УДК 519.72

С. М. Машарский

АВТОРЕВЕРСНЫЕ СПЕКТРЫ ХААРА–КРЕСТЕНСОНА[1]

Введение

В статье рассматриваются два ортогональных базиса, порождающих дискретные преобразования Хаара–Крестенсона H_f и H_g. Первое преобразование H_f связано с прореживанием по частоте. Оно хорошо известно [1]. Второе преобразование H_g связано с прореживанием по времени. Оно впервые было описано в работе [2].

Частным случаем преобразований Хаара–Крестенсона являются преобразования Хаара. В работах [3–5] изучались свойства спектров дискретных сигналов в хааровских базисах. Данная статья является обобщением работы [4] и логичным продолжением работы [6]. Прокомментируем ее содержание по параграфам.

В §1 приведены необходимые сведения об интересующих нас базисах. В §2 записаны разложения сдвигов единичного импульса. В §3 введено понятие логарифмически автореверсного спектра. Установлена связь между сигналами x и y, у которых $H_f(x) = H_g(y) =: H$, при условии, что спектр H является логарифмически автореверсным. Вычислена размерность множества логарифмически автореверсных спектров.

§1. Предварительные сведения

Линейное пространство $\mathbb{C}_N$ комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, будем называть *пространством сигналов*. В $\mathbb{C}_N$ обычным образом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Обозначим через $\delta_N(j)$ единичный N-периодический импульс, равный 1 при $j = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сигналов $\{\delta_N(j-k)\}, k = 0, 1, \dots N-1$, образует естественный ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$.

Пусть $N = n^s$, где n, $s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $s \geq 2$. Постоянно будут использоваться следующие обозначения: $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть вещественного числа α; $\langle k\rangle_N = k - \lfloor k/N \rfloor N$ — остаток от деления целого числа k на N. Для целого числа $a \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ запись $a = (a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_0)_n$ означает

$$a = a_{s-1} n^{s-1} + a_{s-2} n^{s-2} + \dots + a_0, \quad a_k \in 0 : n-1,\ k \in 0 : s-1.$$

В пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ рассмотрим систему сигналов

$$c(j); \quad f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \quad p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s. \tag{1.1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00747).

Здесь $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$, $N_\nu = N/n^\nu$, $c(j) \equiv 1/N$,

$$f_\nu(\sigma;\, j) = \frac{1}{n^\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu - 1} \delta_N(j-q), \tag{1.2}$$

$\omega_n = \exp\{2\pi i/n\}$ — первообразный корень степени n из единицы.

Известно [1, 2], что система сигналов (1.1) образует ортогональный базис пространства $\mathbb{C}_N$. Он называется *базисом Хаара–Крестенсона, связанным с прореживанием по частоте.* Нетрудно проверить, что $\|f_\nu(\sigma;\, \cdot - p\Delta_{\nu+1})\|^2 = n^{-\nu}$ при всех $p \in 0 : N_\nu - 1$, $\sigma \in 1 : n-1$, $\nu \in 1 : s$.

Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = \alpha c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Коэффициенты этого разложения суть коэффициенты Фурье:

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad x_\nu(\sigma, p) = n^\nu \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{f_\nu}(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Совокупность этих коэффициентов

$$H_f(x) = \big\{\alpha;\ x_\nu(\sigma, p),\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s\big\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала x, *связанный с прореживанием по частоте.* Преобразование $x \to H_f(x)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте.*

Наряду с базисом (1.1) рассмотрим систему сигналов

$$c(j); \quad g_\nu(\sigma;\, j - p), \quad p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s. \tag{1.4}$$

Здесь

$$g_\nu(\sigma;\, j) = \frac{1}{n^\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu). \tag{1.5}$$

Известно [2], что система сигналов (1.4) также образует ортогональный базис пространства $\mathbb{C}_N$. Он называется *базисом Хаара–Крестенсона, связанным с прореживанием по времени.* Нетрудно убедиться, что $\|g_\nu(\sigma;\, \cdot - p)\|^2 = n^{-\nu}$ при всех $p \in 0 : N_\nu - 1$, $\sigma \in 1 : n-1$, $\nu \in 1 : s$.

Любой сигнал $y \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$y(j) = \beta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\sigma, p)\, g_\nu(\sigma;\, j - p), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Коэффициенты этого разложения суть коэффициенты Фурье:

$$\beta = \sum_{j=0}^{N-1} y(j), \qquad y_\nu(\sigma, p) = n^\nu \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, j-p).$$

Совокупность этих коэффициентов

$$H_g(y) = \bigl\{\beta;\ y_\nu(\sigma,p),\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s\bigr\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала y, *связанный с прореживанием по времени.* Преобразование $y \to H_g(y)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени.*

Для базисных сигналов Хаара–Крестенсона можно получить более компактные выражения, чем (1.2) и (1.5).

Лемма 1.1. *При $\sigma \in 1 : n-1$ справедлива формула*

$$f_\nu(\sigma;\, j) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor\bigr), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Правая часть (1.7) равна $n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma\tau}$ при $j \in \tau\Delta_\nu : (\tau+1)\Delta_\nu - 1$, $\tau \in 0 : n-1$, и равна 0 при $j \in \Delta_{\nu+1} : N-1$ (учесть, что $N = \Delta_{\nu+1} N_\nu$). Те же значения при указанных j принимает согласно (1.2) и $f_\nu(\sigma;\, j)$. Таким образом, при $j \in 0 : N-1$ равенство (1.7) верно. Остается проверить N-периодичность правой части (1.7). Она следует из того, что при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{j+kN}{\Delta_\nu} = \frac{j}{\Delta_\nu} + nkN_\nu, \qquad \frac{j+kN}{\Delta_{\nu+1}} = \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} + kN_\nu.$$

Лемма доказана.

Следствие. *При $p \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p\bigr). \tag{1.8}$$

Формулы (1.7) и (1.8) несколько упрощаются при $j \in 0 : N-1$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$, то $\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor = j_{s-1} n^{s-\nu} + \cdots + n\, j_\nu + j_{\nu-1}$, так что

$$\omega_n^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = \omega_n^{j_{\nu-1}}. \tag{1.9}$$

Лемма 1.2. *При $\sigma \in 1 : n-1$ справедлива формула*

$$g_\nu(\sigma;\, j) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma \lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Сигнал $g_\nu(\sigma;\, j)$ в силу (1.5) является $N_{\nu-1}$-периодическим. Тем же свойством обладает и сигнал, стоящий в правой части (1.10). Значит, равенство (1.10) достаточно проверить на основном периоде $0 : N_{\nu-1} - 1$.

Пусть $j = \tau N_\nu$ при некотором $\tau \in 0 : n-1$. Тогда правая часть (1.10) принимает значение $n^{-\nu}\,\omega_n^{\sigma\tau}$. Это же значение согласно (1.5) принимает и $g_\nu(\sigma;\, j)$. При остальных $j \in 0 : N_{\nu-1}-1$ равенство (1.10) превращается в $0=0$. Лемма доказана.

Следствие. *При $p \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$g_\nu(\sigma;\, j-p) = n^{-\nu}\,\omega_n^{\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\omega_n^{\sigma\lfloor (j-p)/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j-p) = \omega_n^{\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j-p). \tag{1.12}$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят $N_{\nu-1}$-периодические по j сигналы, то достаточно проверить его на периоде $p : p+N_{\nu-1}-1$. При $j = p+\tau N_\nu$, $\tau \in 0 : n-1$, равенство (1.12) верно. Но оно также верно и при остальных j из указанного периода, поскольку в этом случае обе части (1.12) равны нулю. Таким образом, равенство (1.12) при $p \in 0 : N_\nu - 1$ и $j \in \mathbb{Z}$ установлено.

Теперь (1.11) следует из (1.10) и (1.12).

Отметим, что формулы (1.10) и (1.11) принимают более простой вид при $j \in 0 : N-1$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \dots, j_0)_n$, то $\lfloor j/N_\nu\rfloor = j_{s-1}n^{\nu-1} + \dots + j_{s-\nu+1}\,n + j_{s-\nu}$, так что

$$\omega_n^{\lfloor j/N_\nu\rfloor} = \omega_n^{j_{s-\nu}}. \tag{1.13}$$

§2. Спектры сдвигов единичного импульса

Зафиксируем число $q \in 0 : N-1$, $q = (q_{s-1}, \dots, q_0)_n$.

Теорема 2.1. *Сигнал $\delta_N(\cdot - q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте:*

$$\delta_N(j-q) = c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu(\sigma;\, j - p_\nu^0(q)\Delta_{\nu+1}),$$

где $c(j) \equiv 1/N$, $p_\nu^0(q) = \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor$.

Доказательство. Представим сигнал $x = \delta_N(\cdot - q)$ в соответствии с (1.3):

$$\delta_N(j-q) = \alpha c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Тогда $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \delta_N(j-q) = 1$,

$$x_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j-q)\,\overline{f_\nu}(\sigma;\, j-p\Delta_{\nu+1}) = n^\nu\,\overline{f_\nu}(\sigma;\, q - p\Delta_{\nu+1}).$$

Учитывая (1.8) и (1.9), получаем

$$x_\nu(\sigma,p)=\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\delta_{N_\nu}\big(\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor-p\big)=\begin{cases}\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}, & \text{если } p=\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor,\\ \quad 0 & \text{при остальных } p\in 0:N_\nu-1.\end{cases}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Сигнал $\delta_N(\cdot-q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени:*

$$\delta_N(j-q)=c(j)+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}}g_\nu(\sigma;\,j-p_\nu^1(q)),$$

где $p_\nu^1(q)=\langle q\rangle_{N_\nu}$.

Доказательство. Представим сигнал $y=\delta_N(\cdot-q)$ в соответствии с (1.6):

$$\delta_N(j-q)=\beta c(j)+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1}y_\nu(\sigma,p)\,g_\nu(\sigma;\,j-p).$$

Тогда $\beta=\sum\limits_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q)=1$,

$$y_\nu(\sigma,p)=n^\nu\sum_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q)\,\overline{g_\nu}(\sigma;\,j-p)=n^\nu\,\overline{g_\nu}(\sigma;\,q-p).$$

Учитывая (1.11) и (1.13), получаем

$$y_\nu(\sigma,p)=\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}}\delta_{N_\nu}(q-p)=\begin{cases}\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}}, & \text{если } p=\langle q\rangle_{N_\nu},\\ \quad 0 & \text{при остальных } p\in 0:N_\nu-1.\end{cases}$$

Теорема доказана.

§3. Логарифмически автореверсные спектры

В этом параграфе будет установлена связь между базисами Хаара–Крестенсона (1.1) и (1.4).

Нам потребуется перестановка *reverse*. Пусть $j\in 0:n^\nu-1$, $j=(j_{\nu-1},j_{\nu-2},\ldots,j_0)_n$. Тогда по определению

$$\mathrm{rev}_\nu(j)=(j_0,j_1,\ldots,j_{\nu-1})_n.$$

К этому определению добавим формальное равенство $\mathrm{rev}_0(0)=0$.

Теорема 3.1. *Пусть $\sigma\in 1:n-1$, $p\in 0:N_\nu-1$. Справедливо тождество*

$$f_\nu\big(\sigma;\,\mathrm{rev}_s(j)-p\Delta_{\nu+1}\big)=g_\nu\big(\sigma;\,j-\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big),\quad j\in 0:N-1. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j = (j_{s-1}, \dots, j_0)_n$, $p = (p_{s-\nu-1}, \dots, p_0)_n$. Согласно (1.11) $g_\nu(\sigma;\, j-p)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\langle j \rangle_{N_\nu} = p$, т. е. когда $j_k = p_k$, $k \in 0 : s-\nu-1$. При таких j в силу (1.13) имеем $g_\nu(\sigma;\, j-p) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma j_{s-\nu}}$.

Пусть $l = (l_{s-1}, \dots, l_0)_n$, $q = (q_{s-\nu-1}, \dots, q_0)_n$. Согласно (1.8) $f_\nu(\sigma;\, l - q\Delta_{\nu+1})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\lfloor l/\Delta_{\nu+1} \rfloor = q$, т. е. когда $l_\mu = q_{\mu-\nu}$, $\mu \in \nu : s-1$. При таких l в силу (1.9) имеем $f_\nu(\sigma;\, l - q\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma l_{\nu-1}}$.

Возьмем $l = \mathrm{rev}_s(j)$, $q = \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)$. Тогда

$$l_\mu = j_{s-1-\mu}, \quad \mu \in 0 : s-1;$$

$$q_\mu = p_{s-\nu-1-\mu}, \quad \mu \in 0 : s-\nu-1.$$

В частности, $l_{\nu-1} = j_{s-\nu}$. Получаем, что $f_\nu(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $j_{s-1-\mu} = p_{s-1-\mu}$, $\mu \in \nu : s-1$, или, что то же самое, когда $j_k = p_k$, $k \in 0 : s-\nu-1$. При этом $f_\nu(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\, \omega_n^{\sigma j_{s-\nu}}$.

Итак, мы показали, что

$$f_\nu(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1}) = g_\nu(\sigma;\, j-p).$$

Равенство (3.1) получается отсюда заменой p на $\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)$. Теорема доказана.

Определение. Спектр

$$H = \big\{\eta;\ h_\nu(\sigma, p),\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s\big\}$$

назовем *логарифмически автореверсным*, если

$$h_\nu(\sigma, p) = h_\nu\big(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big), \tag{3.2}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s-1.$$

При $s = 1$ и $s = 2$ любой спектр по определению является логарифмически автореверсным. При $\nu = s-1$ равенство (3.2) выполняется автоматически.

Теорема 3.2. *Пусть сигналы x и y из $\mathbb{C}_N$ таковы, что $H_f(x) = H_g(y) =: H$, и пусть при этом спектр H является логарифмически автореверсным. Тогда необходимо*

$$y(j) = x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j \in 0 : N-1. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для сигнала y имеем

$$y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} h_\nu(\sigma, q)\, g_\nu(\sigma;\, j-q).$$

Сделаем замену $p = \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)$ и воспользуемся (3.2) и (3.1):

$$y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} h_\nu\big(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big)\, g_\nu\big(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) =$$

$$= \eta c\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma,p)\, f_\nu\bigl(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\bigr) = x\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr).$$

Теорема доказана.

Эта теорема в определенном смысле обратима.

Теорема 3.3. *Пусть x, y — сигналы, удовлетворяющие условию* (3.3), *и пусть $H_f(x) = H_g(y) =: H$. Тогда спектр H является логарифмически автореверсным.*

Доказательство. Согласно (3.1)

$$x\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = \eta c\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma,p)\, f_\nu\bigl(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\bigr) =$$

$$= \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma,p)\, g_\nu\bigl(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\bigr) =$$

$$= \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu\bigl(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\bigr)\, g_\nu(\sigma;\, j - p).$$

Но по условию теоремы

$$x\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma,p)\, g_\nu(\sigma;\, j - p).$$

В силу единственности разложения по ортогональному базису (1.4) приходим к (3.2). Теорема доказана.

Рассмотрим в качестве примера кусочно-линейный сигнал $\widehat{y}$, задаваемый на основном периоде равенством

$$\widehat{y}(j) = j, \quad j \in 0 : N-1.$$

Вычислим спектр Хаара–Крестенсона сигнала $\widehat{y}$, связанный с прореживанием по времени. Пусть $H_g(\widehat{y}) = \{\widehat{\beta};\, \widehat{y}_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда

$$\widehat{\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j) = \frac{N(N-1)}{2};$$

$$\widehat{y}_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, j-p) = \sum_{j=0}^{N-1} j\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p).$$

Мы воспользовались формулой (1.11).

Представим j в виде $j = qN_{\nu-1} + \tau N_\nu + l$, где $q \in 0 : \Delta_\nu - 1$, $\tau \in 0 : n-1$, $l \in 0 : N_\nu - 1$. Получим

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{N_\nu - 1} (qN_{\nu-1} + \tau N_\nu + l)\, \omega_n^{-\sigma\tau}\, \delta_{N_\nu}(l - p) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{n-1} (\tau N_\nu + qN_{\nu-1} + p)\, \omega_n^{-\sigma\tau}.$$

Так как $\sigma \in 1 : n-1$, то $\sum\limits_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} = 0$. С учетом этого факта приходим к выражению

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \tau N_\nu\, \omega_n^{-\sigma\tau} = \Delta_s \sum_{\tau=0}^{n-1} \tau \omega_n^{-\sigma\tau}.$$

Введем обозначение $z(\sigma) = \sum\limits_{\tau=0}^{n-1} \tau \omega_n^{-\sigma\tau}$, $\sigma \in 1 : n-1$. Имеем

$$z(\sigma) = \sum_{\tau=1}^{n-1} \tau \omega_n^{-\sigma\tau} = \sum_{\tau=0}^{n-1} (\tau + 1)\, \omega_n^{-\sigma(\tau+1)} - n =$$

$$= \omega_n^{-\sigma} \Big\{ \sum_{\tau=0}^{n-1} \tau \omega_n^{-\sigma\tau} + \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \Big\} - n = \omega_n^{-\sigma} z(\sigma) - n,$$

откуда

$$z(\sigma) = \frac{n}{\omega_n^{-\sigma} - 1} = \frac{n}{2} \big(i \operatorname{ctg} \frac{\pi\sigma}{n} - 1 \big).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = \Delta_s z(\sigma) = \frac{N}{2} \big(i \operatorname{ctg} \frac{\pi\sigma}{n} - 1 \big), \quad p \in 0 : N_\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 1 : s.$$

Отметим, что $\widehat{y}_\nu(\sigma, p)$ не зависит от p, поэтому спектр $H_g(\widehat{y})$ является по определению логарифмически автореверсным. Если мы обозначим через $\widehat{x}$ сигнал, имеющий такой же спектр в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте, то в силу теоремы 3.2 для $\widehat{x}$ будем иметь

$$\widehat{x}(j) = \operatorname{rev}_s(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Непосредственно этот результат было бы получить нелегко.

Обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное множество логарифмически автореверсных спектров и через $\dim \mathcal{L}_N$ — его размерность. Напомним, что $N = n^s$.

Теорема 3.4. *Справедливо равенство*

$$\dim \mathcal{L}_N = \frac{n}{2}\left[n^{s-1} + \Bigl(2 + \frac{n-1}{2}\bigl(1+(-1)^s\bigr)\Bigr)n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\right]. \tag{3.4}$$

Доказательство. При $s = 1$ и $s = 2$ теорема верна. Пусть $s \geq 3$ и $\nu \in 2 : s-1$. Обозначим через ζ_ν количество тех $p \in 0 : n^\nu - 1$, для которых $\mathrm{rev}_\nu(p) = p$. Очевидно, что $\zeta_{2k} = n^k$, $\zeta_{2k+1} = n^{k+1}$, т. е. $\zeta_\nu = n^{\lfloor(\nu+1)/2\rfloor}$.

Условия (3.2) с учетом замечания к определению логарифмически автореверсного спектра можно переписать так:

$$h_{s-\nu}\bigl(\sigma, p\bigr) - h_{s-\nu}\bigl(\sigma, \mathrm{rev}_\nu(p)\bigr) = 0,$$

$$p \in 0 : n^\nu - 1,\ \sigma \in 1 : n-1,\ \nu \in 2 : s-1.$$

Эти условия представляют собой линейную однородную систему, состоящую из $\frac{n-1}{2}\sum\limits_{\nu=2}^{s-1}(n^\nu - \zeta_\nu)$ уравнений с линейно независимыми строками коэффициентов. Поэтому

$$\dim \mathcal{L}_N = N - \frac{n-1}{2}\sum_{\nu=2}^{s-1}(n^\nu - \zeta_\nu) = n^s - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{\nu=1}^{s-2}\bigl(n^\nu - n^{\lfloor \nu/2 \rfloor}\bigr).$$

При $s = 2l+1$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} n^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = \sum_{k=0}^{l-1} n^{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor} + \sum_{k=1}^{l-1} n^{\lfloor \frac{2k}{2} \rfloor} = 2\sum_{k=0}^{l-1} n^k - 1 = 2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1.$$

В этом случае

$$\dim \mathcal{L}_N = n^s - \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n^{s-1}-1}{n-1} - 1 - \Bigl(2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1\Bigr)\right] =$$

$$= \frac{n^s}{2} + n^{l+1} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\bigl[n^{s-1} + 2n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\bigr],$$

что соответствует (3.4).

При $s = 2l+2$

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} n^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = 2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1 + n^l = \frac{(n+1)n^l - 2}{n-1} - 1.$$

Поскольку $l = \lfloor (s-1)/2 \rfloor$, то

$$\dim \mathcal{L}_N = \frac{n}{2}\bigl[n^{s-1} + (n+1)n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\bigr],$$

что также соответствует (3.4).

Теорема доказана.

В таблице приведены значения $\dim \mathcal{L}_N$ при некоторых n и s.

Т а б л и ц а

$n \backslash s$	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	7	13	23	43	79
3	3	9	21	57	147	417	1173
4	4	16	46	166	574	2206	8446
5	5	25	85	385	1685	8185	39685

Литература

1. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.
2. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Электронный архив препринтов С.-Петербургского мат. общества. Препринт № 1999-21. `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/1999/index.html#21`
3. *Malozemov V. N., Masharsky S. M.* Haar spectra of discrete signals. In: Tools for Math. Modelling. The Second International Conf. June 14–19, 1999. Abstracts. St. Petersburg, 1999. P. 86–87.
4. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.
5. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Хааровские спектры дискретных сверток // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 954–960.
6. *Машарский С. М.* Свертка и корреляция дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона // Электронный архив препринтов С.-Петербургского мат. общества. Препринт № 2000-09. `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2000/index.html#09`