}^m} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu_s^m(a)\right\}^{1/p} = \|x\|_s \quad \forall\ x \in \mathbb{K}^m,$$

где μ_s^m — m-кратное произведение меры μ_s на себя и c_{sp} — некоторая постоянная, громоздкую формулу для которой можно найти в [10, п. 21.1.2].

В теории вероятностей мера μ_s известна как *устойчивый закон распределения.*

При $1 \leqslant s \leqslant 2$ и $0 < p < s$ имеем

$$\pi_p(I : l_{s'}^n \to l_s^n) = c_{sp}^{-1} \left\{ \int\limits_{\mathbb{K}^m} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu_s^m(a) \right\}^{1/p}.$$

Довольно длинное вычисление показывает, что

$$\pi_p(I : l_{s'}^n \to l_s^n) \asymp (n \log n)^{1/s}.$$

Отметим также, что при $1 \leqslant s \leqslant 2$

$$\pi_s(I : l_{s'}^n \to l_s^n) \leqslant \nu_s(I : l_\infty^n \to l_s^n) = n^{1/s}$$

(см. лемму 22.4.7 в [10], где подсчитана правая норма).

§ 2. *Некоторые положительные результаты*

Начнем с изложения оценок различных норм тензорных произведений операторов. Приводимый перечень результатов не претендует на полноту.

В работе Сафара [6] $E \otimes_{g_k} F$ — тензорное произведение, снабженное конечной k-ядерной нормой в обычном смысле (т. е. оно порождает после пополнения $E \widehat{\otimes}_k F$). Используя наши обозначения, сформулируем предложение 3 из этой статьи: если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, E, E_1, F, F_1 — банаховы пространства и $A \in L(E, E_1)$, $B \in L(F, F_1)$, то $A \otimes B$ действует непрерывно из $E \otimes_p F$ в $E_1 \otimes_p F_1$ с нормой, не превосходящей $\|A\| \, \|B\|$.

Следующий результат об устойчивости тензорных произведений операторов получен Голубом [22] (см. также [23, предложение (2.b.3)]). Пусть $1 \leqslant p < \infty$, X_j, Y_j — банаховы пространства и $T_j \in L(X_j, Y_j)$, $j = 1, 2,$ — p-абсолютно суммирующие операторы. Тогда оператор $T_1 \otimes T_2$ является p-абсолютно суммирующим из инъективного тензорного произведения $X_1 \widehat{\widehat{\otimes}} X_2$ в инъективное тензорное произведение $Y_1 \widehat{\widehat{\otimes}} Y_2$, причем

$$\pi_p(T_1 \otimes T_2) \leqslant \pi_p(T_1)\pi_p(T_2).$$

Этот результат применялся Пичем [24] (см. [23, теорема 2.b.1]) для доказательства известной теоремы из [25] о распределении собственных чисел p-абсолютно суммирующих операторов. Некоторые другие подобные результаты можно найти в [26].

В [18, п. 6.7, с. 254–255] показано, что если $S : l_2^m \to l_1^n$ — оператор из l_2^m в l_1^n и $S \otimes S : l_2^{m^2} \to l_1^{n^2}$ — соответствующее тензорное произведение, то

$$\|S \otimes S\| \leqslant c_K \|S\|^2,$$

где c_K — постоянная из неравенства Хинчина (см. § 1).

На самом деле, из доказательства, приведенного в [18], вытекает, что аналогичное неравенство верно также для пары различных S_1 и S_2 (аналогичное замечание справедливо относительно следующего утверждения).

В случае оператора $S : l_1^n \to l_2^n$ имеет место даже равенство соответствующих величин: если $S : l_1^n \to l_2^m$ — оператор из l_1^n в l_2^m и $S\otimes S : l_1^{n^2} \to l_2^{m^2}$ — соответствующее тензорное произведение, то

$$\|S\otimes S\| = \|S\|^2.$$

Имеется оценка для π_2-нормы тензорных произведений операторов, аналогичная оценкам из предыдущих лемм. Именно, если $S : l_1^n \to l_2^m$ — оператор из l_1^n в l_2^m и $S\otimes S : l_1^{n^2} \to l_2^{m^2}$ — соответствующее тензорное произведение, то

$$\pi_2^2(S) \leqslant c_K \pi_2(S\otimes S).$$

Укажем простой факт, который сводит решение задачи, поставленной в начале работы, к оценке снизу нормы тензорного произведения операторов через произведение их норм.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in \mathrm{L}(X, E)$, $B \in \mathrm{L}(Y, F)$. Для любых кросс-норм α и β на $X\otimes Y$ и $E\otimes F$ соответственно справедливо неравенство*

$$\|A\otimes B\| \geqslant \|A\|\|B\|$$

(левая часть неравенства может принимать и бесконечное значение).

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $x \in X$ и $y \in Y$ — единичные векторы такие, что

$$\|Ax\| \geqslant (1-\varepsilon)\|A\|, \quad \|By\| \geqslant (1-\varepsilon)\|B\|.$$

Тогда

$$\|x\otimes y\| = 1, \quad \|(A\otimes B)(x\otimes y)\| = \|Ax\|\|By\| \geqslant (1-\varepsilon)^2\|A\|\|B\|. \qquad \square$$

Из этой леммы и леммы Сафара (см. выше) получаем

Следствие 2.2. *В условиях леммы Сафара $\|A \otimes B\| = \|A\|\|B\|$.*

Более того, поскольку при $p < q$ пространство $E_1\otimes_p F_1$ непрерывно канонически отображается в $E_1\otimes_q F_1$ (с нормой отображения единица), то верно следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Если $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, E, E_1, F, F_1 — банаховы пространства и $A \in L(E, E_1)$, $B \in L(F, F_1)$, то $A\otimes B$ действует непрерывно из $E\otimes_p F$ в $E_1\otimes_q F_1$ с нормой, равной $\|A\|\|B\|$. В частности, для таких показателей p, q ответ на вопрос, сформулированный в начале данной статьи, положителен.*

Используя формулу $(A \otimes B)(U) = BUA^*$ из § 1, можно распространить действие оператора $A \otimes B$ на пространства операторов. Например, если

$$A_0 : E \to X, \quad A = A_0^* : X^* \to E^*, \quad B : Y \to F,$$

то для любого p можно рассмотреть оператор $A \otimes B : \Pi_p(X, Y) \to \Pi_p(E, F)$ по формуле

$$(A \otimes B)(U) = (A_0^* \otimes B)(U) := BUA_0.$$

На замыкании $X^* \hat{\hat{\otimes}}_p Y$ множества всех конечномерных операторов в $\Pi_p(X, Y)$ оператор $A \otimes B$ действует так же, как действовали соответствующие отображения в случае тензорных произведений несопряженных пространств. При этом

$$\pi_p((A \otimes B)(U)) = \pi_p(BUA_0) \leqslant \|A\| \|B\| \pi_p(U)$$

, и из общих соображений вытекает

Предложение 2.4. *Пусть X, Y, E, F — банаховы пространства, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $A_0 \in L(E, X)$, $B \in L(Y, F)$. Тогда для оператора $A_0^* \otimes B : \Pi_p(X, Y) \to \Pi_q(E, F)$ имеем*

$$\|A_0^* \otimes B\| = \|A_0^*\| \|B\|.$$

Аналогично обстоит дело и с p-ядерными операторами.

Предложение 2.5. *Пусть X, Y, E, F — банаховы пространства, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $A_0 \in L(E, X)$, $B \in L(Y, F)$. Тогда для оператора $A_0^* \otimes B : \mathrm{N}_p(X, Y) \to \mathrm{N}_q(E, F)$ имеем*

$$\|A_0^* \otimes B\| = \|A_0^*\| \|B\|.$$

Можно сформулировать ряд других аналогичных утверждений.

Теперь отметим некоторые результаты, связанные с понятиями типа и котипа банаховых пространств. Предположим, что X и Y — пространства типа 2, а E и F — пространства котипа 2. Пусть $A : X \to E$ и $B : Y \to F$. По теореме Море A^* и B факторизуются через гильбертово пространство, и для любого оператора $U : X^* \to Y$ (например, для $U \in X \otimes Y$) появляется диаграмма вида

$$BUA^* : E^* \to l^2 \to X^* \xrightarrow{U} Y \to l^2 \to F.$$

Можно сформулировать общий простой факт (относительно произведений операторных идеалов см. [10]).

Предложение 2.6. *Если X и Y — пространства типа 2, E и F — пространства котипа 2, $A : X \to E$, $B : Y \to F$, I — некоторый нормированный операторный идеал и $U \in I(X^*, Y)$, то $(A \otimes B)(U) = BUA^* \in \Gamma_2 \circ \mathrm{I} \circ \Gamma_2$, где Γ_2 — идеал 2-факторизуемых операторов. При этом*

$$\|(A \otimes B)(U)\| \leqslant T_2(X) T_2(Y) C_2(E) C_2(F) \|U\|_{\mathrm{I}}.$$

Вместо $\mathrm{I}(X^*, Y)$ можно рассматривать замыкание в этом пространстве тензорного произведения $X\otimes Y$. Тогда мы приходим к утверждению типа рассмотренных выше: в условиях предложения 2.6 имеем

$$A\otimes B : X\widehat{\otimes}_{\mathrm{I}} Y \to E\widehat{\otimes}_{\Gamma_2 \mathrm{I} \Gamma_2} F, \quad \|A\otimes B\| \leqslant T_2(X)T_2(Y)C_2(E)C_2(F).$$

Аналогично можно рассматривать пространства типа Π_p и пространства p-ядерных операторов. Например, для $\mathrm{I} = \Pi_p$ справедливы следующие утверждения (напомним, что в гильбертовом пространстве все классы Π_r совпадают).

Следствие 2.7. *Пусть $0 < p < \infty$, X и Y — пространства типа 2, E и F — пространства котипа 2, $A : X \to E$, $B : Y \to F$. Тогда отображение $A\otimes B : \Pi_p(X^*, Y) \to \Pi_q(E^*, F)$ непрерывно для любого $q > 0$.*

Следствие 2.8. *Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, X и Y — пространства типа 2, E и F — пространства котипа 2, $A : X \to E$, $B : Y \to F$. Тогда отображение $A\otimes B : X\widehat{\otimes}_p Y) \to E\widehat{\otimes}_q F$ непрерывно.*

Следствие 2.9. *Пусть $p_1, p_2 \geqslant 2$, $q_1, q_2 \in [1, 2]$, $A : L^{p_1} \to L^{q_1}$, $B : L^{p_2} \to L^{q_2}$. Тогда отображение*

$$A\otimes B : L^{p_1}\widehat{\otimes}_p L^{p_2} \to L^{q_1}\widehat{\otimes}_q L^{q_2}$$

непрерывно при любых показателях $p, q \in [1, +\infty)$.

Примеры, соответствующие следствию 2.9 (в частности, неравенство $\|A\otimes B\| > \|A\|\|B\|$), даны в § 4.

Можно показать (но это несколько сложнее предыдущего), что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.10. *Пусть X, Y, E, F — произвольные пространства, $A : X \to E$, $B : Y \to F$. Если A — пространство типа 2 и B — пространство котипа 2, то $A\otimes B$ действует из $X\widehat{\widehat{\otimes}} Y$ в $\Gamma_2(E^*, F)$ и непрерывно, причем*

$$\|A\otimes B\| \leqslant T_2(A)C_2(B)\|A\|\|B\|.$$

Более того, $A\otimes B$ действует непрерывно из $L(X^*, Y)$ в $\Gamma_2(E^*, F)$.

§ 3. Элементарное доказательство основного факта

Мы установим последнюю часть следствия 2.3 элементарными средствами. Итак, мы рассматриваем пространства (S, μ) и (T, ν) с σ-конечными мерами. Далее $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$. Предположим, что операторы A и B отображают $L^p(\mu)$ в $L^q(\nu)$:

$$L^p(\mu) \xrightarrow{A} L^q(\nu), \quad L^p(\mu) \xrightarrow{B} L^q(\nu).$$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [10]).

Лемма 3.1. *Пусть* (S,μ) *и* (T,ν) *— пространства с* σ*-конечными мерами и* f *—* $\mu\otimes\nu$*-измеримая функция на* $S\times T$*. Если* $0<p\leqslant q<+\infty$*, то*

$$\left\{\int\limits_T\biggl(\int\limits_S|f(s,t)|^p\,d\mu(s)\biggr)^{q/p}d\nu(t)\right\}^{1/q} \leqslant\left\{\int\limits_S\biggl(\int\limits_T|f(s,t)|^q\,d\nu(t)\biggr)^{p/q}d\mu(s)\right\}^{1/p}.$$

Мы выбросим все "плохие" множества меры нуль и будем всюду писать (или понимать, что все происходит) "для любого" значения аргумента (будь то s или t, или иное). Чтобы избежать громоздких обозначений, пишем ds и т. п. вместо $d\mu(s)$.

В качестве аргументов берутся s, t, u, v. Значения функции $f\in L^p(\mu\otimes\nu)$ записываем в виде $f(s,t)$. Если $t\in T$, то эта запись означает $f(\cdot,t)\in L^p_s$. Более того, мы используем обозначения следующего типа: если $t\in T$, то $f(\overset{s}{\cdot},t)\in L^p_s$ (т. е. буква над точкой показывает, какой из аргументов в конкретном случае здесь надо поставить).

Например, если $t\in T$, то мы пишем (сейчас рассматривается значение оператора A на функции $f(\cdot,t)$ при фиксированном значении t): $A_s\Bigl(f(\overset{s}{\cdot},t)\Bigr)(\overset{u}{\cdot})\in L^q_u$, т. е.

$$A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})\in L^p_t(L^q_u)\subset L^q_u(L^p_t)\xrightarrow{1\otimes B}L^q_u(L^q_v)$$

(предпоследнее соотношение — это лемма 3.1, поскольку $p\leqslant q$).

Таким образом, $A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})$ понимается также в следующем смысле: для всех u функция $A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)$ — функция от t, принадлежащая пространству L^p_t.

Далее (подробности см. в доказательстве теоремы 3.2), для каждого u

$$B_t(A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(u))(\overset{v}{\cdot})\in L^q_v,$$

и, следовательно,

$$B_t(A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot}))(\overset{v}{\cdot})\in L^q_u(L^q_v) \tag{3.1}$$

является функцией переменных u и v. Функция (3.1) есть образ функции $f\in L^p_s(L^p_t)(=L^p_t(L^p_s))$ при отображении $A\otimes B$ (см. ниже).

Оператор $A\otimes B$ на элементарных тензорах вида $\varphi\otimes\psi$ (или на функциях $\varphi(s)\psi(t)$) действует по формуле

$$(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) = A\varphi \otimes B\psi$$

или — в терминах функций —

$$(A\varphi \otimes B\psi)(u, v) = A(\varphi(\overset{s}{\cdot}))(u)B(\psi(\overset{t}{\cdot}))(v).$$

По линейности этот оператора очевидным образом продолжается на тензоры общего вида

$$(A \otimes B)\bigg(\sum_1^N f_k \otimes g_k\bigg) = \sum_1^N A(f_k)\otimes B(g_k).$$

Теорема 3.2. *Если* $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, *то*

$$\|A \otimes B\| = \|A\|\|B\|.$$

Доказательство. Неравенство $\|A\otimes B\| \geqslant \|A\|\|B\|$ справедливо в силу леммы 2.1. Для доказательства обратного неравенства существенно используется лемма 3.1 и, следовательно, соотношение $p \leqslant q$.

Как отмечалось выше, на элементарных функциях (или тензорах) вида $f(\overset{s}{\cdot}, \overset{t}{\cdot}) = \varphi(\overset{s}{\cdot})\psi(\overset{t}{\cdot})$ значение оператора $A\otimes B$ вычисляется следующим образом:

$$A_s(\varphi(\overset{s}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})B_t(\psi(\overset{t}{\cdot}))(\overset{v}{\cdot})$$

или (ввиду линейности A и B)

$$B_t[A_s(\varphi(\overset{s}{\cdot})\psi(\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})](\overset{v}{\cdot}) \in \mathrm{L}^q_u(L^q_v) \equiv L^q(\nu(u) \otimes \nu(v)).$$

Справедливость этого и последующих включений, а также непрерывность тензорного произведения операторов устанавливается ниже. Переходя к линейной оболочке элементарных тензоров, а затем к замыканию этой оболочки в пространстве $L^p(L^p) = L^p\widehat{\otimes}_p L^p$, получаем, что для каждой функции $f \in L^p(L^p) = L^p(\nu\otimes\nu)$ (если угодно, для начала — до доказательства непрерывности $A\otimes B$ — можно считать, что все происходит на линейной оболочке элементарных тензоров)

$$\begin{aligned}(A_s\otimes B_t)f(\overset{s}{\cdot}, \overset{t}{\cdot}) &= B_t[A_s(f(\overset{s}{\cdot}, \overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})](\overset{v}{\cdot}) \in \mathrm{L}^q_u(L^q_v)\\ &\equiv L^q(\nu_u, \nu_v) \equiv L^q_u\widehat{\otimes}_q L^q_v,\end{aligned}$$

т. е. $(A\otimes B)f$ есть вектор-функция из $L^q_u(L^q_v)$, действующая следующим образом:

$$u \mapsto B_t[A_s(f(\overset{s}{\cdot}, \overset{t}{\cdot}))(u)](\overset{v}{\cdot}) \in L^q_v.$$

Отметим, что это утверждение верно, по крайней мере, на линейной оболочке элементарных тензоров или функций. Установим теперь указанные выше включения, непрерывность тензорного оператора и оценки норм различных функций, из которых получим требуемое неравенство.

Имеем

$$
\begin{aligned}
\|A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})\|^p_{L^p_t(L^q_u)} &= \int \|A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(\overset{u}{\cdot})\|^p_{L^q_u}\,dt \\
&= \int\left(\int |A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)|^q\,du\right)^{p/q} dt \\
&\leqslant \int \|A\|^p\|f(\overset{s}{\cdot},t)\|^p_{L^p_s}\,dt = \|A\|^p\|f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot})\|^p_{L^p_t(L^p_s)}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

По лемме 3.1 имеем $L^p_t(L^q_u)\subset L^q_u(L^p_t)$ (вложение с нормой $\leqslant 1$). Поэтому вектор-функцию, норма которой оценивалась в (3.2), можно рассматривать также следующим образом: для любого u

$$
t\mapsto A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)\in L^p_t.
$$

Теперь, для любого u

$$
\begin{aligned}
\|B_t[A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(u)](\overset{v}{\cdot})\|^q_{L^q_v} &= \int |B_t[A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(u)](v)|^q\,dv \\
&\leqslant \|B\|^q\|A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(u)\|^q_{L^p_t} \\
&= \|B\|^q\left(\int |A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)|^p\,dt\right)^{q/p}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Используя последовательно формулу (3.3), лемму 3.1 и формулу (3.2), приходим к искомому неравенству

$$
\begin{aligned}
\|(A\otimes B)f\|^q_{L^q_u(L^q_v)} &= \int\int |B_t[A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(u)](v)|^q\,dv\,du \\
&\leqslant \int \|B\|^q\left(\int |A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)|^p\,dt\right)^{q/p} du \\
&\leqslant \|B\|^q\left(\int\left(\int |A_s(f(\overset{s}{\cdot},t))(u)|^q\,du\right)^{p/q} dt\right)^{q/p} \\
&= \|B\|^q\|A_s(f(\overset{s}{\cdot},\overset{t}{\cdot}))(\overset{u}{\cdot})\|^q_{L^p_t(L^q_u)} \\
&\leqslant \|B\|^q\|A\|^q\|f\|^q_{L^p(L^p)}.
\end{aligned}
$$

□

§ 4. Некоторые контрпримеры

Во многих формулируемых ниже леммах условия на нормы, вычисляемые в различных пространствах, эквивалентны между собой, но для полноты картины мы приводим эти условия, формально отличающиеся друг от друга.

Лемма 4.1. *Существует последовательность операторов $A_n \in \mathrm{L}(l_2^n, L^1(\mu))$ такая, что $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ для каждого n и $\|A_n \otimes A_n\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1)$ при $n \to \infty$, где норма рассматривается в любом из следующих пространств:*

1) $\mathrm{L}(l_2^{n^2}, L^1(\mu \otimes \mu))$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_2(l_2^n, l_2^n), \Pi_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_2(l_2^n, l_2^n), \mathrm{N}_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_2(l_2^n, l_2^n), \mathrm{I}_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
5) $\mathrm{L}(l_2^n \widetilde{\otimes}_2 l_2^n, L^1(\mu) \widetilde{\otimes}_1 L^1(\mu))$.

Доказательство. Пусть $j : l_2^n \to L^1(\mu)$ — изометрическое вложение, $I = \mathrm{id}_{l_2^n} : l_2^n \to l_2^n$ — тождественное отображение. Тогда

$$I \in \mathrm{N}_2(l_2^n, l_2^n), \quad \pi_2(I) = \nu_2(I) = i_2(I) = \sqrt{n}.$$

Для $T = jj^* : L^\infty(\mu) \to l_2^n \to L^1(\mu)$ имеем

$$\nu_1(T) = i_1(T) = \pi_1(T) = \pi_1(j^*) = \nu_1(j^*).$$

Предпоследнее равенство справедливо, так как j — изометрическое вложение. Последнее равенство и первые два равенства вытекают из конечномерности рассматриваемых операторов, инъективности идеалов абсолютно p-суммирующих операторов и свойств этих операторов, отмеченных в начале статьи. Напомним, что в конечномерной ситуации ядерность оператора равносильна ядерности его сопряженного оператора (при этом соответствующие ядерные нормы равны). Продолжим цепочку равенств:

$$\nu_1(T) = \nu_1(j^*) = \nu_1(j) \geqslant \pi_1(j) = \pi_1(I).$$

Таким образом,

$$\nu_1(T) \geqslant \pi_1(\mathrm{id}_{l_2^n}) = a_{n1}^{-1} \sim \sqrt{\pi/2}\sqrt{n}.$$

Следовательно,

$$\nu_1((j \otimes j)(I)) = \nu_1(T) \geqslant a_{n1}^{-1} = (\sqrt{\pi/2} + o(1))\pi_2(I),$$

так что

$$\|j \otimes j\| \geqslant (\sqrt{\pi/2} + o(1)).$$

Для завершения доказательства достаточно положить $A_n = j : l_2^n \to L^1(\mu)$. $\square$

Лемма 4.2. *Для любого $s \in (1,2)$ существуют постоянная $c_s > 0$ и последовательность операторов $A_n : l_s^n \to L^1(\mu)$ такие, что $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ для каждого n, но $\|A_n \otimes A_n\| \geqslant c_s \log^{1/s} n$, где норма рассматривается в любом из следующих пространств:*

1) $\mathrm{L}(l_s^{n^2}, L^1(\mu\otimes\mu))$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_s(l_{s'}^n, l_s^n), \Pi_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_s(l_{s'}^n, l_s^n), \mathrm{N}_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_s(l_{s'}^n, l_s^n), \mathrm{I}_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)))$,
5) $\mathrm{L}(l_s^n \widetilde{\otimes}_s l_s^n, L^1(\mu) \widetilde{\otimes}_1 L^1(\mu))$.

Доказательство. Пусть $1 < s < 2$ и $j : l_s^n \to L^1(\mu)$ — изометрическое вложение. Если $I : l_{s'}^n \to l_s^n$ — формально тождественное отображение, то $\pi_s(I) = \nu_s(I) = n^{1/s}$. Действительно, взяв для оператора I естественное s-ядерное представление

$$T = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i,$$

где e_i — i-й орт в $\mathbb{K}$, получим неравенство "$\leqslant$". С другой стороны, для слабо s-суммируемой последовательности $\{e_i\}_{i=1}^n \subset l_{s'}^n$ (со слабо s-суммируемой нормой, равной единице) справедливо равенство

$$\left(\sum \|Ie_k\|^s \right)^{1/s} = n^{1/s},$$

из которого следует $\pi_s(I) \geqslant n^{1/s}$.

Как и в доказательстве леммы 4.1, положим $T = jIj^*$. Тогда

$$\nu_1(T) = i_1(T) = \pi_1(T) = \pi_1(Ij^*) = \nu_1(Ij^*)$$

и, следовательно,

$$\nu_1(T) = \nu_1(jI) \geqslant \pi_1(jI) = \pi_1(I) \asymp (n \log n)^{1/s}.$$

Отсюда вытекает существование постоянной $c_s > 0$ такой, что

$$\nu_1(T) \geqslant c_s \log^{1/s} n n^{1/s} = c_s \log^{1/s} n \nu_s(I).$$

Окончательно,

$$\nu_1((j \otimes j)(I)) \geqslant c_s \log^{1/s} n \nu_s(I),$$

что доказывает неравенство $\|j \otimes j\| \geqslant c_s \log^{1/s} n$. □

Лемма 4.3. *Существует последовательность операторов $B_n \in \mathrm{L}(L^\infty(\mu), l_2^n)$ такая, что $\dim B_n = n$, $\|B_n\| = 1$ для каждого n и $\|B_n \otimes B_n\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1)$ при $n \to \infty$, где норма рассматривается в пространстве*

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu) \hat{\hat{\otimes}} L^\infty(\mu), \Pi_2(l_2^n, l_2^n))$$

или, что то же самое, в пространстве $\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\mu), l_2^n\tilde{\otimes}_2 l_2^n)$.

Доказательство. Пусть $j : l_2^n \to L^1(\mu)$ — изометрическое вложение (такое же, как и в доказательстве леммы 4.1). Рассмотрим оператор $j^* : L^\infty(\mu) \to l_2^n$ и положим $B_n := j^*$. Здесь мы будем пользоваться попеременно обозначениями B_n и j, j^*. Оператор $B_n\otimes B_n$ действует линейно из $L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$ в $l_2^n\otimes l_2^n$. При этом для тензора $f\otimes g \in L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$ значение $(B_n\otimes B_n)(f\otimes g)$ есть $B_nf\otimes B_ng = j^*f\otimes j^*g \in l_2^n\otimes l_2^n$ и при $x \in l_2^n$ имеем

$$(j^*f\otimes j^*g)(x) = \langle j^*f, x\rangle j^*g = \langle f, jx\rangle j^*g = j^*((f\otimes g)(jx)),$$

где тензор $f\otimes g$ рассматривается как одномерный оператор из $L^1(\mu)$ в $L^\infty(\mu)$. Если $U \in L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$, то оператор j^*Uj действует следующим образом:

$$l_2^n \xrightarrow{j} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} l_2^n.$$

Ввиду линейности $B_n\otimes B_n$ для любого такого U имеем

$$(B_n\otimes B_n)(U) = j^*Uj \in \Pi_2(l_2^n, l_2^n) = l_2^n\otimes l_2^n.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и U — оператор (тензорный элемент) из пространства $L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$ такой, что $\|U\| = 1$ и $\mathrm{trace} Ujj^* \geqslant \nu_1(jj^*)(1-\varepsilon)$. Такой оператор существует, поскольку

$$(L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\mu))^* = I_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu)^{**})$$

и пространство $N_1(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ канонически изометрично подпространству последнего. Так как $|\mathrm{trace} AB| \leqslant \pi_2(A)\pi_2(B)$ (см. [10]), имеем

$$\begin{aligned}\nu_1(jj^*)(1-\varepsilon) &\leqslant |\mathrm{trace} Ujj^*| = |\mathrm{trace} j^*Uj| \\ &\leqslant \pi_2(j^*Uj)\pi_2(\mathrm{id}_{l_2^n}) = \pi_2((B_n\otimes B_n)(U))\sqrt{n},\end{aligned}$$

откуда (см. доказательство леммы 4.1)

$$\sqrt{n}\pi_2((B_n\otimes B_n)(U)) \geqslant (1-\varepsilon)\pi_1(\mathrm{id}_{l_2^n}) \geqslant (1-\varepsilon)(\sqrt{\pi/2}+o(1))\sqrt{n}$$

или

$$\pi_2((B_n\otimes B_n)(U)) \geqslant (1-\varepsilon)(\sqrt{\pi/2}+o(1))\|U\|.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и изометричности оператора j норма оператора $B_n\otimes B_n$ как оператора из $L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\mu)$ в $\Pi_2(l_2^n, l_2^n)$ не меньше, чем $(\sqrt{\pi/2}+o(1))$. $\square$

Лемма 4.4. *Для любого* $r \in (2, +\infty)$ *существуют постоянная* $c_r > 0$ *и последовательность операторов* $B_n : L^\infty(\mu) \to l_r^n$ *такие, что* $\dim B_n = n$, $\|B_n\| = 1$, *для каждого* n, *но*

$$\|B_n\otimes B_n\| \geqslant c_r \log^{1/r'} n,$$

где норма рассматривается в пространстве

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), \Pi_r(l^n_{r'}, l^n_r))$$

или, что то же самое, в пространстве

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), l^n_r\widetilde{\otimes}_r l^n_r).$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 4.3, но отличаются в некоторых деталях, поэтому мы приведем его здесь в более коротком виде. Пусть $2 < r < +\infty$. Чтобы пользоваться обозначениями и некоторыми сведениями из доказательства “двойственной” леммы 4.2, мы переобозначим r' через s, так что $r = s'$ и $1 < s < 2$. Пусть $j : l^n_s \to L^1(\mu)$ — изометрическое вложение из доказательства леммы 4.2. Рассмотрим линейное отображение $j^*\otimes j^*$. Оно действует из $L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$ по формуле

$$(j^*\otimes j^*)(U) = j^*Uj : \; l^n_s \xrightarrow{j} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} l^n_{s'},$$

что устанавливается в точности так же, как при доказательстве леммы 4.3. Если $I : l^n_{s'} \to l^n_s$ — формально тождественное отображение, то имеет смысл след оператора вида Ij^*Uj, и этот след равен следу оператора j^*UjI, действующего согласно следующей диаграмме:

$$j^*UjI : \; l^n_{s'} \xrightarrow{I} l^n_s \xrightarrow{j} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} l^n_{s'}.$$

Пусть $U \in L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$, $\|U\| = 1$, $\mathrm{trace}U(jIj^*) \geqslant 1/2\nu_1(jIj^*)$. Как и в доказательстве леммы 4.2, правая часть последнего неравенства не меньше, чем $1/2\pi_1(I) \asymp (n\log n)^{1/s}$. Оценим след $\mathrm{trace}U(jIj^*)$ сверху. При этой оценке мы используем следующий хорошо известный факт (см., например, [10, п. 20.2.4, формула (2)]): $\Pi_{s'}\circ \mathrm{N}_s \subset \mathrm{N}_1$, т. е. если $X \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{A} Z$, $A \in \Pi_{s'}$, $B \in \mathrm{N}_s$, то произведение AB принадлежит $\mathrm{N}_1(X, Z)$, причем

$$\nu_1(AB) \leqslant \nu_s(B)\pi_{s'}(A).$$

В качестве A возьмем оператор j^*Uj, а в качестве B — оператор I. Тогда

$$\begin{aligned}|\mathrm{trace}U(jIj^*)| = |\mathrm{trace}(j^*Uj)I| &\leqslant \nu_s(I)\pi_{s'}(j^*Uj)\\ &\leqslant n^{1/s}\pi_{s'}((j^*\otimes j^*)(U)).\end{aligned}$$

По поводу последнего неравенства см. начало доказательства леммы 4.2. Ввиду выбора оператора U и приведенных выше рассуждений приходим к неравенствам

$$c'_s\log^{1/s} n \leqslant \frac{1}{n^{1/s}}\pi_1(I) \leqslant \frac{1}{n^{1/s}}|\mathrm{trace} j^*UjI| \leqslant \pi_{s'}((j^*\otimes j^*)(U))$$

с некоторой постоянной c'_s, зависящей только от s.

Так как $\|U\| = 1$, норма оператора $j^*\otimes j^*$ как оператора из $L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu)$ в $\Pi_{s'}(l_s^n, l_{s'}^n)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\|j^*\otimes j^*\| \geqslant c'_s \log^{1/s} n. \qquad \square$$

Лемма 4.5. *Для любых $s, r \in (1,2)$, $r < s$, существуют постоянная $D_{s,r} > 0$ и последовательность операторов $A_n : l_s^n \to L^r(\mu)$ такие, что $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ для каждого n, но*

$$\|A_n\otimes A_n\| \geqslant D_{s,r} \log^{1/s} n,$$

где норма рассматривается в любом из следующих пространств:

1) $\mathrm{L}(l_s^{n^2}, L^r(\mu\otimes\mu))$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_s(l_{s'}^n, l_s^n), \Pi_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_s(l_{s'}^n, l_s^n), \mathrm{N}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_s(l_{s'}^n, l_s^n), \mathrm{I}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
5) $\mathrm{L}(l_s^n\widetilde{\otimes}_s l_s^n, L^r(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^r(\mu))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже мера μ предполагается конечной. Зафиксируем r и s такие, что $1 < r < s < 2$. Пусть j — изометрическое вложение из l_s^n в $L^1(\mu)$ такое, что j действует из l_s^n в $L^r(\mu) \subset L^1(\mu)$, причем "изометрически с точностью до постоянного множителя", т. е. если α_r — тожественное вложение $L^r(\mu) \hookrightarrow L^1(\mu)$ и j_r —- индуцированный отображением j оператор из l_s^n в $L^r(\mu)$, так что $j = \alpha_r j_r$, то для всех $x \in l_s^n$ имеем

$$\|x\|_s = d_{sr}\|j_r x\|_{L^r} = \|jx\|_{L^1}$$

с некоторой положительной постоянной d_{sr} (см. лемму 1.4). Рассмотрим тензорные произведения

$$\begin{aligned} j_r\otimes j_r &: l_s^n\widetilde{\otimes}_s l_s^n \to L^r(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^r(\mu), \\ \alpha_r\otimes\alpha_r &: L^r(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^r(\mu) \to L^1(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^1(\mu). \end{aligned}$$

Так как $L^p(\mu)\widetilde{\otimes}_p L^p(\mu) = L^p(\mu\otimes\mu)$ для конечных $p \geqslant 1$, последний оператор есть тождественное вложение $L^r(\mu\otimes\mu) \to L^1(\mu\otimes\mu)$. Поскольку $\|j\otimes j\| \geqslant c_s \log^{1/s} n$ (см. доказательство леммы 4.2), имеем

$$c_s \log^{1/s} n \leqslant \|j_r\otimes j_r\|\|\alpha_r\otimes\alpha_r\|.$$

Следовательно,

$$\|j_r\otimes j_r\| \geqslant D_{s,r} \log^{1/s} n.$$

с некоторой постоянной $D_{s,r} > 0$. □

При использовании схемы приведенного доказательства в доказательстве аналога леммы 4.5 для $s = 2$ возникают трудности, так как в этом случае требуются довольно тонкие оценки. Поэтому рассмотрим случай $1 < r < s = 2$ независимо аналогичным способом, как при доказательстве леммы 4.1.

Лемма 4.6. *Для любого $r \in (1, 2)$ существует последовательность операторов $A_n \in \mathrm{L}(l_2^n, L^r(\mu))$ такая, что $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ для каждого n и $\|A_n \otimes A_n\| \geqslant C(r)$, при $n \to \infty$ с некоторой постоянной $C(r) > 1$, где норма рассматривается в любом из следующих пространств*:

1) $\mathrm{L}(l_2^{n^2}, L^r(\mu \otimes \mu)$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_2(l_2^n, l_2^n), \Pi_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_2(l_2^n, l_2^n), \mathrm{N}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_2(l_2^n, l_2^n), \mathrm{I}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)))$,
5) $\mathrm{L}(l_2^n \widetilde{\otimes}_2 l_2^n, L^r(\mu) \widetilde{\otimes}_r L^r(\mu))$.

Доказательство. Пусть $I : l_2^n \to l_2^n$ — тождественное отображение и $j : l_2^n \to L^r(\mu)$ — некоторое изометрическое вложение. Рассмотрим $j \otimes j : l_2^n \otimes l_2^n \to L^r(\mu) \otimes L^r(\mu)$. Так же, как и выше, в качестве образа $(j \otimes j)(I)$ получаем оператор

$$jj^* : L^{r'}(\mu) \xrightarrow{j^*} l_2^n \xrightarrow{j} L^r(\mu).$$

Имеем

$$\nu_r(jj^*) = \pi_r(jj^*) = \pi_r(j^*) \geqslant \pi_r(j) = \pi_r(I) = a_{nr}^{-1}.$$

Последнее равенство есть утверждение леммы 1.3. Здесь

$$a_{nr} = \left[\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+r}{2}\right)} \right]^{1/r}.$$

Можно показать, что

$$a_{nr} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2r}} \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)^{1/r}.$$

Таким образом,

$$\nu_r((j \otimes j)(I)) \geqslant \pi_2(I) \left(\frac{\pi^{1/2r}}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)^{-1/r} + o(1) \right)$$

при $n \to +\infty$, что при больших n дает неравенство

$$\nu_r((j \otimes j)(I)) > C\pi_2(I), \quad C > 1,$$

т. е. $\|j\otimes j\| > C > 1$, в то время как $\|j\|\,\|j\| = 1$. $\square$

Лемма 4.7. *Существует последовательность операторов* $A_n \in \mathrm{L}(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ *такая, что* $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ *для каждого* n *и* $\|A_n\otimes A_n\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1)$ *при* $n \to \infty$, *где норма рассматривается в пространстве*

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), L^1(\mu\otimes\mu))$$

или, что то же самое, в пространстве $\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), L^1(\mu)\widetilde{\otimes}_1 L^1(\mu))$.

Доказательство. Пусть $j : l_2^n \to L^1(\mu)$ — изометрическое вложение. Рассмотрим оператор

$$jj^*\otimes jj^* = (j\otimes j)\circ(j^*\otimes j^*) :$$
$$L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu) \xrightarrow{J^*\otimes j^*} j_2^n\otimes l_2^n \xrightarrow{j\otimes j} L^1(\mu)\otimes L^1(\mu).$$

Если $U \in L^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$, то значение этого оператора на элементе (или операторе) U вычисляется согласно следующей диаграмме:

$$L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} l_2^n \xrightarrow{j} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} l_2^n \xrightarrow{j} L^1(\mu),$$

т. е. (см. начало доказательства леммы 4.3)

$$V := (jj^*\otimes jj^*)(U) = (j\otimes j)(j^*Uj) = jj^*Ujj^*.$$

Используя свойства абсолютно суммирующих операторов на пространствах типа L^∞, конечномерность рассматриваемых отображений и теорему двойственности Шварца, получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}\nu_1(V) = \pi_1(V) = \pi_1(j^*Ujj^*) = \nu_1((j^*Ujj^*)^*) \geqslant \pi_1(j^*U^*j)\\ \geqslant \pi_1(j(j^*Uj)) = \pi_1(j^*Uj) \geqslant \pi_2(j^*Uj)\end{aligned}$$

(последнее неравенство вытекает из общего соотношения $\pi_2 \leqslant \pi_1$.) Дальнейшие рассуждения аналогичны второй части доказательства леммы 4.3.

Пусть $\varepsilon > 0$, $U \in L^\infty\otimes L^\infty$, $\|U\| = 1$,

$$\mathrm{trace} Ujj^* (= \mathrm{trace} j^*Uj) <\geqslant (1-\varepsilon)\nu_1(jj^*).$$

Имеем

$$(1-\varepsilon)\nu_1(jj^*) \leqslant |\mathrm{trace} j^*Uj| \leqslant \pi_2(j^*Uj)\pi_2(\mathrm{id}_{l_2^n}) = \pi_2(j^*Uj)\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\nu_1(V) &\geqslant \pi_2(j^*Uj) \geqslant (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_1(jj^*) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\pi_1(jj^*)\\ &= (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\pi_1(j^*) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_1(j^*) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\nu_1(j)\\ &= (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\pi_1(j) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}\pi_1(\mathrm{id}_{l_2^n}) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}a_{n1}^{-1}\\ &= (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}(\sqrt{\pi/2}+o(1)))\\ &= (1-\varepsilon)(\sqrt{\pi/2}+o(1)).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu_1\Big((jj^*\otimes jj^*)(U)\Big) = \nu_1(V) \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1).$$

Так как $\|U\| = 1$ и $\varepsilon > 0$ произвольно, заключаем

$$\|jj^*\otimes jj^*\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1) > 1. \qquad \square$$

Лемма 4.8. *Для любого $r \in (1,2)$ существует последовательность операторов $A_n \in \mathrm{L}(L^\infty(\mu), L^r(\mu))$ такая, что $\dim A_n = n$, $\|A_n\| = 1$ для каждого n и $\|A_n\otimes A_n\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1)$ при $n \to \infty$, где норма рассматривается в пространстве*

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), L^r(\mu\otimes\mu))$$

или, что то же самое, в пространстве

$$\mathrm{L}(L^\infty(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}}L^\infty(\mu), L^r(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^r(\mu)).$$

Доказательство. Пусть $1 < r < 2$. Пусть $j_1 : l_2^n \to L^1(\mu)$ и $j_r : l_2^n \to L^r(\mu)$ — произвольные изометрические вложения. Рассмотрим оператор

$$j_r j_1^*\otimes j_r j_1^* : \mathrm{L}^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu) \to L^r(\mu\otimes L^r(\mu)),$$

который при $U \in \mathrm{L}^\infty(\mu)\otimes L^\infty(\mu)$ принимает значение

$$V := (j_r j_1^*\otimes j_r j_1^*)(U) = j_r j_1^* U j_1 j_r^* :$$

$$L^{r'} \xrightarrow{j_r^*} l_2^m \xrightarrow{j_1} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j_1^*} l_2^n \xrightarrow{j_r} L^r(\mu).$$

В силу изометричности j_1 и j_r и теоремы двойственности Шварца имеем

$$\begin{aligned}\nu_r(V) = \pi_r(j_1^* U j_1 j_r^*) \geqslant \pi_r(j_r j_1^* U^* j_1) = \pi_r(j_1^* U^* j_1)\\ \geqslant \pi_2(j_1^* U^* j_1) = \pi_2(j_1^* U j_1).\end{aligned}$$

Оператор $j_1^* U j_1$ действует следующим образом:

$$l_2^n \xrightarrow{j_1} L^1(\mu) \xrightarrow{U} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j_1^*} l_2^n.$$

Мы находимся в точности такой же ситуации, как при доказательстве леммы 4.3. Выбирая при $\varepsilon > 0$ соответствующий оператор U (см. доказательство леммы 4.3), получаем

$$\pi_2(j_1^* U j_1) \geqslant (1-\varepsilon)(\sqrt{\pi/2} + o(1)).$$

Поэтому

$$\nu_r(V) \geqslant (1-\varepsilon)(\sqrt{\pi/2} + o(1)).$$

Следовательно,

$$\|j_r j_1^* \otimes j_1 j_r^*\| \geqslant \sqrt{\pi/2} + o(1). \qquad \square$$

Следующие две леммы доказываются применением лемм 4.6 и 4.5 соответственно. Следует перейти к сопряженному тензорному отображению: к $j^* \otimes j^* = (j \otimes j)^*$ в лемме 4.6 и к $j_r^* \otimes j_r^* = (j_r \otimes j_r)^*$ в лемме 4.5. Мы приведем только доказательство леммы 4.9, оставляя аналогичные рассуждения для леммы 4.10 читателю.

Лемма 4.9. *Для любого $p \in (2, +\infty)$ существует последовательность операторов $B_n \in \mathrm{L}(L^p(\mu), l_2^n)$ такая, что $\dim B_n = n$, $\|B_n\| = 1$ для каждого n и $\|B_n \otimes B_n\| \geqslant C(p)$ при $n \to \infty$ с некоторой постоянной $C(p) > 1$, где норма рассматривается в любом из следующих пространств*:

1) $\mathrm{L}(L^p(\mu \otimes \mu), l_2^{n^2},)$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_p(L^{p'}(\mu), L^p(\mu)), \Pi_2(l_2^n, l_2^n),)$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_p(L^{p'}(\mu), L^p(\mu)), \mathrm{N}_2(l_2^n, l_2^n),)$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_p(L^{p'}(\mu), L^p(\mu)), \mathrm{I}_2(l_2^n, l_2^n),)$,
5) $\mathrm{L}(L^p(\mu) \widetilde{\otimes}_p L^p(\mu), l_2^n \widetilde{\otimes}_2 l_2^n,)$.

Доказательство. Пусть $2 < p < \infty$ и $r := p'$, так что $1 < r < 2$. Мы можем использовать рассуждения из доказательства леммы 4.6. В обозначениях этого доказательства оператор $j \otimes j$ имеет сопряженный оператор $j^* \otimes j^*$, действующий из $L^p(\mu) \widetilde{\otimes}_p L^p(\mu)$ в $l_2^n \widetilde{\otimes}_2 l_2^n$, причем

$$\|j^* \otimes j^*\| \geqslant C(r) > 1. \qquad \square$$

Лемма 4.10. *Для любых $p, q \in (2, +\infty), p < q$, существуют постоянная $D_{p,q} > 0$ и последовательность операторов $B_n : L^q(\mu) \to l_p^n$ такие, что $\dim B_n$, $\|B_n\| = 1$ для каждого n, но*

$$\|B_n \otimes B_n\| \geqslant D_{p,q} \log^{1/p'} n,$$

где норма рассматривается в любом из следующих пространств:

1) $\mathrm{L}(L^q(\mu\otimes\mu), l_p^{n^2})$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_q(L^{q'}(\mu), L^q(\mu)), \Pi_p(l_{p'}^n, l_p^n))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_q(L^{q'}(\mu), L^q(\mu)), \mathrm{N}_p(l_{p'}^n, l_p^n))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_q(L^{q'}(\mu), L^q(\mu)), \mathrm{I}_p(l_{p'}^n, l_p^n))$,
5) $\mathrm{L}(L^q(\mu)\widetilde{\otimes}_q L^q(\mu), l_p^n \widetilde{\otimes}_p l_p^n,)$.

Лемма 4.11. *Если $1 < s < 2 < r < +\infty$, то существуют постоянная $\mathrm{C}'_r > 1$ и последовательность операторов $B_n : L^r(\mu) \to L^s(\mu)$ такие, что $\dim B_n$, $\|B_n\| = 1$ для каждого n, но*

$$\|B_n \otimes B_n\| \geqslant C_r,$$

где норма рассматривается в любом из следующих пространств:

1) $\mathrm{L}(L^r(\mu\otimes\mu), L^s(\mu\otimes\mu))$,
2) $\mathrm{L}(\Pi_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)), \Pi_s(L^{s'}(\mu), L^s(\mu)))$,
3) $\mathrm{L}(\mathrm{N}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)), \mathrm{N}_s(L^{s'}(\mu), L^s(\mu)))$,
4) $\mathrm{L}(\mathrm{I}_r(L^{r'}(\mu), L^r(\mu)), \mathrm{I}_s(L^{s'}(\mu), L^s(\mu)))$,
5) $\mathrm{L}(L^r(\mu)\widetilde{\otimes}_r L^r(\mu), L^s(\mu)\widetilde{\otimes}_s L^s(\mu),)$.

Доказательство. Обозначим через j_r и j_s некоторые изометрические вложения пространства l_2^n в $L^{r'}(\mu)$ и в $L^s(\mu)$ соответственно и рассмотрим тензорный оператор $j_s j_r^* \otimes j_s j_r^*$, который действует из $L^r(\mu)\otimes_r L^r(\mu)$ в $L^s(\mu)\otimes_s L^s(\mu)$, следующим образом: для $U \in L^r(\mu)\otimes_r L^r(\mu)$

$$V := (j_s j_r^* \otimes j_s j_r^*)(U) :$$

$$L^{s'}(\mu) \xrightarrow{j_s^*} l_2^n \xrightarrow{j_r} L^{r'}(\mu) \xrightarrow{U} L^r(\mu) \xrightarrow{j_r^*} l_2^m \xrightarrow{j_s} L^s(\mu).$$

Так как $s < 2$, по теореме двойственности имеем

$$\begin{aligned}\nu_s(V) = \pi_s(j_r^* U j_r j_s^*) &\geqslant \pi_s(j_s j_r^* U^* j_r) = \pi_s(j_r^* U^* j_r)\\ &\geqslant \pi_2(j_r^* U^* j_r) = \pi_2(j_r^* U j_r).\end{aligned}$$

Теперь мы находимся в ситуации доказательства леммы 4.9 (см. также замечание перед формулировкой этой леммы). Поэтому

$$\|j_s j_r^* \otimes j_s j_r^*\| \geqslant C'_r > 1$$

для некоторой постоянной $C'_r > 1$, зависящей только от r. $\square$

Литература

1. **Adler R. J.** An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes. IMS Lecture Notes – Monograph Ser., Hayward, California. 1990. Vol. 12.

2. **Никитин Я. Ю.** Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. М., Наука, 1995.

3. **Diestel J., Uhl J.J.** Vector Measures. Providence: Am. Math. Soc., 1977.

4. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М., Наука, 1977.

5. **Данфорд Н., Шварц Дж. Е.** Линейные операторы (общая теория). М., 1962.

6. **Saphar P.** Les normes tensorielles g_k et d_k // Séminaire L. Schwartz. École Polytechnique, Centre de Mathématieques, 1969–1970.

7. **Saphar P.** Applications p-sommantes et p-décomposantes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér A. 1970. Vol. 270. P. 1093–1096.

8. **Saphar P.** Analyse mathématique: applications p-sommantes et p-décomposantes // Séminaire L. Schwartz. École Polytechnique, Centre de Mathématieques. 1969–1970.

9. **Grothendieck A.** Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires // Mem. Am. Math. Soc. 1955. Vol. 16. P. 1-196.

10. **Пич А.** Операторные идеалы. М., Мир, 1982.

11. **Рейнов О. И.** Операторы типа RN в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. С. 528–531.

12. **Persson A.** On some properties of p-nuclear and p-integral operators // Studia Math. 1969. Vol. 33. P. 213–232.

13. **Schwartz L.** Le théorème de dualité pour les applications radonifiantes // Séminaire L. Schwartz. École Polytechnique, Centre de Mathématieques. 1969–1970.

14. **Cohen J. S.** Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates // Math. Ann. 1973. Vol. 201. P. 177–200.

15. **Pełczyński A.** A characterization of Hilbert–Schmidt operators // Studia Math. 1969. Vol. 28. P. 355–360.

16. **Lindenstrauss J., Pełczyński A.** Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications // Studia Math. 1968. Vol. 29. P. 275–326.

17. **Pisier G.** Factrization of linear operators and geometry of Banach spaces. Conf. Board in the Math. Siences. Reg. Conf. Ser. in Math. N 60 Amer. Math. Soc., Providence. 1986, 164 p.

18. **Carl B., Stephani I.** Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge Tracts in Mathematics 98, Cambridge University Press. 1990

19. **Szarek S. J.** On the best constants in the Khinchin inequality // Studia Math. 1976. Vol. 58. P. 197–208.

20. **Kwapień S.** Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 583–595.

21. **Schwartz L.** Mouvement brownien // Séminaire L. Schwartz. École Polytechnique, Centre de Mathématieques. 1969–1970.

22. **Holub J. R.** Tensor product mappings. II // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 42. P. 437–441.

23. **König H.** Eigemvalue distribution of compact operators. Operator theory: advances and applications. Basel-Boston-Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1986.

24. **Pietsch A.** Eigenvalues of absolutely r-summing operators // Aspects of Mathematics and its Applications. Elsevier Science Publishers B.V. 1986. P. 607–617.

25. **Johnson W. B., König H., Maurey B., Retherford J. R.** Eigenvalues of p-summing and l_p-type operators in Banach spaces // J. Funct. Anal. 1979. Vol. 32. P. 353–380.

26. **König H.** On the tensor stability of s-number ideals // Math. Ann. 1984. Vol. 269. P. 77–93.

Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru